

533.95 : 538.4

## ПЕРЕСТРОЙКА МАГНИТНОГО ПОЛЯ ПЛАЗМЕННЫМИ МЕХАНИЗМАМИ

С. И. Вайнштейн

### СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение . . . . .	613
2. Новое в «старой» теории . . . . .	614
а) Простые генераторы (614). б) Другие виды перестроек (619). в) Турбулентность: кинематическая постановка (621). г) Турбулентность: нелинейность (625). д) Общее обсуждение по МГД-перестройке (630). . . . .	632
3. Низкие частоты . . . . .	632
а) Общие замечания (632). б) Постановка задачи. Метод (632). в) Перестройка поля ионным звуком (633). г) Приложения (635). д) Слабоионизованная плазма (635). е) Давно известные механизмы (636). ж) Плазма твердого тела. Общие замечания (636). з) Тепловое динамо (636). и) Неустойчивость на фоне однородного поля (638)	639
4. Высокие частоты . . . . .	639
а) Геликоновые частоты (639). б) Лэнгмюровские колебания (640). в) Приложения (642)	643
5. Заключение . . . . .	643
Цитированная литература . . . . .	643

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Вопрос о перестройке магнитных полей важен для многих приложений. Так, после открытия магнитных полей на Солнце, звездах, в межзвездном газе возник вопрос о происхождении этих полей. Другой аспект этой проблемы — быстрое уничтожение поля, аннигиляция (солнечная вспышка, лобовая точка магнитосферы, хвост магнитосферы, z-пинч и т. п.). Как правило, здесь плазма является слабостолкновительной, так что диссипация мала. Магнитное поле «вморожено» в вещество, и аннигиляция происходит весьма медленно. Как же объяснить тогда наблюдаемую довольно быструю перестройку поля?

«Классическим» подходом в данной проблеме является подход динамотеории, в которой вся ответственность за перестройку перекладывается на гидродинамические движения. Последний обзор по этому вопросу появился в нашей стране в 1972 г. <sup>1</sup>; за рубежом опубликованы обзоры Стикса <sup>2</sup>, Губбинса <sup>3</sup>, Соварда и Робертса <sup>4</sup>, Рэдлера <sup>5</sup>. С тех пор в теории произошли большие и, главное, качественные изменения. За последние годы наметилась тенденция «возвращения с неба на землю». С одной стороны, появились работы с использованием простого поля скорости, доступного для лабораторного моделирования <sup>6-13</sup>, с другой, — работы, не ограничивающиеся приближением магнитной гидродинамики и использующие более широкий диапазон плазменных механизмов генерации и перестройки поля. В связи с этим диапазон приложений расширился до того, что стало возможным проверить теорию в лабораторном экспери-

менте и даже использовать в технике. Появились также работы по нелинейной МГД-турбулентности с использованием ансамблей Гиббса<sup>14-16</sup>. Все это весьма неудовлетворительно отражено в зарубежных обзорах. Кроме того, как правило, обзоры посвящены прикладным вопросам: солнечному циклу, земному динамо и т. п. В настоящей статье предпринята попытка изложить новые *физические идеи*. Приложения будут излагаться после самой физики: без приложений идеи теряют свой смысл. Результаты, вошедшие в обзор<sup>1</sup>, разумеется, не будут повторяться, за исключением тех случаев, когда это необходимо для связности текста и ясности изложения. При этом они будут излагаться весьма конспективно. Таким образом, тематика в данной статье окажется шире, чем в прикладных обзорах. С другой стороны, мы ограничимся только столкновительной плазмой, когда частота изменения поля ниже частоты столкновений (частота колебаний может быть и больше частоты столкновений). Методика и подход в обычной теории динамо — МГД-приближение (гл. 2) — уже хорошо изучена и отражена в обзорах. Поэтому мы будем излагать только результаты. Напротив, перестройка поля ионным звуком, термомангнитные эффекты в плазме твердого тела (гл. 3), генерация лэнгмюровскими колебаниями (гл. 4) основаны на подходе, разработанном только в последние годы. Именно поэтому метод и постановка задач второго типа будут изложены подробно, и несмотря на то что число обзореваемых работ в одной гл. 2 неизмеримо больше, чем в главах 3—4, последние занимают примерно половину статьи.

## 2. НОВОЕ В «СТАРОЙ» ТЕОРИИ

### а) Простые генераторы

Поиски простых моделей обязаны двум обстоятельствам. Во-первых, существует ряд запретов на симметричные модели (Каулинг<sup>17</sup>, Брагинский<sup>18</sup>, Зельдович<sup>19</sup>), т. е. осесимметричные и т. п. модели должны были быть отвергнуты. Поэтому сразу же возник вопрос, а какие же не очень сложные модели дадут генерацию? Во-вторых, простые модели обычно являются естественными и часто реализуемыми в природе. Так, динамо Герценберга<sup>20</sup> осуществляется двумя вращающимися парами (оси вращения которых непараллельны друг другу), погруженными в проводящую жидкость. Наиболее естественный подход к отказу от симметрии осуществлен Брагинским в работе<sup>18</sup>, где рассмотрены модели, слабо отклоняющиеся от симметрии. В последние годы эта теория продолжала эффективно развиваться (см., например, <sup>21-29</sup>), особенно успешно она используется для объяснения земного магнитного поля и его вариаций. Было отмечено, что движение, отклоняющееся от симметрии и дающее генерацию, обладает свойством спиральности, т. е. скорость  $\mathbf{v}$  коррелирует с  $\text{rot } \mathbf{v}$ . Ниже у нас будет возможность убедиться в том, что корреляция  $\mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v}$ , т. е. винтовые движения, играет вообще большую роль в теории генерации. Так, в работе Робертса<sup>10</sup> рассматривается поле скорости  $\mathbf{v} = \{\cos y - \cos z, \sin z, \sin y\}$ , которое, как легко проверить, является винтовым:  $\mathbf{v} \sim \text{rot } \mathbf{v}$ . Поэтому неудивительно, что Робертс получает генерацию. Точное стационарное решение для винта было получено Лортцем<sup>9</sup>. Пономаренко<sup>11</sup> получил нестационарное, т. е. экспоненциально растущее решение для винтовой модели, изображенной на рис. 1. Рассмотренные модели отнюдь не являются экзотическими в астрофизике. Фактически, только лишь само вращение небесного тела достаточно для объяснения корреляции  $\mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v} \neq 0$ . Идея такого объяснения восходит к работам Паркера<sup>30</sup>. Рассмотрим конвективную зону звезды; если принять во внимание гра-

диент плотности  $\nabla\rho$  (уменьшение плотности от глубины к поверхности), то ясно, что поднимающийся объем будет стремиться расширяться. Кориолисова сила создает вращательный момент для данной ячейки, и она поворачивается, так что  $v \operatorname{rot} v \sim \omega \nabla\rho$ ,  $\omega$  — угловая скорость. Легко сообразить, что при опускании соблюдается такое же соотношение  $v \operatorname{rot} v \sim \omega \nabla\rho$ , и таким образом создается преобладающий правый или левый винт (в зависимости от знака  $\omega \nabla\rho$ ). Высказанные соображения позволяют надеяться на то, что волны во вращающейся сжимаемой ограниченной среде (как небесное тело) обладают свойством спиральности, и, следовательно, интересны для динамо. И, действительно, волны Россби, возникающие именно во вращающемся теле, привлекаются для объяснения солнечного цикла и, вообще, генерации<sup>31–35</sup>. Естественно также появление исследований<sup>26, 36–41</sup> по конвективной неустойчивости вращающейся жидкости (вообще говоря, включая однородное наложенное магнитное поле). Авторы приходят к выводу, что вращающаяся жидкость при наличии поддерживаемого градиента температуры конвективно неустойчива именно к таким возмущениям, которые в свою очередь генерируют поле. Здесь уместно также упомянуть роль приливных движений, на которые обратил внимание Долгинов<sup>42, 43</sup>, как на возможный генератор поля в двойных звездах и планетах (приливное действие спутников или Солнца). Наконец, с приливным механизмом тесно связан прецессионный. Впрочем, авторы работы<sup>44</sup> высказали сомнение по поводу эффективности действия его в земном ядре. Есть, однако, невинтовые модели. Например, как один тороидальный вихрь Тверского<sup>45</sup> возбуждает поле (причем осесимметричный вихрь возбуждает неосесимметричное поле — таким образом, не возникает противоречия с теоремами Каулинга — Брагинского), так и система двух вихрей<sup>8</sup> тоже может служить генератором. Последняя модель в большей степени приближается к модели конвекции: считается, что конвективные ячейки аналогичны тороидальным вихрям. Модификация двух вращающихся шаров Герценберга — два вращающихся цилиндра, оси вращения которых не параллельны друг другу. Таким образом осуществляется отход от симметрии (рис. 2)<sup>7</sup>. Другая модификация — два вращающихся шара в вакууме<sup>46</sup>. Приложение этой модели сразу же напрашивается — двойные звезды. По-видимому, такая генерация может быть также проверена в лаборатории и использована в технике. Можно попытаться уйти от симметрии только в магнитном поле, т. е. движение симметричное, поле — нет (как в модели Тверского<sup>45</sup>). Упростим максимально движение. Простейшее не твердотельное движение сплошной среды — это сдвиг, к примеру, дифференциальное вращение. Пусть имеется ось

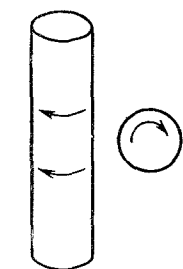


Рис. 2. Два вращающихся цилиндра, оси которых перпендикулярны друг к другу, способны генерировать поле.

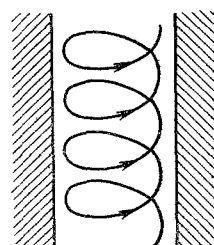


Рис. 1. Винтовое движение — генератор поля.

Цилиндр, погруженный в проводящую среду (заштрихована), совершает одновременно вращательное и поступательное движение. Винтовая траектория отдельной точки цилиндра изображена стрелкой.

вращения  $z$  и скорость в цилиндрической системе имеет вид  $v_r = v_z = 0$ ,  $v_\phi = v(r)$ . Такое движение является двумерным и здесь вступает в силу теорема Зельдовича<sup>19</sup>, гласящая: «никакое поле не может неограниченно усиливаться двумерным движением (в противоречие с теоремами Каулинга — Брагинского мы не вступаем, так как поле не осесимметричное). Однако эта теорема<sup>19</sup> была доказана для неограниченной проводящей

среды. Если же рассмотреть ограниченную по  $r$  среду, или, иными словами, считать, что  $\sigma$  зависит от  $r$ , то невозможно доказать отсутствие динамической неустойчивости<sup>13</sup>.

Здесь уместно напомнить, что все теоремы-запреты доказываются следующим образом. Уравнение индукции

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot} [\mathbf{vH}] + v_m \Delta \mathbf{H}, \quad v_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \quad (1)$$

записывают в естественной для данной геометрии системе координат, затем стараются отделить одно из трех уравнений для компонент поля от других. Если удастся отделить хотя бы одно уравнение и граничные условия для него от остальных, то, практически, во всех случаях можно построить теорему-запрет. Это правило, вероятно, трудно обосновать,

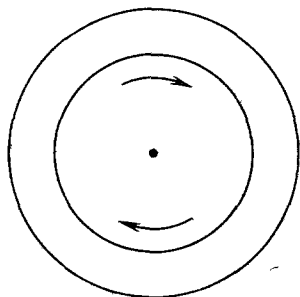


Рис. 3. Простейший генератор.

Два цилиндра с осями, параллельными оси  $z$ ; внутренний цилиндр вращается. Ось  $z$  перпендикулярна плоскости рисунка.

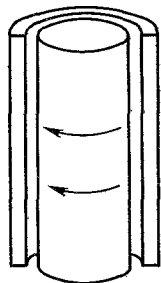


Рис. 4. Генератор, который легко осуществить в эксперименте.

Внутренний цилиндр радиуса  $r_0$  вращается; между внутренним и внешним цилиндрами имеется зазор толщины  $\Delta r$ .

оно найдено «эмпирически». В двумерном случае отделяется  $H_z$ -компонента поля<sup>19</sup>. Если теперь  $\sigma$  зависит от  $r$ , то в уравнении для  $H_z$ -составляющей (1) будет добавлен член  $\partial v_m / \partial r (\partial H_z / \partial r - \partial H_r / \partial z)$ , и уже все компоненты поля перепутаны. Зависимость  $\sigma(r)$  может быть связана с самой ограниченностью тела, в частности, можно рассмотреть модель  $\sigma = \sigma_0$  внутри цилиндра,  $\sigma = 0$  (вакуум) — вне тела. На рис. 3 изображена решаемая модель: один цилиндр вращается внутри другого. В такой модели угловая скорость вращения цилиндра меняется скачком.

Но если все дело в неоднородной электропроводности, то в эксперименте легче осуществить модель, когда вакуум (или изолятор) находится между цилиндрами — в этом случае между ними не будет трения (рис. 4). Для больших  $Rm \doteq \omega r_0^2 / v_m$  и для решения вида

$$\mathbf{H} = \mathbf{f}(r) \exp(Et + im\phi + ikz)$$

$f(r)$  выражается через модифицированные функции  $I$  и  $K$  от аргумента  $\beta r$  во внутреннем цилиндре и  $\kappa r$  во внешнем;  $\Delta r / r_0 \ll 1$ ,  $\beta^2 = \kappa^2 + (im\omega / v_m)$ ,  $E = v_m(\kappa^2 - k^2)$ . Сшивая решения в области вакуума, получим следующее дисперсионное уравнение:

$$\left[ 4 + \frac{\beta - \kappa}{r_0 \beta} (4m^2 + 3) \right] \left[ \text{th } k\Delta r + \frac{k(\kappa + \beta)}{\kappa\beta} \right] + \frac{\Delta r}{4kr_0^2} \left[ 4 + (4m^2 - 1) \left( 1 + \frac{2k^2}{\kappa\beta} \right) \right] = 0.$$

Обозначим  $N = (4m^2 + 3)/4$ , тогда при  $r_0\beta \approx N$ ,  $Rm \gg N^2/m$  и  $N \gg 1$  имеется неустойчивое решение:

$$\operatorname{Re} E = v_m N^2 / r_0^2 = \omega N^2 / Rm.$$

К сожалению, нельзя считать доказанным, что рассмотренные выше две модели дифференциально вращающихся цилиндров действительно дают растущее решение. Дело в том, что автор пытался найти неустойчивое решение, используя непрерывное, т. е. без скачков, поле скорости, привлекая метод ВКБ, применимый при  $Rm \gg 1$ . Результат получился отрицательным, растущих решений нет. Это же подтверждается численными экспериментами М. Стикса, использовавшего непрерывное поле скорости. Асимптотическое разложение для бесселевых функций при параметрах, соответствующих растущему решению, плохо сходится, и этим может объясняться положительный результат<sup>9</sup>. Фактически генерация при  $Rm \ll 1$  отсутствует, так как при этом задача становится плоской и не «чувствует» цилиндрической геометрии. По всей вероятности в рассматриваемом случае возбуждение наступит при  $Rm \approx 1$ , когда цилиндрическая геометрия должна проявляться. Убедиться в такой возможности можно следующим образом. Уравнения для  $H_\varphi$ -,  $H_r$ -составляющих замыкаются граничными условиями, так что нет необходимости рассматривать поведение  $H_z$ -составляющей. Эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_r}{\partial t} &= -\omega \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} + v_m \left( \Delta H_r - \frac{H_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} \right), \\ \frac{\partial H_\varphi}{\partial t} &= -\omega \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} + r H_r \frac{\partial \omega}{\partial r} + v_m \left( \Delta H_\varphi - \frac{H_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} \right), \end{aligned}$$

$\omega$  — угловая скорость. Условия на границе с вакуумом при  $kR \ll 1$ ,  $H \sim \exp i(kz + m\varphi)$ ,  $R$  — радиус цилиндра (рис. 3), имеют вид

$$H_r = iH_\varphi, \quad H_r + \frac{R}{m+1} \frac{\partial H_r}{\partial r} = 0 \quad \text{при} \quad r = R.$$

При отсутствии вращения собственные функции разбиваются на два типа гармоник:

$$1) \quad H_r = -\frac{Dm}{\kappa_j r} I_m(\kappa_j r), \quad H_\varphi = -i D I_m'(\kappa_j r), \quad I_{m-1}(\kappa_j R) = 0,$$

2)  $H_r = C I_{m+1}(\kappa_i r)$ ,  $H_\varphi = -i C I_{m+1}'(\kappa_i r)$ ,  $I_m(\kappa_i R) = 0$ . Выключим теперь вращение, причем  $\omega$  пусть меняется непрерывным образом; при  $Rm \approx 1$  движение будет влиять только на самые нижние гармоники, высокие слишком быстро затухают (т. е. декремент  $\gamma_i$ , обусловленный омическим затуханием, гораздо больше скорости роста, вызванной движением).

Примем во внимание только две гармоники при  $m = 1$ : нижнюю типа 1) с собственным значением  $\gamma_0$ , и нижнюю типа 2) с собственным значением  $\gamma_1$ . Взаимными (дуальными) к этим двум базисным гармоникам будут

$$H_r = -I_{m+1}(\kappa_1 r), \quad H_\varphi = i I_{m+1}(\kappa_1 r)$$

и

$$H_r = I_m'(\kappa_0 r), \quad H_\varphi = \frac{im}{\kappa_0 r} I_m(\kappa_0 r).$$

Разложим решение по двум базисным гармоникам, умножим скалярно уравнения для  $H_r$  и  $H_\varphi$  на дуальные гармоники и проинтегрируем по  $r$

от 0 до  $R$ , тогда получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial t} &= -(ima_+ + \gamma_0) D + iC\varepsilon_{12}, \quad \frac{\partial C}{\partial t} = iD\varepsilon_{21} - (ima_- + \gamma_1) C, \\ a_{\pm} &= \frac{1}{d} \left[ \int_0^R \omega I_{m-1}(\kappa_0 r) I_{m+1}(\kappa_1 r) dr \pm \int_0^R \frac{1}{\kappa_0} \frac{\partial \omega}{\partial r} I_m(\kappa_0 r) I_{m+1}(\kappa_1 r) dr \right], \\ d &= \int_0^R I_{m-1}(\kappa_0 r) I_{m+1}(\kappa_1 r) dr, \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{d} \int_0^R r \frac{\partial \omega}{\partial r} I_{m+1}^2(\kappa_1 r) dr, \quad \varepsilon_{21} = \frac{-1}{d} \int_0^R \frac{m^2}{\kappa_0^2 r} \frac{\partial \omega}{\partial r} I_m^2(\kappa_0 r) dr. \end{aligned}$$

Описанная система имеет неустойчивое решение, если  $\omega \approx r \partial \omega / \partial r$  и  $\gamma_0 < \omega < \gamma_1$  (точнее,  $\omega \gtrsim \sqrt{\gamma_0 \gamma_1} \approx v_m / R^2$ , т. е.  $Rm \gtrsim 1$ ).

В данном случае инкремент будет близок к  $\omega$ . Для космической электродинамики, по-видимому, именно такая ситуация и будет реализовываться, т. е. инкремент будет порядка обратного времени поворота ячейки  $v/l$ ,  $l$  — характерный масштаб изменения скорости. В самом деле, если  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$  и  $\mathbf{v}$  не зависит от  $t$ , задача на собственные значения будет выглядеть так:  $E\mathbf{H} = (\mathbf{H}\nabla)\mathbf{v} - (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{H} + v_m \Delta \mathbf{H}$ . Для растущей гармоники либо  $(\mathbf{H}\nabla)\mathbf{v} \approx v_m \Delta \mathbf{H}$  (тогда масштаб поля  $\delta \sim l Rm^{-1/2}$ ,  $E \approx v/l$ ), либо  $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{H} \approx v_m \Delta \mathbf{H}$  (тогда  $\delta \sim l Rm^{-1}$ ,  $E \approx v Rm/l$ ), причем  $Rm = v/v_m$ . Второй случай, однако, нефизичен: пренебрежение  $(\mathbf{H}\nabla)\mathbf{v}$  по сравнению с  $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{H}$  означает фактически, что мы имеем дело с уравнением теплопроводности:  $E\mathbf{H} = -(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{H} + v_m \Delta \mathbf{H}$ , и динамо невозможно. Поэтому неустойчивая гармоника будет медленно меняться в направлении, параллельном  $\mathbf{v}$ ,  $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{H} \approx H v/l$ , и быстро — в перпендикулярном, с характерным размером  $\delta$ , см. ниже рис. 10; следовательно,  $E \approx v/l$  и не зависит от  $\delta$ . Оговоримся, что высказанное утверждение все же не является универсальным. Это видно хотя бы из того, что в реальной ситуации имеется не один характерный масштаб: например, размер конвективной ячейки, всего тела, конвективной зоны и т. п. Кроме того, указанная ситуация заведомо не будет иметь место, если поле не зависит от направления, параллельного движению плазмы (например, дифференциальное вращение с осесимметричным полем, течение Гартмана с полем, не зависящим от направления, параллельного стенкам канала).

Пример, изображенный на рис. 3, моделирует дифференциальное вращение цилиндра и в определенном смысле близок к модели дифференциально вращающейся Галактики. Как будет обстоять дело в шаре? Пусть имеется шар,  $v_\phi$  зависит от  $\theta$ ,  $r$ . Будет ли генерация? К сожалению, нет. Дело в том, что на этот раз отделяется компонента  $H_r$  и никакая зависимость  $\sigma(r)$  и даже  $\mu(r)$  ( $\mu$  — магнитная проницаемость) не изменят этого обстоятельства. Пусть теперь  $\sigma$  зависит от широты  $\theta$  (это может быть связано с разными температурами на экваторе и на полюсе, или, если  $\sigma$  обусловлено турбулентностью, зависимостью интенсивности турбулентности от  $\theta$ ). Теперь в уравнение для  $H_r$  добавится член, содержащий  $H_\theta$ , так что запрет снимается. Правда, такая задача не рассматривалась, и можно только ожидать, что усиление поля возможно. Упомянутая выше независимость инкремента от  $\sigma$  наводит на мысль, что относительная амплитуда изменения  $\sigma$ , т. е.  $|\nabla \sigma|/\sigma$ , не существенна. Важно лишь снять сам запрет на генерацию. Величина  $\sigma$  и ее изменение скажется только на виде неустойчивой моды, которая эффективно меняется на масштабе  $1/\sqrt{v_m/\omega}$ . Решение указанной задачи для шара имело бы значение для

объяснения магнетизма Солнца (для которого зависимость  $v_\phi$  от  $\theta$  непосредственно наблюдается) и для земного ядра. Несмотря на обилие механизмов, дающих генерацию, к настоящему времени существуют только две общепризнанные динамо-модели (т. е. модели, используемые непосредственно для объяснения солнечного цикла, земного динамо и т. п.). Это модель Паркера<sup>30</sup>, в которой упомянутая выше спиральная конвекция служит генератором полоидальной компоненты из тороидальной (тороидальная же «вытягивается» дифференциальным вращением из полоидальной), и модель Брагинского<sup>18</sup> — почти симметричное динамо.

## б) Другие виды перестроек

Наиболее существенной особенностью перестройки является обусловленное движением уменьшение масштаба поля. Нельзя ли воспользоваться этим обстоятельством для объяснения аннигиляции крупномасштабных полей? Движение приведет к эффективному уменьшению масштаба, а затем поле просто диссипирует из-за омических потерь. Вероятно, наиболее убедительно продемонстрировано это явление Вейсом<sup>47</sup>. Уравнение индукции решалось численно для двумерных конвективных ячеек. Последние сначала запутывают крупномасштабное поле, создавая «тонкую структуру», а затем выталкивают поле из области, где такие ячейки имеются. Правда, при этом поле в конечном счете именно выталкивается, а не уничтожается. Аннигиляцию поля можно получить совсем при простом движении плазмы: пусть  $\partial/\partial z = 0$ ,  $H_z = 0$ ,  $v_z = 0$  (плоский случай). Уравнение для вектор-потенциала поля  $A$  имеет вид ( $\text{rot } A = H$ )

$$\frac{\partial A_z}{\partial z} + (\mathbf{v} \nabla) A_z = v_m \Delta A_z, \quad (2)$$

другие компоненты вектора  $A$  отсутствуют. Пусть  $\mathbf{v}$  не зависит от  $t$  и имеет вид сдвигового движения, например,  $\mathbf{v} = (v(y), 0)$ ,  $v(y) > 0$  при  $y > 0$  и  $v(y) < 0$  при  $y < 0$ . Тогда, задавая граничные условия на  $y = \pm L$ , соответствующие отсутствию внешнего источника поля, можно перейти к задаче на собственные значения,  $A_z = A \exp(Et + ikx)$ :

$$EA + vikA + v_m k^2 A = v_m \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \quad (3)$$

(уравнение Шредингера с комплексным потенциалом). Коль скоро система собственных функций (3) полна<sup>48</sup>, нам остается лишь найти  $E_n$  для наименьшей, т. е. наиболее медленно затухающей гармонике (растущих решений нет, это видно из сходства (2) с уравнениями для температуры в движущейся жидкости). Разумеется, интерес представляет ситуация, когда  $Rm \gg 1$ . Пусть начальный масштаб возмущения поля будет  $\approx l$ , тогда  $k = 1/l$ . Целесообразно разбить уравнение (3) на два: действительную и мнимую части, которые по порядку величины одинаковы (это видно из того, что решение (3) можно искать методом ВКБ, и оно существует). Далее, для того чтобы правая часть скомпенсировала левую (в противном случае порядок уравнения изменится), характерный масштаб функции  $A$  по  $z$  не должен превышать  $\delta \sim \sqrt{v_m/vk}$ , т. е.  $|E| \gtrsim v_m/\delta^2 = vk$  и  $|E_0| \approx \approx v/l$ . Строгое решение<sup>12</sup> подтверждает этот вывод.

Мы намеренно весьма подробно описываем формальные оценки, ибо результат не является наглядным. В самом деле, фактически данный результат сразу же противоречит наглядному представлению о «вмороженности». Дело в том, что  $l/v$  есть время деформации поля масштаба  $l$ , и казалось бы, поле должно деформироваться движением в течение времени  $t \gg l/v$ . На рис. 5, а изображены начальные флуктуации поля, на

рис. 5, 6 — их деформация за время  $\approx l/v$ . Строго говоря, диссипация уже включилась и приведет к сглаживанию «углов» поля, где градиенты максимальны. Дальнейшее растяжение силовых линий приведет к новому сглаживанию и т. д. Таким образом, «вмороженность» сразу же, на начальном этапе, нарушается. Важность и необходимость учета конечной электропроводности в задачах о нейтральном слое были указаны также в работе <sup>49</sup>. Для бесстолкновительной плазмы уравнение динамики поля тоже

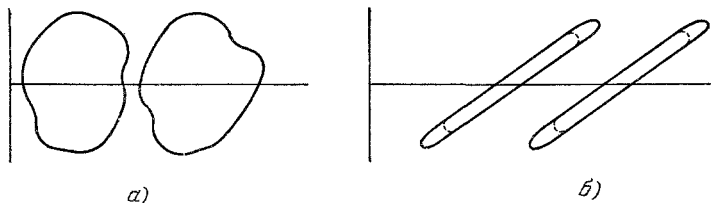


Рис. 5. Силовые линии поля (сплошные линии).

Штриховые линии отражают сглаживание «углов» поля, обусловленное диссипацией; стрелки указывают на движение плазмы.

имеет вид (4), но  $v_m = 0$ : нет диссипации. Тем не менее, можно и здесь воспользоваться фактом уменьшения масштаба поля. Появление крутых градиентов поля приведет к включению аномальной диссипации: когда токовая скорость превзойдет скорость ионного звука (если  $T_e > T_i$ ,  $T_e$  — температура электронов,  $T_i$  — ионов), возбуждается ионный звук, который и приведет к аномальной диффузии. В конечном счете сдвиговые движения плазмы приводят к

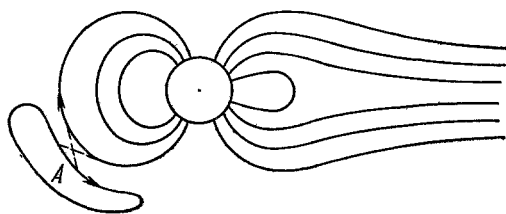


Рис. 6. Взаимодействие проходящей неоднородности солнечного ветра с магнитосферой Земли.

В точке А возможно пересоединение.

к уменьшению масштаба, образованию токового слоя. В работе <sup>50</sup> данный процесс рассчитывался для условий солнечного ветра, где сдвиги по скорости наблюдаются, условие  $T_e > T_i$  тоже выполняется. В районе обтекания магнитосферы Земли имеется особенно крутой градиент скорости (падение скорости от скорости солнечного ветра до нуля на размере, сравнимом с магнитосферой Земли,

или даже меньше). На рис. 6 изображено прохождение магнитной неоднородности в районе обтекания. Если вектор магнитосферного поля направлен против поля прилегающей неоднородности, как это изображено на рис. 6, то токовый слой может непосредственно прилегать к магнитосфере, и возможно пересоединение силовых линий в точке А <sup>51</sup>.

Принципиально новый механизм перестройки был предложен в работе <sup>52</sup>. Рассмотрим конвекцию, образованную ячейками Бенара. Поднимается плазма внутри ячейки (вдоль оси  $z$ ), опускается по краям. Нетрудно представить себе прилегающие друг к другу такие ячейки, образующие горизонтальный ряд и заполняющие плоскость  $x, y$ . Важно иметь в виду, что опускающееся вещество всей системы топологически связано, в то время как поднимающиеся части плазмы разделены. Рассмотрим теперь поведение горизонтального в начальный момент крупномасштабного магнитного поля при наличии такого ансамбля ячеек. Верхние силовые линии будут смещены к краям ячеек и затем будут проскальзывать целиком вниз к основанию. Нижним же силовым линиям некуда деться, так



как вверх их будут тянуть топологически несвязанные части жидкости, где они будут лишь изгибаться в петли, так что в целом они не сместятся. Такой механизм работает как насос, накачивая поле в нижнюю часть конвективной зоны (Солица). Мы вернемся к обсуждению этого механизма в разделе в) в связи с вопросом о турбулентной конвекции.

### в) Турбулентность: кинематическая постановка

Будем полностью игнорировать электромагнитные силы, считая движение заданным. Это и есть кинематическая постановка, которая оправдана, если поля слабые. Пусть в жидкости возбуждена турбулентность. Что произойдет с крупномасштабным полем (т. е. масштаб которого  $L \gg l$ )? Сработает главный и потому хорошо известный эффект — перемешивание или турбулентная диффузия. Иными словами, среднее поле подчиняется уравнению  $\partial \langle \mathbf{H} \rangle / \partial t = \chi \Delta \langle \mathbf{H} \rangle$ , где  $\chi$  по аналогии с физической кинетикой оценивается так:  $\chi = vl/3$  (здесь  $l$  удобнее интерпретировать как «длину свободного пробега» конвективного элемента). Пиддингтон<sup>53, 54</sup> высказал сомнения по поводу действия турбулентной диффузии: во-первых, по его мнению, для диффузии согласно (1) необходима аннигиляция полей разных знаков в отличие от скалярной примеси в турбулентном потоке; во-вторых, для указанной аннигиляции масштаб поля должен быть мал. Относительно первого возражения отметим, что уравнение для градиента скалярной примеси сходно с (1), в двумерном случае они просто совпадают, и турбулентное сглаживание градиента примеси — факт экспериментальный. Относительно второго в разделах а — б) мы имели возможность убедиться в том, насколько эффективно движение приводит к уменьшению масштаба поля.

Корреляционный тензор поля скорости имеет вид  $\langle v_i v_j \rangle = Ar_i r_j + B \delta_{ij}$ ,  $r$  — расстояние между точками корреляции. Вращение небесного тела приводит, как было уже упомянуто выше, к появлению корреляции  $\langle \mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v} \rangle$ , и в тензор  $\langle v_i v_j \rangle$  добавляется отражательно неинвариантный (нечетный, гиротропный) член  $\varepsilon_{ijl} r_l C(r)$  (по терминологии — helical turbulence); уравнение для поля приобретает вид

$$\frac{\partial \langle \mathbf{H} \rangle}{\partial t} = \text{rot } \alpha \langle \mathbf{H} \rangle + \chi \Delta \langle \mathbf{H} \rangle. \quad (4)$$

Вся процедура сводится к разбиению  $\mathbf{H} = \langle \mathbf{H} \rangle + \mathbf{h}$ , решению линеаризованного уравнения  $\partial \mathbf{h} / \partial t = \text{rot} [\mathbf{v} \langle \mathbf{H} \rangle] + v_m \Delta \mathbf{h}$ , а затем вычислению квадратичной поправки. Заслуга в развитии этого направления принадлежит Штеенбеку, Рэдлеру, Краузе<sup>55–57</sup>. Уравнение типа (4) выводится также для марковского процесса, когда поле скорости представляет собой белый шум<sup>58</sup>. В последнее время этот подход стал называться mean field electrodynamics.

Можно показать, что уравнение (4) имеет растущие решения (так называемый  $\alpha$ -эффект). Эти результаты подвергались сомнению Лерхе<sup>59, 60</sup>, что, конечно, является недоразумением: уравнение (4) можно вывести строго, как теорему, в двух случаях: 1) малое  $Rm$ , но большой размер тела; 2) марковский процесс (более конкретно:  $\tau \ll l/v$ ,  $\tau$  — время корреляции). При этом привлекаются только самые общие, фундаментальные свойства корреляционных или спектральных функций<sup>61, 62</sup>. Напомним, что согласно разделу а)  $\alpha$ -эффект выражается не только в поднимающихся ячейках, но и в опускающихся. Формально это видно при выводе (4): важно само преобладание левого или правого винта, а не направление движения ячейки. В связи с этим отметим, что рядом авторов<sup>53, 63</sup> высказывается утверждение о том, что  $\alpha$ -эффект возникает, если число

поднимающихся ячеек больше, чем опускающихся, или наоборот, что создает, по мнению Пиддингтона<sup>53</sup>, трудность для приложений. Это утверждение также является, конечно, недоразумением.

Наиболее важен для приложений случай  $Rm \gg 1$ . В то же время, как правило, условие  $\tau \ll l/v$  не выполняется, процесс не является марковским. Естественно поэтому попытаться отойти от представления  $\tau = 0$  ( $\delta$ -корреляция по времени) и рассмотреть следующее приближение по параметру  $\tau/(l/v)$ . Аналогичная постановка задачи возникает в теории рассеяния электромагнитных волн на неоднородностях<sup>64</sup>. Марковское приближение получается, если просуммировать выборочно диаграммы ряда теории возмущений уравнения (1). Поэтому естественно первым делом просуммировать более широкую совокупность диаграмм, получая тем самым следующее приближение. Более компактным подходом является функциональный. Тем не менее, он оказывается слишком громоздким для того, чтобы подробно отразить его здесь, поэтому мы изложим основные идеи и результаты, отсылая за подробностями к работе<sup>65</sup>. Основой для подхода является введение «фурье-образа» функции распределения вероятностей

$$G = \langle \exp(i \int u_j \theta_j dx dt) \rangle,$$

где  $u_j$  — скорость,  $\theta_j$  — аргумент, и аналогично для магнитного поля. Беря вариационные производные, получают различные корреляционные моменты, вместо уравнения (1) будем иметь уравнение для  $G$  в вариационных (и обычных) производных. Решение ищется в виде разложения в функциональный ряд. Если оборвать этот ряд на минимальном числе членов, то сразу же получается марковское приближение. В следующем приближении получается новый результат. Качественно, однако, этот результат подтверждает старый: без гиротропности генерация невозможна, коэффициент турбулентной диффузии по порядку величины не отличается от старого значения  $\chi = \nu l/3$ . Заметим, что стохастическая модель, рассмотренная в работе<sup>59</sup>, некорректна (см. <sup>13</sup>).

Вернемся теперь к топологической накачке поля, описанной в разделе б). Рассмотрим турбулентную конвекцию, образованную ячейками Бенара. Иными словами, пусть конвективные ячейки с описанной в разделе б) топологией не являются устойчивыми образованиями, а живут конечное время. Примером такой конвекции является конвективная зона Солнца: иногда верхние конвективные ячейки сопоставляют с грануляцией и супергрануляцией, время жизни таких ячеек близко ко времени поворота ячейки, т. е.  $\approx l/v$ . Условно это можно назвать «турбулентностью», так как процесс является случайным по времени (хотя и показывает регулярную структуру в пространстве). Еще одна особенность конвективной зоны — наличие целого спектра размеров ячеек, начиная с самых крупных, высота которых сравнима с глубиной всей зоны, и кончая малыми, с трудом разрешаемыми современными инструментами. Предположим, что топология большинства ячеек имеет описанный в разделе б) вид. Будет ли происходить накачка поля на дно зоны? Формально ответ на этот вопрос можно получить, если описывать этот процесс анизотропной турбулентностью (избранным направлением в данном случае служит вертикальное). Спектральный тензор поля скорости для такого процесса известен, а знание его достаточно для выяснения поведения магнитного поля; это давно уже было сделано<sup>58</sup>. Ответ отрицательный: анизотропная турбулентность дает лишь анизотропную диффузию поля и не вызывает накачки. В чем дело? Казалось бы, главное — это топология, и накачка должна иметь место. Прежде всего, движение в работе<sup>52</sup> обладает описанным топологическим свойством только для одного ряда ячеек. Если

продолжить непрерывным образом поле скорости под этим рядом и над ним, то там топология неизбежно изменится на противоположную: топологически связанными оказываются восходящие движения. Расположить друг под другом ячейки одинаковой топологии невозможно: неизбежно появится разрыв в поле скорости. На рис. 7 изображен разрез ячейки другого типа, под и над которой можно расположить ячейку такой же топологии: поле скорости убывает до нуля снизу и сверху (линии поля разрезаются внизу и вверху). Но горизонтальный ряд таких ячеек вызовет накачку поля не на самый низ ячеек, а потому много слоев не дадут общего эффекта, накачка будет только внутри каждого слоя. Окончательно, картина будет следующая: наиболее крупные ячейки, вертикальный размер которых не меньше толщины зоны, вызывают топологическую накачку. Меньшие ячейки вызывают турбулентный диамагнетизм<sup>1, 19, 66-69</sup>, что тоже приводит к вытеснению поля под конвективную зону, причем напряженность подконвективного поля в  $\sqrt{Rm}$  раз больше, чем в конвективной.

Вытеснение поля под конвективную зону важно, в частности, для следующего обстоятельства. Многие авторы отмечают, что расчет периода солнечного цикла с использованием уравнения (4) с добавкой члена  $\text{rot} [\mathbf{v}_T \mathbf{H}]$ ,  $\mathbf{v}_T$  — дифференциальное вращение, приводит к слишком малому периоду (см., например, <sup>2</sup>). Фактически время определяется диффузией  $\chi \Delta \mathbf{H}$  и  $t_0 = L^2/\chi$ ,  $L$  — толщина зоны. Члены  $\text{rot} [\mathbf{v}_T \mathbf{H}]$  и  $\text{rot} \alpha \mathbf{H}$  входят в виде источников в уравнения для тороидальной и полоидальной составляющих и влияют только на их относительные амплитуды, а не на время установления. Оказывается,  $t_0 \sim 1$  года и меньше, в то время как солнечный цикл продолжается 22 года. Если же учесть вытеснение, то период возрастает<sup>70</sup>, что связано с высокой индуктивностью подконвективной плазмы, препятствующей слишком быстрому изменению поля.

Интересным приложением диамагнитного эффекта является так называемая секторная структура межпланетного магнитного поля, обнаруженная ракетными наблюдениями. Схематически это поле изображено на рис. 8, причем конфигурация поля внутри Солнца на рис. 8, а изображена, конечно, произвольно. Ясно только одно: поля должны как-то замыкаться под поверхностью Солнца. Наличие конвективной зоны под самой поверхностью приведет к вытеснению поля из нее, часть поля пойдет вниз, основной же поток замкнется под поверхностью Солнца (рис. 8, б). Возникший значительный (как показывают элементарные оценки) магнитный поток будет взаимодействовать с полем пятен. Это может привести к явлению активных долгот, при котором на некоторых долготах наблюдается повышенная активность: поле, изображенное на рис. 8, б, создает явное неравноправие разных долгот.

До сих пор речь шла о поведении крупномасштабного поля. Как обстоит дело с мелкомасштабным магнитным полем? Задача решается точно для марковского процесса, или специальной волновой турбулентности (акустической). Общее заключение: турбулентность неустойчива по отношению к возмущениям магнитного поля, флуктуации экспоненциально нарастают. Что касается наиболее типичного случая  $\tau \approx l/v$ , то здесь существуют полуэмпирические уравнения, которым верит ряд авторов<sup>71-74</sup>. Дело затрудняется отсутствием малого параметра; численное или лабораторное моделирование для больших  $Rm$  весьма затрудни-

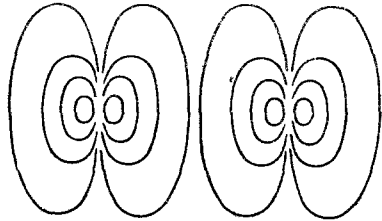


Рис. 7.

тельно (речь идет о трехмерном случайном процессе, стационарном только в статистическом смысле). Можно лишь предположить, по каким направлениям будет в дальнейшем развиваться эта проблема. 1) Использование функционального подхода и методов, изложенных в работе <sup>65</sup> (проще даже воспользоваться более новым методом, изложенным в работах <sup>75, 76</sup>, когда получаются менее громоздкие выражения), для выхода из рамок марковского приближения. 2) Можно попытаться подойти к проблеме с противоположной стороны: считать, что в первом приближении  $\tau = \infty$ , т. е. поле

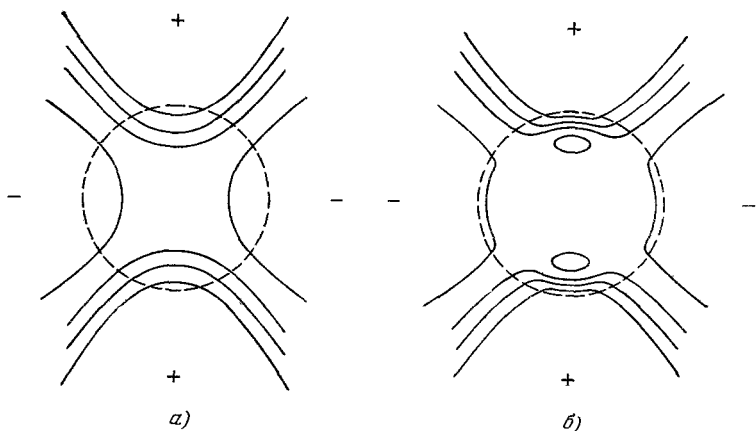


Рис. 8. Схематическое изображение конфигурации магнитного поля, соответствующего секторной структуре межпланетного поля.

Знаки + и - соответствуют полярностям в межпланетном пространстве. Показан разрез Солнца (штриховой линией) по экватору. Поле, имеющее начальную конфигурацию типа изображенной на рис. а, вытесняется из-за диамагнетизма конвективной зоны под поверхность и под конвективную зону рис. б.

стационарное, тогда возникает задача на собственные функции. Собственную функцию можно искать по методу ВКБ (при старшей производной  $\Delta H$  стоит малая величина  $v_m$ ), правда, здесь возникают серьезные формальные трудности: неясно, как сшивать решения в окрестности точек поворота. Если это преодолеть, то в следующем приближении имеет смысл рассмотреть медленное адиабатическое изменение скорости  $\tau \gg l/v$  — процесс, противоположный марковскому <sup>13</sup>. Можно ли воспользоваться  $\alpha$ -эффектом в турбулентных масштабах? Крупная ячейка масштаба  $l_1$  поворачивается, а мелкомасштабные движения (масштаб  $l_2$ ) генерируют поле в ней из-за  $\alpha$ -эффекта <sup>77</sup>. К сожалению, эти рассуждения ни к чему не приводят: инкремент неустойчивости  $^1 \alpha/l_1 \approx \omega_1 l_2^2/l_1^2$ ,  $\omega_1 = v_1/l_1$  и декремент из-за турбулентной диффузии  $\sim l_2 v_2/l_1^2$  всегда больше инкремента.

Другой аспект этой же проблемы — генерация вихрей потенциальными движениями: дело в том, что уравнение для вихря  $\text{rot } v$  совпадает с (1), по существу здесь  $\alpha$  играет роль отрицательной вязкости <sup>78</sup>, хотя и имеет другую размерность. Перекачка энергии от малых масштабов к крупным важна в физике атмосферы Земли. Генерация мелкомасштабных вихрей оказывается важной в космологии, с ней связано создание вращательного момента галактик. К сожалению, релятивизм (большие скорости, гравитация) не вносит в эту проблему ничего принципиально нового <sup>79</sup>, во всяком случае нам известны лишь обобщения обычной теории. Так, 4-вихрь  $\omega^2 = (-g)^{-1/2} e^{iklm} u_k u_l$ ,  $m$  подчиняется, в основном, тем же соотношениям, что и в классике, и так же может генерироваться.

## г) Турбулентность: нелинейность

В этой области много неясного, но тем не менее, имеются вполне четкие результаты. Речь идет о МГД-турбулентности при неслабых (т. е. способных влиять на движение) магнитных полях и  $Rm \gg 1$ . Прежде всего здесь следует указать на идею Крейчнана воспользоваться статистически равновесным ансамблем, точнее, ансамблем Гиббса. Разумеется, турбулентность весьма далека от абсолютного равновесия. Тем не менее, рассмотрим развитую турбулентность. Выключим диссипацию:  $v_m = \eta = 0$  ( $\eta$  — обычная вязкость), внешние силы, возбуждающие турбулентность, а также большие волновые числа, т. е. запретим существование возмущений с  $k > k_{\max}$  (так, как будто мы имеем дело с возбуждениями решетки, где  $k_{\max}$  равно вектору обратной решетки), малые же волновые числа ограничены размерами системы. Тогда через некоторое время система придет в состояние термодинамического равновесия, сохранив энергию флуктуаций. Конечно, эта ситуация физически неосуществима: в сплошной среде нет  $k_{\max}$ , тем не менее, это гипотетическое равновесное состояние будет отражать направление переноса возмущений в фазовом пространстве в области малой диссипации<sup>80, 81</sup>. И в самом деле, равновесное состояние для немагнитной турбулентности дает спектр флуктуаций  $E(k) = ak^2$ , энергия сосредоточена при  $k_{\max}$ , что указывает на тенденцию переноса возмущений в коротковолновую область, т. е. перекачку энергии к большим  $k$ . Равновесное двумерное состояние отражает обратный перенос в область малых  $k$ , что находится в соответствии с известными результатами. Немагнитная гиротропная турбулентность проанализирована в работе<sup>81</sup>, причем, опять же, перенесение характерных черт равновесного состояния на динамическое подтверждается численными экспериментами и приемлемой аргументацией.

Переход к магнитному случаю требует известной осторожности. Так, в простейшем случае (не гиротропном) имеет место равномерное распределение магнитной и кинетической энергий<sup>82</sup>, причем  $E_M \sim E = ak^2$ ,  $E_M$  — спектр магнитных флуктуаций. Этот результат, хотя и указывает на перекачку магнитной и кинетической энергий в область больших  $k$  (факт, в большой степени тривиальный), но не является указанием на то, что в реальном случае магнитная энергия стремится сравниться с кинетической, т. е. имеет место турбулентное динамо хаотических полей<sup>1</sup>. В действительности, как это неоднократно подчеркивалось выше, само динамо тесно связано с диссипацией, т. е., если даже в начальный момент поле крупномасштабно, то затем оно быстро перестраивается, приобретает тонкую структуру, «чувствующую» диссипацию, а затем уже либо нарастает, либо быстро затухает. Поэтому ситуация  $v_m = 0$  физически весьма далека от вопроса о турбулентном динамо. Сам вид спектра  $\sim k^2$  имеет весьма простую интерпретацию: фурье-амплитуды скорости и поля — это степени свободы системы, спектр  $\sim k^2$  и энергия  $\sim E(k) dk$  означают равномерное распределение по степеням свободы (бозоны при высоких температурах).

Качественно новые результаты получаются, если рассматривать гиротропную турбулентность<sup>15</sup>. К изложению их мы и приступим. Прежде всего необходимо найти сохраняющиеся величины, для этого, кроме (1), нам потребуется уравнение движения

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \frac{1}{4\pi\rho} [\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{H}] + \eta \Delta \mathbf{v}, \quad (5)$$

( $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ ) и уравнение для вектор-потенциала  $\partial \mathbf{A} / \partial t = [\mathbf{v} \operatorname{rot} \mathbf{A}] + v_m \Delta \mathbf{A} + \Delta \mathbf{A}$ . Пользуясь этими уравнениями, нетрудно показать, что

при условии обращения всех полей в нуль на бесконечности и  $v_m = \eta = 0$  сохраняются энергия  $\int [(H^2/8\pi) + (\rho v^2/2)] d^3r$ , магнитная гиротропность

$$\int \mathbf{A}\mathbf{H} d^3r \quad (6)$$

и «кросс-гиротропность»  $\int \mathbf{v}\mathbf{H} d^3r$ . Для однородной изотропной турбулентности интегралы заменяются средними значениями. Отметим, что обычная гиротропность  $\langle \mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v} \rangle$  в общем магнитном случае не сохраняется. Обозначим

$$\frac{1}{8\pi} H_i(\mathbf{k}) H_i^*(\mathbf{k}) = E_M, \quad A_i(\mathbf{k}) H_i(\mathbf{k}) = H_M, \quad v_i(\mathbf{k}) H_i(\mathbf{k}) = H_c$$

( $H_i, v_i$  — фурье-амплитуды магнитного поля и скорости). Привлекая ансамбль Гиббса (см., например, <sup>83</sup>), получим функцию распределения  $\rho = z^{-1} \exp[-a(E_M + E_k) - \beta H_M - \gamma H_c]$ ,  $z$  — константа нормализации,  $a, \beta, \gamma$  — термодинамические константы. Теперь уже нетрудно вычис-

лить  $\langle E_M \rangle$ ,  $\langle E_k \rangle$ ,  $\langle H_M \rangle$  и  $\langle H_c \rangle$ , а также  $\int_{k_{\min}}^{k_{\max}} \langle E_M \rangle dk$  и т. д. Результат

следующий. Если  $\beta = \gamma = 0$ , то получается результат <sup>82</sup>,  $\langle E_M \rangle \sim \langle E_k \rangle \sim \sim k^2$ , если  $\beta \neq 0$ , то энергия сосредоточена, в основном, при  $k_{\min}$ , что привело авторов <sup>15</sup> к выводу о наличии обратного каскада к малым волновым числам. Эти результаты подтверждаются численными экспериментами <sup>74</sup> и расчетом с использованием гипотез <sup>71</sup>. Данные выводы в известной степени не являются неожиданными. Действительно, выше говорилось о том, что гиротропность в турбулентных масштабах вызывает генерацию крупномасштабного поля, что в некоторой степени и отражает обратный каскад. Однако в п. 3 сказано, что внутри турбулентных масштабов  $\alpha$ -эффект не дает обратного каскада. Не противоречит ли это результатам работы <sup>15</sup>? Нет, так как в последнем случае речь идет, фактически, о генерации поля при наличии корреляции  $\langle \mathbf{A}\mathbf{H} \rangle$  или  $\langle \mathbf{H} \text{ rot } \mathbf{H} \rangle$ , а  $\langle \mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v} \rangle$  может быть и равным нулю. Авторы <sup>15</sup> назвали это явление  $\beta$ -эффект; наглядно можно понять его следующим образом <sup>84</sup>. Действие магнитного поля на движение можно проследить по упрощенному уравнению движения

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi\rho} [\mathbf{H} \text{ rot } \mathbf{H}] \approx -\frac{1}{4\pi\rho} [\langle \mathbf{H} \rangle \text{ rot } \mathbf{h}]; \quad (7)$$

здесь  $\mathbf{H}$  представлено в виде  $\mathbf{H} = \langle \mathbf{H} \rangle + \mathbf{h}$  и проведена простейшая линеаризация. Теперь подставим (7) в (1) и усредним:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right\rangle &= -\frac{1}{4\pi\rho} \int_0^t \langle \text{rot} [[\langle \mathbf{H} \rangle \text{ rot } \mathbf{h}(t_1)] \mathbf{h}(t)] \rangle dt_1 = \\ &= \frac{2}{3} \frac{1}{4\pi\rho} \text{rot} \int_0^t \langle \mathbf{h} \text{ rot } \mathbf{h} \rangle \langle \mathbf{H} \rangle dt_1. \end{aligned} \quad (8)$$

Мы видим, что корреляция  $\langle \mathbf{H} \text{ rot } \mathbf{H} \rangle$  так действует на движение, что возникает  $\beta$ -эффект:

$$\beta = \frac{2}{3} \frac{1}{4\pi\rho} \int_0^\infty \langle \mathbf{H}(t) \text{ rot } \mathbf{H}(t_1) \rangle dt_1,$$

аналогичный  $\alpha$ -эффекту. Магнитная гиротропность (6) может оказаться важной для динамики поля в связи с вопросом о нелинейной остановке, стабилизации динамо-неустойчивости. Речь идет о том, что неограниченная генерация поля, конечно, невозможна, и в определенных случаях возможна стабилизация на слабонелинейном уровне <sup>1, 85-87</sup>. Идея заключается в том, что растущее крупномасштабное поле подавляет в первую очередь ту причину, которая вызывает его рост, т. е. величину  $\alpha$ -члена. Численный расчет (весьма сложный и громоздкий) подтверждает эту идею. Однако, пользуясь магнитной гиротропностью (6), эту стабилизацию можно проиллюстрировать весьма просто. Пусть инвариант (6) (магнитная гиротропность) обращается в нуль при  $t = 0$ . Так как он может только затухать, то он и будет оставаться равным нулю. При наличии спиральности  $\langle \mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v} \rangle \neq 0$  крупномасштабное поле начнет возбуждаться, причем, как легко убедиться, возбуждается поле спирального типа. Для этого пренебрежем диссипацией в (4):

$$\begin{aligned} \frac{\langle \mathbf{A} \rangle \partial \langle \mathbf{H} \rangle}{\partial t} &= \langle \mathbf{A} \rangle \text{rot } \alpha \langle \mathbf{H} \rangle, \\ \frac{\langle \mathbf{H} \rangle \partial \langle \mathbf{A} \rangle}{\partial t} &= \alpha \langle \mathbf{H} \rangle^2 + \langle \mathbf{H} \rangle \nabla \varphi, \\ \frac{\partial}{\partial t} \int \langle \mathbf{A} \rangle \langle \mathbf{H} \rangle d^3 r &= 2 \int \alpha \langle \mathbf{H} \rangle^2 d^3 r, \\ \int \langle \mathbf{A} \rangle \langle \mathbf{H} \rangle d^3 r &\approx \frac{\alpha}{|\alpha|} L \int \langle \mathbf{H} \rangle^2 d^3 r, \\ \int \langle \text{rot } \mathbf{H} \rangle \langle \mathbf{H} \rangle d^3 r &\approx \frac{\alpha}{|\alpha|} \frac{1}{L} \int \langle \mathbf{H} \rangle^2 d^3 r. \end{aligned} \quad (9)$$

Из выражений (9) видно, что спиральность крупномасштабного поля почти максимальна  $\langle \text{rot } \mathbf{H} \rangle \parallel \langle \mathbf{H} \rangle$ . Слово «почти» добавлено потому, что в действительности необходимо еще учесть диссипацию. Из того, что инвариант (6) был равен нулю, вытекает, что в турбулентных масштабах генерируется гиротропность  $\langle \mathbf{H} \text{ rot } \mathbf{H} \rangle$ , противоположная по знаку (9) и полностью его компенсирующая. Отсюда

$$\beta = \frac{-1}{4\pi\rho} \tau \langle \mathbf{H} \rangle \text{rot } \langle \mathbf{H} \rangle \approx -\frac{1}{4\pi\rho} \frac{\tau}{L} \langle \mathbf{H} \rangle^2. \quad (10)$$

Динамика поля  $\langle \mathbf{H} \rangle$  определяется теперь уравнением  $\partial \langle \mathbf{H} \rangle / \partial t = \text{rot } (\alpha + \beta) \langle \mathbf{H} \rangle + \chi \Delta \langle \mathbf{H} \rangle$ , причем, как это видно из (10),  $\beta$ -эффект действует против  $\alpha$ -эффекта. При достаточной напряженности среднего поля неустойчивость стабилизируется и генерация прекращается, грубо говоря, в тот момент, когда  $\alpha + \beta = 0$ .

В колебательном динамо (когда магнитное поле осциллирует, но не затухает благодаря действию движений на это поле), например, при солнечном цикле, нелинейная стабилизация определяет уровень самих колебаний <sup>88</sup>.

Неполная спиральность поля, отмеченная в предыдущем абзаце, весьма существенна. В самом деле, если точно  $\text{rot } \langle \mathbf{H} \rangle \parallel \langle \mathbf{H} \rangle$ , то крупномасштабная гармоника является бессильной. Но известно, что поле не может быть бессильным во всем пространстве (или в ограниченном теле, причем граничные условия соответствуют отсутствию внешних источников поля). Поэтому задача (4) с  $\chi = 0$  на собственные значения не может быть поставлена, и корректное решение в общем случае  $\chi \neq 0$  <sup>89</sup> показывает, что поле действительно отклоняется от бессильного характера. Интересно отметить, что нелинейные эффекты не только приостанавливают рост поля. Возможна генерация поля даже при отсутствии вращения <sup>90</sup>. Действительно, коль скоро речь идет о нелинейности,  $\alpha$  само может зависеть от

(Н). При наличии еще одного физического вектора  $\mathbf{q}$ , например, градиента плотности, псевдоскаляр  $\alpha$  можно скомбинировать в форме  $\alpha \sim \langle \mathbf{H} \rangle \operatorname{rot} \langle \mathbf{H} \rangle q^2$ ,  $\langle \mathbf{H} \rangle \mathbf{q}$ ,  $\operatorname{div} (\langle \mathbf{H} \rangle \mathbf{q}) [\langle \mathbf{H} \rangle \mathbf{q}]$ ,  $[\langle \mathbf{H} \rangle \mathbf{q}] \operatorname{rot} [\langle \mathbf{H} \rangle \mathbf{q}]$ . Уравнение (4) при этом усложнится, станет нелинейным, но можно показать, что возбудить поле можно и при таких условиях. Сам эффект, ввиду его нелинейности, вступает в силу не при произвольно слабых полях (как в обычной теории динамо). Вне зависимости от того, что дает такая нелинейность, генерацию или просто перестройку поля, эти члены необходимо включать в уравнение (4), когда напряженность поля уже не мала. Здесь можно отметить, что в реальной ситуации, когда имеется и вращение, и избранное направление, и неслабые поля, и дифференциальное вращение (солнечная конвективная зона), описание системы становится весьма громоздким.

В достаточно сложных нелинейных задачах естественно обратиться к волнам, их взаимодействиям и т. п. Большое число работ посвящено именно такой постановке задачи. Наиболее естественно поставить задачу следующим образом. Рассмотреть вращающуюся среду с определенной конфигурацией магнитного поля. Найти магнитные возмущения, волны, и посмотреть, не дают ли эти волновые возмущения такую реакцию на поле, которая предотвращает его омическое затухание или даже усиливает его<sup>37-41</sup>. Брагинский<sup>36</sup> рассмотрел волны в земном ядре и показал, что существенными являются магнитные, архимедовы и кориолисовы силы (так называемые МАК-волны Брагинского). Эти волны не только представляют то самое отклонение от симметрии, о котором шла речь в разделе а) и которое обеспечивает поддержание поля Земли, но также проливают свет на природу западного дрейфа поля и объясняют отклонение магнитной оси Земли от географической.

Теория почти симметричного динамо становится нелинейной: в работе<sup>28</sup> задается не все поле скоростей, а только отклоняющееся от симметрии, ищется главное симметричное движение, дающее генерацию, в работе<sup>29</sup> исследуется движение, дающее стационарную генерацию (т. е.  $\partial \mathbf{H} / \partial t = 0$ ).

Волновые движения, так же как и турбулентные, способны перемешивать поле и приводить к аномальной диффузии. Если магнитное поле слабое, то в первом приближении действием его на движение можно пренебречь, т. е. в гидродинамике останутся только звуковые волны — акустическая турбулентность. Если же поле усилить, то возмущения превратятся в альвеновские, ускоренные и замедленные. Их взаимодействие с магнитным полем рассматривалось Ивановым<sup>31</sup>. Ясно, что чисто волновые движения не перемешивают поле, так как соответствуют только колебаниям каждой частицы. Взаимодействие волн приводит к случайному блужданию частиц, так как каждое колебание имеет конечное «время памяти» из-за сбоя фаз<sup>1</sup>. Фактически дело сводится к вычислению инте-

грала типа  $\int_0^\infty \langle v_i(t) v_j(t_1) \rangle dt_1$ , это и есть тензор диффузии. Для неавто-

действующих волн этот интеграл лишен смысла: он имеет вид  $\int_0^\infty \exp i\omega \times \times (t - t_1) dt_1$ . Взаимодействие приводит к интегралу по «затухающей синусоиде» типа  $\exp(-a + i\omega_A)t$ ,  $a \approx \omega_A v^2 / v_A^2$ , так что интеграл можно оценить:  $v^2 \Delta t$ ,  $\Delta t = (1/\omega)(v/v_A)^2$ ,  $v_A$  — альвеновская скорость,  $\omega_A$  — частота альвеновской волны. Окончательно,  $\chi = v^4 / \omega_A v_A^2$ .

Рассмотрим приложение данного явления к солнечным пятнам. Существует проблема быстрого распада пятен, не объясняемая простым



омическим затуханием. Если интерпретировать наблюдаемые в пятнах движения как МГД-волны, что естественно, так как наблюдаемые  $v < v_A$ , то время затухания пятна будет  $L^2/\chi$ ,  $L$  — в данном случае наименьший размер пятна. Наблюдаемый размер пятна — величина большая, меньшим оказывается его вертикальный размер. В самом деле, на глубине нескольких сотен километров, где начинается конвективная зона, кинетическая энергия конвективных движений уже превышает магнитную в пятне. Поле эффективно «размешивается» конвекцией. Более точно, поле будет вытесняться из конвективной зоны в подфотосферную благодаря упомянутому выше диамагнетизму. На рис. 9, а изображен «разрез» биполярной

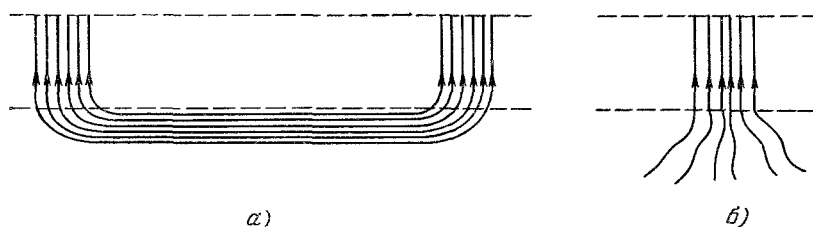


Рис. 9. Биполярная группа пятен.

Поле между пятнами вытесняется под фотосферу из-за диамагнетизма.

группы пятен. Отметим, что в литературе часто используется представление о «полной запутанности» поля пятна под фотосферой (рис. 9, б), в котором не учитывается диамагнетизм. Если теперь под  $L$  подразумевать глубину пятна, то получается время, сравнимое со временем жизни пятна.

Очень сильные магнитные поля при заданном источнике турбулентности приведут к ослаблению взаимодействия и уменьшению амплитуд волн. Казалось бы, что такие поля должны вообще погасить турбулентность, но этого не происходит. Эксперимент показывает, что турбулентность вырождается в двумерную<sup>92, 93</sup>. Понять это можно следующим образом. Пусть на проводящую среду наложено однородное поле  $\mathbf{H}_0$ , параллельное оси  $z$ . Если в начальный момент возмущения магнитного поля отсутствуют, то при наличии двумерного движения  $\mathbf{v} = \{v_x(x, y), v_y(x, y), 0\}$  они и не возникнут: член  $\text{rot} [\mathbf{v}\mathbf{H}_0]$  из (1) обращается в нуль. Раз нет возмущений поля, значит, нет ни токов, ни электромагнитных сил, действующих на жидкость и подавляющих движения. Такая двумерная турбулентность уже не «чувствует» поле в том смысле, что, если даже его еще усилить, это никак не скажется на ее свойствах. Дальнейшее изложение этого необычного явления (в частности, перекачка энергии в область малых волновых чисел и т. п.) выходит за рамки тематики статьи. Перестройка же будет иметь место, если поле  $\mathbf{H}_0$  зависит от  $x, y$ , но, по-прежнему, параллельно оси  $z$ . Интересно, что и в этом случае можно не считаться с электромагнитными силами<sup>94</sup>. В самом деле, уравнение для поля имеет вид

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = -(\mathbf{v}\nabla) H_z + v_m \Delta H_z, \quad (11)$$

другие компоненты обращаются в нуль, но в этом случае  $[\mathbf{H} \text{ rot } \mathbf{H}] = \nabla H^2/2$ , т. е. силы потенциальны и могут компенсироваться давлением. Рассматриваемая модель может оказаться полезной для понимания процессов в солнечных пятнах. Если там турбулентность вырождается в двумерную и если интересоваться только вертикальным полем, то его динамика будет описываться уравнением (11). Турбулентное движение «растаскивает» поле; в конечном счете, для среднего поля получается урав-

нение  $\partial \langle \mathbf{H} \rangle / \partial t = \chi \Delta \langle \mathbf{H} \rangle$ , коэффициент диффузии рассчитывался в работе <sup>94</sup>. Конечно, для больших  $v_m$  точный расчет возможен только для марковского процесса. В то же время, ввиду полного сходства (11) с температурным уравнением (только  $v_m$  заменяется на коэффициент молекулярной теплопроводности) или, вообще, с уравнением для скалярной примеси, имеется возможность экспериментального моделирования этого процесса. Это моделирование даст возможность определить точно коэффициент  $\chi$  не только для марковского процесса. Заметим, что в экспериментальной модели движение не обязано быть двумерным, достаточно лишь, чтобы температура была функцией от  $x, y$ . Возможно более непосредственное моделирование, когда на проводящую жидкость накладывается не только сильное поле, вызывающее турбулентность в двумерную, но и температурный градиент или другая примесь. При этом наложенное однородное магнитное поле служит только для создания двумерной турбулентности, а добавленная скалярная примесь моделирует поведение крупномасштабного неоднородного магнитного поля.

В работе Рэдлера <sup>95</sup> рассматривалась реакция слабого однородного магнитного поля на движение. Турбулентность еще не вырождается в двумерную, так как интенсивность поля недостаточно велика. Можно, однако, проследить тенденцию: движение приобретает черты двумерного. Неожиданным оказался другой результат: слабое поле не подавляет турбулентность (как это обычно считается), а в некоторых случаях и усиливает ее. Понять это можно следующим образом. Магнитное поле среди прочих эффектов может приводить к ослаблению потока энергии в область больших волновых чисел. В самом деле, совсем сильное поле вообще выключит этот перенос, так как возмущения превратятся в невзаимодействующие волны. Это приведет к скапливанию энергии при малых волновых числах и некоторому ее возрастанию по сравнению с тем, которое было в отсутствие наложенного поля.

До сих пор в этом пункте речь шла о поведении крупномасштабного поля. Одна из важнейших задач теории турбулентности — получение спектра: распределение энергии по масштабам. В МГД дело усложняется тем, что вопрос о взаимодействии движений плазмы с полем окончательно не решен даже в линейном приближении, т. е. если считать поля слабыми. Существуют полуэмпирические уравнения, которые при выключении магнитного поля дают колмогоровский спектр, а также обладают другими положительными свойствами и подтверждаются, в частности, различными численными тестами. Использование их <sup>72-74</sup> приводит к следующему результату. В области масштабов, где ни вязкость, ни омическая диссипация еще не сказываются, устанавливается стационарный поток энергии в область больших волновых чисел с равномерным распределением магнитной и кинетической энергий. Спектр имеет вид  $E \sim k^{-3/2}$ . Действительно, поток энергии  $\rho v^2 / 2\tau = H^2 / 8\pi\tau = \text{const}$ . Время взаимодействия  $\tau$  определяется из  $1/\tau = \omega v^2 / v_A^2$ ,  $v_A$  определяется полем наиболее крупного масштаба. Это время совпадает с временем взаимодействия МГД-волн в однородном поле. в данном случае это есть квазиоднородное поле крупного масштаба. Отсюда сразу следует  $v^2 \sim H^2 \sim k^{-1/2}$ ,  $E \sim k^{-3/2}$ .

#### д) Общее обсуждение по МГД-перестройке

1) Мы видели, что движение вызывает довольно эффективное уменьшение масштаба — поля, а затем его генерацию, либо быстрое уничтожение. Именно неучет этого обстоятельства привел Пиддингтона к критике динамо-механизмов; он указал на весьма низкую скорость диссипации полей из-за их больших размеров. Как тут быть с обычными представления-

ми о «вмороженности»? Ведь довольно-таки безобидное на первый взгляд сдвиговое движение или дифференциальное вращение способно нарушить «вмороженность». На этих примерах видны подводные камни такого представления<sup>96</sup>.

2) Дальнейшее развитие исследований будет, по-видимому, связано с рассмотрением простейших движений и их роли в динамо, в частности, дифференциально вращающегося шара с электропроводностью, зависящей от широты.

3) Простота изложенных в п. 1 механизмов позволяет проверить теорию в лабораторном эксперименте, а также использовать ее в технике. На рис. 4 фактически изображена динамо-машина без обмоток. Кроме того, уместно выдвинуть предположение: генерация имеет место во всех тех случаях, когда невозможно доказать противное, пользуясь правилами, изложенными в разделе а).

4) Учет нелинейных электромагнитных сил, действующих на плазму, на первый взгляд должен существенно усложнить рассмотрение. В действительности же это, по-видимому, не так. Получающийся во всех задачах инкремент неустойчивости  $\gamma \sim v/l$  следует из простой оценки (1) при условии, что  $\mathbf{H}$  почти параллельно  $\mathbf{v}$  (см. рассуждения раздела а)). Примерный вид неустойчивой гармоники изображен на рис. 10. Из рис. 10 видно, что электромагнитная сила будет, в основном, параллельна оси  $y$  и быстро менять знак, но такая сила может быть скомпенсирована давлением  $p(y)$ . Следовательно, она будет действовать в масштабе  $l$  (а не  $\delta$ ) и вызывать лишь простое торможение основной скорости. В справедливости этого утверждения можно убедиться также из энергетических соображений:

$$\frac{4\pi\rho}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{v}^2 d^3r = - \int \mathbf{v} [\mathbf{H} \text{ rot } \mathbf{H}] d^3r = - \int \mathbf{H} \text{ rot } [\mathbf{v} \mathbf{H}] d^3r \approx - \frac{v}{l} \int \mathbf{H}^2 d^3r.$$

В выражение (12) вообще не входит малый масштаб  $\delta$ .

5) Отмеченное выше уменьшение масштаба поля может иметь самостоятельный интерес, например, для объяснения тонкой структуры поля на Солнце<sup>97</sup>. Размер  $\delta$ , подсчитанный для грануляции и супергрануляции, весьма мал и пока инструментально не разрешим. Такие мелкие образования способны разогревать газ из-за джоулевой диссипации. Оценка наибольшей напряженности поля дает  $H_{\max} = H_0 Rm^{1/2}$ ,  $H_0$  — начальное поле. Из (12) следует, что учет обратного действия поля на движение необходим, если  $v_A \approx v$ , и, следовательно,  $v_A$  не может превышать  $v$ . Поэтому образования масштаба  $\delta$  и с напряженностью поля  $H_0 \sqrt{Rm}$  реализуются, если  $H_0 \sqrt{Rm} < v \sqrt{4\pi\rho}$  (что дает для грануляционных движений верхнюю оценку на начальное поле  $H_0 \leq 0,3$  гс). Если же  $H_0 \sqrt{Rm} > v \sqrt{4\pi\rho}$ , но  $H_0 < v \sqrt{4\pi\rho}$  (для грануляции  $0,3 \leq H_0 \leq 100$  гс), то уменьшаться масштаб будет уже не до столь малых размеров  $\delta$ , но все же тонкая структура поля будет образовываться. Наконец, если  $H_0 > v \sqrt{4\pi\rho}$  (солнечное пятно), действие указанного механизма становится невозможным.

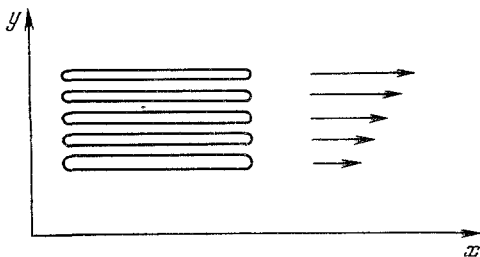


Рис. 10. Неустойчивое решение.

Силловые линии изображены сплошными линиями, стрелки указывают на скорость движения плазмы. Видно, что поле почти параллельно скорости и обладает малым масштабом. Большой градиент поля  $\sim H/\delta$  имеется, в основном, в направлении, перпендикулярном  $\mathbf{v}$ .

## 3. НИЗКИЕ ЧАСТОТЫ

## а) Общие замечания

Идея  $\alpha$ -эффекта может быть перенесена из МГД в плазму, в которой возбуждены колебания. В самом деле, в принципе, можно образовать псевдоскаляр  $\alpha \sim (\mathbf{k}\mathbf{H})$  ( $\mathbf{k}$  — волновой вектор), который следует из гиротропных свойств плазмы в магнитном поле. Формально гиротропность плазмы проявляется в появлении членов типа  $i\varepsilon_{ij}\omega_j^{(e)}/\omega$  ( $\omega^{(e)} = e\mathbf{H}/mc$ ,  $\omega$  — частота волны) в тензоре диэлектрической проницаемости. Однако сразу же ясно, что аппарат здесь совершенно не схожий с тем, что использовался в МГД-приближении.

Покажем, что корреляция  $\langle \mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v} \rangle$  появляется в плоской волне. Здесь под  $\mathbf{v}$  следует понимать уже скорость электронов. Рассмотрим продольные колебания; если  $\mathbf{H} = 0$ , то  $\mathbf{v} = \mathbf{k}\phi$ . При наличии магнитного поля в общем случае

$$\mathbf{v} = \phi \left\{ \frac{\mathbf{k} + ia [\mathbf{k}\omega^{(e)}]}{\omega} + \frac{b (\mathbf{k}\omega^{(e)}) \omega^{(e)}}{\omega^2} \right\}, \quad (12)$$

$a, b$  — константы. Далее

$$\langle \mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v} \rangle = \frac{\phi\phi^* ab (\mathbf{k}\omega^{(e)}) [\mathbf{k}\omega^{(e)}]^2}{\omega^3} + \text{к. с.} \quad (13)$$

Усреднение проводится по периоду. Итак, действительно  $\langle \mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v} \rangle \sim (\mathbf{k}\mathbf{H})$ . Кроме того, ясно, что эффект будет только в случае анизотропии колебаний, т. е. когда имеется избранная фазовая скорость и амплитуда колебаний с этой избранной скоростью наибольшая. В чисто изотропном случае образовать псевдоскаляр типа  $(\mathbf{k}\mathbf{H})$  уже невозможно, и  $\langle \mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v} \rangle = 0$ .

## б) Постановка задачи. Метод

Возможны две постановки задачи. Первая вполне аналогична проблеме динамо. Пусть в плазме возбуждены колебания и нет внешних источников поля. Что произойдет с флуктуацией магнитного поля? Ниже мы везде будем полагать, что плазма столкновительная, точнее, что характерная частота изменения поля  $\gamma$  много меньше частоты столкновений. Следовательно, без колебаний поле просто затухало бы согласно уравнению

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nu_m \Delta \mathbf{H} - \frac{c}{4\pi ne} \text{rot} [\mathbf{H} \text{ rot } \mathbf{H}], \quad (14)$$

$n$  — плотность электронов. Волны в плазме вызывают колебания зарядов и в линейном приближении никак не влияют на поле. Нелинейный ток, усредненный по периоду, дает исчезающий вклад. Магнитное поле считается слабонеоднородным:  $L \gg \lambda$ ,  $L$  — масштаб поля,  $\lambda$  — длина волны, и квазистационарным:  $\omega \gg \gamma$ . Ввиду того, что движения зависят от поля (см. (13)), нелинейный ток тоже зависит от поля и, так же как и поле, он слабонеоднороден и, вообще говоря, содержит вихревую составляющую. Последняя возбуждает поле и может конкурировать с омическим затуханием по (14).

Вторая постановка заключается в следующем. Пусть на плазму наложено однородное магнитное поле. Решается задача на устойчивость по отношению к магнитным возмущениям с размером  $L$  и частотой изменения  $\gamma$  при наличии заданных колебаний плазмы. Если выключить колебания, флуктуации будут затухать в соответствии с линеаризованным уравнением (14).

Наличие в плазме колебаний высокой интенсивности (например, ионный звук) может вызвать аномальную электропроводность, в этом случае в (14), а также во всех формулах под  $\sigma$  следует понимать аномальную электропроводность. Напомним, что в теории динамо плазма считается столкновительной и, хотя в инкремент  $\gamma \approx v/l$  частота столкновений не входит, сам вид неустойчивой гармоник (масштаб) определяется  $\sigma$ , а значит, и частотой столкновений электронов  $v$  с другими частицами. Здесь ситуация вполне аналогична: в окончательные формулы входит частота столкновений. Возникающие возмущения поля, вообще говоря, не есть волны; это сравнительно крупномасштабные ( $L > \Lambda$ ,  $\Lambda$  — длина свободного пробега электрона) и медленно растущие ( $v > \gamma$ ) образования. Их нельзя считать следствием непосредственного взаимодействия высокочастотных колебаний с этими возмущениями (например, распадной неустойчивости колебаний и т. п.) именно из-за того, что в результат входит частота столкновений.

Отметим, что плазма все же «не совсем» столкновительная. Это следует из самого существования колебаний:  $v < \omega_p$  ( $\omega_p$  — плазменная частота), если речь идет о ленгмюровских колебаниях;  $v_i < \omega$ ,  $v_i$  — частота столкновений ион — ион либо ион — нейтрал,  $\omega$  — частота ионного звука, если рассматривается последний.

Вычисление нелинейного тока можно проводить стандартными методами. Прежде всего находится линейный ток  $\mathbf{j}'$  и линейная скорость  $\mathbf{v}'$ : пользуясь известным тензором диэлектрической проницаемости плазмы в магнитном поле  $\epsilon_{ij}$ , можно перейти к  $\sigma_{ij}$ , а отсюда к  $\mathbf{j}'$  (полагая, что  $\mathbf{E} \sim \mathbf{k}$ ). Линейная скорость уже просто выражается через  $\mathbf{j}'$ :  $\mathbf{v}' = \mathbf{j}'/n_0 e$ , возмущения плотности  $n' = n_0 (\mathbf{k}\mathbf{v})/\omega$ . Далее вычисляется усредненный по периоду нелинейный ток  $\langle n' e \mathbf{v}' \rangle + \langle n_0 e \mathbf{v}'' \rangle$ . Поправка  $\mathbf{v}''$  находится из нелинейного уравнения движения, во все нелинейные члены подставляется линейная скорость  $\mathbf{v}'$ . Сама по себе методика проста, но громоздка, поэтому в этой статье мы будем выписывать лишь самые основные выражения.

#### в) Перестройка поля ионным звуком

В методических целях изложим сначала эффект качественно. Без поля движения электронов и ионов почти одинаковы и  $\mathbf{v}' \sim \mathbf{k}$ . В магнитном поле линейная скорость электронов имеет вид (13). Нелинейный ток  $\langle n' e \mathbf{v}' \rangle$  тоже имеет вид, аналогичный (13), причем наибольший интерес представляет последний член в скобке (13): при взятии ротора от него для введения его в уравнение для поля (14) он примет вид  $\text{rot } \alpha \mathbf{H}$ , так что по аналогии с (4) именно из-за него следует ожидать появления неустойчивости.

Ток  $\langle n' e \mathbf{v}' \rangle$ , обусловленный этим членом, может быть оценен:  $n' \approx n_0 v'/s$ ,  $s$  — скорость звука и  $\langle n' e \mathbf{v}' \rangle = n_0 e \langle v'^2 \rangle \omega^{(e)} (\omega^{(e)} \kappa) / s \omega^2$ ,  $\kappa$  — единичный вектор в направлении распространения волны. Теперь внесем этот ток в уравнения электродинамики:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} (\sigma \mathbf{E} + \langle n' e \mathbf{v}' \rangle), \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t},$$

здесь  $\mathbf{E}$  — поле самоиндукции. Тогда получим уравнение типа (4), где

$$\alpha = \frac{\langle v'^2 \rangle (\omega^{(e)} \kappa) v}{s \omega^2}. \quad (15)$$

Уравнение получается нелинейным, так как  $\alpha$  зависит от  $\mathbf{H}$ ; тем не менее те же физические соображения, приводящие к выводу о возможности генерации поля в линейном уравнении (4), применимы и здесь. Достаточно, например, рассмотреть двумерное поле  $\{H_x(x, y), H_y(x, y), H_z(x, y)\}$ .

(или, соответственно, в сферической системе осесимметричное поле  $\{H_r(r, \theta), H_\phi(r, \theta), H_\theta(r, \theta)\}$ ). Теперь плоская компонента  $H_x, H_y$  (для сферы — полоидальная  $H_r, H_\theta$ ) генерирует  $H_z$  (тороидальную  $H_\phi$ ) и наоборот. Строгое доказательство удастся сделать для определенного примера<sup>98</sup>. Что касается второй постановки задачи, то, конечно, она значительно проще: следует представить поле в виде  $\mathbf{H}_0 + \mathbf{h}$ , линеаризовать уравнение и решать задачу на устойчивость. Анализ показывает, что при условиях, указанных ниже, неустойчивость действительно имеет место.

В реальной ситуации ионный звук возбуждается при  $T_e > T_i$  и если токовая скорость  $v_d > s$ . Если полагать, что  $v_d$  ненамного превосходит  $s$ , возбуждение происходит в узком конусе, причем возбуждается широкий (по  $k$ ) спектр волн<sup>99</sup>. В этом случае (15) заменяется интегралом, причем от  $(\mathbf{k}\omega^{(e)})$  этот интеграл зависит слабо.

Корректный учет всех нелинейных членов приводит к уравнению

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -v_m \text{rot}^2 \mathbf{H} - \frac{c}{4\pi ne} \text{rot} [\mathbf{H} \text{rot} \mathbf{H}] + \\ + \text{rot} \{ \alpha \mathbf{H} + b (\omega^{(e)} \mathbf{H}) \mathbf{x} + d (\mathbf{x} \omega^{(e)}) (\mathbf{x} \mathbf{H}) \mathbf{x} + e [\mathbf{x} \mathbf{H}] \}, \quad (16)$$

где  $b, d = \langle v'^2 \rangle v / s \omega^2$ ,  $e = \beta s$ ,  $\beta$  — отношение энергии колебаний к энергии плазмы<sup>99-101</sup>. Ясно, что в фигурной скобке (16) собраны все комбинации, представляющие собой истинные векторы и содержащие поле линейно и квадратично.

Сравнение генерационного  $\alpha$ -члена с диссипационным  $v_m \text{rot}^2 \mathbf{H}$  приводит к критерию неустойчивости и инкременту

$$L\alpha > v_m, \quad \gamma = \frac{\alpha}{L}. \quad (17)$$

Неустойчивые флуктуации сносятся, как это видно из (16), вдоль  $\mathbf{x}$  со скоростью  $e = \beta s$ . Анализ уравнения (16) показывает, что возможны не только растущие решения, но и решения, связанные с перестройкой поля, в частности, быстрозатухающие.

Из выражения (15) видно, что при наличии спектра колебаний наибольший вклад вносят низкочастотные. Возникает вопрос, при каких  $\omega$  обрезать спектр. Само рассмотрение справедливо, если  $\omega^{(e)} < \omega$ , поэтому, если частота  $\omega^{(e)}$  выше наименьшей частоты турбулентности  $\omega'$ , обусловленной столкновениями ион — ион или ион — нейтрал<sup>99</sup>, то спектр обрывается именно на частоте  $\omega^{(e)}$ . В противном случае спектр обрывается на  $\omega'$ . Имеется еще одно ограничение на нижнюю частоту. Дело в том, что для низких частот оказываются существенными непотенциальные электрические поля  $\mathbf{E}_b$ , и колебания перестают быть продольными. Для оценки  $\mathbf{E}_b$  внесем электронную часть тока  $nev'$  в уравнения электродинамики,  $\mathbf{v}'$  определяется из (13):

$$\text{rot} \mathbf{H} = nev' \frac{4\pi}{c} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_b}{\partial t}, \\ \text{rot} \mathbf{E}_b = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t}, \\ \text{rot}^2 \mathbf{h} = n_0 e \text{rot} \mathbf{v}' \frac{4\pi}{c} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{h}}{\partial t^2}, \quad (18)$$

$\mathbf{h}$  — флуктуационное магнитное поле; ионный ток несуществен, так как его непотенциальная часть  $\sim \omega_i / \omega$  ( $\omega_i$  — ионная циклотронная частота) — этот параметр пренебрежимо мал. Так как  $k^2 \gg \omega^2 / c^2$ , ток смещения несуществен, поэтому  $\mathbf{h} \approx (4\pi/c) (ne [\mathbf{k}\mathbf{v}]/k^2) (\omega^{(e)}/\omega)^a$ , здесь величина  $a$  зависит от того, от какого члена (13) берется ротор. Если от второго, то  $a = 1$ , от третьего —  $a = 2$ , ротор от первого члена обращается в нуль. Отсюда  $E_b = (\omega^{(e)}/\omega)^a \Omega_p^2 |\nabla \phi| / c^2 k^2$ ,  $\Omega_p$  — плазменная частота ионов,

$\nabla\varphi$  — потенциальное электрическое поле. Величина  $(\omega^{(e)}/\omega)^a$  есть малый параметр, но тем не менее мы учитываем в (13) члены с этим параметром; выражение для  $E_b$  содержит дополнительный параметр  $\Omega_p^2/c^2k^2$ , который мал, если  $\omega > \Omega_p s/c$ . Итак,  $\Omega_p s/c$  есть вторая нижняя граница на частоты.

### г) П р и л о ж е н и я

В эксперименте, в принципе, можно создать самые благоприятные условия:  $\omega^{(e)} \approx \omega'$  и критерий (17) примет вид  $L\omega_p^{21}\langle v'^2 \rangle / (\omega' c^2 s) > 1$ . Обрежем спектр на ион-ионных столкновениях, тогда согласно <sup>102</sup> (считая, что токовая скорость  $v_d$  ненамного превосходит  $s$ )  $\omega' = v_i \sqrt{M_i/m}$ . Кроме того, будем полагать, что  $\beta = 10^{-2}$ , тогда для  $n = 10^{15} \text{ см}^{-3}$ , тепловой скорости электронов  $v_T = 10^9 \text{ см/сек}$  (термоядерная плазма) и  $T_i$ , ненамного меньшей  $T_e$ , получим критический размер  $L_k = 1 \text{ см}$ . Из равенства  $\omega^{(e)} = \omega'$  получаем  $H \approx 10 \text{ гс}$ ,  $\gamma = 2 \cdot 10^5 \text{ сек}^{-1}$ . Отметим, что частота  $\omega' > \Omega_p s/c$ , поэтому именно на ней следует обрезать спектр. Однако, этот ионный звук нельзя возбуждать током, но можно пучком, причем концентрация пучка должна быть меньше плотности плазмы: дело в том, что большая плотность тока сама по себе вызовет поле, превосходящее  $10 \text{ гс}$ , и условие  $\omega^{(e)} \approx \omega'$  нарушится.

В условиях солнечной хромосферы  $n = 10^{11} \text{ см}^{-3}$ ,  $\omega^{(e)} = 10^8$  ( $H = 5 \text{ гс}$ ),  $v_T = 10^8 \text{ см/сек}$  положим  $\beta = 10^{-2}$ ,  $v = 10^7$ , тогда  $L_k = 10^4 \text{ см}$ ,  $\gamma = 0,2 \text{ сек}^{-1}$ . Предположим теперь, что реализуется быстросглатывающее решение ( $\gamma$  есть декремент) и рассматривается поведение всего поля масштаба  $L$ . Тогда  $\omega^{(e)}$  уменьшается и  $\alpha$ ,  $\gamma$  согласно (15) и (17) увеличиваются ( $\omega = \omega^{(e)}$ ), т. е. процесс ускоряется. В конце концов частоту  $\omega$  необходимо будет приравнять  $\omega'$ , и ускорение прекратится. В целом ионный звук вызовет довольно быстрое уничтожение поля.

### д) С л а б о и о н и з о в а н н а я п л а з м а

Если столкновения электронов и ионов происходят только с нейтралями и все частоты столкновений (в том числе и наименьшая — обратное время передачи импульса нейтральным атомам,  $\sim v' n_i / n_n$ ,  $v'$  — частота столкновения ион-нейтрал,  $n_i$  — плотность ионов,  $n_n$  — нейтралов) меньше частот процессов, как в солнечной фотосфере, то ситуация особенно проста. В данном случае трехжидкостная гидродинамика сводится к обычной магнитной гидродинамике, т. е. к уравнениям (1), (5), причем под плотностью здесь надо понимать плотность нейтралов. Все это легко проверить, добавляя в уравнения движения нейтралов, ионов и электронов члены типа  $v'(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_n)$ . В частности, альвеновская волна представляет собой колебания всех трех компонент, поэтому скорость ее определяется плотностью нейтральной компоненты.

Для солнечной фотосферы выполняется также условие «вмороженности», т. е. несмотря на то, что частота столкновений велика, все же  $\omega_{\text{пр}} < v_m/l^2$ ,  $\omega_{\text{пр}}$  — частота процесса. При этом поле «вморожено» в нейтральную компоненту. В кинематической постановке динамо теперь задается скорость нейтралов. Эта скорость передается посредством столкновений ионизованной компоненте, последняя уже влияет на поле. Обратное действие поля осуществляется в обратном порядке: поле действует на ионизованную компоненту, которая передает скорость нейтральной. В работе Лерхе <sup>103</sup> рассмотрено турбулентное состояние такой трехжидкостной гидродинамики. Для замыкания возникающей бесконечной цепочки уравнений автор пользуется гипотезой Миллионщикова — Чандрасекара: четвертые моменты выражаются через вторые по Гауссу.

## е) Д а в н о и з в е с т н ы е м е х а н и з м ы

Надо сказать, что возбуждения магнитной флуктуации пучком или высокочастотными колебаниями — ситуация вовсе не новая в физике плазмы. Так, хорошо известно, что в плазме не слишком низкого давления  $p$  ( $8\pi p/H^2$  не очень мало) возможна раскачка магнитного звука при  $v_d > v_A^0$ . Сюда же относится планговая неустойчивость: возбуждение магнитных возмущений, обусловленное анизотропией функции распределения ( $p_{\parallel} > p_{\perp}$ )<sup>104</sup>. Можно также упомянуть рассмотренное в<sup>105</sup> нарастание альвеновских волн при наличии высокочастотного звука, а также тиринг-неустойчивость<sup>106</sup> и новый механизм возбуждения МГД-волн в неоднородной плазме<sup>107</sup>. Следует отметить, что в отличие от перечисленных механизмов в предыдущих пунктах речь шла о самом крупномасштабном поле, т. е. масштаб возмущения может быть сравним с размером объекта, и тогда оно не представляет собой волны. В частном случае это может быть и волна, но «чувствующая» (по инкременту) частоту столкновений, и во всяком случае  $\gamma < \nu$ .

## ж) П л а з м а т в е р д о г о т е л а . О б щ и е з а м е ч а н и я

Хорошо известно, что твердотельной плазме присущи многие свойства обычной. Уже хотя бы поэтому в ней можно ожидать появления аналогичных магнитных неустойчивостей. Для эффективности процесса важно наличие достаточно интенсивного тока, поэтому ограничим свое рассмотрение металлами из-за большого числа носителей в них. Обычно рассматриваются свойства твердого тела в однородном магнитном поле. Оказывается, если привлечь неоднородное поле, то представляются разнообразные возможности его перестройки. В рассматриваемых ниже примерах в твердом теле непременно будет возбужден поток тепла. В однородном магнитном поле возникают различные термоэффекты и токи, в неоднородном же возможна перестройка. Явление напоминает тот же термоэффект, но с обратной связью, т. е. если эффект Зеебека осуществляется за счет потока тепла и различных термо-э.д.с. двух металлов (неоднородность термо-э.д.с.), то здесь имеется тот же поток тепла и неоднородность магнитного поля. Обратная связь состоит в том, что вызываемый ток усиливает поле, а значит и неоднородность, что в свою очередь приводит к усилению поля. Именно таким образом реализуется неустойчивость.

Здесь следует упомянуть о давно известном электроакустимагнитном эффекте. Пусть в пьезополупроводнике возбуждаются акустические колебания внешним электрическим полем: дрейфовая скорость электронов для этого должна превышать скорость звука. Если диаграмма направленности излучения фононов внутри конуса Черенкова несимметрична относительно направления дрейфа носителей (что связано с пьезоэлектрическими свойствами кристалла), то акустическая сила вызывает вихревой ток и магнитный момент у образца<sup>108</sup>.

## з) Т е п л о в о е д и н а м о

Наиболее наглядно указанный выше эффект проявляется в простейшем случае: фононы отсутствуют, имеется поток тепла. В этом случае связь между электрическим полем и потоками тепла и электронов задается в общем случае в виде

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{j}}{\sigma} + R[\mathbf{Hj}] + q\nabla T + [\boldsymbol{\omega}^{(e)}\nabla T] \frac{n_1}{\nu} + \boldsymbol{\omega}^{(e)}(\boldsymbol{\omega}^{(e)}\nabla T) \frac{n_2}{\nu^2} \quad (19)$$



(см., например,<sup>109</sup>),  $\mathbf{j}$  — ток,  $\nabla T$  — градиент температуры, кинетические коэффициенты мы выписали в таком виде, чтобы  $q$ ,  $n_1$ ,  $n_2$  имели одинаковую размерность. В этом пункте пренебрежем пятым членом, он мал по сравнению с четвертым при  $\omega^{(e)} \ll \nu$ , что и будет предполагаться. Возьмем ротор от (19), перейдем к уравнению для  $\mathbf{H}$  с помощью уравнений Максвелла, тогда получим

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\text{rot} [\mathbf{H} \nabla \Phi] + \nu_m \Delta \mathbf{H}, \quad \nabla \Phi = \nabla T \frac{en_1}{m\nu}; \quad (20)$$

здесь мы пренебрегли током Холла (что возможно, так как  $\omega^{(e)} \ll \nu$ ), кроме того, для исключения эффекта Зеебека  $q$  считается постоянным: обычных термотоков не возникает. Сходство (20) с (1) очевидно. Магнитное поле предполагается слабонеоднородным, более конкретно: (19) справедливо, по крайней мере если  $\Lambda \ll L$ ,  $L$  — масштаб неоднородности. Кроме того, для справедливости (19) и (20) необходимо, чтобы частота процесса  $\omega$  была много меньше  $\omega^{(e)}$ ,  $\nu$ . Граничные условия здесь отличны от тех, которые ставятся при исследовании термомагнитных явлений. В данном случае важно, чтобы поле не поддерживалось внешними источниками, т. е. нормальные к границе тела токи отсутствуют, из-за наличия поверхностных зарядов возникает потенциальное электрическое поле, не влияющее на магнитное.

Согласно<sup>12</sup> потенциальное движение в неограниченной среде не способно генерировать поле, а может вызывать лишь «антидинамо» — быстрое уничтожение поля. В данном случае «движение»  $\nabla \Phi$  потенциально, однако в ограниченной задаче генерация возможна. Для того чтобы убедиться в этом, обратимся к рис. 4. Теперь, конечно, цилиндры не вращаются, но по внутреннему цилиндру пущен поток тепла, т. е. один конец его поддерживается при температуре  $T_1$ , другой — при  $T_2$ . Во внутреннем цилиндре  $\nabla \Phi = \text{const}$ , и (20) есть уравнение с постоянными коэффициентами. Во внешнем цилиндре  $\nabla T = 0$ . Зазор представляет собой изолятор (вакуум), так что ни тепло, ни ток не проникает из внутреннего цилиндра во внешний. Проникает лишь электромагнитное поле. Теперь можно решать задачу на собственные функции  $\mathbf{H} = \mathbf{f}(r) \exp(Et + im\phi + ikz)$ , причем решение по разному ведет себя в трех областях: во внутреннем цилиндре магнитные неоднородности увлекаются потоком тепла, во внешнем токи наводятся полями, проникающими из внутреннего цилиндра, и, наконец, в зазоре между цилиндрами и вне цилиндров поле бестоковое и описывается гармонической функцией. Сшивку решений даст дисперсионное уравнение на  $E$ . К счастью, система уравнений для сшивок полностью совпадает с соответствующей системой, возникающей при вращении цилиндров, только вместо  $m\omega$  следует писать  $k|\nabla \Phi|$ . Поэтому результат получается без вычислений. Аналогом магнитного числа Рейнольдса является  $R_T = |\nabla \Phi| r_0 / \nu_m$ , если  $R_T > 1$ , флуктуации поля «вморожены» в тепловой поток. По аналогии с разделом а) гл. 2 имеем:  $\beta r_0 \approx k r_0 \approx N$ . Неустойчивость наступает при

$$R_T > N, \quad (21)$$

инкремент неустойчивости

$$\gamma = \frac{\nu_m N^2}{r_0^2}. \quad (22)$$

Обсудим теперь, насколько реальны выписанные условия неустойчивости. Для оценок примем  $n_1 = q = \pi^2 T / 3eE_F$ ,  $E_F$  — энергия Ферми (см. <sup>110</sup>), тогда (21) можно переписать в виде

$$\frac{\pi^2}{3} \frac{T}{E_F} \frac{\omega_p^2}{\nu^2} \frac{r_0 \nabla T}{mc^2} > N; \quad (23)$$

здесь  $T$  — средняя температура,  $(T_1 + T_2)/2$ . Рассмотрим для примера медный проводник. Полагая для оценок  $r_0 \nabla T \sim T$ ,  $\nu = 4,2 \cdot 10^{13} \text{ сек}^{-1}$  при комнатной температуре  $T_K$ ,  $n = 8 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$ , получим, что критерий (23) при  $T = T_K$  не выполняется. Примем закон  $\nu \sim T^5$  для температур ниже добаевской  $\theta$ ; мы видим, что (23) содержит очень сильную зависимость от  $T$ , поэтому достаточно несколько понизить температуру, фактически до  $T = 87^\circ \text{K}$  при  $N = 26$ , чтобы критерий (23) выполнялся.

Неустойчивая гармоника довольно сложна по виду: она не может быть ни осесимметричной, ни двумерной, чтоб не войти в противоречие с теоремами запрета динамо. Ясно одно: все поле будет концентрироваться в скин-слое толщиной  $\sim 1/k$  на поверхности внутреннего цилиндра и внутренней поверхности внешнего. Насыщение неустойчивости наступит, когда  $\omega^{(e)}$  уже не будет малым по сравнению с  $\nu$  и  $n_1$  начнет зависеть от  $\omega^{(e)}$ , кроме того, тепловой поток уже нельзя считать заданным, магнитное поле будет влиять на поток). Оценка  $\omega^{(e)} = \nu$  ( $T = 87^\circ \text{K}$ ) дает  $H = 4 \cdot 10^3 \text{ гс}$ .

Из решения дисперсионного уравнения видно, что не только  $\gamma = \text{Re } E \neq 0$ , но и  $\text{Im } E \neq 0$ , следовательно, имеется снос возмущений. Анализ показывает, что они сносятся со скоростью  $\nabla \Phi$  вдоль оси цилиндров. Поэтому, если решать дисперсионное уравнение относительно  $k$ , считая  $\omega$  действительным, можно получить пространственное усиление возмущений. Падающая электромагнитная волна с частотой  $\omega < \gamma$  будет преобразовываться в неустойчивую гармонику и усиливаться вдоль оси цилиндров.

Отметим, что модель на рис. 4 может реализоваться не только в лаборатории. В самом деле, зазор между цилиндрами можно заполнить изолятором с плохой теплопроводностью, и ничего не изменится. Теперь уже эта модель будет имитировать сплошную среду. Здесь возникает интересный вопрос: возможно ли возбуждение поля в *твердых оболочках* планет (Меркурий, Луна, Земля), обусловленное потоком тепла и неоднородными электропроводностью и теплопроводностью.

#### и) Неустойчивость на фоне однородного поля

В случае простого однородного проводника возбуждение, описанное в п. з), невозможно, и необходимо учитывать величины более высокого порядка малости по параметру  $\omega^{(e)}/\nu$ . Не будем поэтому пренебрегать пятым членом правой части (19). Теперь вместо (20) получится уравнение типа (16), псевдоскаляр  $\alpha \sim (H \nabla T)$ . Точное значение  $\alpha$ :  $\alpha = -en_2(\omega^{(e)} \nabla T)/m\nu^2$ . Так как  $\alpha$  зависит от поля, уместной является вторая постановка задачи в п. 2: рассматривается неустойчивость на фоне однородного поля; в частности, поле может быть параллельным  $\nabla T$ . Выполнение критерия (17), в принципе, возможно, если  $\omega^{(e)}$  ненамного меньше  $\nu$ . В этом случае, если считать, что  $n_2 = n_1 = q$ , то, как легко проверить, это тот же критерий (23), причем  $N = 1$ , который, как сказано выше, легко осуществить. Член  $\text{rot} [H \nabla \Phi]$  будет присутствовать в уравнении для поля и вызывать снос возмущений со скоростью  $\nabla \Phi$ .

Рассмотренные в п. з, и) модели есть не что иное, как непосредственное преобразование тепловой энергии в электромагнитную. Для оценок будем считать, что  $\omega^{(e)} \approx \nu$ . Фиксируем  $\omega$  в дисперсионном соотношении, тогда мы имеем пространственное усиление. Причем для реализации усиления, указанного в п. з), необходим специальный подбор условий или неоднородности образца, в то время как в п. и) образец может быть и однородным, зато необходимо наложить на него внешнее поле такое, чтобы  $\omega^{(e)} \approx \nu$ . Согласно (22)  $\gamma \sim T^{-11}$  (мы заменили неравенство (21) при-

ближенным равенством), поэтому при низких температурах условие  $\omega < \gamma$  фактически не накладывает ограничений и в отличие от обычного термо-эффекта в данном случае возбуждается *переменный ток* с частотой  $\omega$ . Мощность, выделяемая в единице объема,  $P = \gamma H^2 / 8\pi \sim T^{-1}$ . Возможность теплоотвода тоже улучшается с понижением температуры: требуемый поток через единичную площадку боковой поверхности внешнего цилиндра  $p/k \sim T^{-7}$ . Охлаждать удобно потоком низкотемпературной жидкости, протекающим в зазоре между цилиндрами — именно прилегающие к зазору части металла на толщине  $1/k$  нагреваются. Для примера рассмотрим медь при  $T = \theta/5 \approx 60^\circ \text{K}$ ,  $r_0 = 10 \text{ см}$ , тогда  $\gamma = 61 \text{ сек}^{-1}$ ,  $1/k = 2 \cdot 10^{-2} \text{ см}$ ,  $\Lambda = 6 \cdot 10^{-3}$ , так что условие слабой неоднородности  $L = 1/k > \Lambda$  выполняется. Условие слабой нестационарности  $\omega < \gamma < \omega^{(e)}$  выполняется уже при  $H > 3 \cdot 10^{-6} \text{ гс}$ . Частота столкновений при этой температуре  $\nu = 10^{10} \text{ сек}^{-1}$  и  $\gamma \ll \nu$ , т. е. процесс происходит сравнительно медленно. Поток тепла, требуемый для теплоотвода при этих параметрах,  $p/k = 10^{-3} \text{ вт/см}^2$ .

#### 4. ВЫСОКИЕ ЧАСТОТЫ

##### а) Геликонные частоты

Геликоны соответствуют частотам между  $\omega_i$  и  $\omega^{(e)}$  и представляют собой сильно гиротропные колебания. Фактически, это винт в чистом виде. Поэтому, казалось бы, геликоны должны служить хорошим генератором крупномасштабного поля, создавая  $\alpha$ -эффект. Расчет, однако, показывает, что они способны лишь приводить к аномальной диффузии поля (точно так же, как МГД-волны; см. раздел г) гл. 2).

При наличии источников геликонов, например, неустойчивостей, вызывающих их раскачку, геликоны взаимодействуют друг с другом и с другими колебаниями плазмы. При этом может установиться равновесный спектр — распределение энергии по частотам. Универсального спектра колебаний не существует, он зависит от разнообразных условий плазмы. Спектры в бесстолкновительной плазме были впервые получены Лифшицем и Цытовичем <sup>111</sup> и подробно описаны в монографии <sup>112</sup>.

В столкновительной плазме и при отсутствии других колебаний геликоны взаимодействуют друг с другом. Проще всего исходить из уравнения (14): при  $\omega^{(e)} \ll \nu$  холловский член не мал и уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\frac{c}{4\pi n e} \text{rot} [\mathbf{H} \text{rot} \mathbf{H}] \quad (24)$$

есть точное нелинейное уравнение для магнитных флуктуаций на геликонных частотах. Линеаризация уравнения (24) приводит к дисперсионному уравнению для геликонов  $\omega = \pm |\cos \theta| \omega^{(e)} c^2 k^2 / \omega_p^2$ ,  $\cos \theta = (\mathbf{kH}_0) / kH_0$ . Здесь представляются две возможности: слабая турбулентность и сильная. Слабую турбулентность в данном случае можно определить так: флуктуации поля  $\mathbf{h}$  много меньше однородного  $\mathbf{H}_0$ . Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что точное уравнение (24) сохраняет энергию  $\int \mathbf{H}^2 d^3r$ , или в однородной турбулентности,  $\langle \mathbf{H}^2 \rangle$ .

Пользуясь приближением слабой связи (т. е. выражая четвертые моменты через вторые с помощью приближения хаотических фаз или, что то же, с помощью гипотезы Миллионщикова), можно доказать наличие перекачки энергии в область больших волновых чисел, обусловленное нелинейным взаимодействием геликонов <sup>113</sup>.

Теперь можно поставить задачу так, как она ставится в гидродинамике при получении колмогоровского спектра. Пусть геликоны возбуждаются при низких частотах  $\omega < \omega_i$  и затухают из-за омических потерь при больших частотах. В области  $\omega_i < \omega < \omega^{(e)}$  установится универсальный

спектр. Сохранение потока энергии в область больших волновых чисел дает  $\hbar^2/\tau = \text{const}$ ,  $\tau$  — время жизни геликона. Если турбулентность слабая, то так же как в гл. 2 п. 5),  $1/\tau = \omega \hbar^2/H_0^2$ , и так как  $\omega \sim k^2$ , то  $\hbar^2 \sim k^{-1}$  и

$$E \sim k^2. \quad (25)$$

Этот спектр был получен в работе <sup>114</sup>. Так как  $1/\tau \sim k$ , а омическое затухание  $\sim \nu_m k^2$ , то в конце концов при больших  $k$  спектр обрезается затуханием при  $\hbar^2 = H_0^2 \nu/\omega^{(e)}$ . Если же турбулентность сильная, то величину  $1/\tau$  необходимо оценить непосредственно из точного уравнения (24):  $1/\tau = ck^2 \hbar/4\pi ne$ . Из условия стационарности потока получаем  $k^2 \hbar \hbar^2 = \text{const}$

$$E \sim k^{-7/3}, \quad (26)$$

т. е. более крутой спектр, чем для слабой турбулентности <sup>113</sup>. И в этом случае  $1/\tau \sim k^{4/3}$  растет медленнее, чем  $\nu_m k^2$ ; пользуясь полным уравнением (14), легко понять, что этот спектр обрезается при  $eh/mc = \nu$ .

Какой же спектр установится в реальной ситуации сильной турбулентности, когда  $\hbar$  для частот  $\omega \approx \omega_i$  не меньше самого  $H_0$ ? В области наименьших  $k$  (определяемых  $\omega \gtrsim \omega_i$ ) установится спектр (26). При больших волновых числах будет наблюдаться отклонение от локальности турбулентности, ибо эта область будет взаимодействовать также с большими масштабами. Крупномасштабные флуктуации будут играть роль поля  $H_0$  и в мелких масштабах флуктуации превратятся в волны со спектром (25).

Крупномасштабное слабонеоднородное поле (масштаб  $L \gg 1/k$ ) будет перестраиваться в присутствии турбулентных геликонов. В самом деле, перекачка в область больших  $k$  действует также на самую крупномасштабную составляющую. Так же, как в гидродинамике, турбулентная вязкость разрушает крупномасштабное течение, турбулентные геликоны вызовут диссипацию поля масштаба  $L$  за время  $L^2/\chi$ , где турбулентная вязкость  $\chi = \sqrt{\langle \hbar^2 \rangle} c/4\pi ne$ . Легко проверить, что  $\chi/\nu_m = e \sqrt{\langle \hbar^2 \rangle}/mc\nu$ , а так как  $\sqrt{\langle \hbar^2 \rangle} \approx H_0$ , то  $\chi/\nu_m = \omega^{(e)}/\nu$ , ( $\chi/\nu_m$  — аналог числа Рейнольдса).

#### б) Лэнгмюровские колебания

Возбуждение крупномасштабных полей лэнгмюровскими колебаниями было впервые рассмотрено Цытовичем <sup>115</sup>. Если в плазме возбуждены лэнгмюровские колебания, то имеется неустойчивость типа апериодически нарастающего второго звука. Возбуждаются поперечные волны, для которых  $H = \epsilon^t E$ ,  $\epsilon^t$  — турбулентная диэлектрическая проницаемость. Так как  $\epsilon^t \gg 1$ , следовательно,  $H \gg E$ , т. е. основная энергия колебаний — магнитная. При определенных условиях масштабы магнитных возмущений могут оказаться немалыми. Данный механизм подробно описан в монографии <sup>116</sup>.

Перейдем теперь к столкновительной плазме. Высокочастотные колебания электронов в магнитном поле можно получить из уравнения движения:

$$-i\omega \mathbf{v} = ie\mathbf{f}\mathbf{k}/m + [\mathbf{v}\omega^{(e)}] \quad -k^2\varphi = 4\pi n'e, \quad (27)$$

$\omega n' = n_0(\mathbf{k}\mathbf{v})$ . Решая (27) относительно  $\mathbf{v}$ , получим

$$\mathbf{v} = \left\{ \omega \mathbf{k} - \frac{(\omega^{(e)}\mathbf{k})\omega^{(e)}}{\omega} + i[\mathbf{k}\omega^{(e)}] \right\} \psi, \quad (28)$$

$$\psi = -\frac{e}{m} \frac{\varphi}{\omega^2 - \omega^{(e)2}}.$$

Очевидно, (28) есть частный случай (13). Магнитное поле создает слабую гиротропность колебаний при  $\omega^{(e)} \ll \omega_p$ , что будет приниматься в дальнейшем. В самом деле,  $\langle \mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v} \rangle \sim (\mathbf{k} \omega^{(e)})$ . Уравнение (27) справедливо, если непотенциальное электрическое поле  $\mathbf{E}_b$ , которое возникает много меньше, чем  $i\mathbf{k}\Phi$ . Оценка  $E_b$  проводится так же, как и для ионного звука. Будем считать, что  $ck \gg \omega_p$ , тогда током смещения в (18) можно пренебречь, флуктуации магнитного поля

$$h \sim \frac{4\pi}{c} \frac{n_0 e [\mathbf{k} \mathbf{v}]}{k^2} \left( \frac{\omega^{(e)}}{\omega} \right)^2, \quad E_b = \left( \frac{\omega^{(e)}}{\omega_p} \right)^2 \frac{\omega_p}{k^2 c^2} |\mathbf{k} \Phi|,$$

так что для  $k \gg \omega_p/c$  (это условие совпадает с условием малости тока смещения) с  $E_b$  можно не считаться.

Подсчет нелинейного тока  $\langle n' e \mathbf{v} \rangle$  приводит к выражению

$$\mathbf{j}'' = \langle n' e \mathbf{v} \rangle = n_0 e \omega^{(e)} \int (\omega^{(e)} \mathbf{k}) (k^2/\omega) \Phi(\mathbf{k}, \omega) d^3k d\omega, \quad (29)$$

$\Phi(\mathbf{k}, \omega) = \Phi_1(\mathbf{k}) \delta(\omega - \omega_p) + \Phi_1(-\mathbf{k}) \delta(\omega + \omega_p)$ .  $\Phi_1(\mathbf{k}, \omega)$  — спектральная функция колебаний. В интеграл (29) основной вклад вносят большие волновые векторы, поэтому можно для оценок считать, что  $k = k_j$ ,  $k_d$  — дебаевский волновой вектор. Разумеется, это верно, если спектр колебаний не слишком круто убывает к большим  $k$ , что мы и предполагаем. С другой стороны, для изотропных колебаний  $\Phi = \Phi(|\mathbf{k}|, \omega)$  и интеграл (29) обращается в нуль. Анизотропия обеспечивается при наличии пучковой неустойчивости; возбуждаются колебания с  $(\mathbf{k} \mathbf{x}) > 0$ ,  $\mathbf{x}$  — единичный вектор в направлении избранной фазовой скорости; если колебания возбуждаются пучком, то  $\mathbf{x}$  параллелен пучку. Индуцированное рассеяние плазмонов на частицах приведет к их изотропизации, однако избранное направление  $\mathbf{x}$  все же останется. Оценивая (29) с учетом вышесказанного, получим  $\mathbf{j}'' = -(\mathbf{x} \mathbf{H}) \text{ nev}_T \beta / 2mc^2$ .

В результате подстановки нелинейных токов в уравнения Максвелла получим уравнение <sup>117</sup>

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nu_m \Delta \mathbf{H} - \frac{c}{4\pi n_0 e} \text{rot} [\mathbf{H} \text{ rot } \mathbf{H}] - \text{rot } \alpha \mathbf{H} + \text{rot } b [\mathbf{x} \mathbf{H}], \quad (30)$$

$$\alpha = \frac{(\mathbf{x} \omega^{(e)}) v_T \beta}{2\sigma}, \quad b = 2\pi \beta v_T.$$

Итак, мы снова приходим к  $\alpha$ -эффекту. Критерий неустойчивости и инкремент имеют вид (17) с учетом (30). Если на плазму наложено однородное поле, то вопрос об устойчивости решается линеаризацией уравнения (30). В «классической» постановке теории динамо начальное слабонеоднородное поле усиливается до наблюдаемых значений. Причем сама начальная напряженность поля не существенна — она может быть бесконечно малой. Здесь ситуация иная. Уравнение существенно нелинейное:  $\alpha$  зависит от поля, поэтому критерий (17) может рассматриваться как условие на начальное поле. Слишком слабые поля не возбуждаются. Другая новая черта, связанная с нелинейностью — это неэкспоненциальное усиление. В самом деле, модельное уравнение  $\partial y / \partial t = y^2$ , отражающее квадратичность  $\alpha$ -члена по полю, имеет решение  $y = y_0 (1 - Et)^{-1}$  (см. рис. 11), обгоняющее по росту экспоненту. Сингулярность в  $1/E$  не представляет затруднения: рост поля останавливается при  $\omega^{(e)} \approx \omega_p$ .

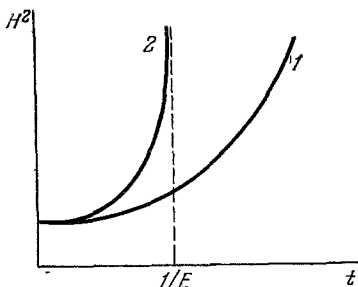


Рис. 11. Линейный (1) и нелинейный (2)  $\alpha$ -эффект при одинаковых начальных данных. Решение 2 имеет особенность при  $t = 1/E$ .

Интересно сравнить поле э. д. с., создаваемое лэнгмюровскими колебаниями, с тем, что дает формула Вайнрейха<sup>118</sup>. Последняя отражает связь между нелинейным током и затуханием волны. Очевидно, такая связь должна существовать, ибо импульс, передаваемый электронам и вызывающий э. д. с., берется от волны, в результате волна затухает. В соотношение Вайнрейха входит величина потока энергии волны. В нашем случае она не имеет смысла, так как в дисперсионном уравнении для плазмонов мы пренебрегли тепловыми поправками, и поток отсутствует (групповая скорость обращается в нуль). Выведем соотношение Вайнрейха для этого случая. Умножим величину плотности числа квантов  $w/\hbar\omega$  ( $w$  — плотность энергии колебаний) на  $\hbar k$ , получим плотность импульса  $wk/\omega$ . Далее, ввиду того, что декремент затухания плазмонов, обусловленный столкновениями, близок к  $\nu$ , объемная сила, действующая на электроны,  $n_0 F = wk\nu/\omega$ . Эта сила потенциальна, для учета непотенциальности необходимо умножить на  $(\omega^{(e)}/\omega_p)^2$  — меру непотенциальности колебаний. Следовательно,  $E = F/e = (wk\nu/n_0\omega e) (\omega^{(e)}/\omega_p)^2$ . Это есть аналог формулы Вайнрейха. С другой стороны, согласно (30),  $E = \alpha H/c$ . Легко видеть, что эти выражения просто совпадают при  $k = k_d$ .

### в) П р и л о ж е н и я

Критерий неустойчивости и инкремент в данной задаче имеют вид

$$2\pi\beta L\omega^{(e)}v_T > c^2, \quad \gamma = \frac{\omega^{(e)}v_T\beta}{2\sigma L}. \quad (31)$$

В эксперименте осуществить критерий (31) трудновато при малых  $\beta$ . Так, если  $\beta = 10^{-4}$ , то из критерия (31) следует:  $HL > 7,5 \cdot 10^7$  при  $v_T = 10^9$  см/сек ( $H$  выражено в гс,  $L$  — в см). Это довольно жесткое условие. Поэтому неустойчивость реализуется при больших  $\beta$ .

Перейдем теперь к обсуждению астрофизических примеров. Рассмотрим сравнительно высокотемпературную плазму. Например, для условий солнечных вспышек:  $v_T = 10^8$  см/сек,  $\beta = 10^{-4}$ , тогда  $HL > 7,5 \cdot 10^8$ . При  $H = 300$  гс  $L > 25$  км; критический размер 25 км, конечно, весьма мал по сравнению с размерами вспышечной области. Считается, что во вспышках  $\sigma$  определяется резонансными взаимодействиями, или, иначе говоря, столкновениями электронов с ионно-звуковыми колебаниями. Если это так, то в выражение для  $\gamma$  (31) следует подставить турбулентную электропроводность. Возникающие флуктуации поля могут служить источником дополнительного нагрева газа, ибо масштаб их довольно мал. Нелинейность уравнения (30) приводит к неоднозначности решения и различным возможностям. Так, возможно не только быстрое нарастание поля, но и его быстрое (по сравнению с обычным диффузионным) затухание, а также перестройка другого рода (ср. раздел в) гл. 3).

В работе Максимова<sup>119</sup> рассматривалось приложение данного механизма для высокоширотной ионосферы, где пучки определенно существуют и наблюдаются. Если  $\beta = (2/3) n_b v_b^2 / n_0 v_T^2$ , где  $n_b$ ,  $v_b$  — концентрация и скорость пучка, то критический масштаб  $L_k = 100$  км при  $n_b = 1$  см<sup>-3</sup>. Возмущения развиваются на фоне основного магнитного поля Земли, представляя собой МГД-волны, и регистрируются в виде определенных вариаций.

Указанный механизм позволяет сделать выбор между двумя интерпретациями линейно поляризованного рентгеновского излучения из вспышечных петель на Солнце<sup>120</sup>. В одной из них поляризация объясняется тормозным излучением анизотропных пучков<sup>121-123</sup>. В другой — томсоновским рассеянием излучения в фотосфере. В последней модели распре-

деление электронов в пучке изотропно <sup>124</sup>. В первой интерпретации работает предложенный выше механизм, во второй — нет (важна анизотропия пучка и колебаний). Если механизм работает, то возбуждаемые флуктуации могут быть, в принципе, зарегистрированы, что и позволит сделать выбор.

В работе Томозова <sup>125</sup> рассматривается действие плазменных механизмов усиления поля в квазарах и активных ядрах галактик. Наличие магнитных полей в указанных объектах необходимо для интерпретации их вспышечной активности, на что указал Шкловский <sup>126</sup>. Возбуждение поля в таких больших масштабах требует большого времени, поэтому приходится привлекать турбулентную электропроводность, обусловленную ионно-звуковыми колебаниями, что сильно уменьшает характерное время усиления. Оценки показывают, что такой механизм способен обеспечить величину поля порядка нескольких сотен гаусс за разумные времена.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

«Старая» теория динамо имеет достаточное число приложений. В то же время новые идеи и механизмы существуют в большей степени только в теории, здесь теория обогнала интерпретацию наблюдений. Конечно, такая ситуация не является удовлетворительной. Автор посчитал бы задачу данного обзора в значительной степени выполненной, если обзору удалось способствовать появлению большего числа приложений данных идей в астрофизике, геофизике и в эксперименте.

Выражаю благодарность профессорам Фришу (U. Frisch) и Пукé (A. Pouquet) за любезные разъяснения, касающиеся их работ, и присылку препринтов, профессорам Робертсу (P. H. Roberts), Соурду (A. M. Soward), Джейкобзу (J. A. Jacobs) за присылку препринтов, доктору Рэдлеру (K.-H. Rädler) за интерес к данной работе.

Сибирский Институт земного магнетизма,  
ионосферы и распространения радиоволн  
СО АН СССР, Иркутск

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. С. И. Вайнштейн, Я. Б. Зельдович, УФН **103**, 431 (1972).
2. M. Stix, *Astron. and Astrophys.* **37**, 121 (1974).
3. D. Gubbins, *Rev. Geophys. and Space Phys.* **12**, 137 (1974).
4. А. М. Совард, П. Х. Робертс, *Магнит. гидродин.*, № 1, 3 (1976).
5. K. H. Rädler, *Mem. Soc. Roy. Sci. Liege*, 6<sup>e</sup> ser., **8**, 109 (1975).
6. А. Гайлитис, *Магнит. гидродин.*, № 6, 19 (1970).
7. А. Гайлитис, *ibid.*, № 4, 12 (1973).
8. А. Гайлитис, Я. Фрейнберг, *ibid.*, № 1, 37 (1974).
9. D. Lortz, *Plasma Phys.* **10**, 967 (1968).
10. G. O. Roberts, *Phil. Trans. Roy. Soc.* **A271**, 411 (1972).
11. Ю. Б. Пономаренко, *ПМТФ* № 6, 47 (1973).
12. С. И. Вайнштейн, *ЖЭТФ* **65**, 550 (1973).
13. С. И. Вайнштейн, *ЖЭТФ* **68**, 997 (1975).
14. J. Leorat, U. Frisch, A. Pouquet, *Rept. at the NORDITA Meeting*, Copenhagen, June 1974.
15. U. Frisch, A. Pouquet, J. Leorat, A. Mazure, *J. Fluid Mech.* **68**, 769 (1975).
16. A. Pouquet, G. S. Patterson, Jr., *Numerical simulation of helical magnetohydrodynamic turbulence*, *Rept. of National Center for Atmos. Res.*, Boulder, Colorado, USA, March 1976.
17. T. G. Cowling, *Mon. Not. RAS* **94**, 39 (1933).
18. С. И. Брагинский, *ЖЭТФ* **47**, 1084 (1964).
19. Я. Б. Зельдович, *ЖЭТФ* **31**, 154 (1956).
20. A. Herzenberg, *Phil. Trans. Roy. Soc.* **A250**, 543 (1958).
21. A. M. Soward, *J. Math. Phys.* **12**, 1900 (1971).

22. A. M. Soward, *ibid.* **12**, 2052 (1971).
23. P. H. Roberts, A. M. Soward, *Ann. Rev. Fluid Mech.* **4**, 117 (1972).
24. A. M. Soward, *Phil. Trans. Roy. Soc. A* **272**, 431 (1972).
25. P. H. Roberts, *ibid.*, p. 663.
26. P. H. Roberts, K. Stewartson, *ibid.* **277**, 287 (1974).
27. S. Kumar, P. H. Roberts, *Proc. Roy. Soc. A* **344**, 235 (1975).
28. С. И. Брагинский, *Геомagnet. и аэроном.* **15**, 149 (1975).
29. Э. П. Кропачев, С. Н. Горшков, *ibid.*, с. 709.
30. E. N. Parker, *Astrophys. J.* **122**, 293 (1955).
31. Kato Shoji, *ibid.* **157**, 827 (1969).
32. P. A. Gilman, *Solar Phys.* **8**, 316 (1969).
33. P. A. Gilman, *ibid.* **9**, 3.
34. Kato Shoji, Y. Nakagawa, *ibid.* **10**, 476.
35. H. K. Moffatt, *J. Fluid Mech.* **44**, 705 (1970).
36. С. И. Брагинский, *Геомagnet. и аэроном.* **7**, 851 (1967).
37. S. Childress, A. M. Soward, *Phys. Rev. Lett.* **29**, 837 (1972).
38. A. M. Soward, *Phil. Trans. Roy. Soc.* **275**, 611 (1974).
39. P. H. Roberts, *Rept. at the 16th General Assembly of I. U. G. G., Grenoble, August-September 1975.*
40. P. H. Roberts, S. Stewartson, *J. Fluid. Mech.* **68**, 447 (1975).
41. A. M. Soward, *J. Fluid Mech.* **69**, 145 (1975).
42. А. З. Долгинов, *Письма ЖЭТФ* **18**, 67 (1973).
43. А. З. Долгинов, *Астрон. ж.* **51**, 388 (1974).
44. M. G. Rochester, J. A. Jacobs, D. E. Smylie, K. F. Chong, *Geophys. J. R. astr. Soc.* **43** (1975); *Rept. at the 16th General Assembly of I. U. G. G., Grenoble, August — September 1975.*
45. Б. А. Тверской, *Геомagnet. и аэроном.* **6**, 11 (1966).
46. А. З. Долгинов, *Изв. АН СССР сер. физ.* **39**, 354 (1975).
47. N. O. Weiss, *Proc. Roy. Soc. A* **293**, 310 (1966).
48. М. В. Келдыш, *ДАН СССР* **77**, 11 (1951).
49. E. N. Parker, *J. Plasma Phys.* **9**, 49 (1973).
50. S. I. Vainshtein, V. M. Tomozov, *Gerlands Beitr. Geophys. (Lpz.)*, **85**, 269 (1976); в кн. *Исследования по geomagnetизму, аэрономии и физике Солнца*, вып. 37, М., «Наука», 1975, с. 100.
51. С. И. Вайнштейн, В. М. Томозов, доклад на Симпозиуме МАС-ЕФО «Проблемы магнитных полей в космосе», КРАО, апрель 1976.
52. E. M. Drobyshevski, V. S. Yuferev, *J. Fluid Mech.* **65**, 33 (1974).
53. J. H. Piddington, *Cosm. Electr.* **3**, 60, 129 (1972).
54. J. H. Piddington, *Astrophys. and Space Sci.* **37**, 183 (1975).
55. M. Steenbeck, F. Krause, *Zs. Naturforsch.* **21a**, 1285 (1966); *Astron. Nachr.* **291**, 49 (1969).
56. K.-H. Rädler, *Mon. Ber. dt. Akad. Wiss. Berlin* **11**, 194 (1969).
57. F. Krause, *Rept. at the 71th Symposium of I.A.U., Praha, August 1975.*
58. С. И. Вайнштейн, *ЖЭТФ* **58**, 153 (1970).
59. I. Lerche, *J. Math. Phys.* **12**, 1858 (1971).
60. I. Lerche, *J. Math. Phys.* **14**, 1381, 1579, 1588 (1973).
61. P. H. Roberts, A. M. Soward, *Astron. Nachr.* **296**, 49 (1975).
62. P. H. Roberts, A. M. Soward, *J. Math. Phys.* **16**, 609 (1975).
63. С. Б. Пикельнер, *Основы космической электродинамики*, изд. 2-е, М., «Наука», 1966, гл. 5.
64. В. И. Татарский, *Распространение волн в турбулентной атмосфере*, М., «Наука», 1967, гл. 2 и 5.
65. С. И. Вайнштейн, *ЖЭТФ* **62**, 1376 (1972).
66. N. O. Weiss, *Phil. Trans. Roy. Soc. A* **256**, 99 (1964).
67. K.-H. Rädler, *Zs. Naturforsch.* **23a**, 1851 (1968).
68. С. И. Вайнштейн, *ПМТФ* № 1, 12 (1971).
69. Н. Н. Носков, *Магнит. гидродин.* № 3, 41 (1973).
70. Т. С. Иванова, А. А. Рузмайкин, *Препринт ИПМ АН СССР* № 43, Москва, 1975.
71. S. A. Orszag, *J. Fluid Mech.* **41**, 363 (1970).
72. S. Nagaijan, in: *Solar Mag. Fields*, Ed. Howard IAU, Dordrecht, D. Reidel, 1971, p. 487.
73. U. Frisch, J. Leorat, P. Pouquet, *Rept. at the 16th General Assembly of I.U.G.G., Grenoble, August-September 1975.*
74. A. Pouquet, U. Frisch, J. Leorat, *J. Fluid Mech.* (1976) (в печати).
75. В. И. Клячкин, В. И. Татарский, *Изв. вузов, сер. «Радиофизика»* **14**, 1400 (1971).
76. В. И. Клячкин, В. И. Татарский, *ibid.* **15**, 1433 (1972).
77. А. Гайлитис, *Магнит. гидродин.* № 2, 31 (1974).



78. В. Старр, Физика явлений с отрицательной вязкостью, М., «Мир», 1971.
79. С. И. Вайнштейн, А. А. Рузмайкин, Астрон. ж. 50, 12 (1973).
80. R. H. Kraichnan, Phys. Fluids 10, 1417 (1967).
81. R. H. Kraichnan, ibid. 59, 745 (1973).
82. T. D. Lee, Quart. Appl. Math. 10, 69 (1952).
83. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Статистическая физика, изд. 2-е, переработ., М., «Наука», 1964, гл. 3.
84. J. Leorat, These (Observatoire de Paris, Meudon, 1975).
85. K. H. Moffatt, J. Fluid Mech. 53, 385 (1972).
86. K. H. Moffatt, ibid. 57, 625 (1973).
87. А. З. Долгинов, А. Д. Каминкер, Ю. А. Шибанов, ЖЭТФ 68, 69 (1975).
88. Т. С. Иванова, А. А. Рузмайкин, Препринт ИПМ АН СССР № 47, Москва, 1976.
89. Н. Н. Носков, Геомагнет. и аэроном. 13, 347 (1973).
90. С. И. Вайнштейн, Л. Л. Вайнштейн, ibid., с. 149.
91. С. Д. Иванов, ПМТФ, вып. 2, 16 (1976).
92. Ю. Б. Колесников, А. Б. Цинобер, Магнит. гидродин. № 3, 23. (1972); Изв. АН СССР, сер. «Механика жидкости и газа» № 4, 146 (1974).
93. А. Б. Цинобер, Магнит. гидродин., № 1, 7 (1975).
94. F. Krause, G. Rädiger, Prepr. Zentralinstitut für Astrophysik, Potsdam, 1975; Solar Phys. 42, 107 (1975).
95. K.-H. Rädler, Astron. Nachr. 295, 265 (1974).
96. S. I. Vainshtein, Rept. at the 71th Symposium of IAU, Praha, August 1975.
97. С. И. Вайнштейн, Г. В. Ку克林, В. П. Максимов, доклад на Симпозиуме МАС-ЕФО «Проблемы магнитных полей в космосе», КрАО, апрель 1976 г.
98. С. И. Вайнштейн, ЖТФ 45, 1623 (1975).
99. Б. Б. Радомцев, в кн. Вопросы теории плазмы, вып. 4, М., Атомиздат, 1964, с. 188.
100. С. И. Вайнштейн, в кн. Аннотации докладов II Международной конференции по теории плазмы, Киев, октябрь 1974 г.
101. С. И. Вайнштейн, доклад на Международном симпозиуме КАПГ, Эйзенах, январь 1975 г.; Gerlands Beitr. Geophys. (Lpz.) 85, 93 (1976).
102. А. А. Галеев, Р. З. Сагдеев, цит. в<sup>99</sup> сборник, вып. 7, 1973, с. 3.
103. I. Lerche, Plasma Phys. 15, 417 (1973).
104. Р. З. Сагдеев, цит. в<sup>99</sup> сборник, вып. 4, 1964, с. 20.
105. A. Rogister, J. Plasma Phys. 6, 309 (1971).
106. А. А. Галеев, Л. М. Зеленый, ЖЭТФ 69, 882 (1975).
107. А. Б. Михайловский, О. А. Похотелов, Физ. плазмы 1, 786 (1975).
108. В. И. Пустовойт, УФН 108, 596 (1972).
109. Дж. Займан, Электроны и фононы, М., ИЛ, 1962, гл. 12.
110. А. А. Абрикосов, Введение в теорию нормальных металлов, М., «Наука», 1972, гл. 6.
111. М. А. Лифшиц, В. Н. Цытович, ЖЭТФ 62, 606 (1972).
112. В. Н. Цытович, Теория турбулентной плазмы, М., Атомиздат, 1971, гл. 4.
113. С. И. Вайнштейн, ЖЭТФ 64, 139 (1973).
114. В. М. Яковенко, ЖЭТФ 57, 554 (1969).
115. В. Н. Цытович, ДАН СССР 181, 60 (1968).
116. В. Н. Цытович, Теория турбулентной плазмы, М., Атомиздат, 1971, гл. 8.
117. С. И. Вайнштейн, ЖЭТФ 67, 517 (1974).
118. G. Weinreich, T. M. Sanders, H. G. White, Phys. Rev. 114, 33 (1959).
119. V. P. Maksimow, Gerlands Beitr. Geophys. (Lpz.), 85, 103 (1976); доклад на Международном симпозиуме КАПГ, Эйзенах, январь 1975 г.
120. В. П. Максимов, Астрон. ж. 53, 243 (1976).
121. I. P. Tindo, S. L. Mandel'stam, A. I. Shurygin, Solar Phys. 32, 469 (1973).
122. А. А. Корчак, Астрон. ж. 49, 137 (1972).
123. G. Elwert, E. Naug, Solar Phys. 15, 234 (1970).
124. И. Л. Бейгман, Астрон. ж. 51, 1017 (1974).
125. В. М. Томозов, Астрон. циркуляр АН СССР, № 918, 5 (1976).
126. И. С. Шкловский, Астрон. ж. 47, 742 (1970).