1976 г. Ноябрь Том 120, вып. 3
УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

539.12.01

НУЛЬ-ЗАРЯД И АСИМПТОТИЧЕСКАЯ СВОБОДА

В. Б. Берестецкий

1. Проблемы современной теории — это проблемы теории поля. Если классическая механика и квантовая механика представляют собой логически безупречные схемы, причем ограничения области применимости первой диктовались только опытом, а в отношении второй до сих пор не видно фактов, дававших бы повод к ее пересмотру, то теория поля с самого начала содержала внутренние противоречия.

Зачем нужна теория поля? Ее требует теория относительности, в которой всякое взаимодействие распространяется с конечной скоростью и поэтому требует переносчика взаимодействия — поле. Поле представляет собой некоторую динамическую систему, имеющую бесконечное число степеней свободы. С другой стороны, в силу того, что в релятивистской механике нет закона сохранения числа частиц, частицы могут рождаться и уничтожаться — всякая система имеет фактически бесконечное число степеней свободы, т. е. приобретает характер поля. Таким образом, релятивистская теория есть теория взаимодействующих полей.

Внутренние противоречия содержались уже, как хорошо известно, в классической электродинамике. Уравнения Максвелла — Лоренца дают возможность определять поле по заданному распределению зарядов и токов. Но распределение зарядов и токов само определяется полем. Уравнения движения зарядов дают возможность найти это распределение, но при заданном поле. Решение же совместной системы уравнений единой динамической системы «поле и заряды» наталкивается на непреодолимые трудности.

В классической электродинамике был сделан только один шаг. Можно найти сначала движение электрона в данном поле, потом найти поле, создаваемое им при данном движении, а затем учесть действие этого поля на движение электрона. Так вычисляется реакция излучения. Но для проведения такого метода последовательных приближений требуется выполнение условия: сила реакции излучения должна быть меньше первоначальной силы. Оно выполняется для поля с длиной волны, большей классического радиуса электрона $r_e = e^2/mc^2$. Ответа для меньших длин классическая электродинамика не знает.

Здесь трудности классической электродинамики снимаются внешним образом. Уже длины волн, значительно большие r_e, порядка комптоновской длины волны электрона $\lambda_e = \hbar/mc = 137\, r_e$, требуют квантового рассмотрения.

Классическая электродинамика остается принципиально неудовлетворительной, но практически трудности переносятся в квантовую электродинамику.

Решения уравнений квантовой электродинамики также строятся методом последовательных приближений (теория возмущений), причем решения выглядят как разложение по малому параметру $e^2 = 1/137$ *). И в первом приближении квантовая электродинамика привела к прекрасным результатам, описывающим широкую область явлений: излучение фотонов, рассеяние фотонов и электронов, образование и аннигиляция электронно-позитронных пар. Но попытки найти поправки к этим результатам приводили к нелепостям. Следующий член разложения содержал действительно лишнюю степень малого параметра e^2, но при нем входил в виде множителя интеграл по длинам волн типа

$$\int \frac{d\lambda}{\lambda},$$

в котором верхним пределом служила длина волны, характерная для данного процесса (определяемая, например, переданным импульсом или энергией), а нижний не ограничен, т. е. интеграл, логарифмически расходящийся на нижнем пределе. Ситуация здесь сходна с той, которая была в классической электродинамике при попытке вычислить электромагнитную массу электрона. Действительно, кулоновское поле покоящегося заряда на расстоянии r от него пропорционально $1/r^2$, поэтому энергия $\sim \int r^{-2}\, dr$. Заметим, что этот интеграл набирает всю собственную энергию электрона mc^2 уже в области $r > r_e/2$, так что физическое ограничение применимости областью $r > \lambda_e$ и в этом вопросе передает проблему квантовой электродинамике.

Такая странная ситуация, когда теория дает согласующиеся с опытом ответы приближенным методом, справедливость которого не может быть оправдана внутри самой теории тем, что поправки к ней малы, не могла не нервировать пионеров квантовой электродинамики. Поэтому они, в особенности Гейзенберг, ожидали такого же решения вопроса, каким он был для классической электродинамики, т. е. что появятся факты, противоречащие результатам квантовой электродинамики, и тогда надо будет считать, что нужна кардинально новая теория, и квантовая электродинамика будет ограничена (уже не изнутри, а извне) областью не очень малых расстояний или не очень больших энергий. Поэтому каждый новый экспериментальный факт первым делом трактовался с этой точки зрения. (Об умонастроении теоретиков в то время дает представление книга Гайтлера, вышедшая в 1936 г.). Так было, когда в космических лучах были обнаружены ливни. Это рассматривалось как противоречие с теорией,— в квантовой электродинамике вероятность рождения большого числа пар и фотонов в одном акте чрезвычайно мала. Потом оказалось, что ливни прекрасно описываются каскадной теорией без множественного рождения и в согласии с квантовой электродинамикой. Далее возникло противоречие между каскадной теорией и интенсивностью мягкой компоненты космических лучей в нижних слоях атмосферы. Противоречие резрешилось открытием мюонов и пионов и пересмотром схемы прохождения космических лучей, а каскадная теория, т. е. квантовая электродинамика, оказалась правильной.

Следующий этап развития теории начинается с нового опытного факта — открытия лэмбовского сдвига уровней. Величина его была по порядку величины такова, что могла бы быть интерпретирована как поправки второго порядка теории возмущений, если бы теория позволяла вычислить это второе приближение. И тогда он был вычислен. Каким образом? Ведь второе приближение содержит бесконечность, расходящийся интеграл! Грубо говоря, рецепт состоит в следующем. Закроем глаза на расходи-

*) Под e^2 здесь и в дальнейшем подразумевается безразмерная величина $e^2/\hbar c$.

мость интеграла. Сделаем вид, что не замечаем ее. Для этого лучше всего обозначить определенную (расходящуюся) его часть, например $\int^{\lambda_e}$, какой-нибудь буквой, a или δ. Будем при этом помнить, что при a или δ содержится в виде множителя малый параметр e^2. Заметим, что в выражение для какой-либо амплитуды, вычисленной с заданной точностью по степеням e^2, a и δ входят только в виде $e^2(1+\delta) = e'^2$, $m + \delta = m'$, где e и m — заряд и масса электрона. Тогда сделаем перенормировку, т. е. будем считать, что именно e' и m' есть измеряемые на опыте стандартным образом заряд и масса электрона. После этого перед нами окажется формула второго или высшего приближения, а бесконечностей нет. Точная процедура вычислений мало чем отличается от этой грубой схемы. В принципиальном плане желательно убедиться в однозначности процедуры и в том, что в любом приближении все может быть сведено к перенормировке массы и заряда. Это и было проделано.

Хороша ли такая теория? Да, прекрасным согласием с опытом. В настоящее время наиболее чувствительная проверка состоит в измерении аномального магнитного момента электрона и мюона. Для электрона вычисления доведены до третьего приближения и превышают по точности опыт. Для мюона эксперимент дошел в согласии с теорией до той точности, за которой надо учитывать вклад адронов. А как понять такое обращение с расходящимися интегралами? Самое простое — представить себе, что на самом деле нижний предел ограничен. Что-то внешнее по отношению к самой теории обрезает их, причем для нас не очень существенно, где именно, где-то на очень малых расстояниях.

2. Ученики Ландау, знавшие, как высоко он ценит конкретные физические результаты и как мало любит разговоры на общие «обосновательские» темы, были несколько удивлены той относительной сдержанностью, с которой Ландау встретил крупные успехи квантовой электродинамики в вычислении радиационных поправок. Но они проявили недостаточное понимание характера отношения к науке учителя. На самом деле Ландау не мог работать вне атмосферы идейной ясности. Это понятие в его представлении отнюдь не совпадало с формальной строгостью. Он действительно не любил дискуссий на темы об обосновании наук, но лишь о тех, основы которых считал для себя ясными, таких, например, как квантовая механика или статистическая физика. Совершенно иначе он вел себя в отношении тех областей, в которых ясности нет. Хорошим примером могут служить ранние его работы с Пайерлсом, а также отношение Ландау к возникшей позже проблеме несохранения четности.

Так же было и в эпоху радиационных поправок. Он ценил, конечно, результаты, но методы, которыми они были получены, считал формальными рецептами. И Ландау со своими учениками занялся поисками обоснования.

Результатом были четыре статьи Ландау, Абрикосова и Халатникова [1]. Постановка задачи в этих работах такая. Поскольку расходимости связаны с малыми расстояниями, т. е. с точечностью зарядов, то нельзя ли сначала найти решение для зарядов конечных размеров r_0, а затем уже посмотреть, что будет при $r_0 \to 0$. Чтобы пояснить этот подход, рассмотрим простой пример, который, как оказывается, полностью адекватен общей задаче. Пусть мы имеем два одинаковых заряда, находящихся на расстоянии r друг от друга. Если заряды находятся в пустоте, то потенциальная энергия их имеет вид закона Кулона

$$V = e^2/r$$

независимо от того, является ли заряд точечным или имеет произвольное сферически симметричное распределение с радиусом $r_0 < r$. Это выражение является решением уравнения электростатики

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \quad \text{или} \quad \Delta V = 0, \quad r > r_0$$

Если заряды находятся в диэлектрике, то уравнение электростатики принимает вид

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0,$$

где

$$\mathbf{D} = (1 + 4\pi\chi)\,\mathbf{E},$$

(χ — поляризуемость среды). Величина χ является в общем случае интегральным оператором. Выражение для V можно записать в виде

$$V = \frac{e^2 d}{r}.$$

Для нахождения d нужно знать поляризуемость среды. Заметим, что вид d зависит от размеров заряда r_0 и что решение уравнения электростатики нам нужно знать только в области $r > r_0$. Величину r_0 можно менять произвольно. Например, если даже заряд точечный, то мы можем вырезать вокруг него шарик радиуса r_0, но включить в $e\,(r_0)$, кроме первоначального заряда, все связанные заряды, вызванные поляризацией среды внутри сферы радиуса r_0 *). Если выбрать $r_0 = r$, то восстанавливается простой закон Кулона, т. е. при $r = r_0$ $d = 1$. Можно сказать, что задача сводится к определению заряда как функции радиуса $e^2\,(r)$:

$$e^2\,(r) = e^2\,(r_0)\,d. \tag{1}$$

В квантовой электродинамике заряды, помещенные в пустоту, взаимодействуют не по закону Кулона благодаря эффекту поляризации вакуума. Задача состоит в нахождении поляризации вакуума χ и функции d. Решение этой задачи методом теории возмущений означает, что в качестве исходного (нулевого) приближения мы принимаем закон Кулона, затем следующее приближение рассматривает поляризацию вакуума в данном поле и т. д. Таким образом, мы получаем решение в виде ряда

$$d = 1 + e^2 d_1 + \ldots$$

Функция d_1 содержит расходящийся интеграл, о котором шла речь ранее, $\int \lambda^{-1}\,d\lambda$. Но если мы исходим не из точечного заряда, а из заряда конечных размеров, то на d наложено дополнительно граничное условие: $d = 1$ при $r = r_0$. Это значит, что нижний предел интеграла теперь не 0, а r_0, и $\int\limits_{r_0}^{r} \lambda^{-1}\,d\lambda = \ln\,(r/r_0)$. Вместо расходящегося интеграла мы получили конечный, обрезанный на r_0. Достигли мы этого тем, что ограничили себя: мы не знаем, что происходит в области $r < r_0$, мы обозначили через e весь заряд, находящийся внутри сферы, включая в него первичный («голый») и связанные заряды вакуума. При этом оказывается, что хотя мы основывали теорию возмущений на малости e^2, параметром разложения

*) Не следует представлять себе оба заряда как шарики радиуса r_0. Таким надо считать только «активный» заряд, т. е. «создающий» поле. Конечно, безразлично, какому из двух зарядов приписать «активную» или «пассивную» роль. Важно, что только их произведение измеримо. В дальнейшем мы считаем функцией r_0 не e, а e^2.

является, кроме того, $e^2 \ln (r/r_0)$. Поэтому варьировать r_0 мы можем лишь в таких пределах, чтобы было выполнено условие

$$e^2 \ln \frac{r}{r_0} \ll 1.$$

Заметим еще, что такое простое выражение для d_1 имеет место при $r \ll \lambda_e$, тогда как при r порядка λ_e или $r > \lambda_e$ в этой формуле следует заменить r на λ_e (кроме того, добавляются не зависящие от r_0 члены, которые нас не будут интересовать; для простоты ограничимся расстояниями $r < \lambda_e$).

Надо сказать, что интерпретация обрезания расходящихся интегралов, использованная в этих работах, не явилась принципиально новой. Существенно новой была вторая часть постановки задачи, она сводится к нахождению функции d без использования теории возмущений. Дело в том, что формальная система уравнений квантовой электродинамики является скорее символической, чем реальной. Из нее можно получить ряд теории возмущений для амплитуд. Но нет замкнутой системы уравнений для амплитуд или функций Грина,— для них получается бесконечная система уравнений (уравнения Дайсона). В работе Ландау, Абрикосова и Халатникова показано, что при малых e^2 можно сформулировать замкнутую систему уравнений. Авторы решили ее для асимптотического предела $r_0 \ll r \leqslant \lambda_e$ и нашли, что

$$d = \frac{1}{1 + (2/3\pi)\, e^2 \ln (r/r_0)}, \tag{2}$$

т. е.

$$e^2(r) = \frac{e^2(r_0)}{1 + (2/3\pi)\, e^2(r_0) \ln (r/r_0)}. \tag{3}$$

Заметим, что в случае, когда $(2e^2/3\pi) \ln (r/r_0) < 1$, выражение (2) может быть разложено в ряд

$$d = 1 - \frac{2e^2}{3\pi} \ln \frac{r}{r_0} + \left(\frac{2e^2}{3\pi} \ln \frac{r}{r_0} \right)^2 + \ldots,$$

совпадающий с рядом, который можно получить в теории возмущений, если сохранять члены, содержащие e^2 и $\ln (r/r_0)$ в одинаковых степенях. Формулы (2) и (3) справедливы при меньших ограничениях: при $e^2 \ll 1$ и произвольном значении $r/r_0 \gg 1$ (но, конечно, $r < \lambda_e$; практически они пригодны до $r \sim \lambda_e$).

Таким образом, в этих работах показано, что если исходить из первичного заряда не точечного, а имеющего размеры r_0, то при $e^2 \ll 1$ существует решение для d. Это решение позволяет провести перенормировку заряда. То, что мы обычно называем физическим зарядом, есть постоянная, входящая в закон Кулона для длинноволновых фотонов. Это есть, в использованных терминах, $e(\lambda_e)$. Таким образом, мы можем производить вычисления по теории возмущений, выражать результаты через $e(\lambda_e)$, и первичный («голый») заряд $e(r_0)$ никогда не войдет в наши формулы, если нас интересует область $r > r_0$. Аналогично можно обосновать и перенормировку массы.

Формула (3) получена с учетом только вклада электронов в поляризацию вакуума. Кроме электронов, надо еще учесть вклад мюонов, других тяжелых лептонов, если они существуют, и, может быть, других частиц (например, кварков). Поэтому в пределе малых r коэффициент при логарифме в (2) и (3) следует увеличить в ν раз, где ν — эффективное число фермионов, участвующих в поляризации вакуума на малых расстояниях.

Результаты, аналогичные (2), (3), были получены почти одновременно Гелл-Манном и Лоу [2]. Они разработали метод, который в дальнейшем был развит как метод ренормгруппы (см. [9]). Исходным пунктом метода является соотношение (1). Так как d — безразмерная величина, то при $r \ll \lambda_e$ она является функцией только от заряда e и отношения r/r_0. Таким образом,

$$e^2(r) = e^2(r_0)\, d\left(e^2(r_0),\ \frac{r}{r_0}\right). \tag{4}$$

Соотношение (4) остается в силу при произвольном выборе r_0. Поэтому, полагая $r_0 = \rho$, $r = \rho + d\rho$ и учитывая, что $d(e^2,\ 1) = 1$, получим из (4), обозначив $e^2(\rho) = \alpha$, следующее дифференциальное уравнение

$$d\alpha = \varphi(\alpha)\, d\rho/\rho,$$

где

$$\varphi(\alpha) = \alpha\left(\frac{\partial d(\alpha,\ x)}{\partial x}\right)_{x=1} \tag{5}$$

или

$$\frac{d\alpha}{\varphi(\alpha)} = \frac{d\rho}{\rho}. \tag{6}$$

Интегрируя (6) в пределах от $\rho = r_0$ до $\rho = r$, получим

$$\ln\frac{r}{r_0} = \int\limits_{e^2(r_0)}^{e^2(r)} \frac{d\alpha}{\varphi(\alpha)}. \tag{7}$$

Для выполнения интегрирования в (7) нам нужно знать $\varphi(\alpha)$, функцию только одной переменной (заряда). Поэтому мы можем воспользоваться, считая заряд малым, теорией возмущений. Тогда мы получим

$$d(\alpha,\ x) = -1 - \frac{2\alpha}{3\pi}\ln x, \quad \varphi(\alpha) = -\frac{2\alpha^2}{3\pi} \tag{8}$$

и из (7) получим выражение (3) для $e^2(r)$.

Суть метода можно пояснить на языке эквивалентной электростатической задачи. Уравнение для потенциала мы решаем точно, а поляризуемость среды определяем по теории возмущений.

Метод Гелл-Манна — Лоу дает в принципе возможность улучшения приближения учетом в $\varphi(\alpha)$ членов более высокого порядка по α. Для этого надо в теории возмущений вычислить для $d(\alpha,\ x)$ члены порядка $\alpha^{n+1}\ln x$, не входящие в разложение формулы (2).

3. Перейдем теперь к анализу формулы (3):

$$e^2(r) = \frac{e^2(r_0)}{1 + \beta e^2(r_0)\ln(r/r_0)}, \tag{9}$$

где

$$\beta = \frac{2\nu}{3\pi}.$$

Проследим за тем, что происходит с $e^2(r)$ при уменьшении r_0 и постоянном $e^2(r_0)$. Формула (9) получена в предположении малости $e^2(r_0)$, величина же логарифма не ограничена. Следовательно, при уменьшении r_0 можно дойти до такого его значения, что

$$\beta e^2(r_0)\ln\frac{r}{r_0} \gg 1.$$

Тогда в знаменателе (9) можно пренебречь единицей, и $e^2(r)$ оказывается не зависящей от $e(r_0)$ величиной

$$e^2(r) = \frac{1}{\beta} \ln \frac{r}{r_0}. \qquad (10)$$

Теперь можно перейти к пределу точечного заряда

$$e^2(r) \to 0 \quad \text{при} \quad r_0 \to 0. \qquad (11)$$

Этот результат был получен Ландау и Померанчуком[3] и Фрадкиным[4].

Но мы ведь не обязаны считать $e^2(r_0)$ малым. Мы знаем из опыта лишь, что малым является «перенормированный» или «физический» заряд $e^2(\lambda_e)$. Решить точно задачу для больших $e^2(r_0)$ мы не в состоянии. Однако Ландау и Померанчук привели аргументы в пользу того, что результат (11) должен сохраняться и при произвольных $e^2(r_0)$. Эти аргументы основываются на формально точном выражении для $e^2(r)$. Его можно, например, представить в виде следующего функционального интеграла (см., например, [12])

$$e^2(r) = \int A(0)\,A(r)\,f(A)\exp\left[-\frac{1}{2e^2}\int A(x)\,\Box\,A(x)\,d^4x\right]dA;$$

здесь e^2 (т. е. $e^2(r_0)$) входит только в экспоненциальный множитель, выражающий роль свободного поля в лагранжиане, а множитель $f(A)$, выражающий роль взаимодействия, не содержит e. Но e^2 входит в экспоненте в знаменателе, и при этом уже при малых e^2, функция $e^2(r)$ оказывается не зависящей от e. Поэтому представляется естественным думать, что при увеличении e роль этого множителя, т. е. роль свободного поля по отношению к роли взаимодействия будет еще меньше.

«Мы приходим к фундаментальному выводу, что из формальной квантовой электродинамики, по-видимому, следует равенство нулю заряда электрона. Оговорка «по-видимому» относится к некоторой нестрогости изложенной выше аргументации». (Это — цитата из статьи Ландау и Померанчука).

Смысл результатов (9) — (11) прост. Заряд, помещенный в поляризующуюся среду, уменьшается за счет поляризации. Эта поляризация на малых расстояниях так сильна, что независимо от величины заряда на некотором расстоянии уже остаточный заряд не зависит от первоначального. В пределе точечного первичного заряда (даже бесконечного) от него ничего не остается на любом конечном расстоянии.

Этот результат существенно меняет наше представление о содержании уравнений квантовой электродинамики. Если прежде ситуация выглядела так: есть формальные уравнения и известно их решение в виде ряда теории возмущений, каждый член которого, кроме первого, содержит бесконечности. Теперь есть решение, полученное путем предельного перехода от заряда конечного размера к точечному, но это решение дает нулевой заряд, т. е. отсутствие всякого взаимодействия, отсутствие всех процессов. Такая теория не бессмысленна, но неудовлетворительна физически.

Если уравнения поля имеют решения, которые можно получить при помощи предельного перехода от заряда конечных размеров к точечному, то можно попытаться искать решения путем более общего предельного перехода, в котором есть два радиуса, r_0 — электрона и r_0' — взаимодействия электрона с полем. Такой метод был предложен Абрикосовым и Халатниковым[10]. Померанчук показал[5], что, используя его, можно освободиться от предположения о малости заряда $e^2(r_0)$ и получить результаты (10), (11) непосредственно при любом значении $e\,(r_0)$ в подтверждение соображений, высказанных в работе Ландау и Померанчука. Таким образом, был открыт путь к изучению полей с большой постоянной связи, например теории взаимодействия нуклонов с π-мезонным полем. В этом, собственно, состоял главный интерес исследований Померанчука.

В ряде работ [5] Померанчуком было показано, что и в этом случае теория поля приводит к нулевому значению эффективной постоянной связи $g\,(r)$ на конечных расстояниях (важный вопрос об учете мезон-мезонных взаимодействий был рассмотрен Дятловым, Судаковым и Тер-Мартиросяном [11]).

Вывод, который сделал Померанчук из этих результатов, был радикален: теория поля в существующей форме непригодна для описания сильных взаимодействий.

Как понимать практические успехи квантовой электродинамики в своей области? Перепишем соотношение (5) в виде, решенном относительно $e^2\,(r_0)$, и выберем $r = \lambda_e$:

$$e^2\,(r_0) = \frac{e^2\,(\lambda_e)}{1-\beta e^2\,(\lambda_e)\ln\,(\lambda_e/r_0)}\,; \tag{12}$$

здесь $e^2\,(\lambda_e)$ представляет собой, как уже отмечалось выше, «физический» заряд электрона, т. е. тот, который проявляется на больших расстояниях вне эффективной области поляризации вакуума. Когда мы входим внутрь этой области ($r_0 < \lambda_e$), то заряд увеличивается. Однако мы не можем на основании формулы (12) достичь большого заряда, так как нельзя пользоваться ею вблизи таких значений r_0, при которых знаменатель обращается в нуль. На самом деле этого практически никогда не требуется потому, что это область значений $r_0 \sim \exp\,(-137/\beta)$. Квантовая электродинамика практически пригодна именно потому, что мы пользуемся не точными решениями с точечным взаимодействием, оставляя открытым вопрос о том, что делается на малых расстояниях.

Таким образом, есть две возможности трактовки квантовой электродинамики — «теоретическая» и «прагматическая». Теоретическая состоит в том, что, принимая ее уравнения всерьез, мы решаем их методом предельного перехода $r_0 \to 0$ и приходим к тривиальному решению $e = 0$ («нуль-заряд»). Прагматическая считает заданным эмпирически «физический» заряд $e\,(\lambda_e)$; тогда есть решения в виде ряда теории возмущений, но к малым расстояниям теория неприменима.

Для сильных взаимодействий (т. е. при постоянной $g\,(\lambda_e)$ порядка единицы) прагматический подход ничего не даст, так как при попытке воспользоваться формулой типа (12) мы сразу окажемся вне области ее применимости. Нет такой области, в которой можно было бы не обращать внимания на малые расстояния.

4. Нельзя сказать, что радикальные выводы Померанчука нашли широкое признание и сочувствие. Это, однако, не было связано с тем, что в этих работах находили существенные дефекты. Указывалось, правда, что решение Ландау — Померанчука найдено при малых e^2 и что учет высших приближений мог бы изменить характер функции Гелл-Манна — Лоу (5) так, чтобы из формулы (7) вытекало не соотношение (5), а другое, не приводящее к нулевому значению заряда. Анализировались требования, которые нужно наложить на поведение $\varphi\,(\alpha)$, и возможные следствия. Но никем не был указан реальный механизм, который привел бы к такому изменению $\varphi\,(\alpha)$. Справедливо указывалось также на то, что математически возможна ситуация, когда предельный переход не имеет ничего общего с точным решением. Но никем не было указано на существование

другого решения уравнений квантовой электродинамики с точечным взаимодействием вне теории возмущений кроме того, которое получается физически наглядным путем предельного перехода от конечного к точечному заряду. И неизвестно, имеет ли вообще реальный смысл другая постановка задачи. Таким образом, критика не выходила за рамки той степени сомнения, которая содержалась в приведенной ранее цитате из статьи Ландау и Померанчука.

Можно сказать скорее, что выводы Померанчука игнорировались ввиду их чисто негативного характера (так считал и сам Померанчук). В отношении электродинамики они практически ничего не меняли, а в отношении сильного взаимодействия не давали указаний, как надо с ним работать. Ландау и Померанчук [3] высказали гипотезу о том, что поскольку теория поля неприменима к сильному взаимодействию, т. е. на расстояниях порядка комптоновской длины волны π-мезона λ_π, то в физику должна войти новая универсальная длина порядка λ_π. Однако наиболее чувствительный опыт по отношению к такому эффекту, достаточно точное измерение аномального магнитного момента мюона (поскольку λ_μ близко к λ_π), не подтвердил этого утверждения. Величина аномального магнитного момента согласуется с вычисленной квантовой электродинамикой.

Тем не менее у большинства ведущих теоретиков независимо складывалось ощущение тупика в попытках получить из теории поля вне рамок теории возмущений конкретные физические результаты. Это ощущение разделял, например, Фейнман, приложивший в этом направлении большие усилия и разработавший для этого метод распутывания операторов и метод интегрирования по путям. Свою точку зрения он выразил в письме к Ландау, относящемуся, приблизительно, к 1955 г., в котором он характеризует попытки создания теории сильных взаимодействий как детски-примитивное подражание квантовой электродинамике (с простой заменой векторного взаимодействия псевдоскалярным) и высказал мнение, что природа «не настолько глупа», чтобы не придумать что-либо более хитрое.

Это ощущение привело к тому, что реальное развитие теории сильных взаимодействий в последующее десятилетие существенно отклонилось от теории поля. Основываясь на идеях, высказанных в 1943 г. Гейзенбергом, стали рассматривать в качестве основных элементов теории не поля, а более близкие к непосредственно измеряемым величинам амплитуды — элементы матрицы рассеяния. Матрица рассеяния удовлетворяет условию унитарности, это основное требование квантовой механики *). Соотношения унитарности указывают на особенности амплитуд, рассматриваемых как функции комплексных переменных. Аналитические свойства амплитуд могут быть до известной степени формально обоснованы в теории поля. Вместе унитарность и аналитичность образуют ряд соотношений, которые можно рассматривать как аналог динамической системы уравнений. К сожалению, эта система бесконечна, и аналитические свойства амплитуд сложны. Только в случае наличия малого параметра, как в квантовой электродинамике, это позволяет действительно решить практически все ее задачи без применения теории поля. Тем не менее на таком пути удалось получить ряд важных для теории сильных взаимодействий результатов, в том числе такие, как теорема Померанчука об асимптотическом равенстве сечений частиц и античастиц и теорема Фруассара о максимальном росте сечений.

*) Условие унитарности выражает две основные черты квантовомеханического описания: вероятностную интерпретацию амплитуд и принцип суперпозиции состояний.

Идее теории матрицы рассеяния способствовало и то обстоятельство, что адронов стало слишком много, чтобы каждому из них сопоставлять свое поле. Естественно думать, что нельзя одни из них считать элементарными, а другие составными, возникло представление о «демократии адронов». Возникла идея «бутстрапа», согласно которой практически любые адроны с подходящими квантовыми числами могут быть взяты за исходные, при этом требования аналитичности и унитарности сами дадут весь спектр адронов.

Вершиной этого направления явился метод комплексных моментов (полюсов Редже), разработанный в применении к теории сильных взаимодействий в 1961—1962 гг. Энтузиасты, например Чу, считали, что теория сильных взаимодействий совсем близка к завершению.

Однако именно в этот момент развитие теории дало обратный крен в сторону теории поля. Началось с того, что выяснилось, что плоскость комплексных моментов не так проста. На ней появились точки ветвления. При этом указание на их существование появилось из теории поля после того, как Мандельстам указал на тип фейнмановских диаграмм, приводящих к точкам ветвления в комплексной плоскости моментов. Для того чтобы разобраться в свойствах амплитуд с учетом ветвлений, потребовалось создать полевой образ реджеона, появились «лестницы», «гребенки» и т. д. Первоначальная простота теории полюсов Редже, аналогичная простоте первого приближения в теории поля, превратилась в сложность бесконечного ряда, в котором в общем случае все члены одного порядка. Грибовым была разработана диаграммная схема, аналогичная диаграммной схеме Фейнмана, в которой каждый элемент диаграммы представлял собой как бы уже совокупность определенных диаграмм Фейнмана. Обращение с этой схемой стало таким же трудным искусством, как решение задач теории поля. И в основе ее все-таки лежала несколько абстрагированная теория поля, поля, не отвечающего определенным исходным частицам, но обладающего свойствами, которые из конкретной модели нельзя получить, свойствами, обеспечивающими малость поперечных переданных импульсов, основного факта во взаимодействии адронов высоких энергий.

С другой стороны, появилось представление о высших симметриях адронов, наглядно интерпретируемое гипотезой кварков. Появились факты о неупругом рассеянии лептонов, указывающие как будто бы на существование первичных точечных объектов внутри адронов.

Так мы вернулись в область теории поля. Есть первичные фермионные поля (кварки, например), аналогичные электронно-позитронному полю. При этом демократия адронов сохранена, все они состоят из ненаблюдаемых кварков. Фермионные поля как-то взаимодействуют между собой, например, через посредство каких-то бозонных полей. Отсюда все должно следовать.

Но как же это понимать, если теория поля приводила к самовыключению взаимодействия — обращению заряда в нуль?

5. Оказалось, что этот узел не развязывается, а разрубается. Для полей и взаимодействий, которые рассматривались, начиная с 30-х годов, всеми, включая Померанчука, справедлива теорема о нуль-заряде. Но можно построить такие поля и взаимодействия, к которым она неприменима и которые обладают нетривиальными (не нуль-зарядными) решениями. Такие поля были впервые рассмотрены Янгом и Миллсом в 1954 г. [6].

Оказалось, что для этого не надо отказываться от подражания квантовой электродинамике, но нужно, в некотором смысле, усилить его. Электромагнитное поле обладает двумя свойствами, которые считались не очень существенными в общей теории поля. Первое — масса фотона равна нулю. Второе — вектор-потенциал A_μ, входящий в выражение взаимодействия, имеет четыре компоненты, в то время как фотон имеет только две поляризации. Это приводило к формальным трудностям. Либо надо отказаться от явно ковариантного относительно преобразований Лоренца описания, связывая с фотонами только поперечные компоненты A_μ и вводя кулоновское взаимодействие между зарядами. Так поступали на раннем этапе развития квантовой электродинамики, и это затрудняло рассмотрение радиационных поправок и проведение перенормировок. Либо, пользуясь, например, инвариантной теорией возмущений Фейнмана, вводить в рассмотрение продольно- и времениподобно-поляризованные фотоны, причем последние обладают ненормальным для квантовой механики свойством — они имеют отрицательную норму («отрицательные вероятности»). Эти трудности исчезали, когда рассматривали взаимодействия фермионов с другими полями (например, π-мезонным), связанными с частицами с ненулевой массой и нулевым спином. При развитии общей формальной теории поля, в частности, аксиоматической, случай электродинамики даже вообще игнорировался. Постулировалось требование положительности нормы и наличие энергетической щели между вакуумным и первым возбужденным состоянием системы полей. Между тем в электродинамике благодаря нулевой массе фотона энергетический спектр системы непрерывно примыкает к вакууму. С этим обстоятельством связано наличие в квантовой электродинамике «инфракрасной катастрофы» — эффекта излучения при столкновениях бесконечного числа длинноволновых фотонов. В квантовой электродинамике благодаря этому обстоятельству очень трудно даже ввести достаточно формально строго понятие матрицы рассеяния — основной величины при вычислении вероятностей и сечений. В физических приложениях эти трудности довольно просто преодолеваются, в формальной же теории поля являются препятствием.

Указанные выше особые свойства квантовой электродинамики являются следствием наличия в ее лагранжиане дополнительной симметрии. Кроме инвариантности относительно преобразований Лоренца, он обладает инвариантностью относительно калибровочных преобразований. Если ψ — дираковское поле электрона, а A_μ — вектор-потенциал, то калибровочные преобразования имеют вид

$$\psi \to e^{ie\chi}\psi, \quad A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu \chi,$$

где параметр χ — произвольная функция координат и времени, e — заряд электрона, $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$. Калибровочные преобразования образуют группу: два последовательных преобразования с параметрами χ_1 и χ_2 дают преобразование того же типа с параметром $\chi = \chi_1 + \chi_2$. Так как два последовательных преобразования, выполненные в разном порядке, дают один и тот же результат (операции преобразования коммутируют), то такая группа называется абелевой. Она обозначается в теории групп как группа $U(1)$. Цифра 1 означает, что группа однопараметрическая. Она характеризуется одним только генератором (оператором бесконечно малого преобразования) — единичным. Эта группа называется дополнительно локальной, так как χ в каждой точке пространства-времени имеет свое значение.

Наличие калибровочной группы приводит к простому рецепту введения взаимодействия между полями («минимального»). Возьмем лагранжиан свободных полей, т. е. сумму лагранжианов свободного электромагнитного и электронного полей:

$$L^0 = L_A^0 + L_\psi^0,$$

где

$$L_A^0 = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,$$

$$L_\psi^0 = i\bar{\psi} (\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi,$$

и сделаем в нем замену

$$\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu,$$

т. е.

$$L(\psi, A_\mu, \partial_\mu) = L^0(\psi, A_\mu, D_\mu).$$

При этом получим лагранжиан взаимодействующих полей L

$$L^0 \to L = L^0 - j^\mu A_\mu, \quad j^\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi.$$

Лагранжиан L обладает инвариантностью относительно калибровочных преобразований, которой не обладал L^0 (точнее, L_ψ^0).

Янг и Миллс произвели обобщение квантовой электродинамики, введя вместо абелевой калибровочной группы $U(1)$ неабелеву калибровочную группу $SU(2)$, т. е. группу вращений в изотопическом пространстве с локальными параметрами (углами поворота) *). Совершенно аналогично проводится и введение группы $SU(n)$. Так как группа $SU(n)$ имеет $N = n^2 - 1$ параметров χ^i и столько же генераторов τ^i (в случае $n = 2$ это изоспиновые операторы), то надо ввести столько же векторных полей A_μ^i $(i = 1, 2 \ldots N)$. (В случае группы $SU(2)$ $N = 3$, так что A^i — трехмерный изовектор; в случае $SU(3)$ A^i — октет) и определить D_μ как матрицу

$$D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu,$$

где A_μ — матрица:

$$A_\mu = \sum_{i=1}^{N} \tau^i A_\mu^i,$$

и g — постоянная, которой мы заменили постоянную e.

Теперь, применяя прежний рецепт, получим лагранжиан системы полей A_μ^i, взаимодействующих с дираковскими полями ψ^k в виде

$$L = -\frac{1}{4} \operatorname{Sp} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + i\bar{\psi}^k (\gamma^\mu D_\mu - m) \psi^k; \tag{13}$$

здесь по k подразумевается суммирование; если k отвечает спинорному представлению (изоспинор в случае $n = 2$, суперспинор при $n = 3$) $k = 1, \ldots n$. Явный вид матриц τ^i отвечает этому представлению. Заметим, что тензорное поле равно

$$F_{\mu\nu} = D_\mu A_\nu - D_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu],$$

где скобки означают коммутатор. В случае электродинамики (группа $U(1)$) $[A_\mu, A_\nu] = 0$, и $F_{\mu\nu}$ не отличается от свободного поля. В случае же группы $SU(n)$ коммутатор отличен от нуля, и поэтому лагранжиан содержит взаимодействие полей A_μ^i друг с другом (члены третьей и четвертой степени по A в L). Таким образом, соответствующие «фотоны» излучают друг друга и рассеиваются друг на друге даже при отсутствии других полей.

Поля Янга — Милса сначала не вызывали большого к себе интереса. Объясняется это их абстрактным характером. Это совокупность векторных

*) Группа $U(1)$ эквивалентна группе вращений плоскости вокруг перпендикулярной ей оси, группа $SU(2)$ — группе вращений трехмерного пространства. Так как два вращения, выполненные вокруг различных осей в разном порядке, приводят к разным результатам, то это неабелева группа.

полей, отвечающих безмассовым частицам, а мы знаем только одну такую частицу — фотон. В 1962 г. теорией полей Янга — Миллса заинтересовался Фейнман, рассматривая их как промежуточную модель, имеющую некоторую аналогию с квантовой теорией гравитации, и обнаружил, что она требует видоизменения обычных правил Фейнмана. Это вызвало большое число работ, приведших к построению схемы теории возмущений для неабелевых калибровочных полей. Массовый интерес к полям Янга — Миллса возник после того, как в 1967 г. Вайнберг и Салам показали, что они могут служить основой построения единой теории слабого и электромагнитного взаимодействия; здесь нас этот аспект не будет интересовать. Серьезной основой для теории сильных взаимодействий неабелевы калибровочные поля стали в 1973 г. после того, как Гросс и Вильчек и Политцер [7] показали, что они не подчиняются теореме о нуль-заряде, а обладают в некотором смысле противоположным свойством, получившим название асимптотической свободы.

Гросс и Вильчек и Политцер поставили для полей Янга — Миллса задачу, аналогичную задаче, решенной в квантовой электродинамике Ландау, Абрикосовым и Халатниковым и Гелл-Манном и Лоу, задачу об эффективном заряде как функции радиуса $g(r)$. Они получили выражение, аналогичное выражению (9) в электродинамике, но с существенным отличием: коэффициент при $g^2(r_0)\ln(r/r_0)$ в знаменателе может иметь обратный знак. Записав его в форме, решенной относительно (аналогично (12)), получим

$$g^2(r_0)=\frac{g^2(r)}{1+\gamma g^2(r)\ln(r/r_0)},\quad r>r_0, \tag{14}$$

где

$$\gamma=\frac{11}{6\pi}n-\beta; \tag{15}$$

здесь первый член определяется взаимодействием полей A^i_μ между собой, n — размерность группы, т. е. индекс в названии группы $SU(n)$. Второй член β определяется теми полями, с которыми дополнительно взаимодействуют поля Янга — Миллса. В частности, если это фермионные дираковские поля, образующие суперспинор $SU(n)$ (n-плет), то $\beta=1/3\pi$. Если число таких независимых n-плетов ν, то

$$\beta=\frac{\nu}{3\pi}$$

и

$$\gamma=\frac{11n-2\nu}{6\pi}.$$

Мы видим, что при

$$\nu<\nu_{\max}=\frac{11}{2}n$$

коэффициент γ положителен. При $n=2$ $\nu_{\max}=11$, при $n=3$ $\nu_{\max}=16$. $\gamma=10/3\pi$ при $n=2$, $\nu=1$. $\gamma=27/6\pi$ при $n=3$, $\nu=3$. $\gamma=25/6\pi$ при $n=3$, $\nu=4$.

Будем теперь уменьшать r_0. При $\gamma g^2\ln(r/r_0)\gg 1$ мы получим из (14)

$$g^2(r_0)=\frac{1}{\gamma\ln(r/r_0)}$$

и

$$g^2(r_0)\to 0\quad\text{при}\quad r_0\to 0. \tag{16}$$

Этот результат прямо противоположен (11). Не заряд на конечном расстоянии обращается в нуль при любом значении первоначального точечного заряда, а нулевой точечный заряд отвечает конечному заряду на конечном расстоянии. Заметим, что этот результат невозможно получить, если, руководствуясь формально уравнениями поля, рассматривать только точечные заряды. Надо действовать путем предельного перехода, как было предложено Ландау.

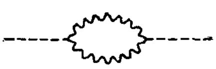
Свойство (16) получило название асимптотической свободы — на малых расстояниях взаимодействие ослабевает, и частицы становятся свободными. Поляризация среды приводит не к уменьшению заряда, как в электростатике, а к его увеличению. Как это получается?

Вернемся сначала к квантовой электродинамике. Если воспользоваться методом Гелл-Манна — Лоу, то для получения $e^2(r)$ надо, как излагалось ранее, вычислить функцию $\varphi(\alpha)$ по формуле (5) и подставить ее в (7). А для вычисления $\varphi(\alpha)$ надо найти функцию $d(\alpha, x)$ по теории возмущений с точностью первого порядка по α. Для этого надо рассмотреть следующую диаграмму Фейнмана:

$$\to -\frac{2\alpha}{3\pi}\ln x,$$

в которой штриховая линия отвечает кулоновскому полю, а сплошные — электронному. Электронная петля и выражает виртуальное образование и аннигиляцию пары, создающей поляризацию вакуума. Так мы приходим к выражению (8). Аналогичного типа диаграммы имеют место и в случае поля Янга — Миллса, они описывают поляризацию вакуума теми частицами, с которыми оно взаимодействует. Они приводят к слагаемому $-\beta\alpha\ln x$ и, как и в случае электродинамики, имеют отрицательный знак. Но, кроме того, поле Янга — Миллса содержит самозаряженные компоненты и надо учесть их вклад в поляризацию вакуума.

В электродинамике, как уже упоминалось ранее, возможны разные описания взаимодействия. Старинное состоит в том, что электромагнитное взаимодействие осуществляется двумя способами: мгновенным (кулоновское взаимодействие) и запаздывающим — через излучение и поглощение квантов, которые могут иметь две поперечные поляризации. Более современное, восходящее к Фейнману, состоит в том, что все взаимодействие осуществляется как бы излучением и поглощением квантов четырех поляризаций. Следуя работе Хрипловича [8], вычислившего функцию d в теории Янга — Миллса для случая $n = 2$, $\nu = 1$, будем пользоваться старым способом. Поле имеет три компоненты — две заряженные и одну нейтральную. Каждая из этих компонент состоит из кулоновского поля и поперечных квантов. Соответственно вклад в d будет давать две диаграммы. Первая:



$$\to -\frac{\alpha}{3\pi}\ln x;$$

здесь штриховая линия отвечает кулоновскому нейтральному полю, а волнистые — заряженным квантам. Эта диаграмма, как и предыдущая, описывает образование и аннигиляцию пары заряженных частиц и дает вклад в d тоже с отрицательным знаком. Можно показать, что всякая диаграмма такого типа приведет к отрицательной величине — это следствие соотношения унитарности. Вторая диаграмма, внешне похожая, носит другой характер. Ее нельзя интерпретировать как виртуальное рождение частиц и их аннигиляцию, и именно она приводит к положительному значению:

$$\to \frac{4\alpha}{\pi}\ln x;$$

здесь штрих-пунктирная линия — это заряженное кулоновское поле. Это не распространяющаяся частица, это мгновенное взаимодействие с перезарядкой. Сумма этих двух диаграмм дает для первого члена в γ значение $11/3\pi$ в согласии с (15) (при $n = 2$, $\nu = 1$).

6. Господствующие в настоящее время представления о сильном взаимодействии сводятся к следующему. Существует несколько (ν) сортов кварков $q^{(f)}$ ($f = 1, 2, \ldots, \nu$). До недавнего времени считалось, что $\nu = 3$. В настоящее время появились данные, указывающие на необходимость введения четвертого кварка. Возможно, число сортов кварков придется увеличить. Каждый из кварков $q^{(f)}$ образует триплет группы SU (3), т. е. кварк каждого сорта $q^{(f)}$ может находиться в трех состояниях $q_k^{(f)}$, $k = 1, 2, 3$. Индексу k принято присваивать название «цвет» (colour), например $k = 1$ — «синий», $k = 2$ — «желтый», $k = 3$ — «красный». Локальную группу SU (3) принято называть цветной SU (3) (не следует ее смешивать с группой SU (3), объединяющей три сорта кварков $q^{(f)}$ с различным $f = 1, 2, 3$; об этой группе дальше речи не будет). Цветные кварки $q_k^{(f)}$ взаимодействуют с векторным калибровочным полем A_μ^i, образующим октет (по числу параметров или генераторов группы SU (3))— это поля Янга — Миллса. Их называют глюонными полями — от «glue» (клей). Все кварки обладают зарядом, определяющим их взаимодействие с глюонами. Для теории такой системы цветных кварков и глюонных полей, описываемой лагранжианом (13), Гелл-Манн предложил название — квантовая хромодинамика (chromodynamics).

Существование асимптотической свободы означает, что хромодинамика может приводить к нетривиальным решениям с учетом сколь угодно малых расстояний. В пределе малых расстояний ($r_0 \to 0$) эффективный заряд $g(r_0) \to 0$ это означает, что внутри адронов кварки в области малых r ведут себя как свободные частицы. Это объясняет опыты по глубоко-неупругому рассеянию электронов и нейтрино, которые в определенной области энергий и переданных импульсов интерпретируются как рассеяния на независимых точечных объектах. Некоторая область расстояний, для которых $g^2(r_0) \ll 1$, может быть учтена применением теории возмущений и метода ренормгруппы. Обратной стороной асимптотической свободы является рост взаимодействия на больших расстояниях. Действительно, если переписать формулу (14) в виде

$$g^2(r) = \frac{g^2(r_0)}{1-\gamma g^2(r_0)\ln(r/r_0)}, \quad r > r_0, \tag{17}$$

то легко видеть, что $g(r)$ растет с ростом r. Мы не знаем, какое r_0 и $g(r_0)$ следует зафиксировать в этой формуле и до каких значений r ею можно пользоваться. Ясно, что не безгранично, так как при уменьшении знаменателя мы выходим из области применимости формулы. Но качественно можно себе представить, что взаимодействие растет с расстоянием. Если этот рост продолжается неограниченно, то кварки оказываются запертыми в потенциальной яме, из которой не могут вырваться. Это — объяснение ненаблюдаемости свободных кварков. Они могут находиться только в связанном состоянии, такое состояние есть адроны. Если бы потенциал взаимодействия атомов в молекуле был точным потенциалом осциллятора, то атомы тоже были бы ненаблюдаемы.

Ненаблюдаемость кварков тесно связана с ненаблюдаемостью «цвета». Все адроны — «белые» состояния, т. е. синглеты относительно группы $SU(3)_{\mathrm{col}}$.

В настоящее время прилагаются большие усилия для серьезного обоснования таких представлений и «плененности» (confinement) кварков. В таких ситуациях, конечно, возможны иллюзии. Трудность рассмотрения больших расстояний («инфракрасная катастрофа») остается.

Но проблема рассмотрения малых расстояний разрешена. Мы представляем себе, что всякая «истинная», т. е. динамическая, теория поля есть *теория, использующая калибровочные векторные поля*. Другие теории поля, описывающие непосредственно адроны и их взаимодействия, являются феноменологическими и на некотором этапе должны сводиться к теории взаимодействий кварков с глюонами. Если сравнить теорию сильных взаимодействий с нерелятивистской квантовой механикой атомных систем, то можно провести такую аналогию. Динамика атомных систем — это динамика электронов с кулоновским взаимодействием. Динамика адронных систем — это динамика кварков и глюонов. В некотором приближении из динамики электронов возникают феноменологические потенциалы взаимодействий атомов, молекулярные силы, квазичастицы и т. д. Из динамики кварков возникают феноменологические теории взаимодействия адронов, реджеоны и т. д.

Электродинамика тоже является такой феноменологической теорией, хотя по отношению к ней такое определение звучит кощунственно. Электродинамика справедлива в том прагматическом смысле, о котором упоминалось выше, повсюду, кроме очень малых расстояний, где ее применение становится неправильным в силу теоремы о нуле заряда. Но еще до этого электродинамика сливается с теорией слабого взаимодействия в единую теорию взаимодействий с неабелевыми калибровочными полями. Это происходит на таких расстояниях, на которых слабое взаимодействие сравнивается по силе с электромагнитным.

Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосов, И. М. Халатников, ДАН СССР 95, 497, 773, 1177; 96, 261 (1954); то же: Л. Д. Ландау, Собрание трудов, т. 2, М., «Наука», 1969, стр. 195.
2. M. Gell-Mann, F. Low, Phys. Rev. 95, 99 (1954).
3. Л. Д. Ландау, И. Я. Померанчук, ДАН СССР 102, 489 (1955); то же: Л. Д. Ландау, Собрание трудов, т. 2, М., «Наука», 1969, стр. 47. И. Я. Померанчук, Собрание научных трудов, т. 2, М., «Наука», 1972, стр. 163.
4. Е. С. Фрадкин, ЖЭТФ 28, 750 (1955).
5. И. Я. Померанчук, Собрание научных трудов, т. 2, М., «Наука», 1972, стр. 168.
6. C. N. Yang, R. L. Mills, Phys. Rev. 96, 191 (1954).
7. D. J. Gross, F. W. Wilczek, Phys. Rev. Lett. 30, 1343 (1973). H. D. Politzer, ibid., p. 1346.
8. И. Б. Хриплович, ЯФ 10, 409 (1969).
9. Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, Введение в теорию квантованных полей, М., «Наука», 1973.
10. А. А. Абрикосов, И. М. Халатников, ДАН СССР 95, 497 (1954).
11. И. Т. Дятлов, К. А. Тер-Мартиросян, ЖЭТФ 30, 416 (1956). И. Дятлов, В. Судаков, К. Тер-Мартиросян, ЖЭТФ, 32, 767 (1957). В. В. Судаков, ДАН СССР 111, 338 (1956).
12. А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий, Квантовая электродинамика, М., «Наука», 1969.