1976 г. Ноябрь *Том 120, вып. 3*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

539.12.01

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ С КИРАЛЬНЫМ ЛАГРАНЖИАНОМ И ФИЗИКА МЕЗОНОВ НИЗКИХ ЭНЕРГИЙ

М. К. Волков, В. Н. Первушин

СОДЕРЖАНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ

Для описания адронной физики при низких энергиях с успехом использовался аппарат дисперсионных соотношений [1]. Однако необходимость введения ряда произвольных параметров придавала ему феноменологический характер. Привлечение динамических принципов, таких, как киральная симметрия, позволило значительно сократить число неопределенных параметров, налагая дополнительные граничные условия на низкоэнергетические решения дисперсионных уравнений [1б *)]. Еще более перспективным может оказаться совместное использование дисперсионного подхода с методом теории возмущений в квантовой теории поля с киральной динамической симметрией.

Настоящий обзор посвящен подробному изложению именно такой квантовой киральной теории, которая позволяет получать низкоэнергетические разложения амплитуд различных адронных процессов без введения в теорию произвольных параметров (кроме масс адронов и константы распада пиона).

Первые попытки применить аппарат теории квантованных полей для описания сильных взаимодействий были предприняты в начале 50-х годов, сразу же после построения квантовой электродинамики. Эти попытки, однако, не привели к каким-либо существенным успехам не только из-за большой величины константы связи, но и вследствие того, что простейшие

*) Таким путем, в частности, удалось корректно описать p-волновой резонанс в $\pi\pi$-системе и однозначно выразить массу ρ-мезона через массу и константу распада пиона.

из предложенных в то время лагранжианов, вообще говоря, не отражали никакой динамической симметрии сильных взаимодействий. Дело в том, что требования релятивистской инвариантности и прочих так называемых алгебраических симметрий, которые используются для классификации частиц, оставляют большой произвол в выборе лагранжиана. Поэтому для фиксирования вида взаимодействия необходимо постулировать более широкую — динамическую группу преобразований. Напомним, что в квантовой электродинамике такой динамической симметрией является градиентная инвариантность.

Известные в настоящее время динамические симметрии, которые используются в гравитации, в единой теории слабых и электромагнитных взаимодействий и в сильных взаимодействиях, не только определяют форму лагранжиана, но и обусловливают универсальность взаимодействий в том смысле, что первые порядки разложения по константе связи начинают совпадать с первыми порядками разложения по степеням энергии. Это позволяет, независимо от величины константы связи, использовать соответствующую теорию поля для получения разумных результатов в области низких энергий.

В настоящем обзоре мы попытаемся дать описание физики низкоэнергетических мезонных процессов по следующей схеме: 1) гипотеза о динамической симметрии сильных взаимодействий; 2) вывод лагранжиана взаимодействия, удовлетворяющего такой симметрии; 3) получение физических следствий в рамках изучаемой квантовой теории поля с использованием однопетлевого приближения.

Исходным пунктом является весьма плодотворная идея о киральной симметрии сильных взаимодействий, согласно которой сильные взаимодействия приближенно инвариантны относительно некоторой группы преобразований, включающей в себя наряду с изотопическими преобразованиями преобразования, перемешивающие состояния с различной четностью.

Идея этой симметрии была намечена еще в знаменитой работе Фейнмана и Гелл-Манна [2а] о V — A-форме слабых взаимодействий, в которой используется следующий путь рассуждений. Как известно, универсальность некоторых взаимодействий различных частиц (например, одна и та же величина электрического заряда для лептонов и адронов) свидетельствует о существовании сохраняющихся величин (электромагнитного тока) и, следовательно, о наличии определенной группы симметрии (в данном примере — калибровочной инвариантности). Точно так же, исходя из универсальности слабого взаимодействия аксиальных токов лептонов и адронов в μ-распаде и β-распаде нейтрона *), в работе [2а] было предложено включить в группу всех преобразований для адронов преобразования, перепутывающие состояния с различной четностью. Эта идея затем была развита в работах Гелл-Манна [2б], где наряду с векторными адронными токами, генерирующими унитарную симметрию SU_3, были введены аксиальные токи. Коммутационные соотношения для всех этих адронных токов в работе [2б] стали называть киральной алгеброй токов, а соответствующую симметрию — киральной симметрией.

Существуют две возможные реализации киральной симметрии — алгебраическая и динамическая.

Примером алгебраической реализации является классификация невзаимодействующих безмассовых частиц (типа нейтрино) по новым квантовым числам — спиральностям. Реализация киральной симметрии на безмассовых частицах получила широкое применение при описании лептон-

*) Во время написания работы [2а] в 1958 г. было известно, что отношение аксиальной константы β-распада к векторной имеет величину $g_A \approx 1{,}3 \pm 0{,}1$.

адронных процессов с большими переданными импульсами и большими энергиями. Такая симметрия согласуется с представлениями об адронах как о пучках безмассовых, невзаимодействующих партонов (или кварков), сосредоточенных в пространственной области размером около 1 *Гэв*$^{-1}$ [3].

Другой, динамический [4] путь реализации алгебры токов оказался весьма плодотворным в области низких энергий, $\ll 1$ *Гэв*, где адроны приближенно можно представить как точечные, массивные частицы. Для понимания сути динамической реализации полезно рассмотреть простой пример аксиальных токов, с помощью которых описывается β-распад нуклона:

$$J_\mu^{(N)^i} = \overline{N}(p_1)\tau^i\gamma_5\gamma_\mu N(p_2)g_A,\quad p_{1\mu}-p_{2\mu}=q_\mu,$$

где $\overline{N}$, N — волновые функции свободных нуклонов, γ_μ — матрицы Дирака, τ^i — матрицы Паули, g_A — константа связи. Как следует из уравнений Дирака, $(\hat{p}_2 - M)N(p_2) = 0$, $\overline{N}(p_1)(\hat{p}_1 - M) = 0$, ток $J_\mu^{(N)i}$ не сохраняется, если $M \neq 0$:

$$q_\mu J_\mu^{(N)^i} = 2M\overline{N}\tau^i\gamma_5 N g_A \neq 0.$$

Добавим к этому току полюсный член, описывающий излучение нуклоном безмассовой псевдоскалярной частицы с константой слабого распада F_π и константой аксиального взаимодействия с нуклоном g/M:

$$J_\mu^i = \overline{N}(p_1)\tau^i\gamma_5\left(\gamma_\mu g_A - \frac{F_\pi}{M}\, g\,\frac{\hat{q}q_\mu}{q^2}\right)N(p_2). \tag{1.1}$$

Нетрудно видеть, что теперь можно добиться сохранения аксиального тока

$$q_\mu J_\mu^i = 0 \tag{1.2}$$

и, следовательно, существования соответствующей симметрии, если положить

$$g_A = \frac{F_\pi}{M}g. \tag{1.3}$$

Киральная симметрия в данном случае диктует динамику взаимодействия нуклонов с псевдоскалярной частицей, которую обычно называют голдстоуновской частицей. Если отождествить эту частицу с пионом, то равенство (1.3), полученное впервые Голдбергером и Трейманом [5] с помощью дисперсионных соотношений, выполняется с точностью до 7%. Пион имеет ненулевую массу m_π, поэтому дивергенция аксиального тока (1.2) равна *)

$$q_\mu J_\mu^i = m_\pi^2 F_\pi \pi^i, \tag{1.4}$$

где π^i — пионное поле. Вследствие того, что величины, входящие в соотношение (1.3) как функции переданного импульса q, слабо изменяются на расстояниях порядка массы пиона (гипотеза гладкости), правую часть равенства (1.4) можно рассматривать как слабое возмущение, т. е. «почти нуль». Равенство (1.4), которое называют гипотезой частичного сохранения аксиального тока (ЧСАТ), определяет механизм нарушения киральной симметрии. ЧСАТ и коммутационные соотношения алгебры токов дают возможность получения правил сумм для матричных элементов слабых и электромагнитных адронных токов, хорошо согласующихся с экспериментом [6], и целого ряда низкоэнергетических соотношений между адрон-

*) Равенство (1.4) написано для тока (1.1), где сделана замена $1/q^2 \to 1/(q^2 - m_\pi^2)$. Оно следует из уравнения движения для π-поля: $(q^2 - m_\pi^2)\pi^i = -\overline{N}\gamma_5\tau^i\hat{q}Ng/M$.

ными амплитудами без испускания и с испусканием мезона с нулевым нефизическим импульсом. Полученная информация нуждается в дополнительной экстраполяции на физические значения импульсов и с ростом энергии теряет смысл, так как не удовлетворяет условию унитарности.

Методом, в котором можно обойти указанные трудности, является метод феноменологических лагранжианов, позволяющий просто воспроизводить результаты алгебры токов на уровне приближения деревьев. При этом киральная симметрия обеспечивает самосогласованность сильных взаимодействий в том смысле, что эффективные низкоэнергетические константы связи слабых, электромагнитных и самих сильных взаимодействий не перенормируются за счет высших порядков по сильному взаимодействию [7]. То есть киральная симметрия приводит к тому, что разложение по сильной контанте связи в низших порядках совпадает с низкоэнергетическим разложением по степеням энергии. Напомним, что аналогичная ситуация существует и в квантовой электродинамике [8], первые порядки теории возмущения в которой содержали бы основную информацию при низких энергиях даже при большой константе связи.

В 1968—1971 гг. ряд авторов указали [9-10], что метод феноменологических лагранжианов может не только воспроизводить результаты алгебры токов, но и позволяет продвинуться дальше по энергиям, если использовать аппарат квантовой теории поля. За последние 6 лет появилось множество работ, посвященных квантованию такого рода киральных лагранжианов [9-12] и описанию в рамках квантовой киральной теории большой совокупности экспериментальных данных по низкоэнергетическим процессам [13-24].

Существует несколько подходов к квантованию киральных лагранжианов. В работах [9, 13] рассматривают лагранжианы, перенормируемые за счет введения гипотетических сигма-частиц. Широко изучаются нелинейные лагранжианы [10-12, 14-24] без гипотетических частиц. Эти теории неперенормируемы и, как известно, отличаются от перенормируемых наличием бесконечного числа неопределенных параметров, которые нельзя фиксировать перенормировкой физических величин. В работах [14] число неопределенных параметров уменьшают до одного, используя то обстоятельство, что нелинейные теории являются пределом линейных при устремлении массы сигма-частиц к бесконечности, $m_\sigma \to \infty$.

Наконец, в серии работ [15-24] используется метод регуляризации квантовой теории поля с неполиномиальным лагранжианом, позволяющий фиксировать все неопределенные параметры. Этот метод был предложен одним из авторов [25] и получил дальнейшее развитие в работах Лемана [26], Салама и Стрэзди [27]. В литературе он получил название суперпропагаторного (СП) метода. Согласно СП методу при устранении расходимостей нужно рассматривать выражение, соответствующее совокупности диаграмм с фиксированным числом вершин и произвольным числом внутренних линий, как единую аналитическую функцию.

Настоящий обзор посвящен описанию низкоэнергетических мезонных процессов в рамках однопетлевого приближения квантовой киральной теории. Мы ограничимся здесь рассмотрением СП подхода, в котором низкоэнергетические процессы исследованы наиболее полно, а результаты совпадают с результатами подхода σ-модели в пределе $m_\sigma \to \infty$ [14].

Перечислим основные гипотезы и предположения.

I. Лагранжиан является реализацией киральной динамической симметрии. При этом в силу гипотезы гладкости выбирается минимальный по числу производных лагранжиан. Нарушение киральной симметрии при введении массы мезонов производится согласно схеме Гелл-Манна — Оукса — Реннера [28].

II. Применяется СП метод вычисления петлевых мезонных диаграмм, который фиксирует все неопределенные параметры.

III. Для вычисления барионных однопетлевых диаграмм достаточно использовать стандартную теорию перенормировок, удовлетворяющую киральной симметрии. Тем самым изучаются лишь конечные интегралы, соответствующие барионным петлевым диаграммам. Средние значения виртуальных барионных импульсов оказываются конечными и небольшими. Поэтому при низких энергиях мезонов сильные вершины в барионных петлях находятся в том же режиме, что в соотношении Голдбергера — Треймана (1.3). Отсюда следует ожидать, что совпадение низкоэнергетического разложения и разложения по константе сильной связи имеет место и для однопетлевых барионных диаграмм.

Проверка этого предположения, проведенная в работах [14, 29], показала, что поправки за счет следующих порядков теории возмущения по сильной константе связи составляют 20—30% *). Однопетлевое приближение дает существенно новую информацию, не содержащуюся в первоначально рассматриваемом приближении деревьев. Опишем кратко результаты однопетлевого приближения, указывая в скобках гипотезы и предположения (I, II, III), с использованием которых получены эти результаты.

Сильные взаимодействия мезонов были рассмотрены в работах [14, 15–17, 22], где вычислялись амплитуды $\pi\pi$- [14, 15–17, 22], πK- и KK [14]-рассеяний. Фазы рассеяний рассчитывались с помощью паде-аппроксимаций. В обзоре подробно излагаются результаты вычисления амплитуды $\pi\pi$-рассеяния, полученные впервые в работах [15, 16] для безмассовых пионов и в работах [17,22] для массивных пионов. Фазы рассеяния согласуются с экспериментальными данными и содержат ρ-мезонный резонанс (I—III) (при энергии $\sim$800 *Мэв* и с шириной $\sim$150 *Мэв*). Из амплитуды рассеяния, которая удовлетворяет самым общим требованиям квантовой теории поля, можно извлечь информацию о всех длинах волн, в том числе о d-волне (I, II, III) и других высших парциальных волнах (I). (Отметим, что борновское приближение дает лишь s- и p-волны.) Все результаты хорошо согласуются с установившимися данными эксперимента [32] и результатами феноменологического анализа [33].

Электромагнитные взаимодействия мезонов рассматривались в работах [18, 20,22, 23], где вычислены форм-факторы и амплитуды комптон-эффекта на пионах и каонах. Значение среднеквадратичного радиуса пиона (I—III) совпадает в пределах ошибок с последними экспериментальными данными [34]. Значения радиусов для заряженного (I—III) и нейтрального (I, II) каонов находятся в согласии с моделью векторной доминантности. Предсказываются значения поляризуемости мезонов (I, III), а также заметное увеличение эффективного коэффициента поляризуемости мезонов (I) в пороговой области рождения двух пионов.

Основные моды слабых распадов мезонов рассмотрены в работе [21], где найдены зависимость константы слабого распада пиона от массы пиона (I, III), структурные константы распада (I, III). Эффект второго порядка по слабому взаимодействию — разность масс нейтральных каонов (I, II) — вычислен в работе [19].

Все полученные результаты однопетлевого приближения удовлетворяют соотношениям между наблюдаемыми величинами, которые следуют из алгебры токов, и находятся в разумном согласии с экспериментом.

---

*) Интересно отметить, что в квантовой электродинамике точное вычисление поляризуемости элементарной частицы [30] совпадает с вычислением этой величины в однопетлевом приближении [31], т. е. второй порядок разложения по энергии совпадает со вторым порядком разложения по константе связи (1/137).

Укажем порядок изложения материала. В следующих двух разделах будут даны основные принципы построения кирально-инвариантных лагранжианов и основные методы вычисления. Остальные разделы посвящены описанию соответственно сильного электромагнитного и слабого взаимодействий. В заключение обсуждаются дальнейшие перспективы алгебры токов и квантовой киральной теории.

2. ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИЕ ЛАГРАНЖИАНЫ

В этом разделе опишем общий метод получения феноменологических лагранжианов, являющихся нелинейной реализацией киральной симметрии [35, 36]. Рассмотрим вначале симметрии $SU_2 \times SU_2$.

Пусть имеется лагранжиан для свободных невзаимодействующих нуклонов $\psi = \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix}$

$$L_0(\psi) = i\bar{\psi}\,\hat{\partial}\psi - M\bar{\psi}\psi, \qquad \hat{\partial} = \frac{\partial}{\partial x_\mu}\gamma_\mu. \tag{2.1}$$

Этот лагранжиан инвариантен относительно изотопических преобразований с параметрами $\boldsymbol{\omega}$

$$\psi' = e^{i(\boldsymbol{\tau}/2)\boldsymbol{\omega}}\psi, \tag{2.2}$$

что отражается в классификации нуклонов по представлению (1/2) группы SU_2. Рассмотрим также преобразования, перепутывающие состояния с различной четностью, с параметрами $\mathbf{a}$:

$$\psi' = e^{\boldsymbol{\tau}\mathbf{a}\gamma_5/2}\psi, \quad \gamma_5 = -i\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Лагранжиан (2.1) после преобразования (2.3) принимает вид

$$L_0(\psi') = i\bar{\psi}\,\hat{\partial}\psi - M\bar{\psi}e^{\boldsymbol{\tau}\mathbf{a}\gamma_5}\psi = L_0(\psi) + M\bar{\psi}(1 - e^{\boldsymbol{\tau}\mathbf{a}\gamma_5})\psi. \tag{2.4}$$

Лагранжиан (2.1) будет инвариантен, если положить массу нуклона равной нулю. Такая киральная инвариантность относительно (2.3) позволяет ввести дополнительную классификацию нуклонов по спиральностям, т. е. по правому и левому изотопическому спину, по представлениям (1/2, 0), (0, 1/2) группы $SU_2 \times SU_2$. Другой способ сделать лагранжиан (2.1) кирально-инвариантным, не полагая $M = 0$, заключается во введении взаимодействия нуклонов с «компенсирующими» полями, которые при преобразованиях (2.3) скомпенсировали бы возникающий неинвариантный множитель в лагранжиане (2.4). Поскольку речь идет о преобразованиях, меняющих четность, необходимо ввести взаимодействия с псевдоскалярными безмассовыми «пионами» с помощью замены

$$M\bar{\psi}\psi \to M\bar{\psi}\exp\left(-\gamma_5\frac{\boldsymbol{\pi\tau}}{F_\pi}\right)\psi, \tag{2.5}$$

где F_π — размерная константа. Причем поля π^i должны преобразовываться по нелинейному закону

$$\exp\left(-\gamma_5\frac{\boldsymbol{\pi}'\boldsymbol{\tau}}{F_\pi}\right) = \exp\left(-\gamma_5\frac{\mathbf{a}\boldsymbol{\tau}}{2}\right)\exp\left(-\gamma_5\frac{\boldsymbol{\pi\tau}}{F_\pi}\right)\exp\left(-\gamma_5\frac{\mathbf{a}\boldsymbol{\tau}}{2}\right) \tag{2.6}$$

так, чтобы выражение (2.5) было инвариантно относительно совместных преобразований полей ψ и π (2.3), (2.6). Инвариантный лагранжиан для самого пионного поля нетрудно построить из матриц $\exp\left(\gamma_5\frac{\boldsymbol{\pi\tau}}{F_\pi}\right)$:

$$L(\pi) = \frac{F_\pi^2}{4}\,\mathrm{Sp}\left[\partial_\mu\exp\left(\gamma_5\frac{\boldsymbol{\pi\tau}}{F_\pi}\right)\partial_\mu\exp\left(-\gamma_5\frac{\boldsymbol{\pi\tau}}{F_\pi}\right)\right]. \tag{2.7}$$

Таким образом, полный инвариантный лагранжиан будет иметь вид

$$L(\psi, \tau) = i\bar{\psi}\hat{\partial}\psi - M\bar{\psi}\exp\left(-\gamma_5 \frac{\pi\tau}{F_\pi}\right)\psi + L(\pi). \tag{2.8}$$

Если отождествить введенное голдстоуновское поле с реальным пионом, а аксиальный ток $J_{5\mu} = F_\pi \partial_\mu \pi + O(\pi^3)$ — с током, участвующим в слабых взаимодействиях, то константа F_π в первом борновском приближении совпадает с константой слабого распада пиона; отсюда $F_\pi \approx 92$ *Мэв*. В дальнейшем в этом разделе мы будем использовать безразмерную систему единиц, полагая $F_\pi = 1$.

Для формулировки стандартного метода описания взаимодействия голдстоуновских частиц [35, 36] удобно перейти от лагранжиана (2.8) к физически эквивалентному лагранжиану

$$L(N, \pi) = \bar{N} i\gamma_\mu \left\{\partial_\mu + \left[\exp\left(-\gamma_5 \frac{\pi\tau}{2}\right)\partial_\mu \exp\left(\gamma_5 \frac{\pi\tau}{2}\right)\right]\right\} N - M\bar{N}N + L(\pi) \tag{2.9}$$

с помощью преобразования

$$N = \exp\left(-\gamma_5 \frac{\pi\tau}{2}\right)\psi. \tag{2.10}$$

Заметим, что выражение $\exp[-\gamma_5(\pi/2)\tau]$ представляет собой конечное преобразование группы $SU_2 \times SU_2$ с параметрами, отождествленными с голдстоуновскими полями.

Рассмотрим теперь общее представление. Пусть I^i, K^i — генераторы изотопических и собственно киральных преобразований с коммутационными соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} &\text{а)} \quad [I_i, I_j] = i\varepsilon_{ijk} I_k, \\ &\text{б)} \quad [K_i, I_j] = i\varepsilon_{ijk} K_k, \\ &\text{в)} \quad [K_i, K_j] = i\varepsilon_{ijk} I_k. \end{aligned}\right\} \tag{2.11}$$

В частности, для рассмотренного выше представления эти генераторы имеют вид

$$I_i = \frac{\tau_i}{2}, \quad K_i = -i\gamma_5 \frac{\tau_i}{2}.$$

Выражение

$$\exp\left(-\gamma_5 \frac{\pi\tau}{2}\right)\partial_\mu \exp\left(\gamma_5 \frac{\pi\tau}{2}\right) \equiv e^{-iK^i\pi^i}\partial_\mu e^{iK^i\pi^i}$$

можно разложить по всем генераторам группы $SU_2 \times SU_2$:

$$e^{-i\mathbf{K}\pi}\partial_\mu e^{i\mathbf{K}\pi} = i\left(K^j \omega^j_\mu(\pi) + I^j \theta^j_\mu(\pi)\right). \tag{2.12}$$

Явный вид форм ω^i_μ, θ^i_μ, которые обычно в физической литературе называют формами Картана [35], нетрудно получить с помощью дифференцирования по параметру t. Этот параметр вводится в уравнение (2.12) заменой переменной $\pi \to t\pi$. После дифференцирования с правой стороны уравнения (2.12) будем иметь

$$i\left(K^j \frac{\partial}{\partial t}\omega^j_\mu + I^j \frac{\partial}{\partial t}\theta^j_\mu\right), \tag{2.13}$$

в то время как с левой, используя коммутационные соотношения (2.11), получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-it\mathbf{K}\pi}\partial_\mu e^{it\mathbf{K}\pi}\right) = [\mathbf{K}\pi, (K^i\omega^i + I^i\theta^i)] + iK^i\partial_\mu\pi^i =$$
$$= i\left(\pi^j\omega^i I^k \varepsilon_{jik} + \pi^j\theta^i K^k \varepsilon_{jik} + K^i\partial_\mu\pi^i\right). \tag{2.14}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых генераторах в правой (2.13) и левой (2.14) частях, получим систему из двух уравнений первого порядка

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega_\mu^k = \partial_\mu \pi^k + \pi^j \theta_\mu^i \varepsilon_{jik}, \quad \omega_\mu|_{t=0} = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\theta_\mu^k = \pi^j \omega_\mu^i \varepsilon_{jik}, \quad \theta_\mu|_{t=0} = 0. \tag{2.15}$$

Решение этой системы уравнений имеет вид

$$\omega_\mu^k|_{t=1} = \partial_\mu \pi^k + \left(\delta_{ik} - \frac{\pi^i \pi^k}{\pi^2}\right)\left(\frac{\sin z}{z} - 1\right)\partial_\mu \pi^i,$$
$$\theta_\mu^k|_{t=1} = \varepsilon_{ikj}\pi^i \partial_\mu \pi^j \frac{\cos z - 1}{\pi^2}, \quad z = \sqrt{\pi^2}. \tag{2.16}$$

Нетрудно убедиться, что пионный лагранжиан (2.7) равен

$$L(\pi) = \frac{1}{2}\omega_\mu^i \omega_\mu^i = \frac{1}{2}\partial_\mu \pi^i \partial_\mu \pi^i + \frac{1}{2}\partial_\mu \pi^i \partial_\mu \pi^j \left(\delta_{ij} - \frac{\pi^i \pi^j}{\pi^2}\right)\left(\frac{\sin^2 z}{z^2} - 1\right). \tag{2.17}$$

Таким образом, для полного лагранжиана (2.10) получаем выражение

$$L(N, \pi) = i\overline{N}\gamma_\mu D_\mu N + i\overline{N}\frac{\tau^i}{2}\gamma_\mu \gamma_5 \omega_\mu^i N - M\overline{N}N + \frac{1}{2}\omega_\mu^i \omega_\mu^i, \tag{2.18}$$

где $D_\mu N = [\partial_\mu + i(\theta_\mu^k \tau^k/2)]N$ и $\omega_\mu \equiv D_\mu \pi$ называются соответственно ковариантными производными полей N и π. Все члены в (2.18) инвариантны относительно киральных преобразований, причем второе слагаемое не связано с кинетическими членами и может входить в лагранжиан с произвольным параметром g_A.

Сформулируем стандартный метод построения лагранжиана. Предположим, мы знаем всю группу симметрии G исследуемого взаимодействия. Причем невзаимодействующие частицы классифицируются по представлениям подгруппы H с генераторами I^i (остальные генераторы группы G обозначим через K^i).

Тогда, чтобы построить лагранжиан, инвариантный относительно преобразований всей группы G, достаточно заменить в лагранжиане свободных полей обыкновенные производные полей на ковариантные с помощью форм Картана ω, θ, которые вычисляются по формуле

$$\exp(-iK^j a^j)\,\partial_\mu \exp(iK^j a^j) = i\,[K^j \omega_\mu^j(a) + I^j \theta_\mu^j(a)].$$

Параметры $a^j(x)$ отождествляются с полями голдстоуновских частиц.

Отметим, что аналогичным образом в работе [37] была построена теория гравитации Эйнштейна. В качестве исходной группы G бралась группа всех линейных преобразований 4-пространства $A(4)$ с 20 параметрами, а в качестве подгруппы H группа Пуанкаре $\mathcal{P}$ с 10 параметрами. Остальные 10 параметров отождествлялись с полями голдстоуновских гравитонов.

Построим лагранжиан, инвариантный относительно преобразований киральной группы $SU_3 \times SU_3$. Пусть B^i и Φ^i — октеты барионов и мезонов. (Далее используем обозначения обзоров [38].) Кирально-инвариантный лагранжиан, который воспроизводит теоремы алгебры токов, имеет вид

$$L = \frac{1}{2}D_\mu \Phi^i D_\mu \Phi^i +$$
$$+ \overline{B}_i \gamma_\mu \left[i\partial_\mu \delta_{ij} + \theta_\mu^k f_{kij} + D_\mu \Phi^k(-if_{kij}(1-\overline{\alpha}) + \overline{\alpha} d_{kij})\gamma_5 \frac{g}{M} - M\delta_{ij}\right] B_j; \tag{2.19}$$

здесь $\overline{\alpha} \approx 2/3$ — параметр смешивания F- и D-связей, формы Картана

$$D_\mu \Phi^i = \partial_\mu \Phi^i + O(\Phi^3), \qquad \theta_\mu^j = \Phi^i f_{ijk} \partial_\mu \Phi^k + O(\Phi^4)$$

определяются из уравнения

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\gamma_5\xi\right)\partial_\mu \exp\left(\frac{1}{2}\gamma_5\xi\right)=\gamma_5\frac{\lambda^i}{2}D_\mu\Phi^i+i\frac{\lambda^k}{2}\theta_\mu^k, \quad \xi=\sum_{k=1}^{8}\lambda^k\Phi^k, \tag{2.20}$$

λ^i — матрицы (3×3) Гелл-Манна.

До сих пор мы рассматривали безмассовые мезоны. Массы мезонов нарушают киральную симметрию. Обычно нарушение симметрии выбирается по определенному представлению $SU_3\times SU_3$. В частности, в работе [28] было предложено описывать нарушение симметрии по простейшему представлению $(3, 3^*)\oplus(3^*, 3)$ группы, по которому преобразуется матрица

$$\exp(i\xi)=\sum_{n=0}^{8}(\lambda^n s^n+i\lambda^n p^n), \qquad \lambda^0=\sqrt{\frac{2}{3}}I,$$

где s^n и p^n — нелинейные функции полей Φ^i.

Нарушение симметрии выбирается в виде

$$\Delta L=F_\pi^2(c_1s^0+c_2s^8).$$

При этом константы c_1 и c_2 определяются из условия, чтобы при разложении s^0 и s^8 квадратичные по полям члены совпадали с массовой частью свободного лагранжиана $m_K^2\bar{K}K+(1/2)\,m_\pi^2\pi^2$:

$$c_1=\sqrt{\frac{2}{3}}\left(m_k^2+\frac{1}{2}m_\pi^2\right), \quad c_2=-\frac{2}{\sqrt{3}}(m_k^2-m_\pi^2).$$

В заключение выпишем явный вид матрицы $\exp(i\xi)$:

$$\exp(i\xi)=\left|\begin{matrix}\alpha^2\left[U_{ij}-\dfrac{2\psi_{L_i}\bar{\psi}_{R_j}}{F_\pi^2(1+\gamma)}\right] & \left(\dfrac{i\sqrt{2}\,\alpha^{-1}\psi_L}{F_\pi}\right)_{3j}\\ \left(i\,\dfrac{\bar{\psi}_R\sqrt{2}\,\alpha^{-1}}{F_\pi}\right)_{i3} & (\gamma\alpha^{-4})_{33}\end{matrix}\right|,$$

$$U=\exp\left(i\frac{\pi^i\tau^i}{F_\pi}\right), \quad \bar{\psi}_L=\exp\left(i\frac{\pi^i\tau^i}{2F_\pi}\right)\psi\equiv U^{1/2}\psi, \quad \psi_R=U^{-1/2}\psi,$$

$$\gamma=\sqrt{1-\frac{2\bar{\psi}\psi}{F_\pi^2}}, \quad \alpha^2=e^{i\eta/\sqrt{3}}, \quad \psi=\begin{pmatrix}K^+\\K^0\end{pmatrix}.$$

3. МЕТОДЫ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ И КОВАРИАНТНАЯ ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

При построении квантовой киральной теории поля будет использован формализм S-матрицы в представлении взаимодействия, где S-матрица, как обычно, записывается в форме

$$\hat{S}=T\exp\left[i\int d^4xL_{\text{вз t}}(x)\right]=\sum_0^\infty\frac{i^n}{n!}T\left[\int d^4xL_{\text{вз t}}(x)\right]^n. \tag{3.1}$$

В тех случаях, когда приходится иметь дело с перенормируемыми квантовыми теориями поля (например, электродинамикой), для устранения неоднозначностей, возникающих в теории при регуляризации расходящихся интегралов, достаточно произвести перенормировку конечного числа наблюдаемых физических величин таких, как масса, заряд и волновые функции полей. Для неперенормируемых теорий, примером которых служит и киральная теория, в каждом порядке теории возмущений также можно было бы использовать регуляризационную процедуру ренормируемых теорий, но она привела бы к появлению слишком большого числа неопределенных параметров, зафиксировать которые уже не удалось бы перенормировкой конечного числа наблюдаемых физических величин. Поэтому здесь приходится использовать совершенно иные методы регуляризации, характерные для теорий с неполиномиальными лагранжианами. Эти методы впервые были предложены в работах [25, 39].

Один из таких методов, получивший название суперпропагаторного (СП) метода, будет в дальнейшем использоваться в наших расчетах. Подробное изложение этого метода можно найти в работах [25]. Здесь мы в краткой форме опишем его основную идею. Характерными особенностями, которыми обладают коэффициентные функции на световом конусе в перенормируемых теориях, являются особенности полюсного типа. Например, двухвершинная петля с n внутренними линиями, соответствующими безмассовым скалярным частицам, имеет вид

$$\Pi^{(n)}(x) = i\,[\Delta^c(x)]^n = i\left[-\frac{i}{(2\pi)^2(x^2 - i\varepsilon)}\right]^n. \tag{3.2}$$

При построении фурье-образа от (3.2), чтобы сделать интеграл сходящимся, необходимо произвести конечное количество вычитаний (при использовании, например, регуляризации Паули — Вилларса или Боголюбова — Парасюка; см. [40]). Однако снятие этой промежуточной регуляризации сопряжено с появлением в окончательном выражении известного числа неопределенных параметров.

Теперь обратимся к неполиномиальным лагранжианам. Типичным примером такого лагранжиана является лагранжиан в экспоненциальной форме

$$L_{\exp} = G\,[\exp(g\varphi(x)) - 1].$$

Если рассматривать не отдельную диаграмму, а полный набор двухвершинных диаграмм, получающихся во втором порядке теории возмущений по константе G, то нетрудно прийти к следующему выражению:

$$\Pi^{(\exp)}_{(-)}(x) = iG^2\,[\exp(-ig^2\Delta(x)) - 1] = iG^2\left\{\exp\left[-\frac{g^2}{(2\pi)^2(x^2 - i\varepsilon)}\right] - 1\right\}. \tag{3.3}$$

В отличие от (3.2), мы встречаемся здесь уже не с полюсными особенностями на световом конусе, а с существенно особой точкой. С одной стороны,

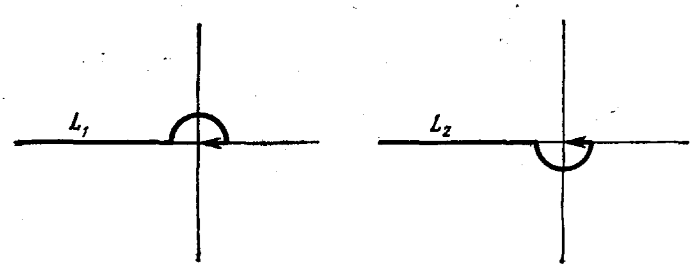

Рис. 1. Изображение путей подхода к точке $x^2 = 0$ в интегралах с контурами L_1 и L_2.

поведение функции Грина на световом конусе становится более сингулярным, чем в ренормируемых теориях. Но, с другой стороны, мы получаем возможность использовать совершенно новые методы регуляризации расходящихся интегралов, которые были неприемлемы раньше. Они основаны на использовании того качества существенно особой точки, что, в отличие от полюсной особенности, поведение функции Грина (3.3) на световом конусе теперь сильно зависит от пути, по которому мы приближаемся к нему. Поэтому, если в интеграле, соответствующем фурье-образу от (3.3), выбрать контур интегрирования по переменной $\lambda = x^2$ так, чтобы приближаться к световому конусу из области $x^2 > 0$, то мы получим сходящийся интеграл, и выражение для функции Грина в импульсном пространстве будет конечным. Конкретный выбор контура интегрирования диктуется условием унитарности S-матрицы [25] *).

Эти качества полной функции $\Pi^{\text{exp}}(x)$ совершенно теряются, если рассматривать каждый член ее разложения по степеням g^2 отдельно (подобно тому, как предел

$$\lim_{t\to\infty} e^{-t} = \lim_{t\to\infty} \sum_{0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!} = 0$$

отличается от суммы пределов каждого члена разложения). Кроме того, функция $\widetilde{\Pi}^{\text{exp}}(p)$ имеет неаналитическую зависимость от константы связи g^2 логарифмического типа. Это подтверждает еще раз неправомерность разложения этой функции по степеням g^2.

Функцию $\widetilde{\Pi}^{\text{exp}}(p)$ можно представить в виде модифицированного разложения по g^2, где при каждой степени g^{2n} могут быть множители, содержащие еще логарифмическую зависимость от g^2 ($g^{2n} \ln g^2$). Это является отражением того факта, что при получении конечного выражения для «данного порядка по g^2» было учтено влияние всех остальных членов разложения функции Π^{exp}.

Обсудим теперь саму теорию возмущений. S-матрицу (3.1) удобно записать в другой эквивалентной форме, разделяя поля на внутренние Γ (приводящие к появлению пропагаторов в коэффициентных функциях) и внешние φ:

$$\hat{S} = N_{\varphi_\Gamma} \langle 0 \,|\, T_\Gamma \exp\left[i \int d^4x L_{\text{вз}}(\varphi + \Gamma) \right] |\, 0 \rangle_\Gamma . \tag{3.4}$$

Как мы уже видели в гл. 2, разные формы киральных лагранжианов должны приводить к одним и тем же физическим результатам. Физически эквивалентные лагранжианы связаны между собой точечными преобразованиями

$$\varphi = \varphi' f(\varphi'), \quad f(0) = 1. \tag{3.5}$$

Например, лагранжианы

$$L = \lambda\varphi^4 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2, \tag{3.6а}$$

$$L = \lambda(\sin\varphi)^4 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \sin\varphi)^2 \tag{3.6б}$$

---

*) Для иллюстрации рассмотрим две функции $\Pi^{\text{exp}}_{(\pm)}(x)$. $\Pi^{\text{exp}}_{(+)}(x)$ отличается знаком в экспоненте от (3.3). Из унитарности S-матрицы следует, что при $p^2 < 0$ $\operatorname{Im} \widetilde{\Pi}^{\text{exp}}_{(\pm)}(p) = 0$. Этому условию удовлетворяет простое конечное выражение для $\widetilde{\Pi}^{\text{exp}}_{(+)}(p)$:

$$\widetilde{\Pi}^{\text{exp}}_{(+)}(p) = \int_0^\infty d\lambda' I_{(+)}(|p|, \lambda'), \quad (p^2 < 0),$$

где $\lambda' = -x^2$, $|p| = \sqrt{-p^2}$, $I_{(\pm)} = (2\pi^2 G^2/|p|)\sqrt{\lambda'} J_1(|p|\sqrt{\lambda'})\,[\exp(\mp g^2/(2\pi^2\lambda')) - 1]$, J_1 — функция Бесселя. Для $\widetilde{\Pi}^{\text{exp}}_{(-)}(p)$ приходим к более сложному выражению

$$\widetilde{\Pi}^{\text{exp}}_{(-)}(p) = \frac{1}{2}\left[\int_{L_1} d\lambda' I_{(-)}(|p|, \sqrt{\lambda'}) + \int_{L_2} d\lambda' I_{(-)}(|p|, \sqrt{\lambda'}) \right].$$

Контуры L_1 и L_2 изображены на рис. 1.

физически эквивалентны. Такая эквивалентность обусловлена тем, что метрические свойства пространства самого поля, которые определяются квадратичной формой производных полей, не зависят от преобразования (3.5). Выбор из всех эквивалентных лагранжианов того или иного частного лагранжиана при формулировке теории возмущений (например, (3.6а), а не (3.6б)) определяется лишь из соображений простоты используемого аппарата. Аналогично существует бесконечно много эквивалентных киральных лагранжианов. Записанные в форме

$$L(\pi) = \frac{1}{2}\,\partial_\mu\pi^i\partial_\mu\pi^j g_{ij}(\pi) \tag{3.7}$$

киральные лагранжианы имеют красивое геометрическое истолкование: g_{ij} есть метрический тензор трехмерного изопространства постоянной кривизны, которую характеризует константа F_π. Преобразования (2.6) есть сдвиг начала координат на сфере на вектор **a** и поэтому имеет смысл сложения векторов в кривом пространстве

$$\pi'(\pi, \bar{a}) = \pi\,(+)\,\bar{a} = \pi + \bar{a} + O\left(\frac{1}{F_\pi}\right). \tag{3.8}$$

При $F_\pi \to \infty$ возникает обычное евклидово изопространство.

Суть используемой ковариантной теории возмущений заключается в том, что по аналогии с теорией $\lambda\varphi^4$ (3.6а):

1) выбираются как наиболее простые так называемые нормальные координаты в пространстве полей вдоль геодезических линий (этому выбору соответствует используемая в гл. 2 параметризация конечных преобразований группы в виде экспоненты $e^{iK\pi}$);

2) при разделении полей на внешние π и внутренние Γ используется операция сложения векторов по геодезическим линиям в кривом пространстве (3.8) (в частности, для вычисления соответствующих лагранжиану $L(\pi\,(+)\,\Gamma)$ форм Картана в формулах (2.12) нужно сделать замену $\exp(iK\pi) \to \exp(iK\pi)\exp(iK\Gamma)$ [41, 42].

Преимущество такого выбора фундаментальных полей в том, что: 1) возникает наиболее простая комбинаторика при вычислении матричных элементов (ср. например, лагранжианы (3.6а) и (3.6б)); 2) в ковариантной теории возмущений сразу же происходит ковариантное разбиение всех диаграмм на диаграммы с фиксированным числом вершин, что важно при применении СП метода вычисления в форме, инвариантной относительно группы $SU_2 \times SU_2$. В произвольной системе координат для такого инвариантного разбиения необходимо было бы делать дополнительные и весьма громоздкие перестройки диаграмм Фейнмана [35, 41, 42].

4. СИЛЬНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ($\pi\pi$-РАССЕЯНИЕ)

В дальнейшем изложении мы постараемся возможно меньше останавливаться на деталях вычислений, отсылая интересующихся этими вопросами к оригинальным работам [15–23], а в основном займемся обсуждением полученных результатов. Прежде всего рассмотрим процесс упругого $\pi\pi$-рассеяния.

Амплитуда рассеяния имеет вид

$$(2\pi)^6\, 4\sqrt{p_1^0 p_2^0 p_3^0 p_4^0}\,\langle i_1 i_2 | S | i_3 i_4\rangle = I + i\,(2\pi)^4\,\delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \times$$
$$\times\,[\delta_{i_1 i_2}\delta_{i_3 i_4}A(s, t, u) + \delta_{i_1 i_3}\delta_{i_2 i_4}A(t, s, u) + \delta_{i_1 i_4}\delta_{i_2 i_3}A(u, t, s)], \tag{4.1}$$

где I — единичная матрица, i_k — изотопические индексы пиона, δ_{ij} — символы Кронекера, $s = (p_1 + p_2)^2$, $t = (p_1 - p_3)^2$, $u = (p_1 - p_4)^2$. На рис. 2 изображены диаграммы, соответствующие однопетлевому приближению (порядок не выше $1/F_\pi^4$). Диаграмма рис. 2, *а* соответствует древесному приближению. Вклад в амплитуду от диаграммы рис. 2, *б* вычисляется с использованием СП метода [25]. Вклады остальных диаграмм вычисляются обычными методами ренормируемых теорий поля, и здесь удерживаются лишь квадратичные члены по переменным s, t, u, так как члены

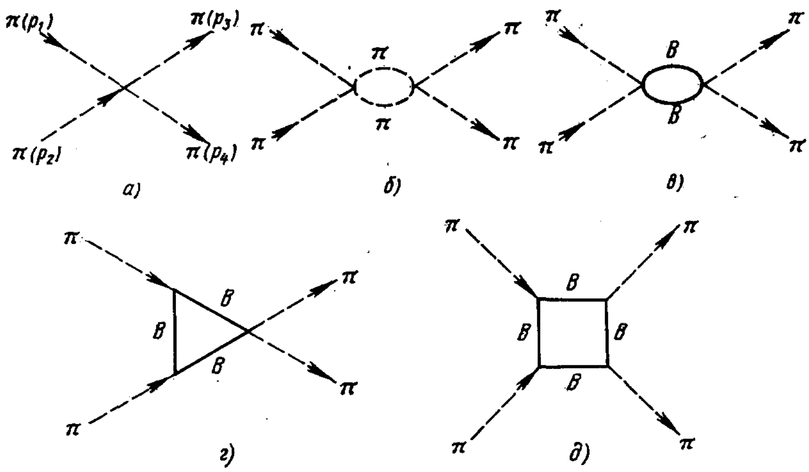

Рис. 2. Диаграммы, соответствующие «древесному» (*а*) и однопетлевому приближению (порядок F^{-4}) (*б*) для $\pi\pi$-рассеяния.

Штриховые линии — пионные, сплошные — барионные.

более высоких степеней будут малы, типа $\left[\frac{s^2}{(4\pi F_\pi)^4}\right]\frac{s}{M_N^2}$ *). Учет вкладов от всех членов барионного октета производится с помощью SU (3)-теории [16, 17]. В результате в F_π^{-4}-приближении получается следующее выражение для $A\ (s,\ t,\ u)$ [19]:

$$(4\pi)^{-2}A\ (s,\ t,\ u) = \alpha_0\,(3\bar{s}-1) + \alpha_0^2\Pi\,(s,\ \bar{t},\ \bar{u}), \tag{4.2}$$

$$\Pi\,(\bar{s},\ \bar{t},\ \bar{u}) = -1{,}5 + 3\bar{s} + 0{,}6\bar{s}^2 + 20\,(\bar{t}^2+\bar{u}^2) - (3\bar{s}-1)^2 J\,(\bar{s}) -$$
$$-\,[3\,(\bar{u}-1)\,(\bar{u}-\bar{t}) + 3\bar{u}-1]\,J\,(\bar{u}) - [3\,(\bar{t}-1)\,(\bar{t}-\bar{u}) + 3\bar{t}-1]\ J\,(\bar{t}),$$

где

$$\bar{\xi} = \frac{\xi}{4m_\pi^2}\ (\xi = s,\ t,\ u), \qquad \alpha_0 = \frac{1}{3}\left(\frac{m_\pi}{2\pi F_\pi}\right)^2 \approx 0{,}02,$$

$$J\,(\bar{\xi}) = 1 - \frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty}(4\bar{\xi})^n\,\frac{n!\,(n-1)!}{(2n+1)!} =$$

$$= \begin{cases} x\,\mathrm{arctg}\,x^{-1}, & x = \sqrt{\frac{1}{\bar{\xi}} - 1}, \quad 0 < \bar{\xi} < 1, \\ \frac{y}{2}\left[\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) - i\pi\right], & y = \sqrt{1 - \frac{1}{\bar{\xi}}}, \quad \bar{\xi} > 1, \\ \frac{y}{2}\ln\left(\frac{y+1}{y-1}\right), & \bar{\xi} < 0. \end{cases} \tag{4.3}$$

*) Вклады от диаграмм рис. 2, *в* — *д* в константный и линейный по s, t, u члены содержат неопределенные параметры, которые можно зафиксировать, используя низкоэнергетические теоремы, требующие, чтобы амплитуда при низких энергиях имела вид $A\ (s,\ t,\ u) \approx s/F_\pi^2$.

В области энергий, существенно меньших $4\pi F_\pi$, формула (4.2) является хорошим разложением амплитуды $\pi\pi$-рассеяния по малому параметру α_0. Вид амплитуды в каналах с изоспином 0,1 и 2 определяется формулами

$$A^0 = 3A(s, t, u) + A(t, s, u) + A(u, t, s),$$
$$A^1 = A(t, s, u) - A(u, t, s), \quad A^2 = A(t, s, u) + A(u, t, s).$$

Следуя работе [33], введем обозначения

$$\alpha_l^{I(n)} = \lim_{\bar{s}\to 1} \frac{1}{4^n} \frac{\partial^n}{\partial \bar{s}^n} A_l^I(\bar{s}),$$
$$\alpha_l^{I(0)} = a_l^I, \quad \alpha_l^{I(1)} = b_l^I, \quad \alpha_l^{I(2)} = c_l^I,$$
$$A_l^I(\bar{s}) = \frac{1}{2(\bar{s}-1)^l} \int_{-1}^{1} dx\, P_l(x)\, A^I(\bar{s}, x)$$
$$\left(\bar{t} = -\frac{(\bar{s}-1)}{2}(1-x), \quad \bar{u} = -\frac{(\bar{s}-1)}{2}(1+x)\right);$$

здесь a_l^I — длины рассеяния, b_l^I и c_l^I — параметры эффективной области, $P_l(x)$ — полином Лежандра. Тогда для длин рассеяния и параметров эффективной области $\pi\pi$-системы получаются значения, приведенные в таблице.

$\alpha_l^{I(n)}$	Эксперимент [32]	Значения из [22]	Значения из [33]
a_0^0	0,10; 0,60	0,15	0,15±0,02
a_0^2	—0,10; —0,03	—0,042	—0,065±0,025
a_1^1	0,042; 0,040	0,031	0,0341±0,0036
b_1^1		$1,14\cdot10^{-3}$	$(1,07\pm0,27)\cdot10^{-3}$
a_2^0	$1,4\cdot10^{-3}$; $1,8\cdot10^{-3}$	$1,85\cdot10^{-3}$	$(1,48\pm0,08)\cdot10^{-3}$
a_2^2	$-2\cdot10^{-4}$; $3\cdot10^{-4}$	$2,6\cdot10^{-4}$	$(-3\pm8)\cdot10^{-5}$
b_2^0		$-1,02\cdot10^{-4}$	$(-3,8\pm1,1)\cdot10^{-5}$
b_2^2		$-5,1\cdot10^{-5}$	$(-4,4\pm1,1)\cdot10^{-5}$
c_2^0		$2\cdot10^{-5}$	$(1,13\pm0,36)\cdot10^{-5}$
c_2^2		$1,06\cdot10^{-5}$	$(1,27\pm0,36)\cdot10^{-5}$
a_3^1		$1,33\cdot10^{-5}$	$(3,8\pm0,5)\cdot10^{-5}$
a_4^0		$5\cdot10^{-6}$	$(4,8\pm0,8)\cdot10^{-6}$
a_4^2		$2\cdot10^{-6}$	$(1,7\pm0,8)\cdot10^{-6}$

При $l \geqslant 3$ из приведенных выше формул можно получить следующие простые выражения для длин рассеяния:

$$a_l^0 = (2l+1)(4l+7)\, z_l,$$
$$a_l^1 = \frac{1}{3}(4l^2-2l-1)\, z_l, \quad z_l = 3\pi\alpha_0^2 4^{l-1} \frac{(l!)^3 (l-3)!}{[(2l+1)!]^2},$$
$$a_l^2 = (4l^2+3l+8)\, z_l.$$

Результаты, приведенные в таблице, хорошо согласуются с известными экспериментальными данными [32], а также с результатами феноменологического подхода Палоу и Индураина [33], где используется представление Фруассара — Грибова.

Все длины рассеяния для $l \geqslant 3$ удовлетворяют неравенствам

$$a_{l+2}^{I} \leqslant a_{l}^{I} \frac{(l+1)(l+2)}{4(2l+3)(2l+5)},$$

найденным в работах [43] из требований унитарности и аналитичности амплитуды рассеяния.

Заметим, что если значения длин рассеяния в S- и P-волнах в основном определяются борновским членом (рис. 2, *а*), то, начиная с D-волны, вклад борновского члена в длины рассеяния высших парциальных волн полностью отсутствует и их величины определяются вкладом пионной петлевой диаграммы 2,*б*.

Разлагая амплитуду A^I по парциальным волнам и используя формулу $(\operatorname{ctg} \delta_l^I - i)^{-1} = \sqrt{1 - (1/\bar{s})}\, A_l^I$, можно получить информацию о поведении фаз $\pi\pi$-системы. На рис. 3 и 4 приведены соответствующие графики. Штриховой линией показано поведение фаз в пределе $m_\pi = 0$ (случай, рассмотренный в работах [15, 16]). В P-волне хорошо заметен ρ-мезонный резонанс при энергии ~ 800 *Мэв* с шириной ~ 150 *Мэв*.

В заключение этой главы упомянем еще о ряде неравенств, полученных Мартеном [44] в подпороговой области из условий унитарности и кроссинг-симметрии для S-волны процесса $\pi^0\pi^0 \to \pi^0\pi^0$:

$$f_0^{00}(\bar{s}) = \frac{1}{64\pi} \int_{-1}^{1} dx\, [A(s, t, u) + A(t, s, u) + A(u, t, s)].$$

Выпишем эти неравенства:

1) $$f_0^{00}(\bar{s}) \leqslant f_0^{00}(1), \quad 0 \leqslant \bar{s} \leqslant 1;$$

2) $$\frac{df_0^{00}(\bar{s})}{d\bar{s}} > 0, \quad 0{,}5 \leqslant \bar{s} \leqslant 1;$$

3) $$f_0^{00}(\bar{s}) \geqslant 2 \int_{0,5}^{1} d\bar{s} f_0^{00}(\bar{s});$$

4) $$f_0^{00}(0) > f_0^{00}\left(\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right);$$

5) $$\frac{df_0^{00}(\bar{s})}{d\bar{s}} < 0, \quad 0 \leqslant \bar{s} \leqslant \frac{1{,}29}{4};$$

6) $$\frac{df_0^{00}(\bar{s})}{d\bar{s}} > 0, \quad 1{,}7 \leqslant 4\bar{s} \leqslant 1{,}76;$$

7) $$f_0^{00}(0{,}8) > f_0^{00}\left(\frac{0{,}21}{4}\right) > f_0^{00}\left(\frac{2{,}98}{4}\right).$$

Прямые вычисления показывают, что амплитуда (4.2) полностью удовлетворяет всем этим неравенствам.

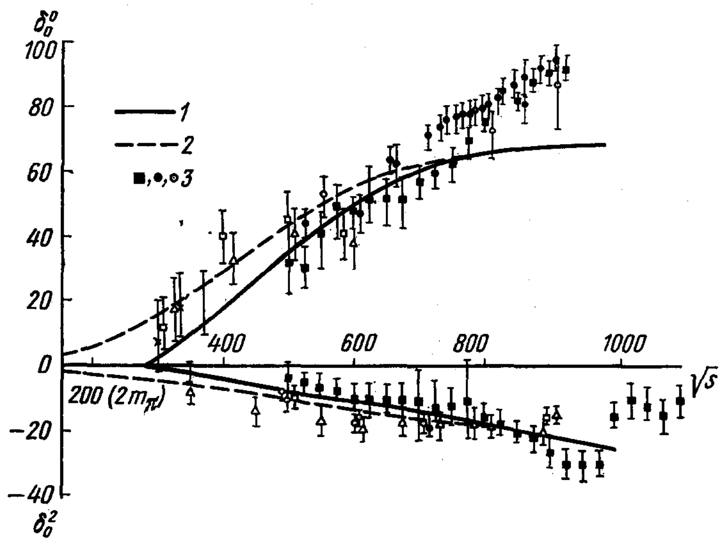

Рис. 3. Поведение S-волновых фаз δ_0^0 и δ_0^2 амплитуды $\pi\pi$-рассеяния.
1 — теоретические кривые для $m_\pi \neq 0$ [17], *2* — кривые для $m_\pi = 0$ [15], [16], *3* — экспериментальные точки из работ [32а] и [32б] соответственно. Об остальных см. [16] ($\sqrt{s}$ в *Мэв*).

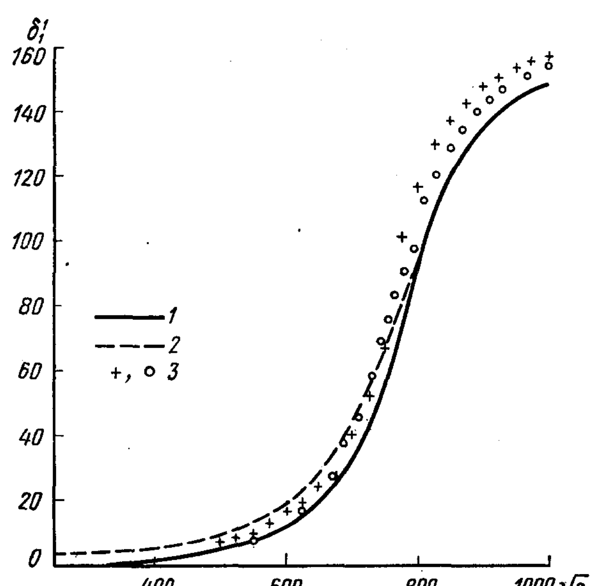

Рис. 4. Поведение P-волновой фазы δ_1^1 амплитуды $\pi\pi$-рассеяния.
1 — теоретическая кривая для $m_\pi \neq 0$ [17], *2* — для $m_\pi = 0$ [15], [16], *3* — экспериментальные точки из работ [32а] и [32б] соответственно ($\sqrt{s}$ в *Мэв*).

5. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Взаимодействие с электромагнитным полем A_μ вводится в лагранжиан обычным градиентно-инвариантным способом:

$$\partial_\mu \chi^\pm \to (\partial_\mu \pm ieA_\mu)\,\chi^\pm,$$
$$\chi^\pm = (\pi^\pm,\ K^\pm,\ p,\ \Sigma^\pm,\ \Xi^\pm). \qquad (1.5)$$

а) Электромагнитное взаимодействие пионов [18, 22, 23]

1) Форм-фактор. Матричный элемент для пиона, находящегося во внешнем электромагнитном поле A_μ, равен

$$\langle \pi^+ \,|\, S(A) \,|\, \pi^+ \rangle = ie \frac{p_\mu A_\mu(q)}{(2\pi)^3\, 2\sqrt{p_1^0 p_2^0}}\, \Phi_\pi(q),$$

где p_1 и p_2 — импульсы пиона, $p = p_1 + p_2$, $q = p_1 - p_2$,

$$\Phi_\pi(q) = 1 + \Phi_\pi^{(\pi)}(q) + \Phi_\pi^{(Б)}(q) + \ldots \qquad (5.2)$$

— форм-фактор пиона. $\Phi_\pi^{(\pi)}(q)$ — вклад в форм-фактор от пионной диаграммы рис. 5, *б* и $\Phi_\pi^{(б)}(q)$ — вклад от барионных диаграмм рис. 5, *в—д* в e/F_π^2-приближении.

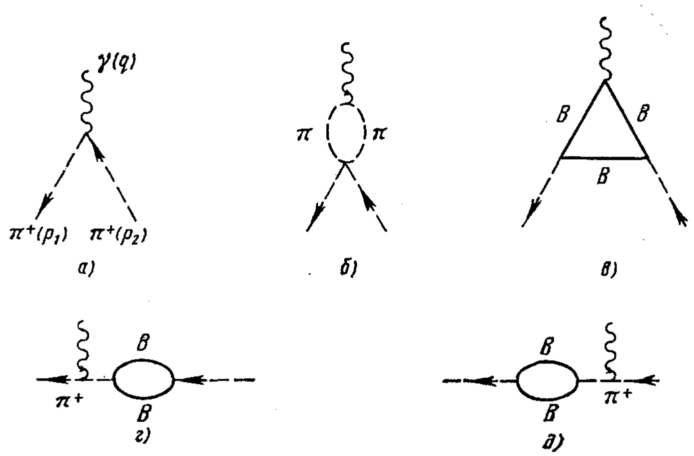

Рис. 5. Диаграммы, соответствующие «древесному» (*а*) и однопетлевому приближению (порядок e/F_π^2) (*б — д*) для форм-фактора пиона.
Волнистые линии — фотонные.

При вычислении функции $\Phi_\pi^{(\pi)}(q)$ используется СП метод. В результате получаем

$$\Phi_\pi^{(\pi)}(q) = \alpha_0 \left[\bar{q}^2 \left(\frac{13}{24} - \frac{3}{2} C + \ln \frac{2\pi F_\pi}{m_\pi} \right) - 1 + \frac{4}{3} \bar{q}^2 + (1 - \bar{q}^2)\, J(\bar{q}^2) \right], \qquad (5.3)$$

где $C = 0{,}577\ldots$, $\bar{q}^2 = q^2/4m_\pi^2$, α_0 и $J(\bar{q}^2)$ те же, что и в формуле (4.2). Из (5.3) видно, что вклад от пионной петли в радиус пиона равен

$$\langle r^2 \rangle_\pi^{(\pi)} = \frac{3}{2} \frac{\alpha_0}{m_\pi^2} \left(\frac{13}{24} - \frac{3}{2} C + \ln \frac{2\pi F_\pi}{m_\pi} \right) \approx 0{,}065\ \text{фм}^2. \qquad (5.4)$$

Вклад от барионных диаграмм опять вычисляется с точностью до q^2-членов ввиду малости остальных членов. Все расходимости в диаграммах рис. 5, *в—д* взаимно компенсируются, и для $\Phi_\pi^{(б)}(q)$ получается выражение *)

$$\Phi_\pi^{(б)}(q) \approx \frac{1,7}{6(2\pi)^2} g^2 \frac{q^2}{M_N^2} \qquad (5.5)$$

Отсюда для квадратичного радиуса пиона получается вклад

$$\langle r^2\rangle_\pi^{(б)} = 0,36\ fm^2.$$

Радиус пиона

$$\sqrt{\langle r^2\rangle_\pi} = \sqrt{\langle r^2\rangle_\pi^{(\pi)} + \langle r^2\rangle_\pi^{(б)}} \approx 0,65\ фм \qquad (5.6)$$

находится в удовлетворительном согласии с последними экспериментальными данными [34].

Подставляя функции (5.3) и (5.5) в (5.2), приходим к следующему выражению для форм-фактора пиона:

$$\Phi_\pi = 1 + \alpha_0\,[-1 + 8,6\bar{q}^2 + (1-\bar{q})^2 J(\bar{q}^2)].$$

Эта формула описывает поведение форм-фактора пиона при энергиях $\sqrt{|q^2|} < 1$ *Гэв* в хорошем согласии с экспериментальными данными, недавно полученными в Дубне и Серпухове [34] (см. графики на рис. 6).

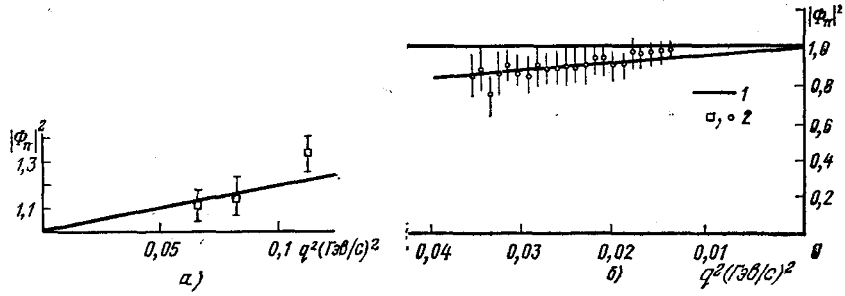

Рис. 6. Поведение форм-фактора пиона в областях $q^2 > 0$ (*а*) и $q^2 < 0$ (*б*). *1* — теоретическая кривая [18], *2* — экспериментальные точки из работ [34а] и [34б] соответственно.

Интересно отметить, что радиус пиона почти целиком определяется вкладом барионных петлевых диаграмм. Значение радиуса (5.6) близко к предсказаниям, сделанным на основе модели ρ-доминантности ($\sqrt{\langle r^2\rangle_\pi} \sim \sqrt{6/m_\rho^2} \sim 0,64\ fm$).

2) Комптон-эффект. Выпишем теперь матричный ~~элемент~~, соответствующий комптон-эффекту на пионе:

$$\langle \pi^a(p_1)\,\pi^b(p_2)\,|\,S\,|\,\gamma_{\lambda_1}(q_1)\,\gamma_{\lambda_2}(q_2)\rangle = \\ = \frac{i\delta^{(4)}(p_1+p_2-p_3-p_4)\,\varepsilon^\mu_{\lambda_1}\varepsilon^\nu_{\lambda_2}}{(2\pi)^2\,4\sqrt{p_1^0 p_2^0 q_1^0 q_2^0}}\, T^{\mu\nu}_{ab}(p_1, p_2\,|\,q_1, q_2),$$

где q_1, q_2 — импульсы фотонов, $\varepsilon^\mu_{\lambda 1}$, $\varepsilon^\nu_{\lambda 2}$ — поляризуемости, p_1, p_2 — импульсы пионов, a, b — изотопические индексы. Сразу же заметим, что для этого процесса в однопетлевом приближении компенсации расходимостей происходят не только в барионных петлевых диаграммах, но и в пионных. Поэтому СП метод нет необходимости использовать. Не приводя об-

*) Множитель 1,7 появляется после учета всех членов барионного октета (см. [18]). πK-взаимодействия дают очень малый вклад в форм-фактор пиона.

щего вида ковариантной амплитуды $T^{\mu\nu}_{ab}$, запишем здесь ту форму, которая получается в первых порядках теории возмущений:

$$T^{\mu\nu}_{ab} = 2e^2(\delta_{ab} - \delta_{3a}\delta_{3b})\left\{g^{\mu\nu} - \frac{p_1^{\mu}p_2^{\nu}}{p_1q_1} - \frac{p_1^{\nu}p_2^{\mu}}{p_1q_2} + \right.$$
$$\left. + (g^{\mu\nu}q_1q_2 - q_1^{\nu}q_2^{\mu})\,[\beta_\pi^{(\pi)}(q_1q_2) + \beta_\pi^{(\text{б})}(q_1q_2)]\right\} +$$
$$+ 4e^2\delta_{3a}\delta_{3b}(g^{\mu\nu}q_1q_2 - q_1^{\nu}q_2^{\mu})\,\beta_\pi^{(\pi)}(q_1q_2). \qquad (5.7)$$

Первые три члена в фигурных скобках являются борновскими членами (диаграммы рис. 7, *а*, *б*), $\beta_\pi^{(\pi)}(q_1q_2)$ — вклад от пионных петель (рис. 7, *в*, *г*),

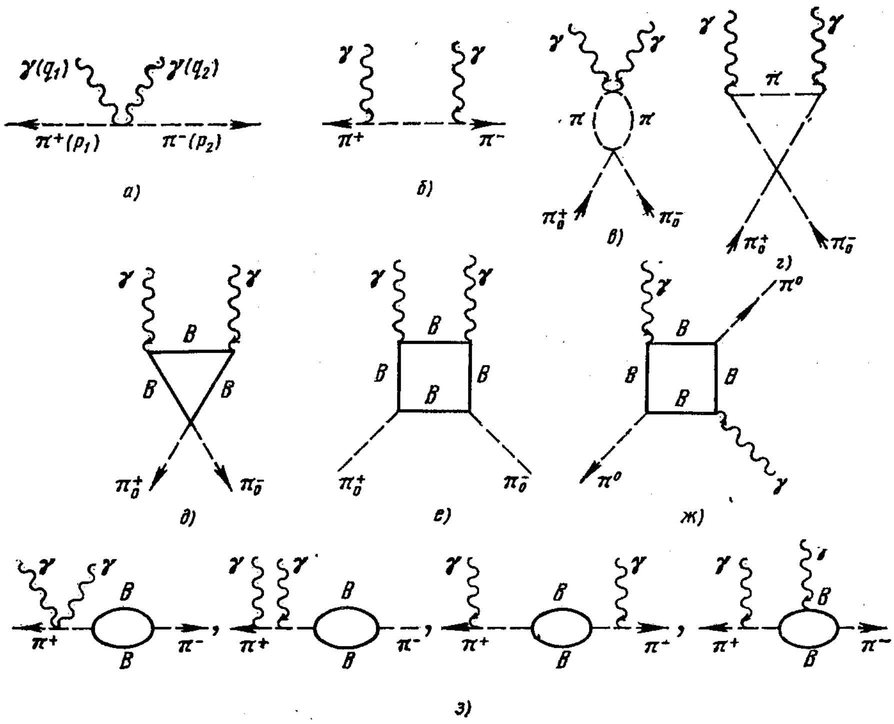

Рис. 7. Диаграммы, соответствующие «древесному» *а*, *б*) и однопетлевому приближению (порядок e^2/F_π^2) (*в* — *з*) для комптон-эффекта на пионе.

$\beta_\pi^{(\text{б})}(q_1q_2)$ — вклад от барионных петель (рис. 7, *д*—*з*). В $\beta_\pi^{(\text{б})}$ удержаны лишь константные члены ввиду малости остальных членов разложения по степеням (q_1q_2). Кроме того, при выводе (5.7) использованы равенства

$$(q_1\varepsilon_1) = (q_2\varepsilon_2) = 0, \qquad q_1^2 = q_2^2 = 0, \qquad p_1^2 = p_2^2 = m_\pi^2.$$

При совместном вычислении вклада в амплитуду от диаграмм рис. 7, *в* и *г* получается конечное выражение, равное

$$\beta_\pi^{(\pi)}(q_1q_2) = (4\pi F_\pi)^{-2}\left(1 - \frac{2}{3}\frac{m_\pi^2}{q_1q_2}\right)\left\{\frac{2m_\pi^2}{q_1q_2}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{2m_\pi^2}{q_1q_2} - 1\right)^{-1/2}\right]^2 - 1\right\}.$$

При рассмотрении комптон-эффекта на нейтральном пионе вклады от диаграмм рис. 7, *д*—*ж* полностью взаимно сокращаются. Для заряженных пионов вклады от нуклонных диаграмм рис. 7, *д*—*з* равны

$$\beta_\pi^{(N)} = \frac{2}{3}\frac{g_A^2}{(4\pi F_\pi)^2}. \qquad (5.8)$$

Учет вкладов от остальных членов барионного октета приводит опять к появлению множителя 1,7 в (5.8).

Определяя поляризуемость пиона как коэффициент эффективного взаимодействия пиона с внешним электромагнитным полем A_g *)

$$V_{\text{вз}} = -\frac{\alpha_\pi}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2),$$

получаем

$$\begin{aligned} \alpha_{\pi^\pm} &= \alpha_{\pi^\pm}(q_1q_2)\big|_{q_1q_2=0} = \frac{e^2\beta_\pi^{(\pi)}(0)+\beta_\pi^{(б)}}{m_\pi\left(\beta_\pi^{(\pi)}(0)+\beta_\pi^{(б)}\right)} = 0{,}33\frac{\alpha}{m_\pi^3} = 7\cdot 10^{-3}\ фм^3,\\ \alpha_{\pi^0} &= \alpha_{\pi^0}(q_2q_2)\big|_{q_1q_2=0} = \frac{2e^2\beta_\pi^{(\pi)}(0)}{m_\pi} = -0{,}04\frac{\alpha}{m_\pi^3} = -8\cdot 10^{-4}\ фм^3. \end{aligned} \tag{5.9}$$

$$\left(\alpha = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137}\right).$$

Интересно отметить, что функция $\beta_\pi^{(\pi)}(q_1q_2)$ быстро меняется в пороговой области. В результате на пороге рождения двух пионов получаем

$$\alpha_{\pi^\pm}(2m_\pi^2) = 0{,}53\frac{\alpha}{m_\pi^3}, \quad \alpha_{\pi^0}(2m_\pi^2) = 0{,}35\frac{\alpha}{m_\pi^3}.$$

Полученные значения $\alpha_{\pi^\pm}$ по порядку величины совпадают с теми оценками, которые делались на основе использования алгебры токов [45] и кварковых моделей [46], в два раза отличаясь от предсказаний работы [45]. Кроме того, в работе [45] получено $\alpha_{\pi^0} = 0$.

б) Электромагнитное взаимодействие каонов [20]

Теперь перейдем к вычислению электромагнитного форм-фактора каона и его поляризуемости.

1) Форм-фактор. Запишем форм-фактор заряженного каона в форме

$$\Phi_K(q) = 1 + \Phi_K^{(\pi)}(q) + \Phi_K^{(K)}(q) + \Phi_K^{(б)}(q) + \ldots;$$

здесь $\Phi_K^{(\pi)}$ — вклад в форм-фактор от пионной петлевой диаграммы типа рис. 5, *б*, $\Phi_K^{(K)}$ — вклад от каонной петлевой диаграммы и $\Phi_K^{(б)}$ — вклад от барионных петель типа рис. 5, *b* и *г*, но с каонными концами. Эти вклады опять соответствуют e/F_π^2-приближению. Как и в случае пионного форм-фактора, вкладом от каонной петли можно пренебречь и мы приведем здесь лишь выражения для $\Phi_K^{(\pi)}(q)$ и $\Phi_K^{(б)}(q)$:

$$\Phi_K^{(\pi)}(q) = \alpha_0\left\{\frac{q^2}{8m_\pi^2}\left[\ln\left(2\left(\frac{2\pi F_\pi}{m_\pi}\right)^2\right) - 3C + 1\right] - 1 + \right.$$
$$\left. + \frac{q^2}{3m_\pi^2} + \left(1 - \frac{q^2}{4m_\pi^2}\right)J\left(\frac{q^2}{4m_\pi^2}\right)\right\};$$

здесь константы α_0, C и функция $J(q^2/4m_\pi^2)$ те же, что и в формулах (4.2) и (5.3). Член в квадратных скобках дает вклад в квадратичный радиус каона. Он равен

$$\langle r^2\rangle_{K^\pm}^{(\pi)} = 0{,}08\ фм^2. \tag{5.10}$$

*) Энергетический множитель $(g^{\mu\nu}q_1q_2 - q_1^\nu q_2^\mu)$, всегда присутствующий в однопетлевом приближении в амплитуде $T_{ab}^{\mu\nu}$ (см. (5.7)), на квантовомеханическом языке соответствует комбинации $\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2$. Отсюда следует, что электрическая и магнитная поляризуемости пиона в этом приближении равны по абсолютной величине и противоположны по знаку.

Вклад от барионных диаграмм опять оказывается существенно большим и равен *)

$$\Phi_K^{(б)}(q) = \frac{1,4}{6\,(2\pi)^2}\,\frac{g^2}{M_N^2}\,q^2. \qquad (5.11)$$

Из (5.10), (5.11) следует, что среднеквадратичный радиус заряженного каона равен

$$\sqrt{\langle r^2\rangle_{K^\pm}} \approx 0,61 \ \text{фм}.$$

Для нейтрального каона вклады от диаграмм-деревьев и барионных петель равны нулю, а вклад от пионной петли остается прежним по абсолютной величине, но с обратным знаком. Отсюда получается

$$\sqrt{\langle r^2\rangle_{K^0}} \approx 0,28 \ \text{фм}.$$

Последний результат хорошо согласуется с предсказаниями, сделанными на основе модели векторной доминантности (вариант с моделью смешивания токов [47]).

2) Комптон-эффект. Теперь кратко опишем результаты, получающиеся при вычислении амплитуды комптон-эффекта на каоне.

Помимо диаграмм, приведенных на рис. 7, но с каонными внешними концами вместо пионов, рассмотрим дополнительно две диаграммы типа рис. 7, *в* и *г*, но с внутренними каонными линиями. В амплитуду комптон-эффекта на пионе они давали пренебрежимо малый вклад, здесь же их следует учитывать. Тогда, опуская борновские члены, для амплитуд с заряженными и нейтральными внешними каонами в e^2/F_π^2-приближении:

$$T_+^{\mu\nu} = 2e^2\,(g^{\mu\nu}q_1q_2 - q_1^\nu q_2^\mu)\,[\beta_K^{(\pi)}(q_1q_2) + \beta_K^{(K^+)}(q_1q_2) + \beta_K^{(б)}],$$

$$T_0^{\mu\nu} = 2e^2\,(g^{\mu\nu}q_1q_2 - q_1^\nu q_2^\mu)\,[\beta_K^{(\pi)}(q_1q_2) + \beta_K^{(K^0)}(q_1q_2)].$$

Функция $\beta_K^\pi\ (q_1q_2)$ соответствует вкладу от двух диаграмм с пионными внутренними линиями (типа рис. 7, *в* и *г*). При совместном вычислении они дают конечный вклад, равный

$$\beta_K^{(\pi)}(q_1q_2) = (4\pi F_\pi)^{-2}\,\frac{q_1q_2}{4m_\pi^2}\,\mathcal{J}\left(\frac{q_1q_2}{2m_\pi^2}\right),$$

где

$$\mathcal{J}(\xi) = \frac{1}{\xi}\left\{\frac{1}{\xi}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\xi}-1\right)^{-1/2}\right]^2 - 1\right\}.$$

Функция $\mathcal{J}(\xi)$ довольно быстро меняется при увеличении ξ, так что вклад от $\beta_K^\pi\ (q_1q_2)$ в амплитуду $T_{\substack{+\\0}}^{\mu\nu}$, равный нулю при $q_1q_2 = 0$, может стать заметным при достаточно больших q_1q_2.

Функция $\beta_K^{(K^+)}(q_1q_2)$ соответствует вкладу от двух диаграмм с внутренними каонными линиями и заряженными внешними каонами:

$$\beta_K^{(K^+)}(q_1q_2) = (8\pi F_\pi)^{-2}\left(1 + \frac{q_1q_2}{2m_K^2}\right)\mathcal{J}\left(\frac{q_1q_2}{2m_K^2}\right).$$

Для случая нейтральных внешних каонов подобная функция равна

$$\beta_K^{(K^0)}(q_1q_2) = (4\pi F_\pi)^{-2}\,\frac{q_1q_2}{4m_K^2}\,\mathcal{J}\left(\frac{q_1q_2}{2m_K^2}\right).$$

*) Множитель 1,4 возникает при учете вкладов от всего барионного октета. Интересно отметить, что в случае точной $SU(3)$ симметрии все однопетлевые диаграммы для собственной энергии мезона, его форм-фактора и амплитуды комптон-эффекта оказываются пропорциональными функции $f(\bar\alpha) = 3\,(1-\bar\alpha)^2 + (5/3)\,\bar\alpha^2$. Минимум этой функции соответствует значению $\bar\alpha = 0,65$, что хорошо согласуется с экспериментом.

Отсюда видно, что при $q_1q_2 = 0$ отличный от нуля вклад в $T^{\mu\nu}_{\overset{+}{0}}$ дает лишь функция $\beta_K^{(K^+)} \approx 0{,}08 \ (4\pi F_\pi)^{-2}$.

Для случая нейтральных внешних каонов вклад в амплитуду $T_0^{\mu\nu}$ от барионных петлевых диаграмм, как и в случае пионных нейтральных концов, равен нулю. Для заряженных внешних каонов совместный вклад от диаграмм типа рис. 7, *д*, *е* и *з* равен $\beta_K^{(б)} \approx 1{,}4\,(4\pi F_\pi)^{-2}$; здесь мы оставили лишь константные члены ввиду малости следующих членов разложения по степеням (q_1q_2) (типа $O\ (q_1q_2/M_Б^2)$). Отсюда видно, что при $(q_1q_2) = 0$ барионные петли дают определяющий вклад в амплитуду комптон-эффекта $T_+^{\mu\nu}(0)$. Амплитуда $T_0^{\mu\nu}(0) = 0$.

Используя формулы, аналогичные (5.9), получим для поляризуемости каона следующие значения:

$$\alpha_{K^\pm} = \left(\frac{e}{4\pi F_\pi}\right)^2 \cdot \frac{1{,}5}{m_K} \approx 1{,}6 \cdot 10^{-3}\ \text{фм}^3, \quad \alpha_{K^0} = 0.$$

Эти значения согласуются как с теоретическими оценками, полученными недавно с помощью алгебры токов PCAC [48] $\alpha_{K^+} \sim 10^{-3}$ *фм*^{3}, так и с экспериментальными данными [49], пока, к сожалению, не очень точными: $\alpha_{K^+}^{\text{эксп}} \sim -\ (4 \pm 11)\cdot 10^{-3}$ *фм*^{3}.

6. СЛАБЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

а) Распады заряженных пионов [21]

Рассмотрим теперь основные распады заряженных мезонов и вычислим структурные константы этих распадов. Для этого нам необходимо будет дополнить киральный лагранжиан той частью, которая ответственна за слабые взаимодействия. Выпишем ее:

$$L_{вз}^{(G)} = \ :L_\mu^{(+)}\,[-\sqrt{2}\,F_\pi \partial_\mu \pi^- + i\sqrt{2}\,(\pi^-\partial_\mu\pi^0 - \pi^0\partial_\mu\pi^-) + \\ + \bar{\psi}_p\gamma_\mu(1 - ig_A\gamma_5)\,\psi_n + ie\sqrt{2}\,F_\pi\pi^- A_\mu]:,$$

где $L_\mu^{(+)} = (G/\sqrt{2})\cos\theta\bar{\mu}\ (\bar{e})\ \gamma_\mu\ (1 - i\gamma_5)\ \nu$, G — слабая константа связи, θ — угол Кабибо, μ, e и ν — поля μ-мезона, электрона и нейтрино.

Для амплитуд процессов, T, будем использовать обычное определение, которое, например, для процесса $\pi^\pm \to \mu^\pm\nu\gamma$ имеет вид

$$\langle \mu\nu(l),\ \gamma_\lambda(q)\,|\,S\,|\,\pi(p)\rangle = i\pi\,\frac{\delta^{(4)}(p-q-l)}{\sqrt{p^0q^0}}\,\varepsilon_\lambda^\mu T_\mu,$$

где ε_λ^μ — поляризация фотона, а p, q и l — импульсы пиона, фотона и лептонной пары соответственно. Поскольку, как легко убедиться на примере предыдущих расчетов, вклады барионных петель значительно превышают вклады от пионных петель, мы здесь будем учитывать лишь барионные вклады.

1) Начнем с рассмотрения основного распада пиона $\pi^\pm \to \mu^\pm\nu(e^\pm\nu)$. (Сначала будут рассмотрены только $\pi - N$-взаимодействия. В конце главы указано, какую поправку дает учет всех барионов октета.) С помощью этого процесса фиксируется единственный параметр киральной теории F_π. Оказывается, что следующий за борновским порядок теории возмущений дает лишь малую поправку к F_π, и в петлевых диаграммах рис. 8, *б* и *в* опять происходит полная компенсация расходимостей.

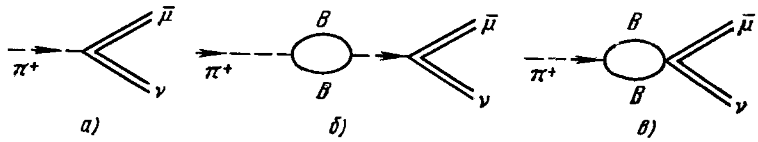

Рис. 8. Диаграммы, соответствующие «древесному» (*а*) и однопетлевому приближению (порядок G/F_π) (*б*, *в*) для распада $\pi^+ \to \bar{\mu}\nu$.
Двойные линии — лептонные.

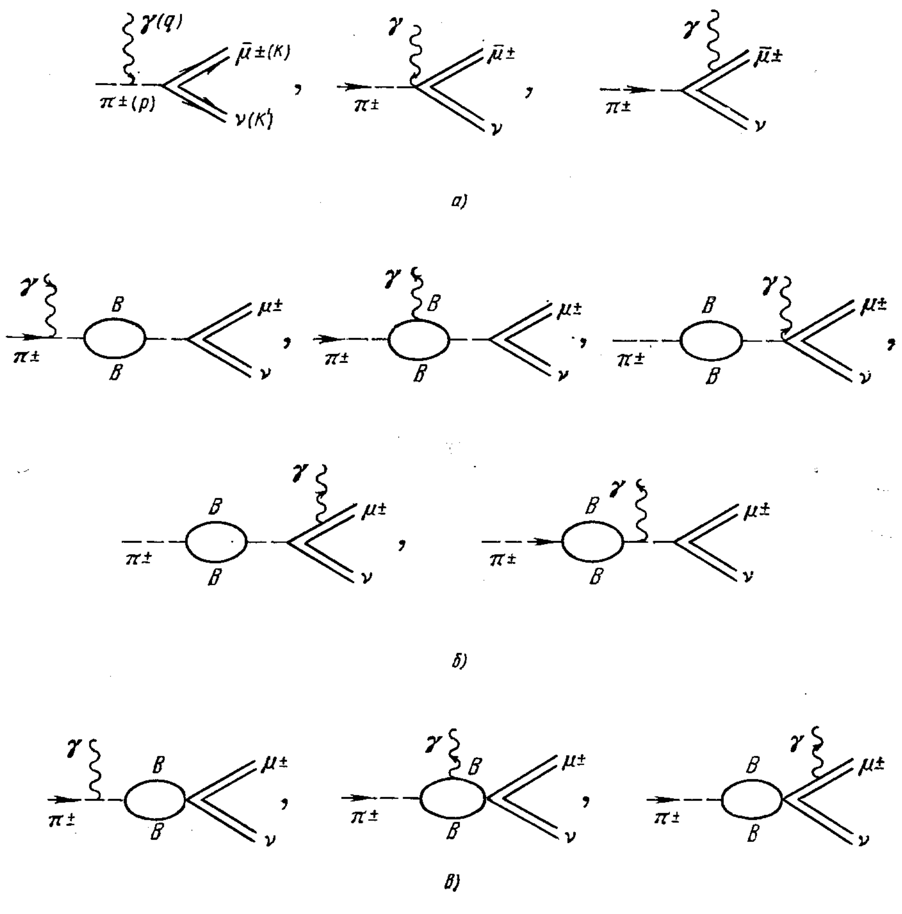

Рис. 9. Диаграммы, соответствующие «древесному» (*а*) и однопетлевому приближению (порядок eG/F_π) (*б*, *в*) для распада $\pi^+ \to \bar{\mu}\nu\gamma$.

В результате в однопетлевом приближении получаем

$$T_{(\pi\to\mu\nu)} = i\sqrt{2}F_\pi\left[1-\frac{1}{6}\left(\frac{g_A m_\pi}{2\pi F_\pi}\right)^2\right]p_\mu l_\mu^{(+)}, \qquad (6.1)$$

где p_μ — импульс пиона, $l_\mu^{(+)} = (G/\sqrt{2})\cos\theta\bar{u}_{(\mu)}\gamma_\mu(1-i\gamma_5)u_{(\nu)}$ — лептонный ток. Второй член, стоящий в скобках, существенно меньше единицы. Сравнивая (6.1) с экспериментом, имеем $F_\pi \approx 93$ *Мэв*.

2) Рассмотрим теперь процесс $\pi^\pm \to \mu^\pm\nu\gamma$. Подробное обсуждение этого процесса можно найти в работах [45, 50]. Борновское приближение определяется диаграммами рис. 9, *а*:

$$T_{\mu}^{(\text{б})} = ieF_\pi\left\{\sqrt{2}\left[g_{\mu\nu}+\frac{p_\mu(p-q)_\nu}{pq}\right]l_\nu^{(+)}-\right.$$
$$\left.-G\cos\theta\bar{u}_{(\mu)}\gamma_\mu(\hat{k}+\hat{q}-m_{(\mu)})^{-1}\hat{p}(1-\gamma_5)u_{(\nu)}\right\}.$$

Однопетлевое приближение в основном исчерпывается диаграммами, приведенными на рис. 9, *б* и *в*. Вклады от этих диаграмм имеют вид

$$T_\mu^{(0)} = -\frac{1}{6}\left(\frac{g_A m_\pi}{2\pi F_\pi}\right)^2 T_\mu^{(\text{б})} - ie\sqrt{2}\left[ih_V\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}p_\alpha q_\beta - h_A(g_{\mu\nu}pq - p_\mu q_\nu)\right]l_\nu^{(+)},$$

где

$$h_V = \frac{g_A}{8\pi^2 F_\pi}, \qquad h_A = \frac{g_A^2}{6(2\pi)^2 F_\pi}, \qquad (6.2)$$

$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ — полностью антисимметричный тензор. Таким образом, учет нуклонных петель сводится: 1) к перенормировке константы F_π (см. (6.1)); 2) к появлению членов, описывающих структурное излучение.

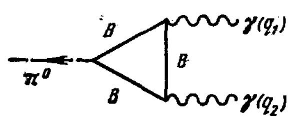

Рис. 10. Диаграмма, соответствующая однопетлевому приближению (порядок e^2/F_π) для распада $\pi^0 \to \gamma\gamma$.

Для отношения $h_A/h_V = \gamma$ получаем

$$\gamma = \frac{g_A}{3} \approx 0{,}41, \qquad (6.3)$$

тогда как эксперимент дает два возможных значения $\gamma = \{0,4;\ -2\}$ [51].

Отметим, что в нашем подходе автоматически выполняются следующие из алгебры токов [45] соотношения между константами h_V и константой f распада $\pi^0 \to \gamma\gamma$, а также константой h_A и поляризуемостью пиона β_π.

Амплитуда процесса $\pi^0 \to \gamma\gamma$ впервые была вычислена в работе Стейнбергера [52] в однопетлевом приближении (рис. 10)

$$T_{\mu\nu} = f\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}q_1^\alpha q_2^\beta, \quad f = -\frac{e^2 g_A}{(2\pi)^2 F_\pi} = 0{,}59\frac{\alpha}{m_\pi}. \qquad (6.4)$$

q_i — импульсы фотонов. Экспериментальные значения f следующие:

$$|f| = (0{,}45\ ^{53},\ 0{,}57\ ^{54})\frac{\alpha}{m_\pi}.$$

Соотношение, следующее из алгебры токов, имеет вид

$$h_V = -\frac{f}{2e^2}. \qquad (6.5)$$

Сравнивая (6.4) с (6.2), легко убедиться в выполнении этого равенства.

Значение поляризуемости пиона при энергиях $q_1q_2 = 0$ в основном определяется барионными вкладами (см. формулу (5.8)) Сравнивая (5.8) с (6.2), получаем

$$h_A = F_\pi \beta_\pi^{(N)}. \tag{6.6}$$

Это именно то соотношение, которое следует из алгебры токов [45]. Учет вкладов от остальных членов барионного октета приводит к появлению множителей 1,7 в коэффициентах с g_A^2 и 1,2 в коэффициентах с g_A. Тем самым равенства (6.5) и (6.6) не нарушаются.

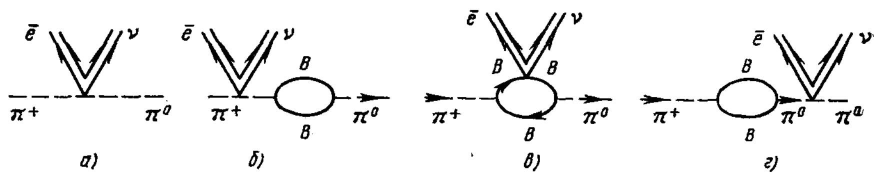

Рис. 11. Диаграммы, соответствующие «древесному» (а) и однопетлевому приближению (порядок G/F_π^2) (б — г) для распада $\pi^+ \to \pi^0 \bar{e}\nu$.

3) Наконец, рассмотрим последний процесс $\pi^+ \to \pi^0 e^+ \nu$ (рис. 11). Вычисление амплитуды этого процесса очень похоже на вычисление форм-фактора пиона и дает следующий результат:

$$T_{(\pi^+\to\pi^0 e\nu)} = T^{(б)}\left[1+\frac{1}{6}\left(\frac{g_A}{2\pi F_\pi}\right)^2 q^2\right] - \frac{\sqrt{2}}{6}\left(\frac{g_A}{2\pi F_\pi}\right)^2 (m_{\pi^0}^2 - m_{\pi^+}^2)\, q^\nu l_\nu^{(+)},$$

где

$$T^{(б)} = -\sqrt{2}\,(p_{\pi^+}+p_{\pi^0})^\nu\, l_\nu^{(+)}, \quad q = p_{\pi^+} - p_{\pi^0}.$$

На этом мы закончим рассмотрение пионных взаимодействий.

б) Разность масс K_L- и K_S-мезонов [19]

Изучение низкоэнергетических взаимодействий мезонов мы закончим вычислением разности масс нейтральных каонов.

Введем еще один лагранжиан, описывающий πK взаимодействия и соответствующий правилу $\Delta T = 1/2$. Простейший киральный лагранжиан такого типа, не содержащий связи с производными, имеет вид [19]

$$L_{\pi K^0}^{(1/2)} = a : \left[K_S\left(\cos\sqrt{\frac{\pi^2}{F_\pi^2}} - 1\right) + K_L \frac{\pi^0}{F_\pi} \frac{\sin\sqrt{\pi^2/F_\pi^2}}{\sqrt{\pi^2/F_\pi^2}}\right] : ,$$

где $K_S = (\bar{K}_0 + K_0)/\sqrt{2}$, $K_L = i\,(\bar{K}_0 - K_0)/\sqrt{2}$. Этот лагранжиан в борновском приближении хорошо воспроизводит низкоэнергетические теоремы алгебры токов, касающиеся нелептонных распадов K_0-мезонов на два и три пиона.

Константу связи a можно зафиксировать из вероятности распада $K_S \to 2\pi$ (w (2π)). В результате имеем

$$a^2 = \frac{2\pi\,(2F_\pi)^4\, m_K}{3\sqrt{1-(2m_\pi/m_K)^2}}\, w^{(2\pi)}. \tag{6.7}$$

Приступаем теперь к вычислению разности масс K_L- и K_S-мезонов. Разность масс этих мезонов обусловлена теми различными виртуальными состояниями, в которые могут переходить эти мезоны с учетом их комбинированной четности (рис. 12). Имея это в виду, для разности масс Δm_{K_0}

можно записать следующую формулу:

$$\Delta m_{K_0} = m_{K_L} - m_{K_S} = 2(f_S - f_L), \tag{6.8}$$

где f_S — сумма матричных элементов, соответствующих бесконечному набору диаграмм с четным числом виртуальных пионов (12а), а f_L — то же для диаграмм с нечетным числом пионов (12б).

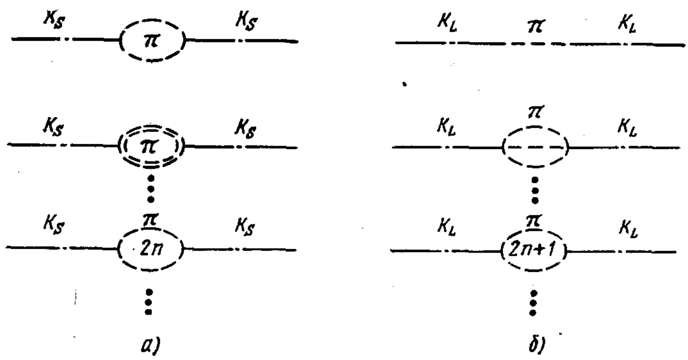

Рис. 12. Диаграммы, соответствующие промежуточным состояниям K_S- и K_L-мезонов. Штрих-пунктирные линии — каонные.

Величины f_S и f_L легко вычислить, используя СП метод [25]. При этом оказывается, что величина Δm_{K_0} почти целиком определяется двухпионной диаграммой. Вклады от диаграмм с тремя и более виртуальными пионами в величину Δm_{K_0} составляют меньше 1%. Вклад от диаграммы с одним пионом следует вычислять совместно с вкладом от диаграммы с одним виртуальным η-мезоном, причем в рамках точной $SU(3)$-теории эти вклады полностью компенсируются. Учет η-мезона в петлевых диаграммах несуществен.

Выпишем теперь выражение для матричного элемента, соответствующего двухпионной диаграмме:

$$f_S^{(2\pi)} = \frac{3(2\pi a)^2}{m_K (4\pi F_\pi)^4}\left[\ln\left(\frac{4\pi F_\pi}{m_\pi}\right) - \frac{3}{2}C + \frac{13}{12} - J\left(\frac{m_K^2}{4m_\pi^2}\right)\right], \tag{6.9}$$

где C — константа Эйлера, а $J\ (m_K^2/4m_\pi^2)$ дано в (4.3) Подставляя (6.9) и (6.7) в (6.8), получаем

$$\operatorname{Re}\Delta m_{K_0} = 0{,}52 w^{(2\pi)},$$

в то время как экспериментальное значение Δm_{K_0} равно $0{,}48\ w^{(2\pi)}$ (см. [55])

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Перечисленные здесь примеры далеко не исчерпывают всех задач которые можно рассмотреть в однопетлевом приближении квантовой киральной теории. Укажем, например, на распады K-мезонов (лептонные, полулептонные и нелептонные). Учет однопетлевых диаграмм при вычислении этих распадов может помочь прояснению вопроса о групповой структуре нарушения киральной симметрии.

Подводя итоги приведенным здесь примерам использования квантовой киральной теории для описания низкоэнергетических процессов взаимодействия мезонов, можно отметить, что полученные результаты как минимум воспроизводят реальную качественную картину различных физических процессов, приводя в большинстве случаев и к хорошему количественному согласию с опытом.

Эти результаты показывают, что универсальность сильного, слабого и электромагнитного взаимодействий адронов может являться причиной успешного применения теории возмущений не только в первом, но и в следующем порядке по сильной константе связи, что подтверждается прямыми оценками двухпетлевого приближения [14, 29]. Напомним, что квантовая киральная теория в той форме, в которой она здесь сформулирована, может успешно использоваться лишь при низких энергиях, существенно меньших $4\pi F_\pi \approx 1{,}2$ *Гэв*, того энергетического масштаба, который естественно возникает в этой теории. При дальнейшем продвижении по энергии приближение точечных адронов может оказаться неприемлемым в силу наличия структуры адронов.

Уверенность в наличии такой структуры непрерывно возрастает, чему способствуют успехи кварковой модели алгебры токов на световом конусе и собственно кварковых моделей в объяснении процессов электророждения и нейтринных реакций при высоких энергиях и в описании огромного числа распадов резонансов и данных по спектроскопии адронов.

В то же время эти успехи определенно указывают, что киральная симметрия является приближенной симметрией сильных взаимодействий для всех доступных в настоящее время энергий. Однако реализуется эта симметрия для разных энергий по-разному. В связи с этим одним из наиболее интересных вопросов, по нашему мнению, является исследование смены режимов реализаций киральной симметрии от динамической к алгебраической в области средних энергий.

Некоторые возможности в изучении этого вопроса дают дуально-резонансные модели, описывающие взаимодействие протяженных объектов (струн). Эти модели, с одной стороны, воспроизводят спектр адронных состояний (классификация по траекториям Редже) и приводят к амплитудам Венециано; с другой стороны, в пределе низких энергий переходят в полевые модели точечных частиц. В частности, наиболее реалистическая дуально-резонансная модель Невью — Шварца [56] имеет своим точечным пределом рассмотренную в настоящем обзоре киральную теорию с нелинейным феноменологическим лагранжианом.

В заключение авторы выражают признательность Д. И. Блохинцеву за инициативу написания обзора и ценные замечания, а также Д. В. Волкову, В. А. Мещерякову, В. В. Серебрякову, Д. В. Ширкову за полезные обсуждения.

Объединенный институт ядерных исследований,
Дубна (Московская обл.)

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. а) Д. В. Ширков, В. В. Серебряков, В. А. Мещеряков, Дисперсионные теории сильных взаимодействий при низких энергиях, М., «Наука», 1967.
   б) V. V. Serebryakov, D. V. Shirkov, Fortschr. Phys. 18, 527 (1970).
2. а) R. Feynman, M. Gell-Mann, Phys. Rev. 109, 193 (1958).
   б) M. Gell-Mann, ibid. 125, 1067 (1962); Physics 1, 63 (1964).
3. Р. Фейнман, Взаимодействие фотонов с адронами, М., «Мир», 1975.
   Дж. Бьёркен, Б. Л. Иоффе, УФН 116, 115 (1975).
4. Y. Nambu, Phys. Rev. Lett. 4, 380 (1960).
   F. Gursey, Nuovo Cimento 16, 230 (1960).
   M. Gell-Mann, M. Levy, ibid., p. 705.
5. M. Goldberger, S. Treiman, Phys. Rev. 110, 1478 (1958).
6. А. Н. Вайнштейн, В. И. Захаров, УФН 100, 225 (1970).
   С. Адлер, Р. Дашен, Алгебры токов, М., «Мир», 1970.
   H. Pagels, Phys. Rept. 16, 219 (1975).

7. S. Adler, Phys. Rev. **B139**, 1638 (1965).
8. F. Low, ibid. **96**, 1428 (1954).
M. Gell-Mann, M. L. Goldberger, ibid., p. 1433.
9. B. W. Lee, Nucl. Phys. **B9**, 649 (1969).
J. L. Gervais, B. W. Lee, ibid. **B12**, 627 (1968).
H. W. Grater, Phys. Rev. **D1**, 3313 (1970).
А. А. Хелашвили, В. Ю. Хмаладзе, ТМФ **15**, 78 (1973).
10. А. А. Славнов, Л. Д. Фаддеев, ТМФ **8**, 297 (1971).
A. A. Slavnov, Nucl. Phys. **B31**, 301 (1971).
S. Gerstein, R. Jackiw, B. W. Lee, S. Weinberg, Phys. Rev. D3, 2486 (1971).
11. J. Honerkamp, Nucl. Phys. **B36**, 130 (1972).
V. N. Pervushin, JINR Preprint E2-7540, Dubna, 1973.
12. В. Н. Первушин, ТМФ **22**, 291 (1975).
13. J. A. Mignaco, E. Remiddi, Nuovo Cimento **A1**, 376, 395 (1971).
D. Bessis, S. Graff, V. Grecci, G. Turchetti, Phys. Rev. **D1**, 2064 (1970).
L. H. Chan, R. W. Haymaker, ibid. **D10**, 4170 (1974).
14. K. S. Jhung, R. S. Willey, ibid. **D9**, 3132.
J. L. Basdevant, B. W. Lee, ibid. **D2**, 1680 (1970).
15. H. Lehmann, H. Trute, Nucl. Phys. **B52**, 280 (1973).
H. Lehmann, Phys. Lett. **B41**, 529 (1972).
16. G. Ecker, J. Honerkamp, Nucl. Phys. **B62**, 509 (1973).
17. М. К. Волков, В. Н. Первушин, ЯФ **20**, 762 (1974).
18. М. К. Волков, В. Н. Первушин, ЯФ **19**, 652 (1974); Phys. Lett. **B51**, 356 (1974).
19. М. К. Волков, В. Н. Первушин, ЯФ **21**, 214 (1975); Phys. Lett. **B51**, 499 (1974).
20. V. N. Pervushin, M. K. Volkov, ibid. **B58**, 177 (1975).
21. М. К. Волков, В. Н. Первушин, ЯФ **22**, 366 (1975).
22. M. K. Volkov, V. N. Pervushin, Nuovo Cimento **A27**, 277 (1975).
23. V. N. Pervushin, M. K. Volkov, Phys. Lett. **B55**, 405 (1975); ЯФ **22**, 346 (1975).
24. В. И. Лендьел, М. И. Гайсак, Препринт ИТФ АН УССР 74-87Е, Киев, 1974.
25. M. K. Volkov, Comm. Math. Phys. **7**, 289 (1968); Ann. Phys. **49**, 202 (1968); ТМФ **6**, 21 (1971); Fortschr. Phys. **22**, 499 (1974).
26. H. Lehmann, K. Pohlmeyer, Comm. Math. Phys. **20**, 101 (1971).
27. A. Salam, I. Strathdee, Phys. Rev. **D1**, 3296 (1970); **D3**, 1805 (1971).
28. M. Gell-Mann, R. J. Oakes, B. Renner, ibid. **175**, 2195 (1968).
29. М. К. Волков, Д. И. Казаков, В. Н. Первушин, Препринт ОИЯИ Е2-9170, Дубна, 1975.
30. Г. П. Пронько, ЯФ **22**, 141 (1975).
31. S. B. Gerasimov, L. D. Soloviev, Nucl. Phys. **74**, 589 (1965).
32. а) J. P. Baton et al., Phys. Lett. **B33**, 525, 528 (1970).
б) S. D. Protopopescu et al., L. A. L. Preprint 787 (1972).
в) P. Baillon et al., Phys. Lett. **B38**, 555 (1972).
Y. Batusov, S. Buniatov et al., JINR Preprint E1-7969, Dubna, 1974; ЯФ **21**, 308 (1975).
33. F. P. Palou, F. J. Yndurain, Nuovo Cimento **A19**, 245 (1974).
34. а) С. Ф. Бережнев и др., ЯФ **18**, 102 (1973).
б) G. Adylov et al., Phys. Lett. **B51**, 402 (1974).
35. Д. В. Волков, Пробл. физ. ЭЧАЯ **4**, 3 (1973); Препринт ИТФ АН УССР 69-75, Киев, 1969.
36. S. Coleman, G. Wess, B. Zumino, Phys. Rev. **177**, 2239 (1969).
G. C. Callan et al., ibid. **177**, 2447 (1969).
37. А. Б. Борисов, В. И. Огиевецкий, ТМФ **21**, 329 (1974).
38. В. Б. Берестецкий, УФН **85**, 393 (1965).
Н. Н. Боголюбов, в кн. Физика высоких энергий и теория элементарных частиц, Киев, «Наукова думка», 1967, стр. 5.
39. Г. В. Ефимов, ЖЭТФ **44**, 1207 (1963).
E. S. Fradkin, Nucl. Phys. **B49**, 624 (1963).
Б. А. Арбузов, А. Т. Филиппов, Препринт ОИЯИ Е2-3610, Дубна, 1967.
М. К. Волков, Пробл. физ. ЭЧАЯ **2**, 33 (1971).
40. Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, Введение в теорию квантованных полей, М., «Наука», 1973.
41. G. Ecker, J. Honerkamp, Nucl. Phys. **B52**, 211 (1973).

42. В. Н. Первушин, Препринт ОИЯИ Р2-7644, Дубна, 1973; Препринт ОИЯИ Е2-8009, Дубна, 1974.
43. A. Martin, Nuovo Cimento **47**, 265 (1967).
44. A. Martin, ibid. **A58**, 303 (1968).
45. М. В. Терентьев, ЯФ **16**, 162 (1972).
46. T. E. O. Ericson, J. Hüfner, Nucl. Phys. **B47**, 205 (1972).
47. N. M. Kroll, T. D. Lee, B. Zumino, Phys. Rev. **157**, 1376 (1967).
48. М. В. Терентьев, ЯФ **19**, 1298 (1974).
49. G. Backenstoss et al., Phys. Lett. **B43**, 431 (1973).
50. Д. Ю. Бардин и С. М. Биленький, ЯФ **16**, 557 (1972).
51. D. Depommier et al., Phys. Lett. **7**, 885 (1963).
52. I. Steinberger, Phys. Rev. **76**, 1180 (1949).
53. A. Rittenberg et al., Rev. Mod. Phys. **43**, 2 (1971).
54. G. Belletini, C. Bemporad, P. Braccini, Nuovo Cimento **A66**, 243 (1970).
55. Rev. Mod. Phys. **45**, pt. II (1973).
56. A. Neveu, J. H. Schwars, Nucl. Phys. **B31**, 86 (1971).
K. Kawarabayashi, S. Kitakado, Nuovo Cimento **A14**, 190 (1973).