# 1976 г. Ноябръ

<u>Том 120, вып. 3</u>

# успехи физических наук

537.311.33

# ЭЛЕКТРОННЫЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР БЕСЩЕЛЕВЫХ ПОЛУПРОВОДНИКОВ

# Б. Л. Гельмонт, В. И. Иванов-Омский, И. М. Цидильковский

#### СОДЕРЖАНИЕ

| 1. | Введение   | 337 |
|----|--|-----|
| 2. | Структура энергетических зон бесщелевых полупроводников              | 338 |
| 3. | Экспериментальные данные, подтверждающие инверсную зонную структуру  |     |
|    | бесщелевых полупроводников   | 340 |
| 4. | Энергетический спектр вблизи центра зоны Бриллюэна на основе гамиль- |     |
|    | тониана Латтинджера  | 341 |
| 5. | Особенности бесщелевых полупроводников                               | 345 |
| 6. | Примесные состояния в бесщелевых полупроводниках                     | 352 |
| 7. | Статистика носителей заряда в бесщелевых полупроводниках             | 356 |
| 8. | Заключение   | 359 |
| Ц  | итированная литература   | 360 |

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время известен целый ряд полупроводников с тождественно равной нулю запрещенной зоной, которые принято называть бесщелевыми полупроводниками (БП). Бесщелевые полупроводники образуют естественную границу между металлами \*) и полупроводниками. От типичных полупроводников их отличает отсутствие порога для рождения электрон-дырочной пары, от металлов — существенно меньшая плотность электронного газа.

Возможны два типа БП. К первому типу относятся вещества, у которых запрещенная зона оказывается равной нулю из-за случайного вырождения зоны проводимости и валентной зоны. В этих полупроводниках бесщелевое состояние может быть разрушено под действием любого возмущения, в том числе и такого, которое не изменяет симметрии кристалла. Примером первого типа БП служат сплавы  $Bi_xSb_{1-x}^2$ ,  $Pb_{1-x}Sn_xTe^3$ ,  $Pb_{1-x}Sn_xSe^4$  при определенном соотношении компонентов.

Наибольший интерес с точки зрения особенностей бесщелевого состояния представляют БП второго типа, в которых это состояние возникает вследствие симметрии кристаллической решетки. Зона проводимости и валентная зона принадлежат в них одному и тому же неприводимому представлению группы симметрии, т. е. состояния в этих зонах имеют одинаковую симметрию. Поэтому бесщелевое состояние в БП второго типа исчезает липь при возмущениях, понижающих симметрию кристаллической

© Главная релакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Успехи физических наук», 1976 г.

<sup>\*)</sup> Они могут быть определены как металлы с точечной поверхностью Ферми 1.

<sup>1</sup> уфн, т. 120, вып. 3

решетки. Примерами служат серое олово (α-Sn), кристаллизующееся в структуре алмаза, и халькогениды ртути (β-HgS, HgSe, HgTe), кристаллизующиеся в структуре цинковой обманки.

Настоящий обзор посвящен изложению современных представлений об энергетическом спектре носителей заряда в БП второго типа \*). В первой части обзора даны схема расположения зон в БП и описание энергетического спектра в рамках приближения локального потенциала. Во второй части показано, что это приближение справедливо лишь вдали от точки вырождения; для электронов — при энергии, большей боровской энергии электрона, для дырок — при энергии, большей боровской энергии дырки.

# 2. СТРУКТУРА ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ЗОН БЕСЩЕЛЕВЫХ] ПОЛУПРОВОДНИКОВ

Энергетический спектр БП обусловлен, как уже отмечалось, симметрией кристалла. Если сравнить два полупроводника с одинаковой сим-



Рис. 1. Зонная схема полупроводника со труктурой алмаза или цинковой обманки: а) без учета спин-орбитального взаимодействия; б) с учетом спин-орбитального взаимодействия; () с учетом взаимодействия (указаны величины J=1/2, 3/2 и 1/2).

представлена на рис. 1. Зона проводимости, отделенная от валентной зоны энергетическим промежутком  $E_g$  (запрещенная зона), описывается в окрестности минимума волновыми функциями s-симметрии (неприводимое представление  $\Gamma_6$ ). Валентная зона вблизи ее вершины описывается функциями p-симметрии. С учетом спина вырождение зоны проводимости и валентной зоны было бы соответственно двух- и шестикратным. Однако спин-орбитальное взаимодействие приводит к частичному снятию вырождения валентной зоны, и состояния классифицируются не по орбитальному моменту l, а по полному моменту J = l + s (s — спиновый момент). Зона проводимости остается дважды вырожденной (J = 1/2). Для состояний в валентной зоне J может принимать два значения: J = 3/2 и J = 1/2. Значению J = 3/2соответствуют зоны легких и тяжелых дырок, каждая из которых двукратно вырождена при  $k \neq 0$  (k — волновой вектор). При k = 0 зоны с J = 3/2четырехкратно вырождены. Зоны легких и тяжелых дырок принадлежат одному и тому же неприводимому представлению  $\Gamma_8$ . Значение J = 1/2

метрией кристаллической решетки, то порядок расположения энергетических зон в «нормальном» полупроводнике и в БП оказывается взаимно обрат-Говорят, ным. что БП обладает инверсной зонной структурой. Проиллюстрируем это на примере «нормального» полупроводника InSb и БП HgTe. Оба кристалла имеют структуру цинковой обманки и близкие цараэнергетического метры спектра. Напомним струк-InSb вблизи туру 30H центра зоны Бриллюэна (окрестность точки Γ), которая схематически

<sup>\*)</sup> В дальнейшем для краткости под термином бесщелевой полупроводник будем понимать только БП второго типа.

отвечает валентной зоне, отщепленной в точке  $\Gamma$  от двух верхних зон на величину энергии спин-орбитального взаимодействия  $\Delta$ . Реальный спектр валентной зоны InSb несколько сложнее из-за отсутствия центра симметрии в структуре цинковой обманки. Однако возникающие вследствие этого

линейные по квазиимпульсу члены в законе дисперсии дырок дают для InSb незначительный вклад в общую энергию <sup>5</sup>.

При инверсной зонной структуре, реализующейся в HgTe, зона с s-симметрией расположена ниже зон с J = 3/2 и имеет отрицательную кривизну. В результате инверсии кривизна одной из зон с J = 3/2 оказывается положительной, а другой — отрицательной (рис. 2). В такой структуре запрещенная зона тождественно равна нулю, а Е с < 0, если по-прежнему вести отсчет энергии от вершины валентной зоны и обозначать через Е о энергетический зазор между экстремальными точками зон с s-симметрией (неприводимое представление  $\Gamma_6$  в HgTe или  $\Gamma_7$  в α-Sn) и с J = 3/2(неприводимое представление Г<sub>8</sub> в НgTe или Г<sup>+</sup><sub>8</sub> в α-Sn). Для этой зонной модели равенство нулю запрещенной зоны не является случайным, поскольку все четыре зоны с J = 3/2 принадлежат одному неприводимому представлению. Поэтому запрещенная зона может возникнуть лишь в результате внешнего воздействия, понижающего симметрию кристаллической решетки, например при одноосном сжатии.



Рис. 2. Инверсная схема зон.

Инверсная зонная структура была предложена Гроувсом и Полом 6 в 1963 г. для α-Sn, чтобы объяснить возникшие к тому времени противоречия между различными экспериментальными данными. Одна группа экспериментов свидетельствовала о том, что ширина запрещенной зоны α-Sn очень мала; согласно другим экспериментам эффективная масса электронов по порядку величины такая же, как и в других алмазоподобных полупроводниках. Однако из теории известно (см., например, 7), что эффективная масса пропорциональна ширине запрещенной зоны, если переход между валентной зоной и зоной проводимости прямой и разрешенный, причем коэффициент пропорциональности незначительно изменяется внутри группы алмазоподобных полупроводников. Поэтому при нормальной зонной структуре малость ширины запрещенной зоны влечет за собой пропорциональное уменьшение эффективной массы электронов. Предложенная Гроувсом и Полом инверсная структура снимает это противоречие. Действительно, масса электронов определяется в основном взаимодействием зон с s- и р-симметриями, разделенных энергетической шелью величины Eg, которая в случае нормальной зонной структуры положительна, а для инверсной зонной структуры отрицательна. Именно поэтому в полупроводнике с нулевой запрещенной зоной эффективная масса электронов отлична от нуля.

Каковы причины инверсии зон? Если проследить за изменением взаимного расположения зон в ряду С (алмаз) — Si — Ge —  $\alpha$ -Sn, у всех элементов которого одинаковая симметрия кристаллической решетки, можно отметить следующую тенденцию. По мере увеличения атомного номера от алмаза к олову прямой энергетический зазор в точке  $\Gamma$ , т. е. расстояние между зонами  $E_g = E(\Gamma_7) - E(\Gamma_8)$  уменьшается. Одновременно возрастает роль релятивистских эффектов, которые действуют в этом же направлении. Отмеченная тенденция к сближению зон  $\Gamma_7$  и  $\Gamma_8^*$  может в конечном счете привести к их инверсии.

Из расчетов следует, что возникновение инверсной структуры зон в α-Sn существенным образом связано с релятивистскими эффектами. Действительно, было показано<sup>8</sup>, что в рамках нерелятивного самосогласованного метода ортогонализованных плоских волн (ОПВ) порядок зон в α-Sn нормальный. Поэтому в схему расчета вводились поправки к потенциалу, позволяющие подогнать некоторые опорные точки энергетического спектра к экспериментальным данным <sup>9</sup>. Релятивистские самосогласованные ОПВ-расчеты <sup>9, 10</sup> для α-Sn привели к инверсной структуре зон. Расчетная величина  $E_{a} = -0,416$  зе оказалась близкой к экспериментальной — 0,413 *эв*<sup>11</sup>. Релятивистский ОПВ-метод был использован в работе <sup>10</sup> для расчета энергий в точках высокой симметрии зоны Бриллюэна. Зави-СИМОСТЬ ЭНЕРГИИ ОТ ВОЛНОВОГО ВЕКТОРА В ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ТОЧКАХ ОПРЕДЕЛЯлась с помощью kp-метода, причем матричные элементы переходов являлись подгоночными параметрами. Оказалось, что согласие между экспериментальным и теоретическим значениями матричных элементов перехода между зонами  $\Gamma_7$  и  $\Gamma_8^+$  хуже, чем для величин  $E_g$ : экспериментальное значение 1,69 ат. ед., теоретическое — 1,13 ат. ед.

Работы <sup>8-10</sup> имеют важное значение, поскольку из них отчетливо следует, что инверсная зонная структура в α-Sn и, возможно, в других БП возникает из-за релятивистских эффектов.

Большинство остальных расчетов энергетического спектра БП выполнено с помощью эмпирических методов: либо методом эмпирического псевдопотенциала для α-Sn<sup>12,13</sup> и HgTe, HgSe<sup>14,15</sup>, либо методом Корринги — Кона — Ростокера для HgTe, HgSe<sup>16</sup>. Энергия в точках высокой симметрии в HgTe, HgSe и β-HgS была также рассчитана эмпирическим ОПВметодом<sup>17</sup>.

## 3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ, <sup>†</sup>ПОДТВЕРЖДАЮЩИЕ ИНВЕРСНУЮ ЗОННУЮ СТРУКТУРУ БЕСЩЕЛЕВЫХ ПОЛУПРОВОДНИКОВ

Остановимся кратко на тех экспериментальных данных, которые свидетельствуют об инверсной зонной структуре БП. Прежде всего, как уже отмечалось, неизбежным следствием обращенной структуры зон является равенство нулю запрещенной зоны. Уже из первых экспериментальных исследований проводимости и коэффициента Холла в  $\alpha$ -Sn <sup>18</sup> и HgTe <sup>19-22</sup> следовало, что их запрещенная зона мала. Что касается HgTe и HgSe, то позже были даже высказаны предположения о небольшом перекрытии зоны проводимости и валентной зоны <sup>23-25</sup>. Все оценки величины запрещенной зоны и глубины перекрытия были сделаны в цитируемых работах при тех или иных предположениях, однако общим было заключение, что рассматриваемые материалы обладают необыкновенно малым зазором между зоной проводимости и валентной зоной.

Важной характеристикой БП является вид зависимости концентрации носителей заряда от температуры. В собственном БП при T = 0 уровень Ферми проходит через точку касания зон. При конечной температуре, если  $m_n \neq m_p$  ( $m_n$ ,  $m_p - эфф$ ективные массы электронов и дырок), уровень Ферми должен находиться в одной из разрешенных зон. При  $m_p \gg m_n$ уровень Ферми лежит в зоне проводимости, и электроны вырождены, а дырки не вырождены. Тогда для концентрации электронов *n* и дырок *p* можно записать:

$$n = \frac{(2m_n E_F)^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^3}, \quad p = 2\left(\frac{m_p T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{E_F}{T}\right), \tag{1}$$

где  $E_F$  — энергия Ферми. Приравнивая эти выражения, найдем энергию Ферми как функцию температуры для собственного БП:

$$\frac{E_F}{T} = \ln\left[\frac{3\sqrt{\pi}}{4}\left(\frac{m_p}{m_n}\right)^{3/2}\right] + \frac{3}{2}\ln\frac{T}{E_F}.$$
(2)

Пренебрегая вторым членом в правой части (2), получим с логарифмической точностью при  $m_p \gg m_n$ 

$$E_F = T \ln \left[ \frac{3 \sqrt{\pi}}{4} \left( \frac{m_p}{m_n} \right)^{3/2} \right].$$
(3)

Таким образом, энергия Ферми  $E_F$  пропорциональна T. Тогда, согласно (1),  $n \sim T^{3/2}$ . Чем более чистыми были исследуемые БП, тем с большей точностью и в более широкой температурной области выполнялся этот закон <sup>18, 26–28</sup>. Кроме того, независимость приведенного уровня Ферми от температуры, вытекающая из формулы (3), была экспериментально обнаружена при исследовании термо э. д. с. в достаточно чистых кристаллах HgTe <sup>26</sup>.

Свидетельством в пользу инверсной зонной структуры БП послужили интересные опыты с гидростатическим давлением и одноосным сжатием. Гидростатическое давление не влияет на характер зависимости концентрации электронов от температуры<sup>29</sup>, поскольку нулевая запрещенная зона обусловлена симметрией кристалла. Всестороннее давление этой симметрии не меняет, а приводит лишь к изменению эффективной массы электронов <sup>30</sup>. В отличие от всестороннего, одноосное давление, понижая симметрию кристалла, приводит к снятию вырождения валентной зоны и зоны проводимости, т. е. к возникновению запрещенной зоны, что и было подтверждено измерениями <sup>31</sup> коэффициента Холла при воздействии давления вдоль осей [100] и [111] в α-Sn.

Наиболее убедительные доказательства инверсной зонной модели дали магнитооптические исследования БП, результаты которых приводятся в гл. 4. Здесь мы лишь отметим, что впервые в HgTe экспериментально наблюдались <sup>32</sup> осцилляции коэффициента отражения в магнитном поле, связанные с двумя типами межзонных переходов между подзонами Ландау различных зон:  $\Gamma_8 \rightarrow \Gamma_6$  и  $\Gamma_8 \rightarrow \Gamma_8$ . Было показано, что частоты переходов первого типа при экстраполяции магнитного поля к нулю также стремятся к нулю в соответствии с нулевой шириной запрещенной зоны. Следует отметить, что свойства полупроводников в магнитном поле вообще весьма чувствительны к симметрии зонных состояний. Например, в InSb электроны, зона которых имеет *s*-симметрию, диамагнитны, тогда как в HgTe электроны парамагнитны <sup>33</sup>, <sup>34</sup>. Исследования магнитной восприимчивости наглядно выявили <sup>35</sup> общность природы зоны проводимости HgTe и зоны легких дырок InSb и Ge.

Более полный и детальный обзор экспериментов, служащих доказательством инверсной зонной структуры БП, можно найти в монографии <sup>36</sup>.

# 4. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР ВБЛИЗИ ЦЕНТРА ЗОНЫ БРИЛЛЮЭНА НА ОСНОВЕ ГАМИЛЬТОНИАНА ЛАТТИНДЖЕРА

Спектр свободных носителей заряда вблизи точки вырождения зон БП может быть определен из гамильтониана Латтинджера <sup>37</sup>. Нас будут интересовать малые значения k, т. е. приближение эффективной массы. Гамильтониан в приближении эффективной массы может быть найден с помощью кр-метода. Однако проще получить гамильтониан из соображений симметрии, как это сделал Латтинджер <sup>37</sup> для четырехкратно вырожденной в точке k = 0 валентной зоны Ge.

# 342 Б. л. гельмонт, в. и. иванов-омский, и. м. цидильковский

В случае невырожденной зоны единственным инвариантом, квадратичным по k, является  $k^2$ . Поэтому гамильтониан имеет вид  $\mathcal{B} = \hbar^2 k^2 / (2m^*)$ , где коэффициент  $m^*$  есть эффективная масса электрона. В случае вырожденных зон, кроме вектора k, характеризующего состояние, имеется еще один вектор J — полного момента импульса. Нас интересует значение J = 3/2. Компоненты  $J_x$ ,  $J_y$ ,  $J_z$  являются матрицами  $4 \times 4$ . Поэтому, кроме инварианта k, единственно возможного в случае простой зоны, имеются еще сферически симметричный инвариант  $(\mathbf{kJ})^2$  и инвариант  $k_x^2 J_x^2 + k_y^2 J_y^2 + k_z^2 J_z^2$ , удовлетворяющий кубической симметрии. Соответственно гамильтониан Латтинджера имеет вид

$$\mathscr{H} = \frac{\hbar^2}{m_0} \left[ \frac{1}{2} \left( \gamma_1 + \frac{5}{2} \gamma_2 \right) k^2 - \gamma_3 \left( \mathbf{kJ} \right)^2 + \left( \gamma_3 - \gamma_2 \right) \left( k_x^2 J_x^2 + k_y^2 J_y^2 + k_z^2 J_z^2 \right) \right], \quad (4)$$

где  $m_0$  — масса свободного электрона. Последний член описывает гофрированность изоэнергетических поверхностей. Константы  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  и  $\gamma_3$  определяют спектр свободных носителей заряда, который можно найти, если диагонализовать матрицу (4). Числовые матрицы  $J_x$ ,  $J_y$ ,  $J_z$  приведены в книге<sup>7</sup>. После диагонализации получим закон дисперсии E(k):

$$E(k) = \frac{\hbar^2 \gamma_1}{2m_0} k^2 \pm \frac{\hbar^2}{m_0} \sqrt{\gamma_2^2 k^4 + 3(\gamma_3^2 - \gamma_2^2)(k_x^2 k_y^2 + k_y^2 k_z^2 + k_z^2 k_x^2)}.$$
 (5)

В полупроводниках с малой величиной  $|E_g|$  таких, как InSb или HgTe, основную роль играет взаимодействие зон с s- и p-симметрией. Это взаимодействие сильно уменьшает анизотропию изоэнергетических поверхностей. Поскольку нас интересуют характерные особенности, связанные с отсутствием запрещенной зоны, мы в дальнейшем будем пренебрегать гофрированностью (т. е. считать  $\gamma_2 = \gamma_3 = \gamma$ ) так же, как и малыми линейными по k членами, которые следует добавить к гамильтониану (4) для полупроводников без центра симметрии.

Как видно из выражения (5), гамильтониан Латтинджера описывает либо обычный полупроводник с двумя сортами дырок, либо БП в зависимости от соотношения между  $\gamma_1$  и  $\gamma$ . Если  $\gamma_1 > 2\gamma$ , то спектр (5) соответствует легким и тяжелым дыркам (отсчет энергии в глубь валентной зоны), и постоянные  $\gamma_1$  и  $\gamma$  следующим образом связаны с массами легких и тяжелых дырок:

$$m_l = m_0 (\gamma_1 + 2\gamma)^{-1}, \quad m_h = m_0 (\gamma_1 - 2\gamma)^{-1}.$$
 (6)

Если же  $2\gamma > \gamma_1$ , то гамильтониан (4) дает спектр БП с массами электронов и дырок

$$m_n = m_0 (\gamma_1 + 2\gamma)^{-1}, \quad m_p = m_0 (-\gamma_1 + 2\gamma)^{-1}$$
 (7)

(считаем, что энергия электронов положительна, дырок отрицательна).

Для того чтобы найти спектр вблизи точки вырождения в магнитном поле **H**, нужно к гамильтониану (4) добавить два новых инварианта (**JH**) и  $J_x^3 H_x + J_y^3 H_y + J_z^3 H_z$ , а вместо волнового вектора **k** ввести величину  $\mathbf{K} = -i \nabla + (e/c\hbar) \mathbf{A}$ , где  $\mathbf{A} = [\mathbf{Hr}]/2$  — вектор-потенциал в магнитном поле. В результате гамильтониан Латтинджера в магнитном поле принимает вид

$$\mathcal{SH} = \frac{\hbar^2}{2m_0} \left( \gamma_1 + \frac{5}{2} \gamma_2 \right) K^2 - \frac{\hbar^2 \gamma_2}{m_0} \sum_{\alpha=1}^3 K_\alpha^2 J_\alpha^2 - \frac{\hbar^2 \gamma_3}{m_0} \sum_{\alpha\neq\beta} \left\{ K_\alpha K_\beta \right\} \left\{ J_\alpha J_\beta \right\} + \frac{\hbar e}{m_0 c} \varkappa \left( \mathbf{JH} \right) + \frac{\hbar e q}{m_0 c} \sum_{\alpha=1}^3 J_\alpha^{3!} H_\alpha, \tag{8}$$

#### ЭЛЕКТРОННЫЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР

тде  $\{AB\} = (AB + BA)/2$ ,  $\varkappa$ , q — новые параметры Латтинджера. Значения постоянных  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\gamma_3$  и  $\varkappa$  для различных материалов определялись из экспериментов по отражению или поглощению света в сильном магнитном поле. Пики коэффициента отражения или поглощения как функции напряженности магнитного поля H сопоставлялись переходам между уровнями, определенными из гамильтониана (8). Ниже дана таблица экспериментальных значений параметров Латтинджера для БП. Для сравнения приведены параметры Латтинджера для Ge и InSb.

|  | <b>γ</b> 1             | Ϋ2                     | Y3                      | х   |   | Ŷi                           | ¥2                         | ¥3                       | ж                            |
|--|------------------------|------------------------|-------------------------|---|---|------------------------------|----------------------------|--------------------------|------------------------------|
| Ge <sup>38</sup><br>InSb <sup>39</sup><br>α-Sn <sup>40</sup> | 13,2<br>33,51<br>15,14 | 4,10<br>14,48<br>11,40 | $5,62 \\ 15,65 \\ 8,02$ | $\begin{array}{c} 3,29 \\ 13,47 \\ \left\{ \begin{array}{c} 13,11 \\ 11,84 \end{array} \right. \end{array}$ | HgTe <sup>41</sup><br>HgTe <sup>42</sup><br>HgTe <sup>43,44</sup> | 12,8<br>14,8<br>16,8<br>14,8 | 8,4<br>8,6<br>10,4<br>10,9 | 8,4<br>8,6<br>9,2<br>8,7 | 10,5<br>10,2<br>11,2<br>11,7 |

Как видно из таблицы, параметры, полученные разными авторами для HgTe, довольно сильно различаются. Исследование, проведенное в работе <sup>45</sup>, показало, что линии комбинированного резонанса лучше соответствуют сетке уровней с параметрами Латтинджера из <sup>43</sup>, тогда как линии циклотронного резонанса лучше согласуются с параметрами Латтинджера из <sup>41</sup>. Однако положение пиков циклотронного резонанса, как следует из схемы уровней, приведенной в работе <sup>45</sup>, менее чувствительно к выбору параметров, чем положение пиков комбинированного резонанса. Одна из возможных причин большого различия параметров Латтинджера, приводимых в литературе, заключается в том, что значение энергии нижних уровней Ландау представляет собой малую разницу больших величин.

В работах <sup>41, 42</sup> параметры Латтинджера определялись в пренебрежении гофрированностью изоэнергетических поверхностей. Параметр qаномально мал в алмазоподобных полупроводниках (например, для InSb  $q = 0,4^{5}$ ), и мы не будем его в дальнейшем учитывать.

Латтинджер <sup>37</sup> показал, что в пренебрежении гофрированностью изоэнергетических поверхностей ( $\gamma_2 = \gamma_3 = \gamma$ ) существует оператор

$$Q = \frac{e_1}{c\hbar} (\mathbf{J}\mathbf{H}) + \frac{1}{2} K^2,$$

коммутирующий с гамильтонианом (8). Это обстоятельство позволяет найти уровни энергии в магнитном поле. При  $k_H = 0$ , где  $k_H$  — проекция волнового вектора на направление магнитного поля, имеются две неэквидистантные системы уровней. Введем, согласно<sup>37</sup>, квантовое число.  $n \ge 0$ , которое является собственным значением оператора Q. Для первой серии уровней a энергетический спектр имеет вид

$$E_{a}(n) = \frac{\hbar eH}{m_{0}c} \varepsilon_{a}(n),$$

$$\varepsilon_{a}(0) = \frac{1}{2} (\gamma_{1} - \gamma - \varkappa), \quad \varepsilon_{a}(1) \Rightarrow \frac{1}{2} (3\gamma_{1} - 3\gamma - \varkappa),$$

$$\varepsilon_{a}^{\pm}(n) = \gamma_{1} \left(n - \frac{1}{2}\right) - \gamma + \frac{1}{2} \varkappa \pm \sqrt{\left[\gamma \left(n - \frac{1}{2}\right) - \gamma_{1} + \varkappa\right]^{2} + 3\gamma^{2}n(n-1)}\right]}$$
(9)

при  $n \ge 2$ . Энергия уровней серии b определяется формулами

$$E_{b}(n) = \frac{\hbar eH}{m_{0}c} \varepsilon_{b}(n),$$

$$\varepsilon_{b}(0) = \frac{1}{2} (\gamma_{1} + \gamma - 3\varkappa), \quad \varepsilon_{b}(1) = \frac{3}{2} (\gamma_{1} + \gamma - \varkappa),$$

$$\varepsilon_{b}^{\pm}(n) = \gamma_{1} \left(n - \frac{1}{2}\right) + \gamma - \frac{1}{2} \varkappa \pm$$

$$\pm \sqrt{\left[\gamma \left(n - \frac{1}{2}\right) + \gamma_{1} - \varkappa\right]^{2} + 3\gamma^{2}n(n-1)}$$

$$(10)$$

при  $n \ge 2$ .

Если основной вклад в величину параметров у1, у и и дает взаимодействие с ближайшей s-зоной, то справедливо соотношение  $\gamma_1 = 2\gamma = 2\varkappa$ . Энергетический спектр приобретает в этом случае особенно простой вид. Энергия дырок имеет бесконечнократное вырождение E=0, которое не снимается и при  $k_H \neq 0$ . Энергия уровней электрона равна

$$E_{a}(n, k_{H}) = \frac{\hbar eH}{m_{n}c} \left(n + \frac{1}{4}\right) + \frac{\hbar^{2}k_{H}^{2}}{2m_{n}},$$
  

$$E_{b}(n, k_{H}) = \frac{\hbar eH}{m_{n}c} \left(n + \frac{3}{4}\right) + \frac{\hbar^{2}k_{H}^{2}}{2m_{n}},$$
(11)

где  $m_n = m_0/4\gamma$ .

Согласно (9)-(11) в сильном магнитном поле в БП возникает энергетический зазор между уровнями зоны проводимости и валентной зоны.



Рис. З. Экспериментальные кривые зависимости продольного (||) и поперечного (⊥) магнитосопротивления HgTe от напря-женности магнитного поля при 1,7 °К <sup>46</sup>.

в случае,  $m_p \gg m_n$  в который хорошем приближении равен  $\hbar e H/(4m_n c)$ . Возникновение запрещенной зоны в магнитном поле иллюстрируется экспериментами по магнитосопротивлению в НgTe 46, 47. На рис. З приведены кривые зависимости продольного и попемагнетосопротивления речного магнитного напряженности OT поля для образца НgTe с коэффициентом Холла в нулевом магнитном поле  $R_0 = -4 \cdot 10^3 \, cm^3/$ кул подвижностью холловской и 7.10<sup>5</sup> см<sup>2</sup>/в.сек при 4,2 °К <sup>46</sup>. Наблюдается резкий, близкий к экспоненциальному, рост продольного магнетосопротивления, связанный с образованием запрещенной зоны, который при дальнейшем магнитного поля увеличении сменяется более медленным увеличением сопротивления. В этой

области магнитных полей продольное магнетосопротивление практически равно поперечному, что характерно для проводимости по примесям, уровни которых «вымерзли» из разрешенных зон в образованную магнитным полем запрещенную зону. Если при низких температурах концентрация электронов существенно зависит от концентрации присутствующих в образце примесей, то с повышением температуры воз-

344

растает роль собственной проводимости и величина возникающей в магнитном поле запрещенной зоны может быть оценена количественно. На

рис. 4 приведены кривые продольного магнетосопротивления НаТе при различных температурах из работы 47, авторы которой оценили величину запрешенной зоны при 64 и 77 °К. Оказалось, что величина щели зависит от температуры и равна 7,6  $\hbar e H/(m_0 c)$  при 64 °K, 8,2 ћеН/(moc) при 77 °К. Неопределенность параметров зон в настоящее время затрудняет точное количественное сравнение. Сравним экспериментальное значение 8,2 *ћеН/(m<sub>o</sub>c*) при 77 °К с величиной, вычисленной по данным работ <sup>43, 44</sup>, в которых приведена величина Ед при 77 °К. Предполагая, что поправки к параметрам Латтинджера, которые вносит vчет взаимодействия с высшими



Рис. 4. Зависимость продольного сопротивления от магнитного поля для HgTe при различных температурах <sup>47</sup>.

Стрелки указывают шкалу для данной кривой.

зонами, слабо зависят от температуры, получим, что ширина запрещенной зоны в магнитном поле лежит в пределах (6,4—8,3)  $\hbar e H/m_0 c$ .

В работах <sup>41, 48</sup> были рассчитаны кривые зависимости энергии уровней HgTe и  $\alpha$ -Sn в магнитном поле от  $k_H$ . Энергия дырочных уровней серии *а* при  $n \ge 2$  является немонотонной функцией  $k_H$ . Энергия имеет минимум при  $k_H = 0$  и два симметричных максимума.

#### 5. ОСОБЕННОСТИ БЕСЩЕЛЕВЫХ ПОЛУПРОВОДНИКОВ

а) Из изложенного в гл. 4 может сложиться впечатление, что все отличие бесщелевого полупроводника от обычного с четырехкратно вырожденной валентной зоной в смысле математического описания заключается только в разном соотношении констант  $\gamma_1$  и  $\gamma$  Такое заключение справедливо лишь в той мере, в какой спектр может быть описан в рамках одночастичного приближения с помощью локального потенциала (напомним, что гамильтониан Латтинджера получен с помощью **kp**-метода для частицы, движущейся в поле кристаллического потенциала). Однако, в отличие от обычного полупроводника, в БП весьма существенны эффекты, связанные с электрон-электронным взаимодействием. Вследствие того, что запрещенная зона равна нулю, для рождения электрон-дырочных пар не требуется энергии. Возможность виртуального рождения экситонов приводит как к изменению диэлектрических свойств БП, так и к существенной перенормировке спектра электронов и, в особенности, дырок.

Обсудим сначала особенности диэлектрической проницаемости БП. Кон и Шеррингтон <sup>49</sup> вычислили межзонный коэффициент поглощения и соответствующий вклад в диэлектрическую проницаемость при T = 0. В обычном полупроводнике вклад в проводимость о на частотах  $\omega$ , несколько больших порога межзонного поглощения, пропорционален  $\sqrt{\hbar\omega - E_g}/\omega$  в случае разрешенных переходов <sup>50</sup>. В БП зона проводимости и валентная зона обладают при  $\mathbf{k} = 0$  одинаковой четностью. Поэтому при  $\mathbf{k} = 0$  переход запрещен, и  $\sigma \infty (\hbar\omega - E_g)^{3/2}/\omega$  <sup>50</sup>. Полагая  $E_g = 0$ , получим  $\sigma \sim V \omega$ . Это и есть результат Кона и Шеррингтона. Единственная характерная величина размерности энергии в БП — это боровская энергия электрона (или дырки). Вещественная часть диэлектрической проницаемости одного порядка с мнимой. Согласно <sup>49</sup> при  $m_p \gg m_p$ 

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 + \frac{e^2 \sqrt{2m_n}}{\hbar^{3/2} \sqrt{\omega}} (1+i), \qquad (12)$$

где  $\varepsilon_0$  — вклад в диэлектрическую проницаемость от всех зон за вычетом зон  $\Gamma_8$ . Формула (12) была получена в приближении хаотических фаз без учета непараболичности и гофрированности изоэнергетических поверхностей. Пределы применимости этой формулы мы обсудим несколько позже.

Присутствие свободных носителей заряда (примесного происхождения или из-за термического возбуждения из валентной зоны) приводит к тому, что вследствие эффекта Мосса — Бурстейна Іт є ( $\omega$ ) отлична от нуля лишь при  $\omega > E_F/\hbar$ . При  $\omega = E_F/\hbar$  Re є ( $\omega$ ) имеет вместо корневой особенности логарифмическую <sup>51</sup>.

Рассмотренные особенности БП оказываются существенными при анализе явлений, связанных со взаимодействием излучения и свободных носителей заряда <sup>49, 51</sup> или кристаллической решетки <sup>52, 53</sup>. Возбуждение илазменных колебаний или оптических фононов под действием электромагнитной волны происходит на фоне межзонных переходов, которые открывают дополнительный канал затухания для плазмонов и поляризационных фононов, описываемый мнимой частью уравнений (12). Отметим, что вклад межзонных переходов в реальную часть диэлектрической функции может рассматриваться как дополнительный механизм экранирования поляризационных оптических фононов, который следует учитывать при анализе электрон-фононного взаимодействия в БП, например рассеяния электронов оптическими фононами, магнетофононного резонанса и т. п. Очевидно также, что это обстоятельство должно быть учтено при определении эффективного заряда ионов в БП.

Впервые необходимость учета диэлектрической аномалии БП при исследовании оптических явлений в области основного поглощения решеткой была показана <sup>53</sup> при анализе экспериментов по ИК отражению в HgTe. Позже это было более детально продемонстрировано в работе <sup>54</sup>. Влияние частотной зависимости диэлектрической проницаемости БП на спектр отражения в области плазменного минимума было экспериментально обнаружено <sup>55</sup> в α-Sn.

Экранирование заряда определяется статической диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$  (q), где q — волновой вектор. Учет виртуальных межзонных переходов приводит<sup>56</sup> к выражению для  $\varepsilon$  (q), аналогичному (12), в котором следует заменить  $\hbar \omega$  на  $\hbar^2 q^2/2m_n$ .

$$\varepsilon(q) = \varepsilon_0 + \frac{3\pi e^2 m_n}{2\hbar^2 q}.$$
 (13)

Радиус экранирования порядка боровского радиуса электрона, но на больших расстояниях потенциал заряда спадает значительно медленнее, чем при обычном дебаевском экранировании. Согласно <sup>56</sup> потенциал экранированного заряженного центра убывает на расстояниях, больших по сравнению с боровским радиусом электрона, как 1/r<sup>2</sup>.

Если в БП имеются доноры, то электроны вырождены (о роли примесей в БП речь будет идти в гл. 6). Вследствие эффекта Мосса — Бурстейна возможны только переходы при энергиях больше энергии Ферми  $E_F$ . Поэтому в примесном БП статическая диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon$  (0) является конечной и возрастает при уменьшении концентрации

346

электронов 57:

$$\varepsilon(0) = \varepsilon_0 + \frac{8m_n e^2}{\pi \hbar^2 k_F}; \qquad (14)$$

эдесь импульс Ферми  $\hbar k_F$  обычным образом связан с концентрацией электронов  $k_F^3 = 3\pi^2 n$ .

Нетрудно заметить, что формулы (12)—(14) имеют похожую структуру. В них фигурирует отношение боровской энергии электрона  $E_B = m_n e^4/2\hbar^2 \varepsilon_0^2$  к характерной энергии. В случае  $\varepsilon$  ( $\omega$ ) характерная энергия порядка  $\hbar\omega$ , для  $\varepsilon$  (q) характерной энергией является  $\hbar^2 q^2/m_n$ , в примесном полупроводнике характерная энергия — это энергия Ферми  $E_F = \hbar^2 k_F^2/2m_n$ . Во внешнем магнитном поле появляется щель порядка  $\hbar eH/(4m_nc)$ , и соответственно статическая диэлектрическая проницаемость становится конечной величиной, обратно пропорциональной  $\sqrt{H}$ <sup>58</sup>.

Необычное поведение диэлектрической проницаемости, ее чувствительность к внешним параметрам должны отразиться на кинетических свойствах БП. Если, например, рассчитать подвижность электронов в HgTe при низких температурах по формуле Брукса — Херринга для рассеяния на заряженных центрах, то оказывается, что рассчитанные величины меньше экспериментальных <sup>59</sup>. В таком случае расхождение теории и эксперимента не может быть объяснено недооценкой каких-либо механизмов рассеяния, поскольку и без их учета теория сильно переоценивает рассеивающую способность заряженных центров. Аналогичное, но менее выраженное расхождение теории и эксперимента имеет место и для α-Sn <sup>60</sup> и HgSe<sup>61</sup>. Экспериментальные данные получены на образцах, в которых содержится довольно много примесей (>10<sup>15</sup> см<sup>-3</sup>). Поэтому уточненный расчет сечения рассеяния на заряженных центрах производился с помошью формулы (14). Оказалось, что учет зависимости диэлектрической проницаемости от концентрации электронов, а также угловой зависимости амплитуд блоховских волновых функций из-за вырождения зон привел к сравнительно неплохому согласию теории и эксперимента <sup>62</sup>.

Таким образом, только учет электрон-электронного взаимодействия в БП позволяет более или менее успешно объяснить кинетические и оптические свойства. Нельзя, однако, забывать, что все приведенные формулы были получены в рамках приближения хаотических фаз ( $\Pi X \Phi$ ), и поэтому расчеты подвижности или коэффициента поглощения, проведенные в рамках  $\Pi X \Phi$ , могут служить лишь качественным указанием на то, в каких масштабах и в каком направлении влияет электрон-электронное взаимодействие на свойства БП. Добиваться количественного совпадения не имеет смысла, поскольку, если диэлектрическая аномалия мала, она не играет существенной роли, если же она велика — ПХФ теряет свою применимость. Действительно, формула (14), с помощью которой производился расчет подвижности, представляет собой лишь первый член разложения по степеням  $\sqrt{E_{B}/E_{F}}$ . Поэтому в том случае, когда становится существенным дополнительный член, связанный с виртуальными переходами, разложение перестает быть справедливым. Величина концентрации в наиболее чистых из доступных в настоящее время образцов HgTe как раз такова, что для них  $E_{B} \sim E_{F}$ . При энергиях, меньших  $E_{B}$ -энергии, характеризующей взаимодействие электрона и дырки в чистом БП  $(m_p \gg m_n),$  многочастичные эффекты определяют свойства чистого БП.

Отсутствие параметра, по которому можно было бы довести расчет до числа, заставило Абрикосова и Бенеславского <sup>1, 63</sup> воспользоваться теорией подобия («скейлинга» <sup>95</sup>), развитой в теории фазовых переходов. Основные результаты работ <sup>1, 63</sup> могут быть сформулированы следующим образом. Автомодельное решение для фурье-компоненты полного

#### 5. л. ГЕЛЬМОНТ, В. И. ИВАНОВ-ОМСКИЙ, И. М. ЦИДИЛЬКОВСКИЙ

кулоновского взаимодействия имеет вид

$$\Gamma = \frac{e^2}{\varepsilon_0 q_0^2} \left(\frac{q}{q_0}\right)^{\nu-3} d(x), \tag{15}$$

где  $q_0 = m_n e^2/\hbar^2 \varepsilon_0$ ,  $x = (q_0/q)^{\nu} m_n \omega/\hbar q_0^2$ . Индекс  $\nu$  удовлетворяет неравенству  $1 < \nu < 3$ . Предельные значения неизвестной функции d(x) выбираются из того условия, что  $\Gamma$  зависит только от q при  $\omega \to 0$  и только от  $\omega$  при  $q \to 0$ . Таким образом,  $d(0) \sim 1$ ,  $d(x \to \infty) \propto x^{1-(3/\nu)}$ . Спектр носителей заряда определяется полюсами одночастичной функции Грина, автомодельное поведение которой, согласно<sup>1</sup>, может быть представлено в виде

$$G = \frac{m_n}{\hbar^2 q_0^2} \left(\frac{q}{q_0}\right)^{-\alpha} g(x), \tag{16}$$

где g — неизвестная функция с граничными условиями  $g(0) \sim 1, g(x \rightarrow \infty) \propto x^{-\alpha/\nu}, \alpha$  — постоянная, удовлетворяющая неравенствам  $\alpha < 2, \alpha < \nu$ . К сожалению, теория «скейлинга» дает слишком широкие пределы для возможного изменения физических величин. Постоянные  $\alpha$  и  $\nu$  должны определяться из эксперимента. Позднее Абрикосов <sup>64</sup> вычислил критические индексы  $\alpha$  и  $\nu$  с помощью двух методов, используемых в теории фазовых переходов (разложение по размерности и разложение по «большому числу компонент»). Оба метода дали в первом приближении качественно близкие результаты. Оказалось, что, за исключением очень малой окрестности вблизи точки вырождения (порядка  $2,5 \cdot 10^{-4} E_B$ ), значения критических индексов равны:  $\alpha = \nu = 2$ . Таким образом, согласно <sup>64</sup>, ПХФ дает правильную зависимость диэлектрической проницаемости от  $\omega$  и q, за исключением очень узкой области вблизи точки вырождения.

б) Рассмотрим теперь влияние электрон-электронного взаимодействия на энергетический спектр носителей в БП. Как уже отмечалось, гамильтониан Латтинджера <sup>37</sup> был получен в рамках **kp**-метода, справедливого для электрона, находящегося в периодическом поле локального потенциала. Однако даже в одночастичном приближении, описываемом уравнениями Хартри — Фока, обменное взаимодействие не всегда может быть записано в виде локального потенциала. Это оправдано лишь в случае полностью заполненной валентной зоны, отделенной от зоны проводимости щелью. При этом мы пренебрегаем межзонными переходами. В обычных полупроводниках приближение локального потенциала, как правило, хорото описывает энергетический спектр. В случае БП мы встречаемся с ситуацией, когда нелокальность потенциала становится. существенной. По сути дела в чистом БП мы имеем дело с наполовину заполненной зоной, поскольку зона проводимости и валентная зона принадлежат в точке Г одному неприводимому представлению. Обменное взаимодействие учитывает в уравнении Шрёдингера для электрона в одночастичном приближении дополнительный член

$$\mathscr{H}_{\alpha\beta}^{\prime}\chi_{\beta}(\lambda, \mathbf{k}) = -\frac{e^{2}}{(2\pi)^{3}\varepsilon_{0}!} \int \frac{d^{3}r_{1}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{1}|} \sum_{\mu=\pm 3/2} \int d^{3}q \left[e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}_{1}-\mathbf{r})}-1\right]e^{i\mathbf{q}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_{1})} \times \chi_{\beta}^{*}(\mu, \mathbf{q})\chi_{\alpha}(\mu, \mathbf{q})\chi_{\beta}(\lambda, \mathbf{k}); \quad (17)$$

здесь μ и λ нумеруют состояния, α, β — номера столбцов собственной функции X гамильтониана (4). Суммирование ведется по всем занятым состояниям. Второй член в скобках вычтен для того, чтобы интеграл сходился. Этот член является частью локального потенциала. Можно считать, что такой же член прибавлен к потенциалу решетки. Функции  $\chi$  (λ, k)

348

представляют собой спиноры, соответствующие спину 3/2,  $\lambda$  — спиральность частицы <sup>65</sup>. Функции со спиральностью  $\lambda = \pm 3/2$  описывают дырочные состояния, а с  $\lambda = \pm 1/2$  — электронные.

В чистом БП в (17) нужно просуммировать по состояниям валентной зоны. Воспользовавшись соотношением

$$\sum_{\boldsymbol{\mu}=\pm 3/2} \chi_{\alpha} (\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{q}) \chi_{\beta}^{*} (\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{q}) = \Lambda_{\alpha\beta}^{(p)} (\boldsymbol{q}) = \frac{1}{2} \left[ \frac{(\boldsymbol{q}J)^{2}}{q^{2}} - \frac{1}{4} \right]_{\alpha\beta}, \quad (18)$$

где  $\Lambda^{(p)}$  — оператор проектирования на состояния валентной зоны, получим из (17)

$$\mathscr{H}'_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) = \frac{3\pi e^2}{32\epsilon_0} k \left[ \frac{5}{4} - \frac{(\mathbf{k}\mathbf{J})^2}{k^2} \right]_{\alpha\beta}.$$
 (19)

Таким образом, обменное взаимодействие приводит к дополнительным линейным по k членам в энергетическом спектре носителей заряда. Одночастичный гамильтониан чистого БП с учетом обменного взаимодействия имеет вид

$$\mathscr{B} = \frac{\gamma_1 \hbar^2}{2m_0} k^2 + \left[\frac{5}{4} - \frac{(\mathbf{kJ})^2}{k^2}\right] \left(\frac{\gamma \hbar^2}{m_0} k^2 + \frac{3\pi e^2}{32\varepsilon_0} k\right) \,. \tag{20}$$

Формула (20) написана в сферическом приближении. Из (20) нетрудно найти энергетический спектр носителей:

$$E_{n}(k) = \frac{\hbar^{2}k^{2}}{2m_{0}}(\gamma_{1} + 2\gamma) + \frac{3\pi e^{2}}{32\varepsilon_{0}}k, \quad E_{p}(k) = \frac{\hbar^{2}k^{2}}{2m_{0}}(2\gamma - \gamma_{1}) + \frac{3\pi e^{2}}{32\varepsilon_{0}}k.$$
(21)

Присутствие линейных по k членов в спектре электронов и дырок было впервые продемонстрировано Гальпериным и Райсом <sup>66</sup>. Подробный анализ спектра при большом отношении масс дырки и электрона был сделан Абрикосовым <sup>67</sup>. Для электронов перенормировка спектра, связанная с линейными по k членами, существенна лишь при  $E < E_B$ , т. е. в той области, где становятся существенными многоэлектронные эффекты. В то же время для дырок спектр перенормируется вследствие нелокальности потенциала в гораздо более широкой области энергий, вплоть до боровской энергии дырки  $(m_p/m_n) E_B$ . Таким образом, мы приходим к выводу, что гамильтониан Латтинджера, полученный в рамках теории локального потенциала и обычно хорошо описывающий валентные зоны легких и тяжелых дырок в «нормальном» полупроводнике, не может быть использован в прежнем виде для БП даже в одночастичном приближении.

В присутствии доноров, когда концентрация электронов отлична от нуля, заполнение электронных состояний сказывается на одночастичном спектре свободных носителей заряда БП. Рассмотрим случай вырожденного газа, заполняющего состояния вплоть до энергии Ферми  $E_F$ . В сумме, фигурирующей в (17), нужно учесть заполнение электронных состояний. В результате появится дополнительный член

$$\mathscr{H}_{\alpha\beta}^{"}(\mathbf{k}) \chi_{\beta}(\lambda, \mathbf{k}) = -\frac{e^2}{i(2\pi)^3 e_0} \int \frac{d^3r_1}{\mathbf{r}_1} \sum_{\mu=\pm 1/2} \int_{0}^{h_F} d^3q \left(e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_1} - 1\right) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}_1} \times \\ \times \chi_{\beta}^*(\mu, \mathbf{q}) \chi_{\alpha}(\mu, \mathbf{q}) \chi_{\beta}(\lambda, \mathbf{k}).$$
(22)

Верхний предел интеграла по q равен импульсу Ферми  $k_F$ . Воспользовавшись соотношением

$$\sum_{\boldsymbol{\mu}=\pm 1/2} \chi_{\alpha} (\boldsymbol{\mu}, \mathbf{q}) \chi_{\beta}^{*} (\boldsymbol{\mu}, \mathbf{q}) = \Lambda_{\alpha\beta}^{(n)} (\mathbf{q}) = \delta_{\alpha\beta} - \Lambda_{\alpha\beta}^{(p)} (\mathbf{q}), \qquad (23)$$

где  $\Lambda^{(n)}$  — оператор проектирования на электронные состояния, из соотношений (19) и (22) получим

$$\delta \delta' + \delta \delta'' = \frac{e^2}{\varepsilon_0} k_F \left\{ f_1\left(\frac{k_F}{k}\right) + \left[\frac{5}{4} - \frac{(\mathbf{kJ})^2}{k^2}\right] f\left(\frac{k_F}{k}\right) \right\}.$$
(24)

Функции f(x) и  $f_1(x)$  имеют вид

$$f(x) = \frac{1}{8\pi} \left[ \frac{5}{4} + \frac{13}{4} x^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{3\ln x}{x} + x - \frac{7}{4x} + \frac{3x^2}{4} \right) \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + \frac{3}{x} \int_x^\infty \frac{dy \ln y}{y^2 - 1} \right],$$
(25)

$$f_1(x) = \frac{1}{2\pi} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( x - \frac{1}{x} \right) \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right].$$

Одночастичный гамильтониан с учетом заполнения электронных состояний может быть записан следующим образом:

$$\mathscr{H} = \frac{\hbar^2 \gamma_1}{2m_0} k^2 + \frac{e^2}{\varepsilon_0} k_F f_1\left(\frac{k_F}{k}\right) + \left[\frac{5}{4} - \frac{(\mathbf{kJ})^2}{k^2}\right] \left[\frac{\hbar^2 \gamma}{m_0} k^2 + \frac{e^2}{\varepsilon_0} k_F f\left(\frac{k_F}{k}\right)\right]. \tag{26}$$

Из (26) находим

$$E_{n}\left(k\right) = \frac{\hbar^{2}k^{2}}{2m_{0}}\left(\gamma_{1}+2\gamma\right) + \frac{e^{2}}{\varepsilon_{0}}k_{F}\left[f_{1}\left(\frac{k_{F}}{k}\right) + f\left(\frac{k_{F}}{k}\right)\right],$$

$$E_{p}\left(k\right) = \frac{\hbar^{2}k^{2}}{2m_{0}}\left(2\gamma-\gamma_{1}\right) + \frac{e^{2}}{\varepsilon_{0}}k_{F}\left[f\left(\frac{k_{F}}{k}\right) - f_{1}\left(\frac{k_{F}}{k}\right)\right].$$
(27)

Спектр дырок и электронов при  $k \gg k_F$  по-прежнему может быть найден по формуле (21). При  $k_F \gg k$  спектр квадратичный, но массы электронов и дырок зависят от концентрации электронов

$$\frac{!1}{m_n} = \gamma_1 + 2\gamma + \frac{26e^2}{15\pi\epsilon_0 k_F}, \quad \frac{1}{m_p} = 2\gamma - \gamma_1 + \frac{2e^2}{5\pi\epsilon_0 k_F}.$$
(28)

Интересно отметить, что линейные члены, обусловленные нелокальностью потенциала, могут ликвидировать перекрытие зон в БП со структурой цинковой обманки.

Все написанные выше формулы относились к БП, решетка которых имеет центр симметрии. Если же центр симметрии отсутствует, то в гамильтониане (4) появятся дополнительные члены<sup>7</sup>

$$\frac{4\hbar}{\sqrt{3}} \varkappa_0 \left[ k_x \left\{ J_x \left( J_y^2 - J_z^2 \right) \right\} + k_y \left\{ J_y \left( J_z^2 - J_x^2 \right) \right\} + k_z \left\{ J_z \left( J_x^2 - J_y^2 \right) \right\} \right], \tag{29}$$

где  $\varkappa_0$  — постоянная. Такого рода члены приводят к перекрытию валентной зоны и зоны проводимости в БП со структурой цинковой обманки. Энергия этого перекрытия обычно мала. Например, для InSb энергия, связанная с линейными членами типа (29), порядка 5 ·10<sup>-6</sup> зе <sup>5</sup>. Максимумы энергии перекрытия расположены в направлении [111]. Величины энергии и импульса в точках максимума равны

$$E_{0V} = 4m_{p}\kappa_{0}^{2}, \quad \hbar k_{0V} = 2 \sqrt{2} m_{p}\kappa_{0}.$$
 (30)

Однако при вычислении энергии перекрытия не были учтены линейные по k члены, связанные с нелокальностью потенциала. Перекрытие зон исчезает при учете этих членов, если  $\varkappa_0 < 3\pi e^2/64\sqrt{2}\varepsilon_0\hbar$ . Удобнее переписать это неравенство для энергии перекрытия, которая фигурирует в теории локального потенциала. Для того чтобы перекрытие существовало, необходимо выполнение условия  $E_{0V} > (3\pi/32)^2 m_p e^4/2\varepsilon_0^2\hbar^2$ .

350

#### ЭЛЕКТРОННЫЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР

Вследствие перенормировки спектра дырок изменяется, например, статистика свободных носителей заряда в БП. Так, в собственном полупроводнике электроны вырождены при  $m_p \gg m_n$ . В случае локального потенциала энергия Ферми, согласно (3), линейно зависит от температуры, а концентрация носителей равна

$$n = p = \frac{(2m_n T)^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^3} \ln^{3/2} \left[ \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \left( \frac{m_p}{m_n} \right)^{3/2} \right].$$
(31)

С учетом нелокальности потенциала мы получим другую зависимость при  $(3\pi/16)^2 \ (m_p/m_n) \ E_B \gg T \gg (3\pi/16)^2 \ E_B \ln [(3/4) \ (32/3\pi)^3 \ (T/E_B)^{3/2}]$ :

$$E_F = T \ln \left[ \frac{3}{4} \left( \frac{32}{3\pi} \right)^3 \left( \frac{T}{E_B} \right)^{3/2} \right], \tag{32}$$

$$n = p = \frac{(2m_n T)^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^3} \ln^{3/2} \left[ \frac{3}{4} \left( \frac{32}{3\pi} \right)^3 \left( \frac{T}{E_{B_4^*}} \right)^{3/2} \right].$$
(33)

Линейные члены, обусловленные нелокальностью потенциала, следует учитывать в расчетах любых кинетических коэффициентов. Нелокальность потенциала приводит также к перенормировке энергетического спектра полупроводников с узкой шириной запрещенной зоны. В работе <sup>68</sup> было рассмотрено влияние обменного взаимодействия на энергетический спектр носителей в том случае, когда модель Кейна <sup>69</sup> хорошо описывает спектр электронов и легких дырок. При этом спектр тяжелых дырок в рамках теории локального потенциала определяется взаимодействием с высшими зонами. Нелокальность потенциала прежде всего перенормирует спектр тяжелых дырок. Зависимость энергии тяжелой дырки  $E_h$  от волнового вектора k имеет вид.

$$E_{h}(k) = \frac{\hbar^{2}k^{2}}{2m_{h}} + \frac{3\pi e^{2}}{64\epsilon_{0}} k + \frac{3eE_{g}}{16\pi P\epsilon_{0}} \int_{0}^{\infty} dy \left(1 + \frac{8}{3}y^{2}\right)^{-1/2} \left[-\frac{5}{3} + \frac{y^{2}E_{g}^{2}}{P^{2}k^{2}} - \frac{(y^{2}E_{g}^{2} - P^{2}k^{2})^{2}}{4yP^{3}k^{3}E_{g}} \ln \left(\frac{yE_{g} + Pk}{yE_{g} - Pk}\right)^{2}\right], \quad (34)$$

где  $m_h$  — вклад в массу тяжелой дырки от высших зон,  $P = -(i\hbar/m_0) \times \langle S | \hat{p}_z | z \rangle$ ,  $\hat{\mathbf{p}}$  — оператор импульса,  $| S \rangle$  — функция электрона с *s*-симметрией в точке  $\Gamma$ ,  $| Z \rangle$  — функция с *p*-симметрией. Отсчет энергии в формуле (34) — в глубь валентной зоны.

Из (34) следует, что спектр тяжелых дырок, так же как и легких, является параболическим только в области сравнительно небольших значений волнового вектора  $kP \ll E_g$ . Непараболичность становится существенной при  $kP \geqslant E_g$ , т. е. в той же области значений волнового вектора, что для зон легких дырок и электронов.

При  $kP \ll E_g$  5

$$E_h(k) = \frac{k^2}{2} \left( \frac{\hbar^2}{m_h} + \frac{2e^2P}{5\pi\epsilon_0 E_g} \sqrt{\frac{2}{3}} \right)$$
(35)

В параболической области спектра масса тяжелой дырки, так же как и легкой, уменьшается с уменьшением  $E_g$ . В InSb поправка к массе тяжелой дырки, связанная с нелокальностью, составляет 15%. В твердых растворах замещения  $\operatorname{Cd}_x\operatorname{Hg}_{1-x}$ Те масса тяжелой дырки определяется в основном обменным взаимодействием при  $E_g \leqslant 50$  мэс.

#### 6. ПРИМЕСНЫЕ СОСТОЯНИЯ В БЕСЩЕЛЕВЫХ ПОЛУПРОВОДНИКАХ

a) Статистика носителей заряда и кинетические свойства полупроводников во многом определяются характером и концентрацией присутствующих в них примесей. В обычном полупроводнике с конечной шириной запрещенной зоны носители могут образовывать связанные состояния на примесных атомах. Это обстоятельство обусловливает, например, активационный характер зависимости проводимости при низких температурах.

В БП примесные состояния попадают в область сплошного спектра зоны проводимости (акцепторные уровни) или валентной зоны (донорные уровни), вследствие чего дискретные уровни отсутствуют. У электрона появляется возможность уйти в любое из состояний сплошного спектра с той же энергией.

Кроме того, в случае полупроводника с нулевой запрещенной зоной задача о возможных значениях электрона на примеси существенно усложняется тем, что она перестает быть одноэлектронной. В некотором смысле она подобна задаче о глубоких уровнях в полупроводниках с конечной шириной запрещенной зоны. В случае мелкого уровня в полупроводнике с конечной запрещенной зоной многоэлектронные эффекты несущественны, так как поправка, обусловленная ими, порядка отношения энергии мелкого уровня к ширине запрещенной зоны. Если уровень глубокий, то это отношение становится порядка единицы и многоэлектронными эффектами нельзя пренебрегать. Аналогичная трудность известна в квантовой электродинамике. Роль запрещенной зоны там играет энергия, требуемая для рождения электрон-позитронной пары,  $2m_0c^2$ , где с — скорость света. Поправки к энергии электрона в поле ядра с зарядом Ze, связанные с поляризацией вакуума (т. е. с рождением виртуальных электрон-позитронных пар) и обусловливающие так называемый лэмбовский сдвиг уровней, порядка отношения боровской энергии к энергии  $2m_0c^2$ , т. е.  $(Ze^2/\hbar c)^2 \approx$  $\approx (Z/137)^2$ . В атоме водорода эта поправка мала («мелкий уровень»). Однако для достаточно больших Z решением одноэлектронной задачи ограничиться нельзя.

Как уже отмечалось, для БП многоэлектронные эффекты становятся существенными вблизи точки вырождения в интервале энергий порядка боровской энергии электрона. Имея это в виду, рассмотрим сначала одноэлектронную задачу о примесных состояниях, а затем проанализируем, какие из результатов сохранятся при учете межэлектронного взаимодействия.

Если бы массы электрона и дырки были одного порядка, то была бы только одна характерная энергия — боровская энергия электрона (или дырки), которая определяла бы и положение, и размытие уровней. Тогда уже в одноэлектронном приближении размытие уровней было бы порядка расстояния между ними, и плотность состояний была бы гладкой функцией энергии. Очевидно также, что при сравнимых значениях масс электрона и дырки должны быть существенны многоэлектронные эффекты. Иначе обстоит дело в случае большого различия масс электрона и дырки. Если масса дырки много больше массы электрона, как это и имеет место во всех известных БП, то в случае акцептора плотность состояний в зоне проводимости должна имёть резкие пики. Относительная ширина этих пиков, как сейчас будет показано, пропорциональна  $(m_n/m_p)^{3/2}$ . Ширину уровня можно грубо оценить по теории возмущений. Вероятность перехода Wиз дискретного спектра в непрерывный пропорциональна выражению

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} |V_a|^2 g(E_0), \tag{36}$$

где  $g(E_0)$  — плотность состояний в зоне проводимости при энергии  $E = E_0$ , V<sub>a</sub> — матричный элемент перехода между состояниями дискретного и непрерывного спектра. По порядку величины энергия дырки на акцепторе Е равна боровской энергии дырки  $m_p e^4/2 \varepsilon_0^2 \hbar^2$ . Характерный радиус акцепторного состояния порядка боровского радиуса дырки  $a_p = \hbar^2 \varepsilon_0 / m_p e^2$ . В зоне проводимости энергии  $E_0$  соответствует импульс  $\hbar k \sim \sqrt{m_n E_0} \sim$  $\sim \hbar/\sqrt{a_n a_n}$ , где  $a_n = \hbar^2 \varepsilon_0/(m_n e^2)$  — боровский радиус электрона. Поскольку длина волны электрона с энергией  $E_0$  много больше  $a_p (a_p \sqrt{m_n E_0}/\hbar \sim$  $\sim (m_n/m_p)^{3/2}),$  то при оценке  $V_a$  можно пренебречь волновым вектором электрона в осцилляционной экспоненте блоховской волновой функции. В результате получаем следующую оценку:  $V_a \sim E_0 a_p^{3/2}$ . Таким образом, резкость акцепторных уровней целиком связана с плотностью состояний в зоне проводимости. Для параболического закона дисперсии энергетического спектра электронов

$$g(E_0) = \frac{\sqrt{2E_0 m_n^3}}{\pi^2 \hbar^3}.$$

Из (34) следует, что  $W \sim E_0 \hbar^{-1} (m_p/m_p)^{3/2}$ . Ширина уровня

$$\Gamma = \hbar W \sim E_0 \left(\frac{m_n}{m_p}\right)^{3/2},\tag{37}$$

т. е. относительная ширина  $\Gamma/E_0 \sim (m_n/m_p)^{3/2}$ . Резких донорных уровней в БП с  $m_p \gg m_n$  не существует. Аналогичная оценка по теории возмущений показывает, что размытие уровня порядка его энергии. Кроме того, доноры меняют плотность состояний при энергиях порядка боровской энергии электрона. При таких энергиях существенны многоэлектронные эффекты, так как радиус экранирования в БП порядка боровского радиуса электрона даже в отсутствие свободных носителей. В то же время для расчета положения и ширины акцепторного уровня одночастичное приближение оказывается достаточным, потому что энергия акцепторного состояния при  $m_p \gg m_n$  порядка боровской энергии дырки и, следовательно, гораздо больше боровской энергии электрона, а характерный радиус  $a_p$  мал по сравнению с боровским радиусом электрона a<sub>n</sub>. При увеличении температуры или концентрации доноров возникает экранирование заряда акцепторов свободными электронами: Радиус экранирования уменьшается с ростом концентрации электронов, однако он сравнивается с боровским радиусом дырки на акцепторе, лишь когда уровень Ферми  $E_F \sim (m_p/m_p)^3 E_0$  лежит гораздо выше основного акцепторного уровня.

б) Перейдем к численному расчету энергии акцептора. Рассмотрим сначала для сравнения полупроводник с конечной шириной запрещенной зоны, в котором масса тяжелой дырки  $m_h$  велика по сравнению с массой легкой дырки m<sub>l</sub>. Чтобы получить уравнение Шрёдингера для дырки в поле мелкого примесного центра, нужно к гамильтониану (4) добавить потенциал центра V (r). В сферическом приближении уравнение имеет вид

$$[\mathscr{H}_{0}(\hat{\mathbf{p}}) + V(r)] \psi = E\psi, \qquad (38)$$
$$\mathscr{H}_{0}(\hat{\mathbf{p}}) = \frac{1}{2m_{0}} \left(\gamma_{1} + \frac{5}{2}\gamma\right) \hat{p}^{2} - \frac{\gamma}{m_{0}} (\hat{\mathbf{p}}\mathbf{J})^{2};$$

здесь р является оператором импульса. Задача об уровнях акцептора при произвольном отношении масс решалась во многих работах, например, с помощью вариационного метода<sup>70-75</sup>. Систему уравнений (38) из четырех уравнений в частных производных можно свести к двум подсистемам (каж-

2 УФН, т. 120, вып. 3

дая из двух уравнений) из обыкновенных дифференциальных уравнений и потом определить возможные значения E. Нас интересуют величины Eпри  $m_l \ll m_h$ . Поэтому поступим следующим образом. Разобьем волновую функцию на два слагаемых  $\psi = \psi^{(l)} + \psi^{(h)}$  таким образом, чтобы  $\psi^{(l)}$ была составлена из волновых функций легких дырок, а  $\psi^{(h)}$  являлась пакетом волновых функций тяжелых дырок. Выражение для оператора проектирования на состояния тяжелых дырок  $\Lambda^{(h)}$  (k) совпадает с выражением для оператора проектирования на дырочные состояния в БП (18), а формула (23) справедлива для оператора проектирования на состояния легких дырок. Таким образом,

$$\psi^{(l)}(\mathbf{k}) = \Lambda^{(l)}(\mathbf{k}) \psi(\mathbf{k}), \quad \psi^{(h)}(\mathbf{k}) = \Lambda^{(h)}(\mathbf{k}) \psi(\mathbf{k}). \tag{39}$$

Гамильтониан может быть представлен в виде

$$\mathscr{H}_{0}(\mathbf{k}) = \frac{\hbar^{2}k^{2}}{2m_{l}} \Lambda^{(l)}(\mathbf{k}) + \frac{\hbar^{2}k^{2}}{2m_{h}} \Lambda^{(h)}(\mathbf{k}).$$

$$(40)$$

Интегральные уравнения для  $\psi^{(l)}$  и  $\psi^{(h)}$  можно получить из (38), умножая слева на  $\Lambda^{(l)}$  и  $\Lambda^{(h)}$ . Из (40) следует, что

$$\mathscr{H}_{0}(\mathbf{k})\psi^{(l)}(\mathbf{k}) = \frac{\hbar^{2}k^{2}}{2m_{l}}\psi^{(l)}(\mathbf{k}), \quad \mathscr{H}_{0}(\mathbf{k})\psi^{(h)}(\mathbf{k}) = \frac{\hbar^{2}k^{2}}{2m_{h}}\psi^{(h)}(\mathbf{k}).$$
(41)

В пределе  $m_l \to 0$ , как это видно из (38), (41),  $\psi^{(l)} \to 0$ . Поэтому положение уровней может быть найдено из уравнений

$$\left(\frac{\hbar^{2}k^{2}}{2m_{h}}-\boldsymbol{E}\right)\psi^{(h)}\left(\mathbf{k}\right)-\frac{e^{2}}{2\pi^{2}\varepsilon_{0}}\Lambda^{(h)}\left(\mathbf{k}\right)\int\frac{d^{3}q}{(\mathbf{k}-\mathbf{q})^{2}}\psi^{(h)}\left(\mathbf{q}\right)=0.$$
(42)

Уравнение (42) по-прежнему представляет собой систему из четырех интегральных уравнений. Однако ее можно свести к одному интегральному уравнению. Функция основного состояния имеет вид

$$\psi^{(h)}(\mathbf{k}) = f(k) \Lambda^{(h)}(\mathbf{k}) \chi(\mu), \qquad (43)$$

где f(k) — скалярная функция, зависящая только от абсолютной величины k, а  $\chi(\mu)$  — числовой спинор, в котором отлична от нуля любая из четырех строк столбца. Основное состояние четырехкратно вырождено<sup>7</sup>. Воспользовавшись (43), можно из (42) получить уравнение для f(k):

$$\left(\frac{\hbar^{2k^{2}}}{2m_{h}} - |E|\right) f(k) - \frac{e^{2}}{8\pi^{2}e_{0}} \int \frac{d^{3}qf(q)}{(\mathbf{k} - \mathbf{q})^{2}} \left[1 + |\frac{3(\mathbf{k}\mathbf{q})^{2}}{k^{2}q^{2}}\right] = 0.$$
(44)

Уравнение (44), преобразованное к безразмерному виду, не содержит никаких параметров материала. Собствейные значения этого уравнения были найдены как с помощью ЭВМ (предварительно (44) было преобразовано в обыкновенное дифференциальное уравнение), так и с помощью вариационного принципа. В последнем случае пробная функция была взята водородоподобной с одним вариационным параметром *n* 

$$f(k) = \frac{2}{\pi} \left( \frac{\hbar^2 \epsilon_0 n}{m_h e^2} \right)^{3/2} \left[ 1 + \left( \frac{\hbar^2 \epsilon_0 n k}{m_h e^2} \right)^2 \right]^{-2}.$$
 (45)

Для *п* получается уравнение

$$E = \frac{m_h e^4}{e_0^2 \hbar^2} \left[ \frac{1}{n} \left( 6! \ln [2 - \frac{7}{2}] - \frac{1}{[2n^2]} \right].$$
(46)

Минимизация по *n* приводит к величине n = 1,52, что хорошо совпадает со значением n = 1,5, полученным при расчете на ЭВМ. При  $m_h \gg m_l$  энергия основного состояния акцептора в полупроводнике с конечной шириной запрещенной зоны  $E_0 = 2m_h e^{4/9} \varepsilon_0^{2} \hbar^{2-76}$ .

Подробное исследование зависимости волновой функции от расстояния до примесного центра показывает, что сначала она экспоненциально спадает с характерным масштабом порядка боровского радиуса тяжелой дырки  $a_h = \hbar^2 \varepsilon_0 / m_h e^2$ , затем этот экспоненциальный спад переходит в степенной, волновая функция спадает как  $1/r^3$  и, наконец, при  $r \gg a_h$ степенной спад сменяется экспоненциальным, но характерным масштабом спада является уже среднегеометрическая величина  $\hbar/\sqrt{m_l E_0} \sim \sqrt{a_l a_h}$ , где  $a_l = \varepsilon_0 \hbar^2 / m_l e^2$  — боровской радиус легкой дырки. При решении задачи о положении уровня основного состояния наличие далекого экспоненциального хвоста несущественно, и его можно не учитывать при вариационных расчетах. Такие хвосты проявляются в кинетических свойствах полупроводников, когда существенно перекрытие волновых функций соседних центров, например, при решении задачи о прыжковой проводимости <sup>77</sup>.

В случае БП для определения энергии квазидискретных уровней в одночастичном приближении необходимо учесть линейные по k члены. Уравнение для волновой функции в поле кулоновского центра запишем в импульсном представлении

$$\mathscr{H}_{0}(\mathbf{k})\psi(\mathbf{k})+\frac{e^{2}}{2\pi^{2}\varepsilon_{0}}\int\frac{d^{3}q}{(\mathbf{k}-\mathbf{q})^{2}}\psi(\mathbf{q})=E\psi(\mathbf{k}). \tag{47}$$

Выражение для  $\mathcal{H}_0(\mathbf{k})$  было получено выше (см. (20)). Квазидискретные состояния существуют лишь при  $m_p \gg m_n$ . Аналогично тому, как это было сделано в задаче об уровнях энергии в полупроводнике с конечной шириной запрещенной зоны, разобьем волновую функцию на две части  $\psi = \psi^{(n)} + \psi^{(p)}$ , где

$$\psi^{(n)}(\mathbf{k}) = \Lambda^{(n)}(\mathbf{k}) \psi(\mathbf{k}), \quad \psi^{(p)}(\mathbf{k}) = \Lambda^{(p)}(\mathbf{k}) \psi(\mathbf{k}).$$

Мы не будем в явном виде выписывать уравнения для  $\psi^{(n)}$  и  $\psi^{(p)}$ , поскольку дальнейший ход рассуждений полностью повторяет вывод уравнения (42). Точно так же в рассматриваемом случае можно пренебречь функцией  $\psi^{(n)}$  в силу малости  $m_n/m_p$ . Уравнение для  $\psi^{(p)}$  имеет вид

$$\left(\frac{\hbar^{2}k^{2}}{2m_{p}}+\frac{3\pi e^{2}}{32\varepsilon_{0}}k+E\right)\psi^{(p)}\left(\mathbf{k}\right)-\frac{e^{2}}{2\pi^{2}\varepsilon_{0}}\Lambda^{(p)}\left(k\right)\int\frac{d^{3}q\psi\left(\mathbf{q}\right)}{(\mathbf{k}-\mathbf{q})^{2}}=0.$$
 (48)

Уравнение (48) отличается от (42) наличием линейного по k члена, обязанного нелокальности обменного взаимодействия. При энергии резонансного уровня, которая порядка боровской энергии дырки, этот член того же порядка, что и все остальные члены уравнения (48).

Найдем теперь энергию резонансного уровня с максимальной энергией E. Как и выше, волновую функцию можно искать в виде (43). Для скалярной функции f(k) получим уравнение

$$\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m_p} + \frac{3\pi e^2 k}{32\epsilon_0} + E\right) f(k) - \frac{e^2}{8\pi^2 \epsilon_0} \int \frac{d^3 q f(q)}{(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2} \left[1 + \frac{|3(\mathbf{k}\mathbf{q})|^2}{k^2 q^2}\right] = 0.$$
(49)

Как и в случае уравнения (44), собственные значения уравнения (49) можно найти с помощью вариационного принципа. Выбирая f(k) в виде (45) получим связь между E и вариационным параметром n:

$$E = \frac{m_p e^4}{\epsilon_0^2 \hbar^2} \left[ \frac{1}{n} \left( 6 \ln 2 - \frac{15}{4} \right) - \frac{1}{2n^2} \right].$$
(50)

Минимизация по *п* приводит к величине n = 2,44, что соответствует энергим  $E_0 = 0,085 \ m_p e^4 / \epsilon_0^2 \hbar^{2.68}$ . Для параметров HgTe, где  $\epsilon_0 = 20, \ m_p = 0,4 \ m_0$ , энергия резонансного состояния равна 2,3 мэв, тогда как расчет,

355

2\*

выполненный в рамках теории локального потенциала, дает  $\varepsilon_0 = 6 \, M_{\partial \theta} \, ^{78}$ . Экспериментальное значение энергии  $E_0$ , найденное в измерениях циклотронного резонанса в HgTe <sup>79</sup>, равно 2,2 *м*<sub>26</sub>.

Мы подробно остановились на решении задачи об уровнях в поле кулоновского примесного центра. При уменьшении |  $E_g$  | нельзя ограничиваться членами, пропорциональными  $k^2$  в спектре электронов и дырок. Нужно



Рис. 5. Зависимость энергии основного состояния акцептора  $E_0$  от  $E_g$ . Энергия основного состояния  $E_0$  — в ед.  $m_h e^{t/e_0^2} \hbar^4$ ,  $E_g$  — в ед.  $m_h e^{t/e_0^2} \hbar^4$ . учесть непараболичность, которую вносит взаимодействие с ближайшей зоной с *s*-симметрией в точке Г. Энергия основного состояния как функция |  $E_g$  | растет с уменьшением |  $E_g$  | и при  $E_g = 0$ становится равной  $m_h e^4/7 \varepsilon_0^{2} h^{2-68}$ . В полупроводниковой области при  $E_g > 0$  продолжается дальнейший рост  $E_0$ , которая стремится к значению  $2m_h e^4/9 \varepsilon_0^{2} \hbar^2$  при больших  $E_g$  (рис. 5).

Задача о положении примесного уровня в том случае, когда потенциал сильно локализован в пределах одной ячейки, была рассмотрена в статьях <sup>80, 81</sup>. Связь между зонами предполагалась в работе <sup>81</sup> настолько сильной,

что межзонные матричные элементы потенциала были равны внутризонным. Как и в случае кулоновского центра, акцепторные уровни резонансные, а донорные сильно размыты. Качественно ход движения резонансных уровней тот же, что и для кулоновского центра. Авторы работы <sup>80</sup> считают, что в твердом растворе  $Cd_xHg_{1-x}$  те имеется два сорта центров: с кулоновским потенциалом — ионы Си и с сильно локализованным потенциалом — вакансии Hg. Величина матричных элементов потенциала вакансий Hg определялась в работе <sup>81</sup> из экспериментальных данных, после чего была построена кривая зависимости  $E_0$  от x (в соответствующих единицах — это зависимость от  $E_g$ ), которая удовлетворительно согласуется с результатами работы <sup>80</sup>.

#### 7. СТАТИСТИКА НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДА В БЕСЩЕЛЕВЫХ ПОЛУПРОВОДНИКАХ

Существование резких акцепторных уровней на фоне сплошного спектра зоны проводимости приводит к ряду интересных особенностей в термодинамике и кинетике носителей заряда в БП. При большом различии масс электронов и дырок доноры и акцепторы в таком полупроводнике играют различную роль.

Поскольку связанных состояний электронов на донорах не существует, то концентрация свободных электронов n равна концентрации доноров  $N_D$ уже при T = 0. С другой стороны, акцепторные уровни резкие, поэтому для заметной ионизации акцепторов необходимо, чтобы температура была порядка энергии основного состояния акцептора  $E_0$ . (Мы рассматриваем лишь случай достаточно низкой концентрации акцепторов  $N_A a_p^3 \ll 1$ , так что волновые функции соседних акцепторов мало перекрываются. Для HgTe это условие означает  $N_A \ll 10^{20} \text{ см}^{-3}$ .) Так как запрещенная зона отсутствует, то свободные носители появляются при сколь угодно низкой температуре даже в отсутствие доноров. Таким образом, при  $N_D =$  = 0 собственная проводимость возникает в БП при более низких температурах, чем примесная, связанная с ионизацией акцепторов.

Если имеются и доноры, и акцепторы, то при низкой температуре БІІ будет *n*-типа (n > p) независимо от соотношения между концентрациями  $N_A$  и  $N_D$ . Компенсация при низких температурах не происходит (она энергетически невыгодна), если уровень Ферми лежит ниже уровня акцептора. С повышением температуры наступает своеобразная компенсация, и при достаточно высокой температуре полупроводник станет *p*-типа, если  $N_A > N_D$ . В ходе этой компенсации концентрация свободных электронов *n* в некотором интервале температур может убывать с ростом температуры.

Найдем концентрацию электронов n в зависимости от температуры. Уровни акцепторов будем считать резкими. Полагая, что все доноры ионизованы, можно найти энергию Ферми  $E_F$  из уравнения нейтральности

$$N_D + p = n + N_A \left[ 1 + 4 \exp\left(\frac{E_0 - E_F}{T}\right) \right]^{-1}.$$
 (51)

Множитель 4 учитывает четырехкратное вырождение основного уровня. Рассмотрим наиболее интересный случай, когда  $E_F > T$ , так что

электроны вырождены, а дырки не вырождены. Тогда из (49) получим

$$\frac{3\sqrt{\pi}}{4j} \left(\frac{m_p}{m_n}\right)^{3/2} e^{-x} - x^{3/2} = \left(\frac{E_0}{T}\right)^{3/2} \left\{ n_A \left[ 1 + 4 \exp\left(\frac{E_0}{T} - x\right) \right]^{-1} - n_D \right\},$$
(52)

$$p = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \left(\frac{m_p T}{m_n E_0}\right)^{3/2} e^{-x} N_0, \quad n = \left(\frac{xT}{E_0}\right)^{3/2} N_0, \tag{53}$$

где

$$N_0 = \frac{(2m_n E_0)^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^3}, \quad x = \frac{E_F}{T}, \quad n_A = \frac{N_A}{N_0}, \quad n_D = \frac{N_D}{N_0}.$$

Характерная концентрация  $N_0$  выбрана таким образом, чтобы при  $n = N_0$  уровень Ферми совпадал с энергией акцепторного уровня. Из (52) и (53) можно определить концентрации электронов и дырок как функцию температуры. В качестве примера приведем рассчитанные на ЭВМ кривые n(T) для случая, когда ( $3\sqrt{\pi}/4$ )  $(m_p/m_n)^{3/2} = 100$ , что соответствует отношению масс  $m_p/m_n = 18$ , близкому к тому, которое имеет место у HgTe. На рис. 6, 7 представлены результаты расчетов для различных значений безразмерных концентраций  $n_A$  и  $n_D$ . Вид функции n(T) качественно различается в зависимости от того,  $n_D < 1$  или  $n_D > 1$ .

Рис. 6 соответствует случаю  $n_D = 0.8$ , так что при T = 0 уровень Ферми лежит несколько ниже энергии основного акцептора  $E_0$ . В отсутствие акцепторов (кривая 1) при низких температурах концентрация электронов остается постоянной, а затем начинает монотонно увеличиваться с ростом температуры благодаря образованию электрон-дырочных пар. С увеличением концентрации акцепторов на кривой n(T) появляется минимум.

В области низких температур уменьшение концентрации свободных электронов с увеличением температуры обусловлено захватом электронов акцепторами. При дальнейшем возрастании температуры по мере заполнения акцепторов возрастает роль тепловой генерации пар, что приводит к росту концентрации электронов.

## 358 Б. Л. ГЕЛЬМОНТ, В. И. ИВАНОВ-ОМСКИЙ, И. М. ЦИДИЛЬКОВСКИЙ

Рис. 7 соответствует случаю, когда при T = 0 уровень Ферми выше уровня акцептора ( $n_D = 1,6$ ). В отличие от предыдущего случая, увеличение  $N_A$  приводит к частичной компенсации даже при T = 0: с ростом концентрации акцепторов концентрация электронов n уменьшается до значения  $n = N_0$  при  $N_A = N_D - N_0$ . Дальнейшее увеличение  $N_A$  не приводит к уменьшению концентрации свободных электронов, так как захват их акцепторами становится энергетически невыгодным. Если  $N_A >$  $> N_D - N_0$ , то при  $T \neq 0$  идут два конкурирующих процесса: тепловой





Рис. 7. То же, что и на рис. 6, при  $n_D = 1, 6.$ 

Рис. 6. Теоретические кривые зависимости концентрации свободных электронов n от температуры T при концентрации доноров  $n_D = 0,8$  и различных концентрациях акцепторов:

 $1 - n_A = 0;$   $2 - n_A = 1;$   $3 - n_A = 10;$  $4 - n_A = 50;$   $5 - n_A = 100.$  Все концентрации выражены в единицах  $N_0.$ 

заброс электронов на незанятые акцепторные уровни и тепловая генерация электрон-дырочных пар. При низких температурах доминирует первый процесс, при более высоких — второй. В результате, как и в случае  $n_D < < 1$  функция n (T) должна иметь минимум.

Очевидно, что на кривой зависимости проводимости от температуры также должен появиться минимум, который будет более резко выраженным вследствие того, что при ионизации акцепторов возрастает роль примесного рассеяния.

Отметим, что столь необычная зависимость концентрации электронов и проводимости от температуры позволяет ожидать, что вольтамперная характеристика БП будет иметь падающий участок. Действительно, разогрев носителей полем может при соответствующих концентрациях доноров и акцепторов привести к падению концентрации электронов, а вместе с ней и проводимости.

Надо иметь в виду, что электроны, захваченные акцепторами, могут принимать участие в проводимости, поскольку акцепторный уровень квазидискретен, и время жизни электрона на этом уровне конечно. Очевидно, что подвижность этих электронов мала.

К настоящему времени имеется целый ряд экспериментальных работ, подтверждающих существование квазидискретных акцепторных уровней. Немонотонный характер зависимости проводимости от температуры наблюдался в HgTe <sup>82, 83</sup> и твердых растворах  $\operatorname{Cd}_x\operatorname{Hg}_{1-x}\operatorname{Te}^{84, 85}$ . Можно полагать, что эта немонотонность связана с акцепторными уровнями. В работе <sup>86</sup> исследовалась зависимость концентрации свободных носителей от давления при T = 4,2 °К на образцах *p*-типа  $\operatorname{Cd}_x\operatorname{Hg}_{1-x}\operatorname{Te}$  при x = 0,14-0,15. Оказалось, что положение уровня Ферми не меняется с давлением. Такое поведение уровня Ферми заставило авторов работы <sup>86</sup> сделать вывод о существовании акцепторного уровня на фоне сплошного спектра зоны проводимости. Детальное исследование гальваномагнитных явлений в твердых растворах  $\operatorname{Cd}_x\operatorname{Hg}_{x-1}$  Te *p*-типа с 0, 1 < x < 0,15 при всестороннем давлении до 15 катм было проведено в работе <sup>87</sup>. Концентрация акцепторов была большой, квазидискретные состояния размывались в примесную зону, которая по данным работы <sup>87</sup> перекрывается с зоной проводимости примерно при энергии 3 мэв. В работе <sup>94</sup> было исследовано движение уровня Ферми с ростом температуры в Cd<sub>x</sub>Hg<sub>1-x</sub>Te *p*-типа с x = 0,1.

В работах <sup>52, 88</sup> была приведена зависимость частот межзонных и внутризонных переходов в HgTe от напряженности магнитного поля. Измерения производились в геометрии Фарадея и Фойгта в интервале длин волн от 2 мм до 100 мкм при 4,2 °К. Помимо частот, которые авторы отождествили с различными переходами между уровнями, описываемыми гамильтонианом Латтинджера, были обнаружены дополнительные линии поглощения. В пределе слабого магнитного поля энергия соответствующих уровней оказалась отличной от нуля. Авторы приписали эти линии квазидискретным акцепторным уровням. Аналогичные переходы наблюдались в работе <sup>42</sup>. Проявления примесной акцепторной зоны в кинетических эффектах у твердых растворов Cd<sub>x</sub>Hg<sub>1-x</sub>Te c x = 0,1 при  $N_A > 5 \cdot 10^{17}$  см<sup>-3</sup> были обнаружены в работе <sup>89</sup>. Минимум на кривой зависимости n(T)был надежно установлен в работах <sup>89, 90</sup> на образцах Cd<sub>x</sub>Hg<sub>1-x</sub>Te c x = 0,1 и концентрацией дырок  $p = 8 \cdot 10^{17}$  см<sup>-3</sup>.

#### 8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящее время достигнут значительный прогресс в изучении энергетического спектра БП. Стало ясно, что последний не является копией спектра «нормального» полупроводника с вырожденными зонами, в которых знак кривизны одной из них изменен на обратный, как первоначально предлагалось в модели Гроувса и Пола<sup>6</sup>. Было показано, что значительную роль играют многочастичные эффекты вблизи точки вырождения зон, а валентная зона существенно перестраивается из-за нелокальности решеточного потенциала БП. На фоне сплошного спектра зоны проводимости расположены квазилокализованные уровни примесных состояний.

Однако остается целый ряд невыясненных вопросов. В теоретическом плане это прежде всего касается области спектра вблизи точки вырождения зон, в которой существенны многоэлектронные эффекты. Остается открытым вопрос об устойчивости спектра в этой области. Неустойчивость может привести к образованию экситонного диэлектрика <sup>91-93</sup>. Большая работа предстоит в изучении влияния магнитного поля на электронный и дырочный спектры БП с учетом нелокальности потенциала. Что касается экспериментальных исследований, то необходимы более чистые материалы, чем те, которые имеются сейчас. Исследования гальваномагнитных и резонансных явлений при низких температурах приведут к бо́льшему пониманию особенностей БП.

До сих пор еще полностью не отождествлены примеси даже в наиболе изученном веществе — HgTe. В этом смысле остается еще большой объем

#### 360 🦷 Б. Л. ГЕЛЬМОНТ, В. И. ИВАНОВ-ОМСКИЙ, И. М. ЦИДИЛЬКОВСКИЙ

работ по исследованию влияния контролируемых примесей на электронные явления в БП.

Необходимо уточнение зонных параметров в HgTe (и в других  $B\Pi$ ), которые пока сильно различаются при измерениях, сделанных разными авторами.

Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе АН СССР, Ленинград Институт физики металлов Уральского центра АН СССР, Свердловск

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- 1. А. А. Абрикосов, С. Д. Бенеславский, ЖЭТФ 59, 1280 (1970).
- 2. N. B. Brandt, E. A. Svistova, J. Low. Temp. Phys. 1, 1 (1970). 3. J. C. Dimmock, J. Melngailis, A. J. Strauss, Phys. Rev. Lett. 16, 1193 (1966).
- 4. A. J. Strauss, Phys. Rev. 157, 608 (1967).

- 4. J. Strauss, rhys. nev. 137, 000 (1907).
  5. C. R. Pidgeon, S. H. Groves, ibid. 186, 824 (1969).
  6. S. H. Groves, W. Paul, Phys. Lett. 11, 194 (1963).
  7. Г. Л. Бир, Г. Е. Пикус, Симметрия и деформационные эффекты в полупроводниках, М., «Наука», 1972.
  <sup>9</sup> F. Hormon, R. Kontum, C. Kuglin, R. Short, in: Intern. Conference on

- HARAX, M., «HayRay, 1972.
  8. F. Herman, R. Kortum, C. Kuglin, R. Short, in: Intern. Conference on Physics of Semiconductors, Kyoto, 1966, p. 7.
  9. F. Herman, R. Kortum, C. Kuglin, J. Van Dyke, S. Skillman, in: Methods in Computational Physics, v. 8, N.Y., 1968.
  10. F. H. Pollak, M. Cardona, C. W. Higginbotham, F. Herman, J. P. Van Dyke, Phys. Rev. B2, 352 (1970).
  11. S. H. Groves, C. R. Pidgeon, A. W. Ewald, R. J. Wagner, J. Phys. and Chem. Sol. 31, 2031 (1970).
  12. M. Cohen T. Bergstresser Phys. Rev. 144, 789 (1966).
- M. Cohen, T. Bergstresser, Phys. Rev. 141, 789 (1966).
   S. Bloom, T. Bergstresser, Sol. State Comm. 6, 465 (1968).
   S. Hloom, T. Bergstresser, Phys. Stat. Sol. 42, 191 (1970).

- S. Katsuki, M. Kunimure, J. Phys. Soc. Japan 31, 337, 415 (1970).
   H. Overhof, Phys. Stat. Sol. b43, 221; b45, 315 (1971).
   F. Herman, R. Kortum, C. Kuglin, J. Shay, in: Proc. of Intern. Conference on II-VI Semiconductor Compounds, Providence, USA, 1967, p. 503.

- 18. G. Bush, T. Kern, Sol. State Phys. 11, 1 (1960).
   19. Н. П. Мокровский, А. Р. Регель, ЖТФ 22, 1281 (1952).
   20. И. М. Цидильковский, ЖТФ 27, 1744 (1957).
   21. Т. С. Нагтап, М. J. Logan, H. L. Goering, J. Phys. and Chem. Sol. 7, 228 (1958).

- R. O. Carlson, Phys. Rev. 111, 476 (1958).
   T. Harman, A. Strauss, J. Appl. Phys. 32, 2265 (1961).
   T. Harman, A. Strauss, J. Mavroides, D. Dickey, M. Dresselh a u s, in: Proc. of Intern. Conference on Physics of Semiconductors, Exeter, England,
- 1962, р. 703. 25. В. И. Иванов-Омский, Б. Т. Коломиец, А. А. Малькова, В. К. Огородников, К. П. Смекалова, Изв. АН СССР, сер. физ. 28, 1057 (4064). Phys. Stat. Sol. 8. 613 (1965). 1057 (1964); Phys. Stat. Sol. 8, 613 (1965). 26. Z. Dzuiba, T. Zakrzewski, ibid. 7, 1019 (1964). 27. В. И. Иванов-Омский, Б. Т. Коломиец, В. К. Огородников,
- В. И. Иванов-Омский, Б. Т. Коломиец, В. К. Огородников, К. П. Смекалова, ФТП 4, 264 (1970).
   С. Vérié, Phys. Stat. Sol. 17, 889 (1966).
   S. Porowski, T. Zakrzewski, ibid. 11, K39 (1965).
   R. Piotrzkowski, S. Porowski, Z. Dzuiba, J. Ginter, W. Gi-riat, L. Sosnowski, ibid. 8, K135 (1965).
   B. J. Roman, A. W. Ewald, Phys. Rev. B5, 3914 (1972).
   S. H. Groves, R. N. Brown, C. R. Pidgeon, ibid. 161, 779 (1967).
   Б. Л. Гельмонт, ФТТ 11, 1096 (1969).
   В. И. Иванов-Омский, Б. Т. Коломиец, В. М. Мельник, B. К. Огородников, ibid., стр. 2563.
   Б. Л. Гельмонт, В. И. Иванов-Омский, Б. Т. Коломиец, B. М. Мельник, ФТП 4, 289 (1970).
   И. М. Цидильковский, Электроны и дырки в полупроводниках, М., «Наука», 1972.

- «Наука», 1972.

- 37. J. M. Luttinger, Phys. Rev. 102, 1030 (1956).

- 41. J. Guldner, C. Rigaux, M. Grynberg, A. Mycielski, Phys. Rev.
- B8, 3875 (1973).
  42. S. U c h i d a, R. Y o s h i z a k i, S. T a n a k a, in: Intern. Conference on Physics of Semimetals and Narrow-gap Semiconductors, Nice, France, 1973.
  43. S. H. Groves, C. R. Pidgeon, R. N. Brown, Phys. Rev. [161, 779]
- (1967)
- (1967).
  44. С. R. Pidgeon, S. H. Groves, цит. в<sup>17</sup> сборник, р. 1080.
  45. R. J. Wagner, L. H. Ngai, in: Proc. of 12th Intern. Conference on Physics of Semiconductors, Stuttgart, 1974, р. 1147.
  46. В. И. Иванов Омский, Н. Н. Константинова, Р. В. Парфеньев, В. В. Сологуб, И. Г. Тагиев, ФТП 7, 715 (1973).
  47. В. Гириат, Э. А. Нейфельд, И. М. Цидильковский, ФТП 9, 498 (4075).
- 48. (1975).
  48. J. Kowalskii, W. Zawadzki, Sol. State Comm. 13, 1433 (1973).
  49. D. Sherrington, W. Kohn, Phys. Rev. Lett. 21, 153 (1968).
  50. Цит. в<sup>38</sup> сборник, стр. 182.

- 51. J. G. Broerman, Phys. Rev. **B5**, 397 (1972). 52. J. Tuchendler, M. Grynberg, Y. Gouder, H. Thome, R. Le Toullec, ibid. **B8**, 3884 (1973).

- 1 с., ibid. B8, 3884 (1973).
  53. В. И. Иванов-Омский, Б. Т. Коломиец, А. А. Малькова, Ю. Ф. Марков, А. Ш. Мехтиев, ФТП 4, 417 (1970).
  54. М. Grynberg, R. Le Toullec, in: Proc. of 11th Intern. Conference on Physics-of Semiconductors, v. 2, Warszawa, 1972, p. 931.
  55. R. J. Wagner, A. W. E wald, J. Phys. and Chem. Sol. 32, 697 (1971).
  56. L. Liu, D. Brust, Phys. Rev. Lett. 20, 651 (1968).
  57. L. Liu, E. Tosatti, ibid. 23, 772 (1969).
  58. L. Liu, M. Tan, Phys. Rev. B9, 632 (1974).
  59. В. И. Иванов-Омский, Б. Т. Коломиец, В. К. Огородников, К. П. Смекалова, ФТП 4, 264 (1970).
  60. Е. D. Ніпкley, А. W. E vald, Phys. Rev. A4, 1260 (1964).
  61. J. G. Broerman, ibid. B2, 1818 (1970).
  62. Е. Л. Гельмонт, В. И. Иванов-Омский, Б. Т. Коломиец, В. К. Огородников, К. П. Смекалова, ФТП 5, 266 (1972).
  63. А. А. brikosov, S. D. Beneslavskii, J. Low. Temp. Phys. 5, 141 (1971).
- (1971).
- 64. А. А. Абрикосов, ЖЭТФ 66, 1443 (1974). 65. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, Релятивистская квантовая теория, ч. 1, М., «Наука», 1968. 66. В. Ј. Наlperin, Т. М. Rice, Rev. Mod. Phys. 40, 775 (1968). 67. А. А. Абрикосов, Ј. Low. Temp. Phys. 18, 185 (1975). 68. Б. Л. Гельмонт, ФТН 9, 1912 (1975).

- 69. E. O. Kane, J. Phys. and Chem. Sol. 1, 249 (1957).
  70. B. L. Gelmont, V. I. Ivanov Omskii, V. K. Ogorodnikov, Phys. Stat. Sol. 69, 717 (1975).

- Stat. Sol. 69, 747 (1975).
  74. W. Kohn, D. Shechter, Phys. Rev. 99, 1903 (1955). W. Kohn, Sol. State Phys. 5, 258 (1957).
  72. D. Shechter, J. Phys. and Chem. Sol. 28, 237 (1962).
  73. K. S. Mendelsohn, H. M. James, ibid. 25, 729 (1964).
  74. B. И. Шека, Д. И. Шека, ЖЭТФ 51, 1445 (1966).
  75. K. S. Mendelsohn, J. A. Shultz, Phys. Stat. Sol. 31, 59 (1969).
  76. Б. Л. Гельмонт, М. И. Дьяконов, ФТП 5, 2191 (1971).
  77. Б. И. Шкловский, ФТП 6, 1197 (1972).

- 78. Б. Л. Гельмонт, М. И. Дьяконов, ЖЭТФ 62, 713 (1972); вкн. Материалы
- 4-й зимней школы по физике полупроводников, Ленинград, 1972, стр. 124. 79. G. Bastard, Y. Guldner, A. Mycielski, P. Nozieres, C. Rigaux,
- <sup>19.</sup> G. Базтаго, 1. битипет, А. м. устегова, 1. п. б. гете., 2. п. в. с. п. в. с.

- К. П. Смекалова, ФТП 1, 289 (1967); 4, 264 (1970).
  83. В. L. Gelmont, М. I. Dyakonov, V. I. Ivanov Отskii, В. Т. Ко-lomiets, V. K. Ogorodnikov, K. P. Smekalova, цит. в <sup>54</sup> сборник, v. 2, p. 938.
- 84. C. Finck, S. Otmezguine, G. Weill, C. Vérié, ibid., p. 944.

#### 362 Б. Л. ГЕЛЬМОНТ, В. И. ИВАНОВ-ОМСКИЙ, И. М. ЦИДИЛЬКОВСКИЙ

- 85. S. Otmezguine, F. Raymond, G. Weill, C. Vérié, in: Proc. of 10th Intern. Conference on Physics of Semiconductors, Cambridge, 1970, p. 536.
- 86. С. Т. Elliott, J. Melngailis, T. С. Нагтап, J. A. Kafalas, W. С. Кегтап, Phys. Rev. B5, 2985 (1972).
  87. Н. Б. Брандт, О. Н. Белоусова, Л. А. Бовина, В. И. Стафеев, Я. Г. Пономарев, ЖЭТФ 66, 330 (1974).
  88. J. Tuchendler, M. Grynberg, Y. Gouder, H. Thome, цит. в<sup>54</sup> сбор-тики. 4. С. 246
- ник, v. 1, p. 346. 89. I. M. Tsidilkovskii, W. Giriat, G. I. Kharus, E. A. Neifeld,
- 89. 1. М. Гзідіїкоvзкії, W. Сігіаt, G. 1. Кнагиз, Е. А. Neifeld, Phys. Stat. Sol. 64, 717 (1974).
  90. В. Гириат, Э. А. Нейфельд, И. М. Цидильковский, Н. А. Го-родилов, ФТП 10, 63 (1976); в кн. IV Всесоюзный симпозиум по полупровод-никам с узкой запрещенной зоной и полуметаллам, ч. 1, 1975, стр. 16.
  91. Л. В. Келдыш, Ю. В. Копаев, ФТТ 6, 2791 (1964).
  92. А. Н. Козлов, Л. А. Максимов, ЖЭТФ 48, 1184 (1965).
  93. D. Sherrington, W. Коhn, Rev. Mod. Phys. 40, 767 (1968).
  94. Н. Б. Брандт, О. Н. Белоусова, Я. Г. Пономарев, ФТТ 17, 3585 (4075)

- (1975).
- 95. Квантовая теория поля и физика фазовых переходов, М., «Мир», 1975.