

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

532.132

СВЕРХТЕКУЧЕСТЬ ГЕЛИЯ II ВБЛИЗИ λ -ТОЧКИ

В. Л. Гинзбург, А. А. Собянин

СОДЕРЖАНИЕ

I. Введение	153
II. Гелий II в состоянии полного и неполного термодинамического равновесия (покой, стационарное сверхтекучее течение)	158
2.1. Основное уравнение для Ψ -функции (параметра порядка) (158). 2.2. Граничные условия (163). 2.3. Точность Ψ -теории (учет флуктуаций) (164). 2.4. Условия и область применимости Ψ -теории (171).	
III. Рассмотрение различных задач и эффектов в гелии вблизи λ -точки	174
3.1. Размерные эффекты в пленках, капиллярах и порах (смещение λ -точки, уменьшение плотности ρ_s и изменение теплоемкости C_p) (174). 3.2. Распределение плотности сверхтекучей компоненты во внешних полях (185). 3.3. Поверхностное натяжение и граничное условие на свободной поверхности (193). 3.4. Критическая скорость сверхтекучего течения. Вихревая нить (196).	
IV. Общая Ψ -теория сверхтекучести вблизи λ -точки (движение сверхтекучей и нормальной компонент, нестационарность)	201
4.1. Основные уравнения (201). 4.2. Распространение звука. Теплопроводность вблизи твердой стенки (206).	
V. Заключительные замечания	209
Обозначения и некоторые численные параметры	211
Цитированная литература	213

I. ВВЕДЕНИЕ

Гелий был обнаружен на Земле только в 1895 г. (до этого, начиная с 1868 г., линии гелия наблюдались в спектре Солнца) и впервые ожижен в 1908 г. (температура кипения при атмосферном давлении $T_b = 4,215^\circ\text{K}$; критической точке в системе жидкость — пар для гелия отвечают температура $T_c = 5,20^\circ\text{K}$ и давление $p_c = 2,26$ атм). Любопытно, что первое указание на существование в жидком гелии λ -перехода из гелия I в гелий II ($T_\lambda = 2,172^\circ\text{K}$ при давлении насыщенных паров $p_\lambda = 0,05$ атм), проявившееся в аномальной температурной зависимости плотности ρ , было получено Камерлинг-Оннесом в том же 1911 г., в котором он открыл сверхпроводимость. Возможно, что именно вполне естественная увлеченность изучением сверхпроводимости задержала дальнейшее исследование гелия II; к тому же работе помешала первая мировая война. Так или иначе, лишь в 1924 г. λ -переход в гелии был четко выявлен на кривой $\rho(T)$, а в 1928 г. этот переход еще резче проявился при измерениях зависимости диэлектрической проницаемости жидкого гелия от температуры (непосредственно вслед за этим и было введено понятие о гелии I и гелии II). Ярче всего λ -переход, если говорить о равновесном гелии, сказывается на ходе

теплоемкости (1932 г.), но аналогичное поведение теплоемкости наблюдается и для некоторых переходов в других веществах. В связи с этим подлинная специфика гелия II, суммарно характеризующая в настоящее время термином «сверхтекучесть», проявляется при течении, теплопередаче и т. п. Конкретно, совершенно непонятное в то время (и, как мы теперь знаем, обусловленное сверхтекучестью) поведение пленок гелия II было обнаружено еще в 1922 г.; сверхтеплопроводность гелия II привлекла к себе внимание в 1935 г. и, наконец, его сверхтекучесть была открыта в 1938 г. Так завершился первый период изучения жидкого гелия (подробнее см. ^{1,2} *).

Понадобилось, таким образом, целых тридцать лет (а фактически, даже несколько дольше) для того, чтобы выяснить самые основные свойства гелия II. В этом свете не приходится особенно удивляться тому факту, что в течение последующего тридцатилетия и вплоть до настоящего времени исследование явления сверхтекучести все еще далеко не было завершено. Масштаб низкотемпературных исследований стал, правда, неизмеримо больше, чем в первый период, когда жидкий гелий получали лишь в десятке лабораторий во всем мире (а первые 15 лет — вплоть до 1923 г., лишь в Лейдене). Но, с другой стороны, появились экспериментальные возможности, о которых раньше не приходилось и мечтать, в связи с чем неизмеримо возросли предъявляемые к измерениям требования и возникли новые задачи. К тому же помимо He^4 начали изучаться растворы He^3 в He^4 , а затем и чистый жидкий He^3 (первые получен в 1948 г.) ^{4,5}. В последнее время (1972—1974 гг.) были обнаружены и сейчас интенсивно исследуются фазовые переходы в жидком He^3 , имеющие место при температурах $T_c \sim 10^{-3}$ °K и связанные с появлением сверхтекучих фаз He^3 (см. ⁶). Начали обсуждаться вопросы о возможности создать сверхтекучий молекулярный водород ⁷⁻⁹ и сверхтекучую экситонную фазу в полупроводниках ^{10,11}. Большое внимание привлекла к себе также проблема сверхтекучести в космических условиях и особенно в случае нейтронной жидкости в нейтронных звездах ^{12,13}.

Итак, в настоящее время изучение сверхтекучести (или, правильнее сказать, сверхтекучих веществ) занимает в физике весьма видное место и ни о каком «насыщении» этой области нет и речи, даже если иметь в виду только гелий II (т. е. сверхтекучий He^4).

Нам представляется весьма вероятным, что неослабевающее внимание к гелию II связано, в частности, с отсутствием сколько-нибудь полной микроскопической теории гелия II, подобной современной микротeorии сверхпроводимости в металлах. Действительно, теория сверхтекучести Ландау ¹⁴ (об ее дальнейшем развитии см. ^{2, 4, 5, 15, 16}) может быть разделена на две части: квазимикроскопическую теорию, оперирующую с газом элементарных возбуждений (квазичастиц), и двухжидкостную гидродинамику сверхтекучей жидкости. Но оба эти подхода непригодны в окрестности λ -точки, т. е. в области во всяком случае очень характерной и важной как с точки зрения теории, так и для эксперимента. Построить последовательную микротeorию жидкого гелия вблизи λ -точки значило бы одновременно решить из «первых принципов» задачу о фазовых переходах второго рода для трехмерной системы, что еще полностью не сделано даже для упрощенных моделей. Одной из таких моделей, наиболее интересной в применении к жидкому гелию, является неидеальный бозе-газ, рассматриваемый без предположений о малости плотности (газовое приближение) и слабости связи ¹⁷. Однако даже вполне успешное дальнейшее

*) По вопросам, лишь косвенно связанным с темой настоящей статьи, мы, когда это возможно, ссылаемся только на обзоры (см. также сборник ряда оригинальных работ ³).

исследование этой модели вряд ли может дать больше, чем обоснование известной в настоящее время феноменологической теории фазовых переходов второго рода¹⁷⁻¹⁹, сопровождаемое оценкой или вычислением критических индексов. Между тем от теории, достаточно полно описывающей свойства и поведение гелия II вблизи λ -точки, нужно потребовать значительно большего — не только определения температурной зависимости всех термодинамических величин для безграничной жидкости, но и выяснения влияния границ (например, зависимости температуры λ -точки $T_\lambda(d)$ от толщины пленки гелия d) и, наконец, динамической теории течения гелия с учетом, вообще говоря, диссипации и релаксации параметра порядка.

В этой связи нужно напомнить, что в теории сверхтекучести Ландау параметр порядка вообще не фигурирует в согласии с тем, что эта теория была построена лишь для области вдали от λ -перехода. По последней причине связанная с параметром порядка величина — плотность сверхтекучей части жидкости ρ_s — в теории Ландау рассматривается в качестве заданной функции других величин, например, ρ и T . Между тем вблизи от точки перехода (λ -точки) плотность ρ_s должна определяться, если говорить о равновесии, из условия минимума термодинамического потенциала. Величина ρ_s , как параметр порядка, вводилась в связи с проблемой критических скоростей еще в статье²⁰; однако, в такой постановке этот вопрос приобрел реальный интерес лишь значительно позже (см. ниже раздел 3.4). Введение параметра порядка существенно при анализе поглощения звука в гелии II вблизи λ -точки²¹. Но в этом случае нет нужды уточнять, какая величина является параметром порядка, и фактически использовалась лишь формула для коэффициента поглощения первого звука, содержащая только скорость звука с обеих сторон от точки перехода и время релаксации (поэтому в²¹ величина ρ_s или какой-либо другой конкретный параметр порядка для гелия II вообще не фигурирует).

Актуальная необходимость обобщить теорию сверхтекучести Ландау, особенно на область λ -перехода, оказалась связанной с проблемой скачка скорости сверхтекучей части жидкости v_s на границе с твердой стенкой. Как хорошо известно, атомы гелия прилипают к стенке, и таким образом, на самой стенке не только поток нормальной части жидкости $\mathbf{j}_n = \rho_n \mathbf{v}_n = 0$, но и поток ее сверхтекучей части $\mathbf{j}_s = \rho_s \mathbf{v}_s$ должен обращаться в нуль. Равенство $\mathbf{j}_n = 0$ на стенке сразу же следует из обычного условия для вязкой жидкости \mathbf{v} (на стенке) $= 0$, относящегося также к скорости \mathbf{v}_n . Для \mathbf{v}_s , наоборот, в теории Ландау на стенке используется условие для идеальной жидкости, т. е. параллельная границе, составляющая \mathbf{v}_s , считается на стенке отличной от нуля, несмотря на прилипание атомов гелия к стенке. Создается впечатление, что вблизи стенки должен иметь место гидродинамический разрыв скорости \mathbf{v}_s . Вопрос об этом разрыве почему-то мало кого беспокоил (см. однако,²²), хотя без его решения обойтись невозможно. В самом деле, разрыв у стенки, как и разрыв скорости \mathbf{v}_s в толще гелия (вихревой слой), должен быть связан с поверхностной энергией $\sigma_s \sim \hbar^2 / m a^4 \sim 10^{-2}$ эрг/см² (здесь $m = m_{\text{He}}$ — масса атома гелия и a — характерная толщина разрыва, при переходе к численной оценке положенная равной примерно 10^{-7} см). Приведенная оценка σ_s следует из различных соображений²³, например, получается при вычислении нулевой (кинетической) энергии при изменении волновой функции атомов гелия в слое с толщиной a . Энергия σ_s весьма значительна и если бы при появлении скорости $\mathbf{v}_s \neq 0$ вдоль стенки действительно возникал разрыв с такой поверхностной энергией, то это ярко сказалось бы на эксперименте; в частности, возникал бы эффект типа «сухого трения». Фак-

тически же такого эффекта нет, причем поверхностная энергия σ_s , появляющаяся при возникновении сверхтекучего течения вдоль стенки, по крайней мере на 7—8 порядков меньше, чем согласно приведенной выше оценке, и потому может считаться равной нулю²⁴.

Как же объяснить возникающее противоречие? Выход можно найти, предположив, что на самой стенке $\rho_s = 0$ и, следовательно, вблизи стенки плотность сверхтекучей части жидкости изменяется на некотором характерном расстоянии ξ , так что $\rho_s(0) = 0$, $\rho_s(z \gg \xi) = \rho_{se}$, где z — расстояние от стенки и ρ_{se} — значение ρ_s в толще гелия II. Поэтому и при $v_s \neq 0$ поток на стенке $j_s(0) = \rho_s(0)v_s = 0$, в силу чего разрыв скорости v_s на самой стенке становится «невинным». Иными словами, со стенкой в гелии II всегда связана некоторая специфическая поверхностная энергия σ_s , обусловленная наличием градиента плотности $\rho_s(z)$, но одинаковая и при $v_s = 0$ и при $v_s \rightarrow 0$ (это и означает, что эффект «сухого трения» отсутствует).

Именно стремление построить теорию, в которой плотность ρ_s не только не задается в толще гелия, но и определяется некоторым уравнением, совместимым с граничным условием $\rho_s(0) = 0$, стимулировало появление работы²⁵. В то время на примере теории сверхпроводимости²⁶ уже было выяснено, что для сверхтекучей (сверхпроводящей) системы роль параметра порядка играет некоторая комплексная «эффективная волновая функция» $\Psi = \eta e^{i\varphi}$. Поэтому в применении к гелию II в²⁵ был введен такой же комплексный параметр порядка, причем

$$\rho_s = m |\Psi|^2 = m\eta^2, \quad (1.1)$$

$$\mathbf{v}_s = \frac{\hbar}{m} \nabla \varphi, \quad (1.2)$$

$$\mathbf{j}_s = \rho_s \mathbf{v}_s = -\frac{i\hbar}{2} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) = \hbar \eta^2 \nabla \varphi, \quad (1.3)$$

где $m = m_{\text{He}}$ — масса атома гелия и выбрана удобная для дальнейшего нормировка Ψ .

Вводимая функция Ψ является макроскопической и ею можно пользоваться лишь для масштабов, заметно превосходящих атомный масштаб $a \sim 3 \cdot 10^{-8}$ см. В то же время в гелии II вдали от λ -точки плотность ρ_s вблизи стенки изменяется на расстояниях порядка атомных и, вообще, корреляционная длина ξ , характеризующая изменения параметра порядка, является величиной атомных размеров. Отсюда ясно, что теория сверхтекучести, построенная на основе использования макроскопического параметра порядка Ψ (такую теорию мы будем называть ниже Ψ -теорией сверхтекучести), если и вообще может быть развита, то только вблизи λ -точки, где длина ξ возрастает. Конкретно, речь идет об области температур T , удовлетворяющих условию

$$\varepsilon = \frac{T_\lambda - T}{T_\lambda} = \frac{t}{T_\lambda} \ll 1. \quad (1.4)$$

Поэтому ниже, несколько условно, будем считать, что рассматривается лишь область значений $\varepsilon \lesssim 0,1$, т. е. район, не превосходящий $0,1 - 0,2^\circ \text{K}$ от λ -точки.

В случае сверхпроводимости корреляционная длина (длина когерентности) ξ велика (в типичном чистом сверхпроводнике первого рода даже при $T \ll T_c$ длина $\xi \sim \xi_0 \sim 10^{-4}$ см — порядка размера куперовских пар), в силу чего вблизи точки сверхпроводящего перехода (т. е. при условии (1.4) с заменой T_λ на критическую температуру T_c) Ψ -теория

сверхпроводимости²⁶ широко применима при использовании самосогласованной теории фазовых переходов второго рода, в которой пренебрегается флуктуациями параметра порядка вблизи точки перехода *). Для гелия II, как уже упоминалось, корреляционная длина ξ не является аномально большой, и хотя при приближении к λ -точке $\xi \gg a \sim 3 \cdot 10^{-8}$ см, что открывает возможность достаточно широко использовать макроскопическую функцию Ψ , самосогласованное приближение (пренебрежение флуктуациями), строго говоря, не имеет области применимости. Тем не менее, в статье²⁵, хотя и с оговоркой, применялась самосогласованная теория фазовых переходов (иначе тогда, в 1958 г., и нельзя было поступить). Поэтому некоторые полученные в²⁵ окончательные результаты, касающиеся зависимости температуры T_λ от толщины d пленки гелия II, поверхностной энергии $\sigma_s(T)$ на границе гелия II с твердым телом, теплоемкости пленок $C(T, d)$ и структуры вихревой нити, имеют лишь качественное значение. Ситуация существенно улучшается, если отказаться от разложения коэффициентов $A, B, C \dots$ при $|\Psi|^2, |\Psi|^4, |\Psi|^6$ и т. п. в ряд по $(T_c - T)$, а вместо этого использовать²⁷ основанную на эксперименте зависимость этих коэффициентов от $(T_c - T)$. Именно так, с учетом эксперимента и уже существующей общей теории фазовых переходов¹⁷⁻¹⁹, развивается в настоящее время Ψ -теория сверхтекучести²⁸⁻⁴⁰ (мы цитируем здесь также статьи, посвященные более общему вопросу об обобщении самосогласованной теории фазовых переходов, основанном на использовании произвольной, в принципе, зависимости коэффициентов $A, B, C \dots$ от температуры).

Построение теории не завершено, и в этой области имеется ряд неясных вопросов. В такой ситуации, довольно естественно, в литературе встречаются также весьма негативные и противоречивые оценки возможностей Ψ -теории сверхтекучести гелия II. Тем больше основания осветить современное состояние теории, включая ее сравнение с экспериментом; этому как раз и посвящена настоящая статья. Отметим, однако, что мы отнюдь не стремились к полноте изложения (в частности, при указании литературы), так как это требовало бы и больше места и, главное, при современном состоянии проблемы вряд ли оправдано и только помешало бы увидеть лес за деревьями.

Глава II статьи имеет своей целью построение Ψ -теории сверхтекучести для стационарного случая при $v_n = 0$, а также обсуждение области ее применимости. Решение ряда задач, таких, например, как вычисление температуры $T_\lambda(d)$ для пленок, проводится в гл. III. Затем в гл. IV обсуждается Ψ -теория сверхтекучести вблизи λ -точки для общего случая ($v_n \neq 0$, нестационарность). Наконец, гл. V посвящена некоторому резюме и перечислению задач дальнейших исследований.

*) Самосогласованной теорией фазовых переходов мы будем называть схему, в которой термодинамический потенциал разлагается вблизи точки перехода в ряд по степеням параметра порядка, а коэффициенты этого разложения представляются в виде ряда по $(T_c - T)$. Именно к такой схеме приводит рассмотрение ряда моделей в приближении самосогласованного (среднего или молекулярного) поля, т. е. при пренебрежении флуктуациями. Теорию фазовых переходов, именуемую здесь самосогласованной (это не очень удачно, но лучшего термина мы не знаем), часто называют теорией фазовых переходов Ландау. Мы решили не пользоваться таким названием, во-первых, во избежание путаницы с теорией сверхтекучести Ландау, часто упоминаемой в настоящей статье. Во-вторых, главное в теории фазовых переходов Ландау¹⁹ это разложение в ряд по параметру порядка, учет роли симметрии и т. п., в то время как разложение в ряд также по $(T_c - T)$ является значительно более далеко идущим и необязательным допущением. В-третьих, самосогласованная теория фазовых переходов в относительно простых конкретных случаях (ферромагнетизм, критическая точка жидкость — пар) фактически использовалась задолго до работ Ландау.

II. ГЕЛИЙ II В СОСТОЯНИИ ПОЛНОГО И НЕПОЛНОГО ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ (ПОКОЙ, СТАЦИОНАРНОЕ СВЕРХТЕКУЧЕЕ ТЕЧЕНИЕ)

2.1. Основное уравнение для Ψ - функции (параметра порядка)

Выделение параметра порядка в качестве одной из переменных в выражении для термодинамического потенциала рассматриваемой системы (среды) имеет смысл или, во всяком случае, плодотворно лишь при определенных условиях. Нужно, чтобы выделяемый параметр порядка был макроскопической величиной, т. е. величиной, уже усредненной по некоторым малым масштабам. Другим аспектом проблемы является вопрос о характере релаксации параметра порядка. Вообще говоря, время релаксации параметра (или параметров) порядка значительно больше времени релаксации других переменных (давления, температуры и т. п.). Именно в подобных условиях можно рассматривать состояния неполного термодинамического равновесия, в которых все независимые переменные (величины), кроме параметра порядка, являются равновесными. Поскольку вблизи точки фазового перехода второго рода T_λ время релаксации параметра порядка $\tau(T)$ возрастает, причем $\tau(T \rightarrow T_\lambda) \rightarrow \infty$, рассмотрение в этой области состояний неполного термодинамического равновесия представляется особенно оправданным.

В случае гелия II в качестве параметра порядка мы выбираем уже упомянутую эффективную или макроскопическую волновую функцию $\Psi = \eta e^{i\varphi}$, связанную с ρ_s и v_s соотношениями (1.1) — (1.3). Правда, в гелии II имеется и другая величина, могущая претендовать на роль параметра порядка, а именно волновая функция $\tilde{\Psi}$, квадрат модуля которой равен концентрации $n_0(T)$ атомов гелия, находящихся в макроскопическом квантовом состоянии с нулевым импульсом. Уже отсюда ясно, что выбор «правильного» параметра порядка не является очевидным. Мы еще вернемся к этому вопросу (раздел 2.4), сейчас же заметим, что особенно вблизи λ -точки параметры n_0 и $\rho_s = m\eta^2$ могут оказаться пропорциональными друг другу, т. е. равноправными или, точнее, сводящимися один к другому. Так или иначе, ниже мы используем только параметр Ψ .

Допуская существование состояний неполного термодинамического равновесия, отличающихся значением Ψ , будем рассматривать термодинамический потенциал *) гелия II в таких состояниях $\Phi(p, T, \Psi)$. Здесь в качестве переменных помимо Ψ выбраны давление и температура. Но можно, разумеется, рассматривать и другие термодинамические потенциалы, а именно свободную энергию $F(\rho, T, \Psi)$, термодинамический потенциал $\Omega(\mu, T, \Psi)$ и внутреннюю энергию $E(\rho, S, \Psi)$, где p — давление, ρ — плотность, μ — химический потенциал и S — энтропия. При решении пространственно-неоднородных задач следует, строго говоря, пользоваться потенциалом $\Omega(\mu, T, \Psi)$, поскольку постоянство μ и T отвечает тепловому и механическому равновесию, в то время как переменные ρ , p и S , вообще говоря, зависят от координат. Однако при рассмотрении общих вопросов, в частности, при получении основного уравнения для Ψ удобнее (или, во всяком случае, более привычно) использовать свободную энергию или потенциал $\Phi(p, T, \Psi)$. Так мы и поступим.

Начнем с однородной системы (гелия) и при отсутствии течения. Тогда Φ зависит лишь от $\eta^2 = |\Psi|^2$, т. е. $\Phi = \Phi_{II0}(p, T, |\Psi|^2)$. Теперь

*) Точнее, речь идет, конечно, о плотности термодинамического потенциала. Для краткости, в тех случаях, когда это не может привести к недоразумениям, мы не будем терминологически отличать величины от их плотностей.

сделаем предположение, что вблизи точки λ -перехода потенциал Φ_{II0} можно разложить в ряд по $|\Psi|^2$, т. е.

$$\Phi_{II0}(p, T|\Psi|^2) = \Phi_I(p, T) + A|\Psi|^2 + \frac{B}{2}|\Psi|^4 + \frac{C}{3}|\Psi|^6 + \dots, \quad (2.1)$$

где Φ_I — термодинамический потенциал гелия I вблизи λ -точки и $A, B, C \dots$ — функции p и T .

Состоянию полного термодинамического равновесия отвечает минимум Φ_{II0} по Ψ^* , т. е. условие

$$\left(\frac{\partial \Phi_{II0}}{\partial |\Psi|^2} \right)_{p, T} \Psi = 0.$$

Ниже точки перехода $\Psi \neq 0$ и условие равновесия можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial \Phi_{II0}}{\partial |\Psi|^2} \right)_{p, T} \equiv \left(\frac{\partial \Phi_{II0}}{\partial \eta^2} \right)_{p, T} = 0. \quad (2.2)$$

Ограничиваясь в (2.1) выписанными членами, получим условие (2.2) в виде $A + B\eta^2 + C\eta^4 = 0$, откуда равновесное значение

$$\frac{\rho_{se}}{m} = \eta_e^2 = -\frac{B}{2C} + \sqrt{\left(\frac{B}{2C} \right)^2 - \frac{A}{C}}. \quad (2.3)$$

Здесь перед корнем выбран знак плюс, так как такой выбор знака обеспечивает выполнение ниже λ -точки условия устойчивости (минимальности потенциала) в равновесном состоянии

$$\frac{\partial^2 \Phi_{II0}}{(\partial \eta^2)^2} = B + 2C\eta_e^2 = \sqrt{B^2 - 4AC} > 0. \quad (2.4)$$

В λ -точке $\rho_{se} = 0$, и таким образом, очевидно, что $A(T_\lambda) = 0$. Выше λ -точки $A > 0$ из требования устойчивости состояния с $\eta_e = 0$. Следовательно, $A < 0$ при $T < T_\lambda$. Коэффициент $C > 0$ для обеспечения положительности Φ_{II0} при больших значениях η^2 .

В простейших вариантах, когда $C = 0$ или $B = 0$, имеем

$$C = 0, \quad \frac{\rho_{se}}{m} = -\frac{A}{B}; \quad (2.4a)$$

$$B = 0, \quad \frac{\rho_{se}}{m} = \sqrt{-\frac{A}{C}}. \quad (2.4b)$$

В случае (2.4a), разумеется, $B > 0$.

В самосогласованной теории фазовых переходов второго рода коэффициенты $A, B, C \dots$ считаются разложимыми в ряд по $(T_\lambda - T)$ и, например, в варианте (2.4a), справедливом в случае достаточной удаленности от трикритической точки (в этой точке коэффициент $B = 0$),

$$A = -a(T_\lambda - T), \quad a = \left(\frac{dA}{dT} \right)_{T_\lambda}, \quad B(T_\lambda) = b, \quad (2.5)$$

$$\rho_{se} = \frac{ma(T_\lambda - T)}{b}.$$

При этом энтропия $S_{II} = -\partial \Phi_{II0} / \partial T$ в силу условия (2.2) равна

$$S_{II} = S_I - \frac{\partial A}{\partial T} \eta_e^2 = S_I - \frac{a^2}{b} (T_\lambda - T), \quad S_I = -\frac{\partial \Phi_I}{\partial T} \quad (2.6)$$

и скачок теплоемкости $C_p = T(\partial S / \partial T)_p$ в λ -точке равен

$$\Delta C_p = C_{p, II} - C_{p, I} = \frac{a^2 T_\lambda}{b}. \quad (2.7)$$

В температурном интервале $10^{-2} \leq \varepsilon = (T_\lambda - T)/T_\lambda \leq 0,1$ в грубом приближении можно считать, что $\rho_{se} \sim (T_\lambda - T)$, т. е. применима фор-

мула (2.5). Полагая, например, $\rho_{se} = 0,075 \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$ при $\varepsilon = 0,1$ и $\Delta C_p = 5,2 \cdot 10^7 \text{ эрг}\cdot\text{г}^{-1}\text{град}^{-1} = 0,76 \cdot 10^7 \text{ эрг}\cdot\text{см}^{-3}\text{град}^{-1}$, находим *)

$$a = 6,7 \cdot 10^{-17} \text{ эрг/град}, \quad b = 1,3 \cdot 10^{-39} \text{ эрг}\cdot\text{см}^3. \quad (2.8)$$

Фактически, однако, плотность ρ_{se} во всем интервале $10^{-6} \leq \varepsilon \leq 0,1$ достаточно точно описывается законом ⁴¹⁻⁴⁴

$$\begin{aligned} \rho_{se} &= m\eta_e^2 = m|\Psi|^2 = 1,43\rho_\lambda(T_\lambda - T)^\zeta, \\ \rho_\lambda &\equiv \rho(T_\lambda) = 0,146 \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}, \quad \rho_{00} = 1,43\rho_\lambda = 0,21 \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}\text{град}^{-\zeta} \\ \zeta &= 0,67 \pm 0,01. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Считая, как это довольно вероятно, что $\zeta = 2/3$, в (2.1) можно положить

$$A = -A_0(T_\lambda - T)|T_\lambda - T|^{1/3}, \quad B = B_0|T_\lambda - T|^{2/3}, \quad C = C_0, \quad (2.10)$$

так как при этом, согласно (2.3), $\rho_{se} \propto (T_\lambda - T)^{2/3}$.

Если $C_0 = 0$, то

$$A_0 = 1,11 \cdot 10^{-16} \text{ эрг/(град)}^{4/3}, \quad B_0 = 3,54 \cdot 10^{-39} \text{ эрг}\cdot\text{см}^3/(\text{град})^{2/3}.$$

В условиях, когда используются коэффициенты типа (2.10) (в отличие от самосогласованного варианта типа (2.5)), все члены, пропорциональные $|\Psi|^2$, $|\Psi|^4$ и $|\Psi|^6$, в (2.1) в равновесии одинаковым образом зависят от $(T_\lambda - T)$, и поэтому нет общих оснований отбрасывать при $T \rightarrow T_\lambda$ член с $|\Psi|^6$, а также и более высокие члены по $|\Psi|^2$. Тем самым использование варианта (2.10) носит приближенный характер. Как мы увидим ниже (раздел 2.4), при условии $\rho_s \ll \rho_{se}$ и особенно, если

$$\rho_s \ll \rho_{se}, \quad (2.11)$$

отбрасывание членов с $|\Psi|^8$ и т. д., а возможно, и члена с $|\Psi|^6$, уже оправдано. Между тем в узких каналах и щелях, вблизи оси вихря и т. д. равновесное значение плотности ρ_s как раз меньше соответствующего равновесного значения ρ_{se} для массивного покоящегося гелия II. Таким образом, приближение (2.10) в весьма широких пределах оказывается оправданным (см. примечание при корректуре 1 на стр. 210).

Введем безразмерную переменную (см. (2.9))

$$\psi = \frac{\Psi}{\Psi_{00}}, \quad \Psi_{00} = \eta_{00} = \sqrt{\frac{1,43\rho_\lambda}{m}} = \sqrt{\frac{\rho_{00}}{m}}. \quad (2.12)$$

Кроме того, мы можем выразить два из коэффициентов A_0 , B_0 и C_0 в (2.10) через ρ_{se} и ΔC_p , воспользовавшись формулой (2.3) и вычисляя $C_p = -T(\partial^2\Phi/\partial T^2)_p$ на основании выражений (2.1), (2.9) и (2.10). В результате можно написать

$$\Phi_{II0} - \Phi_I = \frac{3\Delta C_p}{(3+M)T_\lambda} \left(-t|t|^{1/3}|\psi|^2 + \frac{(1-M)|t|^{2/3}}{2}|\psi|^4 + \frac{M}{3}|\psi|^6 \right), \quad (2.13)$$

*) Приводимые здесь и ниже значения относятся к λ -точке чистого He^4 при давлении насыщенного пара. В последние годы начались интенсивные исследования λ -перехода в гелии при всех давлениях от $p = p_{\text{нас}}(T_\lambda) = 0,05 \text{ атм}$ до давления затвердевания $p_m(T_\lambda) = 29,74 \text{ атм}$, а также в смесях $\text{He}^3 - \text{He}^4$ (см., в частности, ^{44, 46}). При этом при повышении давления, а также в смесях, область, в которой с хорошей точностью $\rho_{se} \propto (T_\lambda - T)^{2/3}$, сужается, а область, где можно приближенно использовать линейный закон $\rho_{se} \propto (T_\lambda - T)$, соответственно, растет. Однако подробный анализ поведения коэффициентов A , B , C . . . в зависимости от давления и концентрации He^3 еще не проведен. Поэтому всюду в дальнейшем, если это не оговаривается особо, мы будем иметь в виду именно окрестность λ -точки чистого He^4 при давлении насыщенных паров.

где

$$t = T_\lambda - T = T_\lambda \varepsilon, \quad M = \frac{C_0}{A_0 v_{00}^2}. \quad (2.14)$$

В простейших вариантах теории^{27, 36} соответственно безразмерный параметр $M = 0$ или $M = 1$.

В применении к равновесному гелию II использование термодинамического потенциала (2.13) ничего нового, разумеется, не дает. Но этот потенциал нужен в Ψ -теории сверхтекучести как один из блоков, используемых при написании уравнений, пригодных для решения неоднородных и нестационарных задач. В последнем случае, однако, следует учитывать, вообще говоря, релаксационные процессы и диссипацию (см. гл. IV). Поэтому сначала остановимся на стационарных неоднородных задачах, когда нужно учитывать лишь производные Ψ по координатам. Кроме того, считаем, что $v_n = 0$, и, следовательно, Ψ -функция (параметр порядка) полностью описывает состояние гелия II.

В указанных условиях в качестве термодинамического потенциала выберем выражение

$$\Phi_{II}(p, T, \Psi) = \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \Psi|^2 + \Phi_{II0} = \frac{\hbar^2}{8m^2} \frac{(\nabla \rho_s)^2}{\rho_s} + \frac{\rho_s v_s^2}{2} + \Phi_{II0}, \quad (2.15)$$

где Φ_{II0} — потенциал однородного и покоящегося гелия II (см. (2.1), (2.13)) и учтены выражения (1.1) и (1.2).

Выбор формы градиентного члена в (2.15) диктуется требованием инвариантности (потенциал Φ является скаляром), квантовомеханической аналогией, аналогией с Ψ -теорией сверхпроводимости²⁶ и тем обстоятельством, что при $\nabla \rho_s = 0$ приходим к выражению для плотности кинетической энергии $\rho_s v_s^2/2$ (разумеется, эти аргументы отнюдь не независимы друг от друга). Такого обоснования еще недостаточно, но это относится и к выбору выражения для Φ_{II0} и, вообще, почти ко всякой феноменологической теории до ее получения из микротeorии и указания области применимости. На последнем мы еще остановимся ниже, здесь же без дальнейшего примем выражение (2.15) для Φ_{II} . Тогда полный термодинамический потенциал $\tilde{\Phi}_{II} = \int \Phi_{II}(p, T, \Psi) dV$, и уравнение для Ψ получаем как условие экстремальности при варьировании $\tilde{\Phi}_{II}$ по Ψ^* . Отсюда

$$\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi = \left(\frac{\partial \Phi_{II0}}{\partial |\Psi|^2} \right)_{p, T} \Psi. \quad (2.16)$$

При использовании других термодинамических потенциалов в (2.16) вместо $(\partial \Phi_{II0} / \partial |\Psi|^2)_{p, T}$ фигурируют другие производные, но все они при соответствующей замене переменных равны друг другу

$$\left(\frac{\partial \Phi_{II0}}{\partial |\Psi|^2} \right)_{p, T} = \left(\frac{\partial F_{II0}}{\partial |\Psi|^2} \right)_{p, T} = \left(\frac{\partial \Omega_{II0}}{\partial |\Psi|^2} \right)_{\mu, T} = \left(\frac{\partial E_{II0}}{\partial |\Psi|^2} \right)_{\rho, S} = m \mu_s. \quad (2.16a)$$

Эти соотношения следуют из тождества $dE = TdS + \mu d\rho + \mu_s d\rho_s$ и определений плотностей термодинамических потенциалов Φ , F и Ω : $\Phi = E - TS + p = \mu\rho$, $F = E - TS$ и $\Omega = E - TS - \mu\rho$.

Таким образом, с применением обозначения μ_s уравнение (2.16) имеет одинаковый вид при выборе любых термодинамических переменных.

Введем теперь помимо приведенной ψ -функции (2.12) также новые координаты

$$r_{**} = \frac{r}{\xi_{00}}, \quad \xi_{00} = \sqrt{\frac{\hbar^2 \Psi_{00}^2 T_\lambda}{2m \Delta C_p}} = 2,74 \cdot 10^{-8} \text{ см} \cdot \text{град}^{2/3} \quad (2.17)$$

Тогда, с учетом (2.13), уравнение (2.16) принимает вид (звездочками отмечено, что производные берутся по r_{**}, i)

$$\Delta_{**}\psi = \frac{3}{3+M} (-t|t|^{1/3} + (1-M)|t|^{2/3}|\psi|^2 + M|\psi|^4)\psi. \quad (2.18)$$

Именно это уравнение является основным для дальнейшего. Разумеется, в области ниже λ -точки, которой, главным образом, и будем интересоваться, $t > 0$, и знак модуля у t в (2.8) можно опустить. Так и будем, обычно, поступать ниже. Равновесное значение $\psi = \psi_e$, получаемое из (2.18) при $\psi = \text{const}$, равно

$$\psi_e = \frac{\Psi_e}{\Psi_{00}} = t^{1/3}, \quad (2.12a)$$

как это и должно быть (см. (2.9) и (2.12); величину ψ_e можно считать вещественной). Физический смысл величины ξ_{00} становится особенно ясным, если ввести безразмерные координаты

$$\begin{aligned} r_* = \frac{r}{\xi_M}, \quad \xi_M = \frac{\xi_{00}[(3+M)/3]^{1/2}}{t^{2/3}} &\equiv \xi_0 \left(\frac{3+M}{3} \right)^{1/2} = \\ &= \frac{2,74 \cdot 10^{-8} [(3+M)/3]^{1/2}}{(T_\lambda - T)^{2/3}} \text{ см.} \end{aligned} \quad (2.19)$$

В этих координатах для функции $\psi_0 = \psi/\psi_e$ (в равновесии $\psi_0 = 1$, $\psi = \psi_e = t^{1/3}$)

$$\begin{aligned} \Delta_* \psi_0 &= [-1 + (1-M)|\psi_0|^2 + M|\psi_0|^4] \psi_0, \\ \psi_0 &= \frac{\psi}{\psi_e} = \frac{\Psi}{(\rho_{00}/m)^{1/2} t^{1/3}}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

и, по крайней мере при $|\psi_0|^2 \rightarrow 0$, длина ξ_M очевидным образом определяет характерное расстояние (корреляционную длину или «длину когерентности»), на котором изменяется параметр порядка ψ_0 . Об этом еще пойдет речь в разделе 2.3. При $M = 0$ длина $\xi_M = \xi_0$ совпадает с использованной в ²⁷. Если бы мы остановились на самосогласованном варианте (2.5), (2.8), то роль ξ_M играла бы длина ²⁵ $\xi = \hbar/\sqrt{2\pi a(T_\lambda - T)} = 3,5 \cdot 10^{-8}/\sqrt{T_\lambda - T}$ (см). Однако такое приближение вблизи T_λ непригодно, поскольку отвечает зависимости $\rho_{se} \propto (T_\lambda - T)$ вместо соответствующей опыту зависимости (2.9). Заметим, что для сверхтекучего He^3 ситуация уже иная ⁶, так как вблизи λ -точки как раз можно положить $\rho_s \propto (T_\lambda - T)$.

Развиваемая Ψ -теория количественно может быть справедлива лишь при условии

$$\xi_M \gg a \sim 3 \cdot 10^{-8} \text{ см.} \quad (2.21)$$

При $M \ll 1$ это условие согласно (2.19) может считаться практически выполненным, если $(T_\lambda - T) < 0,1^\circ \text{K}$.

Варьируя функционал $\Phi(\Psi)$ по Ψ , получаем уравнение для Ψ^* , которое не отличается от (2.16). Умножая теперь уравнение (2.16) на Ψ^* , а аналогичное уравнение для Ψ^* на Ψ , и вычитая эти уравнения одно из другого, получаем уравнение непрерывности

$$\text{div } \mathbf{j}_s \equiv \text{div } (\rho_s \mathbf{v}_s) = 0, \quad (2.22)$$

где, разумеется, использованы выражения (1.1) — (1.3); уравнение (2.2) получается и несколько иным (но, разумеется, эквивалентным) способом при разделении уравнения (2.16) на вещественную и мнимую части.

Заметим, кстати, что в выражении (2.15) и последующих при использовании определения (1.1) для ρ_s , нельзя массу гелия m заменить на некоторую эффективную массу m_{eff} , положив также (с целью сохранить выражение $\rho_s v_s^2/2$ для кинетической энергии) вместо (1.2) $v_s = (\hbar/\sqrt{mm_{\text{eff}}})\nabla\varphi$. Дело в том, что эффективная масса m_{eff} должна, вообще говоря, зависеть от температуры, давления и т. п. Но это значит, что в пространственно-неоднородных условиях масса m_{eff} зависела бы от координат. В последнем же случае из соответствующих уравнений для Ψ и Ψ^* уравнение непрерывности (2.22) уже не следует. О недопустимости замены m на m_{eff} свидетельствует и требование независимости от температуры и других параметров циркуляции $\oint v_s d\mathbf{l}$ (подробнее см. ²⁵ и раздел 3.4).

2.2. Г р а н и ч н ы е у с л о в и я

При решении уравнения (2.18), (2.20) для ψ нужно воспользоваться определенными граничными условиями. На границе с твердой стенкой, по крайней мере при отсутствии теплообмена с ней, одно условие очевидно — скорость v_s должна быть параллельна стенке, т. е.

$$\mathbf{n}\nabla\varphi = v_s \mathbf{n} = 0, \quad (2.23)$$

где \mathbf{n} — нормаль к стенке.

Исходя из обсуждавшихся во введении соображений, будем полагать, далее, что на стенке

$$\rho_s(0) = m |\Psi(0)|^2 = 0. \quad (2.24)$$

Фактически это условие, уже в силу требования (2.21), неотличимо от условия обращения плотности ρ_s в нуль не на самой стенке, а на некотором расстоянии от нее порядка атомного (см. раздел 3.2). На оси вихревой нити в гелии II мы также примем условие (2.24), естественно возникающее при решении соответствующей задачи о вихре (см. ²⁵ и ниже, раздел 3.4). Условие на свободной границе гелия II определяется не столь уверенно. Конкретные задачи решались и с условием (2.24) и с условием

$$\mathbf{n}\nabla\Psi = 0, \text{ свободная граница.} \quad (2.25)$$

Можно ввести и более общее граничное условие; например, для вещественной функции Ψ положить

$$\frac{\partial\Psi}{\partial z} + \lambda^{-1}\Psi = 0, \quad (2.26)$$

где z — направление по нормали к границе и λ — некоторый коэффициент, могущий, в принципе, зависеть от $t = T_\lambda - T$ и других переменных.

Заметим, что условие (2.25), справедливое в Ψ -теории сверхпроводимости ²⁶ для границы с вакуумом, получается, если при варьировании функционала $\tilde{\Phi}(\Psi)$ требовать его экстремальности, не накладывая на границе никаких дополнительных ограничений *).

*) В таких случаях иногда говорят об естественных граничных условиях. К ним приходим, рассматривая вариацию

$$\int (\nabla\Psi \nabla\delta\Psi^*) dV = \int \nabla (\nabla\Psi \delta\Psi^*) dV - \int \delta\Psi^* \Delta\Psi dV.$$

Преобразуя

$$\int \nabla (\nabla\Psi \delta\Psi^*) dV = \oint (\mathbf{n}\nabla\Psi) \delta\Psi^* dS,$$

видим, что функционал минимален при соблюдении не только уравнения (2.16), но и условия (2.25).

К условию же (2.26) можно придти (см., например, ⁴⁷), отыскивая без других требований на границе экстремум функционала

$$\tilde{\Phi}(\Psi) + \frac{\hbar^2 \lambda^{-1}}{2m} \int |\Psi(0)|^2 dS,$$

где $\Psi(0)$ — значение Ψ на границе.

К необходимости использовать и на свободной поверхности условие (2.24) приводит излагаемый ниже (раздел 3.3) анализ ситуации на границе между гелием II и паром над его поверхностью ³⁷. Поскольку физические результаты (например, температура λ -точки $T_\lambda(d)$ в зависимости от толщины пленки d) зависят от используемых граничных условий, контроль за корректностью их применения должен, в конечном счете, осуществляться на основе сравнения теории с опытом. Наконец, имеется еще, в принципе, возможность уточнять граничные условия на базе микротеории. Но если в случае сверхпроводимости такой путь достаточно надежен (и уже пройден ^{48, 49}), то для гелия II он при современном состоянии теории вряд ли представляется особенно обещающим.

2.3. Точность Ψ -теории (учет флуктуаций)

Возникает, естественно, вопрос об области применимости и точности Ψ -теории, основанной на использовании выражений (2.15), (2.13) для термодинамического потенциала. К сожалению, здесь, помимо условия близости к λ -точке (см. (1.4)), имеется целый ряд ограничений, на которых, как и на смысле используемой Ψ -функции, мы остановимся в следующем разделе. 2.4. Сейчас же рассмотрим весьма важную сторону той же проблемы, а именно оценим роль флуктуаций параметра порядка Ψ . Только в том случае, если эти флуктуации достаточно малы, можно будет пользоваться значениями Ψ , являющимися решениями уравнения (2.16); или, конкретнее, (2.18), (2.20 *).

Неполный термодинамический потенциал

$$\tilde{\Phi}[p, T, \Psi(r)] = \int \Phi(p, T, \Psi(r)) dV, \quad (2.27)$$

зависящий, помимо p и T , от параметра порядка $\Psi(r)$, определяет плотность вероятности конфигурации с данной функцией $\Psi(r)$:

$$w(\Psi) = \exp \left[-\frac{1}{k_B T} (\tilde{\Phi}_e(p, T, \Psi_e(p, T)) - \tilde{\Phi}(p, T, \Psi(r))) \right]; \quad (2.27a)$$

здесь $\tilde{\Phi}_e(p, T)$ — полный термодинамически равновесный потенциал (заметим еще раз, что несколько более последовательно было бы использовать здесь потенциал $\Omega(p, T)$).

Отсюда, в силу нормировки $\int w(\Psi) D\Psi = 1$, следует выражение для суммы состояний

$$Z = \exp \left(-\frac{\tilde{\Phi}_e}{k_B T} \right) = \int \exp \left[-\frac{\tilde{\Phi}(\Psi(r))}{k_B T} \right] D\Psi(r), \quad (2.27b)$$

где интегрирование по $D\Psi(r)$ есть функциональное (конфигурационное) интегрирование.

В самосогласованной теории фазовых переходов считается, по сути дела, что

$$Z = Z_0 = \exp \left[-\frac{\tilde{\Phi}(\Psi_e(r))}{k_B T} \right], \quad (2.28)$$

т. е. полагают, что

$$\tilde{\Phi}_e = \tilde{\Phi}(p, T, \Psi_e(p, T)),$$

где $\Psi_e(r)$ — значение Ψ , соответствующее экстремуму (минимуму) $\tilde{\Phi}$, т. е. в нашем случае удовлетворяющее уравнению (2.16). Если бы точка фазового перехода второго

*) Только этими уравнениями (и их обобщением на нестационарные задачи при наличии нормального течения) мы и будем пользоваться ниже (см., однако, замечания, сделанные в разделах 2.4 и 3.2). Поэтому для чтения гл. III — IV статьи детальное ознакомление с разделами 2.3 и 2.4 не является обязательным.

рода не была особой точкой термодинамического потенциала, то флуктуации вблизи экстремального значения не играли бы заметной роли при вычислении Z и Φ_e и, следовательно, приближение (2.28), (2.1), с аналитически зависящими от температуры коэффициентами термодинамического потенциала, было бы вполне достаточным. Но фактически точка перехода является, вообще говоря, особой точкой, что и проявляется в росте флуктуаций при приближении к ней. При этом в случае гелия II (в отличие от сверхпроводников и сверхтекучего He^3) область применимости самосогласованной теории, понимаемая как область относительной малости флуктуаций, оказывается весьма узкой или, строго говоря, такой области вообще нет (см. раздел 2.1 и ниже). Использование, как и в самосогласованной теории, разложения (2.1), но с неаналитически зависящими от $t = (T_\lambda - T)$ коэффициентами A, B, \dots является как раз приемом типа перенормировки, изменяющим параметр порядка и позволяющим в значительной мере учесть роль флуктуаций уже в исходном приближении типа (2.10). Необходимым критерием успешности такого приема является малость неучитываемой в (2.13) части длинноволновых флуктуаций около используемого равновесного состояния. Об этом еще пойдет речь ниже.

Будем считать флуктуации $\delta\eta$ и $\delta\varphi$ модуля и фазы функции $\Psi = \eta e^{i\varphi}$ около некоторого равновесного значения $\Psi_e = \eta_e e^{i\varphi_e}$, удовлетворяющего уравнению (2.16), малыми величинами. Это значит, что

$$\begin{aligned}\Psi &= \eta e^{i\varphi} \approx \eta_e e^{i\varphi_e} + e^{i\varphi_e} \delta\eta + i\eta_e e^{i\varphi_e} \delta\varphi, \\ \eta &= \eta_e + \delta\eta, \quad \varphi = \varphi_e + \delta\varphi.\end{aligned}$$

Соответствующее флуктуационное изменение потенциала Φ_{II} при учете членов не выше квадратичных по $\delta\eta$ и $\delta\varphi$ равно (см. (2.15))

$$\begin{aligned}\delta\Phi &= \frac{\hbar^2}{2m} (\nabla\varphi_e)^2 (\delta\eta)^2 + \frac{\hbar^2}{2m} [(\nabla\eta_e)^2 + \eta_e^2 (\nabla\varphi_e)^2] (\delta\varphi)^2 + \delta\Phi_0, \\ \delta\Phi_0 &= \frac{\hbar^2}{2m} (\nabla\delta\eta)^2 + \frac{\hbar^2}{2m} \eta_e^2 (\nabla\delta\varphi)^2 + \frac{1}{2} \Phi''_{II 0}(\eta_e) (\delta\eta)^2,\end{aligned}\tag{2.29}$$

где $\Phi''_{II 0}(\eta_e) = \left(\frac{\partial^2 \Phi_{II 0}}{\partial \eta^2} \right)_{\eta=\eta_e}$ и отброшены все члены, линейные по $\delta\eta$ и $\delta\varphi$ (часть этих членов исчезает сразу в силу уравнения (2.16), другие же исчезают при интегрировании нас ниже по объему и, конкретно, при вычислении величины $\delta\tilde{\Phi} = \int \delta\Phi dV$).

При отсутствии флуктуаций градиентный член

$$\Phi_{II} - \Phi_{II 0} = \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla\Psi_e|^2 = \frac{\hbar^2}{2m} [(\nabla\eta_e)^2 + \eta_e^2 (\nabla\varphi_e)^2],$$

и ясно, что $(\delta\Phi - \delta\Phi_0) \ll (\Phi_{II} - \Phi_{II 0})$ при соблюдении условий

$$\frac{\langle (\delta\eta)^2 \rangle}{\eta_e^2} \ll 1, \quad \langle (\delta\varphi)^2 \rangle \ll 1;\tag{2.30}$$

здесь и ниже знак $\langle \rangle$ отвечает статистическому усреднению, так как нас интересует только вклад флуктуаций после такого усреднения.

Ниже будет выяснено, что при тех же условиях (2.30) мала и флуктуационная добавка $\delta\Phi_0$ или, точнее, интересующая нас и определенная ниже флуктуационная добавка к термодинамическому потенциалу $\delta\Phi_{fl}$. Правда, значение $\delta\Phi_{fl}$ будет вычислено лишь при пренебрежении неоднородностью Ψ в равновесном состоянии, т. е. считая величины η_e и φ_e постоянными, но во всех интересующих нас случаях это предположение, по-видимому, не может привести к существенным изменениям ситуации (см., однако, конец раздела 3.1.)

Из общего выражения (2.27) сразу следует, что

$$\begin{aligned}\delta\tilde{\Phi}_{fl} &= \tilde{\Phi}_e(\Psi_e) - \tilde{\Phi}(\Psi_e) = \\ &= -k_B T \ln \int \exp \left\{ - \int \frac{\delta\Phi[\delta\eta, \delta\varphi] dV}{k_B T} \right\} D\eta D\varphi \equiv -k_B T \ln Z_{fl},\end{aligned}\tag{2.34}$$

где $\tilde{\Phi}(\Psi_e)$ определяется согласно (2.28). Среднее от любой физической величины X

равно

$$\langle X \rangle = Z_T^{-1} \int X[\delta\eta, \delta\varphi] \exp \left\{ -\frac{\int \delta\Phi[\delta\eta, \delta\varphi] dV}{k_B T} \right\} D\eta D\varphi. \quad (2.32)$$

Мы будем вычислять конфигурационные интегралы в квадратичном приближении (т. е. с учетом лишь членов порядка $(\delta\eta)^2$ и $(\delta\varphi)^2$) и лишь для системы, однородной в равновесном состоянии. Конкретно, в качестве $\delta\Phi$ будет выбрано выражение (2.29) для $\delta\Phi_0$, причем функции η_e и φ_e считаются постоянными (собственно, фаза φ_e теперь вообще не существенна).

В таком однородном случае удобно воспользоваться фурье-разложением, полагая (V — объем системы, т. е. в нашем случае объем жидкого гелия)

$$\begin{aligned} \delta\eta &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{q}} \eta_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}, \quad \eta_e \delta\varphi = \frac{\eta_e}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{q}} \varphi_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}, \\ \eta_{-\mathbf{q}} &= \eta_{\mathbf{q}}^*, \quad \varphi_{-\mathbf{q}} = \varphi_{\mathbf{q}}^*, \quad \int (\delta\eta)^2 dV = \sum_{\mathbf{q}} |\eta_{\mathbf{q}}|^2, \\ \int \eta_e^2 (\delta\varphi)^2 dV &= \eta_e^2 \sum_{\mathbf{q}} |\varphi_{\mathbf{q}}|^2. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Поэтому (см. также (2.29))

$$\delta\tilde{\Phi}_0 = \int \delta\Phi_0 dV = \sum_{\mathbf{q}} \left\{ \left[\frac{\hbar^2}{2m} q^2 + \frac{1}{2} \Phi''_{II 0}(\eta_e) \right] |\eta_{\mathbf{q}}|^2 + \frac{\hbar^2}{2m} q^2 \eta_e^2 |\varphi_{\mathbf{q}}|^2 \right\}. \quad (2.34)$$

Некоторые дальнейшие вычисления удобнее производить не на основе общих формул (2.34) и (2.32), а опираясь непосредственно на выражение (2.27а). Именно, вероятность флуктуации, для которой термодинамический потенциал изменяется на величину $\delta\tilde{\Phi}_0$, равна $w = \text{const} \cdot \exp(-\delta\tilde{\Phi}_0/k_B T)$. Считая, что $\delta\tilde{\Phi}_0/k_B T = (\lambda/2)x^2$, для вероятности флуктуации величины x получаем

$$w(x) dx = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} e^{-(\lambda/2)x^2} dx, \quad \langle x^2 \rangle = \int x^2 w(x) dx = \frac{1}{\lambda}, \quad (2.35)$$

так как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\lambda/2)x^2} dx = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}.$$

Используем теперь в качестве $\delta\tilde{\Phi}_0/k_B T = \lambda x^2/2$ выражение (2.34) и тогда с помощью (2.35) сразу же получаем *)

$$\begin{aligned} \langle |\eta_{\mathbf{q}}|^2 \rangle &\equiv \langle \eta_{\mathbf{q}} \eta_{-\mathbf{q}} \rangle = \frac{k_B T}{\Phi''_{II 0}(\eta_e) + (\hbar^2/m) q^2}, \\ \langle |\varphi_{\mathbf{q}}|^2 \rangle &= \frac{k_B T}{(\hbar^2/m) \eta_e^2 q^2}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Далее, имеем

$$\begin{aligned} \langle (\delta\eta)^2 \rangle &\equiv \frac{1}{V} \left\langle \int (\delta\eta)^2 dV \right\rangle = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{q}} |\eta_{\mathbf{q}}|^2 = \frac{k_B T}{2\pi^2} \int_0^{q_{\max}} \frac{q^2 dq}{\Phi''_{II 0}(\eta_e) + (\hbar^2/m) q^2} = \\ &= \frac{mk_B T}{2\pi^2 \hbar^2} \left[q_{\max} - \sqrt{\frac{m\Phi''_{II 0}(\eta_e)}{\hbar^2}} \arctg \frac{q_{\max}}{\sqrt{m\Phi''_{II 0}(\eta_e)/\hbar^2}} \right], \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$\langle (\delta\varphi)^2 \rangle = \frac{mk_B T q_{\max}}{2\pi^2 \hbar^2 \eta_e^2}. \quad (2.38)$$

*) Квадрат $|\eta_{\mathbf{q}}|^2$ в силу комплексности величины $\eta_{\mathbf{q}}$ есть сумма квадратов двух независимых величин (то же относится и к $\eta_e^2 |\varphi_{\mathbf{q}}|^2$). Это обстоятельство уже учтено в (2.34) при суммировании по всем \mathbf{q} , что эквивалентно двукратному учету множителя $|\eta_{\mathbf{q}}|^2$. Отметим также, что мы ограничиваемся классическим (неквантовым) приближением, что возможно при условии $\langle |\eta_{\mathbf{q}}|^2 \rangle \gg 1$ (см. 40). Вблизи λ -точки для длинноволновых флуктуаций с $q \lesssim 1/\xi_M$ условие классичности выполняется.

Для дальнейшего существенно напомнить выражение для функции корреляции (ниже $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$)

$$G_\eta(\mathbf{r}) = \langle \delta\eta(\mathbf{r}_1) \delta\eta(\mathbf{r}_2) \rangle = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{q}} \langle |\eta_{\mathbf{q}}|^2 \rangle e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} = \int \langle |\eta_{\mathbf{q}}|^2 \rangle e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} = \frac{k_B T}{4\pi (\hbar^2/m) r} \exp\left(-\frac{r}{\xi(t)}\right), \quad (2.39)$$

где корреляционная длина для флуктуаций

$$\xi(t) = \sqrt{\frac{\hbar^2/m}{\Phi''_{\Pi 0}(\eta_e)}} \quad (2.40)$$

и, разумеется, использовано выражение (2.36). Аналогично,

$$G_\varphi(\mathbf{r}) = \langle \delta\varphi(\mathbf{r}_1) \delta\varphi(\mathbf{r}_2) \rangle = \frac{k_B T}{4\pi (\hbar^2/m) \eta_e^2(t) r}. \quad (2.41)$$

Величину

$$\xi_\varphi = \frac{k_B T m^2}{4\pi \hbar^2 \rho_{se}(t)} \quad (2.41a)$$

естественно назвать корреляционной длиной для фазы параметра порядка. При микроскопическом подходе¹⁷ часто именно длину ξ_φ рассматривают как фундаментальную.

В самосогласованной теории фазовых переходов флуктуации вообще считаются несущественными и в качестве максимального значения q_{\max} можно выбрать величину порядка $\pi/\xi(0)$, где $\xi(0)$ — радиус ближнего порядка, причем для гелия $\xi(0) \sim a \sim 3 \cdot 10^{-8}$ см. При этом всегда можно считать, что $\text{arctg}(q_{\max}/\sqrt{m\Phi''_{\Pi 0}/\hbar^2}) = \frac{\pi}{2}$.

Главное же, выражение $(mk_B T/2\pi^2 \hbar^2) q_{\max}$, фигурирующее в (2.37) и (2.38), вблизи λ -точки практически не зависит от температуры и не играет роли при связанной с флуктуациями перенормировке термодинамического потенциала^{**}). Поэтому условие малости флуктуаций (2.30) принимает вид

$$\langle (\delta\eta)^2 \rangle = \frac{mk_B T}{4\pi \hbar^2} \sqrt{\frac{m\Phi''_{\Pi 0}(\eta_e)}{\hbar^2}} \ll \eta_e^2,$$

или

$$t = (T_\lambda - T) \gg \frac{(k_B T_\lambda)^2 m^3 b^2}{4\pi^2 \hbar^6 a} \sim 1 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ\text{K}, \quad (2.42)$$

где использованы выражения (2.4а), (2.5), (2.8) и учтено, что в этом случае

$$\Phi''_{\Pi 0}(\eta_e) = -4A = 4at, \quad \eta_e^2 = -\frac{A}{B} = \frac{at}{b}.$$

При этом корреляционная длина (см. (2.40) и (2.8)) ниже точки λ -перехода

$$\xi^-(t) = \sqrt{\frac{\hbar^2}{4mat}} = \frac{3,5 \cdot 10^{-8}}{\sqrt{2}\sqrt{t}} \text{ см.} \quad (2.43)$$

Выше точки перехода:

$$\Phi''_{\Pi 0}(\eta_e) = 2A = -2at, \quad \eta_e^2 = 0$$

*) Как известно, функция (2.39) удовлетворяет уравнению

$$\left(\Delta - \frac{1}{\xi^2}\right) G_\eta = -4\pi \frac{k_B T}{4\pi (\hbar^2/m)} \delta(\mathbf{r}).$$

Таким образом, с точностью до множителя, G_η есть функция Грина для выписанного выше уравнения.

**) Особенно просто убедиться в этом выше точки перехода, записывая потенциал в виде $\Phi_{\Pi 0} = \Phi_I + \eta^2 [a(T - T_\lambda) + (b/2)\eta^2]$ и заменяя затем $b\eta^2/2$ на $3b \langle \eta^2 \rangle / 2 \equiv 3b \langle (\delta\eta)^2 \rangle / 2$. Очевидно, что постоянное слагаемое в $3b \langle \eta^2 \rangle / 2$ приводит здесь лишь к изменению значения T_λ , т. е. температуры, при которой коэффициент у η^2 обращается в нуль. При использовании экспериментального (наблюдаемого) значения T_λ , как мы всегда и поступаем, указанное изменение T_λ (перенормировка) не играет никакой роли.

и корреляционная длина

$$\xi^+(t) \equiv \xi(t) = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2ma|t|}} = \frac{3,5 \cdot 10^{-8}}{\sqrt{|t|}} \text{ см.} \quad (2.44)$$

Если для произвольного перехода второго рода, описываемого некоторым параметром порядка η , записать коэффициент у градиентного члена через δ (вместо $\hbar^2/2m$, как это сделано в нашем случае гелия II), то условие малости флуктуаций (2.42) принимает вид ⁵⁰⁻⁵⁴ (см. также ^{17, 19}) *

$$t \gg \frac{(k_B T_\lambda)^2 b^2}{32\pi^2 \delta^3 a}. \quad (2.45)$$

В силу условия (2.42) и требования достаточной близости к λ -точке (условие $t \ll T_\lambda$) самосогласованная теория в случае гелия II под давлением насыщенных паров с какой-то разумной точностью может применяться лишь в области

$$10^{-3} \ll t \leq 0,1 \text{ }^\circ\text{K}. \quad (2.46)$$

Между тем, нас интересуют и значительно меньшие значения t , поскольку на эксперименте уже удается вести измерения даже при $t \leq 10^{-6} \text{ }^\circ\text{K}$. Изложенная в разделе 2.1 схема, в которой коэффициенты A, B, \dots в разложении (2.1) неаналитическим образом зависят от t (см. (2.10), (2.13), (2.18)), как раз и призвана служить практически во всем интервале температур вблизи λ -точки. В этой схеме уже исходное выражение для $\Phi_{II0}(t)$ отвечает наблюдаемой зависимости (2.9) для $\rho_{se}(t)$, а для корреляционной длины ниже λ -точки приводит к выражению (см. (2.13) и (2.17))

$$\xi_M^-(t) = \left[\frac{\hbar^2/m}{\Phi_{II0}(\eta_e)} \right]^{1/2} = \frac{[(3+M)/6(1+M)]^{1/2} \xi_{00}}{t^{2/3}} = \frac{2,74 \cdot 10^{-8} [(3+M)/6(1+M)]^{1/2}}{t^{2/3}} \text{ см.} \quad (2.47)$$

$$\Phi_{II0}(\eta_e) = \frac{12\Delta C_P(1+M)}{1,43(\rho_\lambda/m)(3+M)T_\lambda} t^{4/3}.$$

Выше λ -точки

$$\Phi_{II0}(\eta_e) = \frac{6\Delta C_P |t|^{4/3}}{(1,43\rho_\lambda/m)(3+M)T_\lambda},$$

и для корреляционной длины $\xi_M^+ \equiv \xi_M$ получается выражение (2.19)

$$\xi_M^+ \equiv \xi_M = \xi_0 \left(\frac{3+M}{3} \right)^{1/2} = \frac{2,74 \cdot 10^{-8} [(3+M)/3]^{1/2}}{t^{2/3}}, \quad (2.19a)$$

смысл которого становится, таким образом, окончательно ясным. Именно длины ξ_M и ξ_0 используются ниже как наиболее удобные.

Поскольку в самосогласованной теории фазовых переходов зависящие от температуры флуктуации не учтены, то уже отсюда очевидно, что теория с измененными коэффициентами $A, B, C \dots$ уже в какой-то мере учитывает эти флуктуации. Именно, при этом учитываются все флуктуации с длиной волны меньше и порядка корреляционной длины $\xi(t)$, т. е. с волновыми векторами $q \gtrsim 1/\xi(t)$. Дело в том, что коротковол-

новые флуктуации хотя и малы, но число их велико (см. (2.36); интеграл $\int_{q_{\max}} \langle |\eta_q|^2 \rangle q^2 dq$ при больших q_{\max} растет пропорционально q_{\max}). С уменьшением q флуктуации $\langle |\eta_q|^2 \rangle$ растут вплоть до значений $q \sim \sqrt{m\Phi_{II0}''/\hbar^2} \sim 1/\xi(t)$ (см. (2.36)). Поэтому-то и нужно при вычислении термодинамического потенциала в критической области учитывать все флуктуации в интервале $1/a \sim q_{\max} \gtrsim q \gtrsim q_c \sim 1/\xi$ (см. также ⁵⁶) **).

* В ⁵⁰ коэффициент $(32\pi^2)^{-1}$ в (2.45) был с соответствующей оговоркой опущен, поскольку сравнивались лишь относительные значения флуктуаций для разных переходов. Кстати, уже из (2.45) ясно, что вблизи трикритической точки, в которой коэффициент $b = 0$, область применимости самосогласованного приближения особенно велика (подробнее см. ⁵⁵).

** Нужно, правда, оговориться, что коротковолновые флуктуации с $q \sim 1/a$ фактически не зависят от t и не вносят вклада в особенность термодинамического потенциала (с этой точки зрения важны лишь флуктуации с $q \ll 1/a$). В тексте мы подчеркиваем лишь, что в выражении (2.13) для Φ_{II0} могут считаться учтенными все флуктуации с $q \gtrsim 1/\xi$.

Что же касается самых длинноволновых флуктуаций с $q < 1/\xi(t)$, то, как ясно из (2.36), они уже не возрастают с уменьшением q и не должны быть учтены в исходном выражении для $\Phi_{II0} - \Phi_I$. Таким образом, требование малости флуктуаций при использовании для потенциала Φ_{II0} выражения (2.13) относится лишь к длинноволновым флуктуациям с $q \leq q_c$, причем

$$q_c = \frac{Q}{\xi_M(t)} = 3,65 \left[\frac{6(1+M)}{3+M} \right]^{1/2} \cdot 10^7 t^{2/3} Q \text{ см}^{-1}, \quad (2.48)$$

где $Q \equiv Q^-$ — служащий параметром теории численный коэффициент и ξ_M — корреляционная длина (2.47); заметим, что здесь мы непосредственно имеем в виду область ниже точки перехода, а выше этой точки значение Q может уже быть иным.

Малость неучтенных в выражении (2.13) для Φ_{II0} флуктуаций будет обеспечена, если условия (2.30) соблюдаются после подстановки в (2.37) и (2.38) значения $q_{\max} = q_c$. Заметим, что, поступая так же в самосогласованной теории, мы получим, по существу, прежнее условие (2.42), поскольку в этом случае *)

$$q_{\max} = \frac{Q}{\xi(t)} \sim \sqrt{\frac{m\Phi_{II0}''(\eta_e)}{\hbar^2}}. \quad (2.49)$$

Если же воспользоваться значением $q_{\max} = q_c = Q/\xi_M(t)$, согласно (2.48), то мы приходим к условиям (см. (2.37), (2.38) и (2.19), (2.48))

$$\begin{aligned} \langle (\delta\eta)^2 \rangle &= \frac{mk_B T}{2\pi^2 \hbar^2 \xi_M} (Q - \operatorname{arctg} Q) \ll \eta_e^2 = \eta_{00}^2 t^{2/3}, \\ \langle (\delta\varphi)^2 \rangle &= \frac{mk_B T Q}{2\pi^2 \hbar^2 \eta_e^2(t) \xi_M(t)} \ll 1. \end{aligned} \quad (2.49a)$$

При $T < T_\lambda$ второе, более жесткое из этих условий, сводится к такому (см. (2.47)):

$$0,1 \sqrt{\frac{6(1+M)}{3+M}} Q \ll 1. \quad (2.49b)$$

Существенно, что температура t в критерий (2.49a) — (2.49b) вообще не входит и, таким образом, если он выполнен, то во всем температурном интервале вблизи λ -точки.

Для оценки параметра Q и количественного суждения о точности теории, основанной на использовании выражения (2.13) и последующих, обратимся к вычислению флуктуационной добавки $\delta\Phi_{fl}$ к термодинамическому потенциалу.

Для этой цели нужно воспользоваться общей формулой (2.31). Подставляя в (2.31) выражение (2.34), для плотности флуктуационной части потенциала в состоянии равновесия получаем

$$\begin{aligned} \delta\Phi_{fl}(\eta_e, t) &= \frac{1}{V} \delta\tilde{\Phi}_{fl}(\eta_e, t) = \frac{k_B T}{2V} \sum_{q \leq q_{\max}} \ln \frac{[(\hbar^2/m) q^2 + \Phi_{II0}''(\eta_e)] (\hbar^2/m) q^2}{(2\pi k_B T)^2} = \\ &= \frac{k_B T}{2} \int_0^{q_{\max}} \ln \frac{[(\hbar^2/m) q^2 + \Phi_{II0}''(\eta_e)] (\hbar^2/m) q^2}{(2\pi k_B T)^2} \frac{4\pi q^2}{(2\pi)^3} dq = \\ &= \frac{k_B T}{6\pi^2 \xi_M^3(t)} \left\{ Q^3 \ln \left[\frac{Q\Phi_{II0}''(\eta_e)}{2\pi e^{2/3} k_B T} (1+Q^2)^{1/2} \right] + Q - \operatorname{arctg} Q \right\}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Подставляя сюда $\xi_M(t)$ и $\Phi_{II0}''(\eta_e(t))$ согласно (2.19), (2.47), видим, что

$$\delta\Phi_{fl} = C_1 Q^3 t^3 (\ln |t| + C_2), \quad (2.51)$$

где C_1 и C_2 — независимые от t величины. Учет потенциала $\delta\Phi_{fl}$ приводит, таким образом, к перенормировке скачка теплоемкости в λ -точке (за счет члена, пропорционального C_2) и к появлению логарифмической особенности в теплоемкости. Имеется, в принципе, возможность считать, что весь наблюдаемый логарифмический (или близкий к ло-

*) Введение в (2.37), (2.38) «обрезания» при $q = q_{\max} \sim 1/\xi$ при использовании критериев (2.30) можно интерпретировать следующим образом: мы требуем, чтобы флуктуации $\langle \int (\delta\eta)^2 dV \rangle$ и $\langle \int \eta_e^2 (\delta\varphi)^2 dV \rangle$ в объеме $V \sim \xi^3$ были малы по сравнению с $\eta_e^2 V \sim \eta_e^2 \xi^3$. Ясно, что при интегрировании по области с размерами порядка ξ играют роль только флуктуации с длиной волны $\Lambda = 2\pi/q \lesssim \xi$.

гарифмическому *) ход теплоемкости обусловлен длинноволновыми флуктуациями (см., в частности ²⁹), т. е. заключен в $\delta\Phi_{fl}$. Тогда из (2.50), (2.51) и экспериментальных данных, согласно которым ^{57, 58}

$$C_p = \begin{cases} 4,55 - 3,00 \lg(T_\lambda - T) \quad (\partial\epsilon/\partial T), & T < T_\lambda, \\ -0,65 - 3,00 \lg|T_\lambda - T| \quad (\partial\epsilon/\partial T), & T > T_\lambda, \end{cases} \quad (2.52)$$

получаем верхнюю оценку Q_m для Q . Не останавливаясь на подробностях, приведем в табл. I значения Q_m при различных значениях параметра M (см. ⁶¹).

Таблица I

M	$Q_m = 1,1 \sqrt{\frac{3+M}{6(1+M)}}$	$\frac{\langle(\delta\eta)^2\rangle}{\eta_e^2}$	$\langle(\delta\varphi)^2\rangle$	Δ_2	Δ
0	0,776	0,0174	0,116	$-3,3 \cdot 10^{-3}$	$4,4 \cdot 10^{-3}$
1	0,635	0,0126	0,116	$-3,4 \cdot 10^{-2}$	$-1,5 \cdot 10^{-2}$
∞	0,449	0,0070	0,116	$-5,9 \cdot 10^{-2}$	$-3,7 \cdot 10^{-2}$

Из таблицы ясно, что условия (2.49) соблюдаются. Еще надежнее роль флуктуаций выясняется, если рассчитать вначале $\delta\Phi_{fl}(\eta)$ для некоего неравновесного значения η и затем найти $(\partial^2\delta\Phi_{fl}/\partial\eta^2)_{\eta=\eta_e} = (\delta\Phi_{fl})''_{\eta_e}$. Далее нужно найти отношение $\Delta = (\delta\Phi_{fl})''_{\eta_e}/\Phi_{II0}''(\eta_e)$, характеризующее обусловленное длинноволновыми флуктуациями изменение коэффициента перед $(\eta - \eta_e)^2$ в разложении $\Phi_{II0}(\eta)$ вблизи равновесного значения η_e . Перенормированное значение $\Phi_{II0}''(\eta_e) = \Phi_{II0}''(\eta_e)(1 + \Delta)$. Вычисление Δ в гармоническом (квадратичном) приближении приводит к значениям Δ_2 , указанным в табл. I. Вообще же $\Delta = \Delta_2 + \Delta_4 + \Delta_6 + \Delta_\varphi$, где Δ_4 , Δ_6 и Δ_φ — поправки, связанные соответственно с учетом флуктуаций $(\delta\eta)^4$, $(\delta\eta)^6$ и $(\delta\eta)^2(\delta\varphi)^2$. Как показывает расчет ⁶¹, поправки Δ_4 , Δ_6 и Δ_φ положительны (в отличие от Δ_2) и в сумме порядка $|\Delta_2|$. В итоге получают значения Δ , приведенные в последнем столбце табл. I и не превышающие нескольких процентов. На большую точность вряд ли может претендовать вся наша схема, связанная с подбором функции $\Phi_{II0}(\eta)$ или коэффициентов разложения этой функции по η на основе эмпирических данных. Таким образом, можно утверждать, что учет длинноволновых флуктуаций (волновые числа $q \lesssim 1/\xi_M(t)$) не сказывается на результатах, полученных без их учета (речь, конечно, не идет о явлениях, связанных с самими флуктуациями, например, о рассеянии света на флуктуациях или вычислениях флуктуационной части теплоемкости).

В силу сказанного ранее тем самым доказывается по крайней мере непротиворечивость (или известная самосогласованность) схемы, основанной на использовании неаналитических по t коэффициентов A, B, \dots в разложении Φ_{II0} по $|\Psi|^2$ (конкретно, речь идет о выражении (2.13)). Впрочем, в связи с обсуждением роли флуктуаций с точки зрения точности Ψ -теории сверхтекучести нужно остановиться также на работе ⁶² (см. также ¹⁷, гл. IV, § 7), согласно которой Ψ -теория сверхтекучести гелия II вообще не имеет области применимости. В той мере, в какой речь идет о первоначальном самосогласованном варианте ²⁵ (см. также раздел 2.1 и, конкретно, выражение (2.5)), это утверждение в известном отношении правильно (точнее, см. условие (2.46)) и отмечалось еще в ⁵⁰. Но в случае обобщений теории (см. (2.13) и далее) роль длинноволновых флуктуаций не существенна, причем этот сделанный выше вывод остается в силе и при учете расходимости продольной восприимчивости $\chi_{||} \propto h^{-1/2}$ для «поля» $h \rightarrow 0^{**}$).

*) Согласно ^{58, 59} $C_p \sim t^{-\alpha}$ с $\alpha = -0,026$ (см. также ⁶⁰). Если $\alpha \neq 0$, то развиваемая нами Ψ -теория нуждается в известных изменениях, введение которых представляется нам, однако, еще преждевременным (см. гл. V).

**) Под «полем» h в случае системы, обладающей комплексным параметром порядка Ψ , понимается величина, при введении которой к термодинамическому потенциалу нужно добавить слагаемое $-(\hbar\Psi^* + \hbar\Psi)/2$. Продольная восприимчивость

$$[\chi_{||} = -\frac{\partial \langle \Psi_{||} \rangle}{\partial h}, \quad \Psi_{||} = \text{Re } \Psi = \eta \cos \varphi,$$

причем в квадратичном приближении $\langle \Psi_{||} \rangle = \eta_e [1 - (\langle \delta\varphi \rangle^2/2)] \approx \eta_e (1 - C_1 + C_2\sqrt{\hbar})$, где C_1 и C_2 — постоянные и η_e — равновесное значение η в поле h .

Очевидно, для ферромагнетика, когда параметром порядка служит намагниченность m , поле h представляет собой магнитное поле и добавка к термодинамическому потенциалу равна $-mh$. Хотя для сверхтекучей жидкости или сверхпроводника поле h физически реализовать нельзя, введение этого поля оказывается удобным приемом при исследовании ряда вопросов.

Дело в том, что неаналитическая зависимость $\chi_{||}$ от \hbar при $\hbar \rightarrow 0$, как и логарифмическая особенность теплоемкости, может быть полностью учтена в нулевом члене разложения потенциала $\Phi_{II0}(\eta, \hbar)$ по степеням $(\eta - \eta_e)$ и не имеет отношения к другим членам соответствующего ряда, которые только нас и интересуют с точки зрения обоснования уравнения (2.18) или исходного уравнения (2.16), (2.13) ⁶¹.

Итак, мы можем забыть в дальнейшем о флуктуациях параметра Ψ (или, что то же самое, флуктуациях величин η и Φ) при решении тех задач, в которых флуктуации сами не являются объектом изучения.

2.4. Условия и область применимости Ψ -теории

Выше указывались некоторые ограничения, при которых только и можно использовать Ψ -теорию сверхтекучести. Так, существенно условие (2.21): $\xi_M \gg a$, приводящее к возможности феноменологического описания, например, распределения $\rho_s(z)$ вблизи стенки лишь при $t = (T_\lambda - T) < 0,1^\circ \text{K}$. То же самое условие необходимо для того, чтобы плотность $\rho_{se}(t)$ была мала по сравнению с $\rho_{se}(T=0) = \rho$ (только в этом случае можно рассчитывать на возможность успешного использования разложения термодинамического потенциала по $|\Psi|^2$ при $|\Psi|^2 \approx |\Psi_e|^2 = \rho_{se}/m$). Наконец, то же условие (2.21), по всей вероятности, необходимо и при использовании в (2.22) лишь градиентного члена $(\hbar^2/2m) |\nabla\Psi|^2$. Действительно, члены с более высокими производными или степенями производной типа $a_1 |\nabla\Psi|^4$, $a_2 |\Delta\Psi|^2$ и т. п. в самосогласованном варианте теории фазовых переходов обычно все одного порядка при изменении Ψ на длине когерентности или корреляции при $T=0$, т. е. на длине $\xi(0)$, имеющей смысл радиуса ближнего порядка или, как иногда говорят, радиуса молекулярного действия. Для гелия II $\xi(0) \sim a \sim 3 \cdot 10^{-8} \text{ см}$ и поэтому для параметра порядка $\Psi(r)$, изменяющегося на длине L , отношение

$$\frac{a_2 |\Delta\Psi|^2}{(\hbar^2/2m) |\nabla\Psi|^2} \sim \left(\frac{a}{L} \right)^2.$$

Отсюда ясно, что Ψ -теорией, учитывающей лишь член $(\hbar^2/2m) |\nabla\Psi|^2$ (такое приближение называют иногда гидродинамическим), нельзя пользоваться, если Ψ -функция изменяется на характерной длине $L \ll a$. Вместе с тем нужно подчеркнуть, что при использовании уравнения (2.18), (2.20) для Ψ эта функция оказывается изменяющейся, вообще говоря, на расстояниях $L \gtrsim \xi_M(t)$ или в случае самосогласованной теории на расстояниях $L \gtrsim \xi(t) = \hbar/\sqrt{2mat}$, т. е. соблюдение условия типа (2.21) вблизи λ -точки в самосогласованном варианте теории обеспечивает преобладание члена $(\hbar^2/2m) |\nabla\Psi|^2$ над другими членами с производными *). К сожалению, при использовании вариантов Ψ -теории с неаналитически зависящими от t коэффициентами вообще можно работать только при условии $L > \xi_M(t)/Q$ (см. (2.48)), а малость членов типа $a_1 |\nabla\Psi|^4$, $a_2 |\Delta\Psi|^2$ надежно обеспечивается только при условии

$$L \gg \xi_M(t), \quad (2.53)$$

поскольку $Q \sim 1$; практически, однако, в условия типа (2.53) входит параметр $(\xi_M/L)^2$, и можно надеяться на возможность оставления только члена с $(\hbar^2/2m) |\nabla\Psi|^2$ уже при $L \gtrsim \xi_M(t)$.

Особенно нужно остановиться на самой возможности разложения потенциала Φ_{II0} в ряд по $|\Psi|^2$ (см. (2.1) и далее). В современной теории фазовых переходов ^{17, 18, 30, 32, 35} считают фактически, что за вычетом регулярной части термодинамический потенциал $\Phi_0(\Psi, \varepsilon)$ имеет вид

$$\Phi_0(\Psi, \varepsilon) = |\varepsilon|^{2-\alpha} f\left(\frac{|\Psi|}{|\Psi_e(0)| |\varepsilon|^\beta}\right), \quad (2.54)$$

где Ψ — параметр порядка, $\Psi_e(0) \equiv \Psi_e(T=0)$, $\varepsilon = (T_\lambda - T)/T_\lambda$, а α и β — индексы, определяющие температурную зависимость теплоемкости $C_p \propto |\varepsilon|^{-\alpha}$ и равновесного параметра порядка $|\Psi_e| = \eta_e \propto \varepsilon^\beta$; при этом вид функции f отличается при $\varepsilon > 0$ (функция f_-) и при $\varepsilon < 0$ (функция f_+).

*) Для сверхпроводников, а также для сверхтекучего He^3 (см. ^{6, 63}) и сверхтекучей нейтронной жидкости (а также для сверхпроводящей протонной жидкости) даже при $T \ll T_\lambda$ длина когерентности $\xi(0) \equiv \xi(T=0)$ велика по сравнению с расстоянием между частицами a (роль $\xi(0)$ играет размер куперовских пар). В подобных условиях член $(\hbar^2/2m) |\nabla\Psi|^2$ доминирует при температурах, для которых $\xi(T) \gg \xi(0)$. Вместе с тем, в этих случаях область применимости самосогласованного варианта Ψ -теории оказывается значительной, так как флуктуации быстро убывают с ростом отношения $\xi(0)/a$ (см. (2.45)), где коэффициент δ , как раз и характеризующий квадрат величины этого отношения, входит в третьей степени в знаменатель).

Функция f_- может быть разложена в ряд по $x = |\Psi|/|\Psi_e(0)| \varepsilon^{1/\beta}$ лишь при малых x и, более конкретно, такое разложение строго пригодно лишь пока $\eta/\eta_e \ll 1$ или $\rho_s/\rho_{se} \ll 1$ (см. (2.11)).

Но, фактически, при $\varepsilon > 0$ можно ограничиться условием *)

$$\frac{\rho_s}{\rho_{se}} \ll 1. \quad (2.11a)$$

К счастью, в подавляющем большинстве интересующих нас случаев такое условие выполнено (см. гл. III), и лишь при рассмотрении границы между гелием I и гелием II, находящихся в поле тяжести (раздел 3.2), нам придется использовать функцию f при $x \rightarrow \infty$, когда ее нельзя разлагать в ряд по x^2 (см. также ³²). В этом случае, однако, потенциал $\Phi_0(\Psi, \varepsilon)$ может быть представлен в виде

$$\Phi_0(\Psi, \varepsilon) = |\Psi|^{(2-\alpha)/\beta} \tilde{f} \left(\varepsilon \left(\frac{|\Psi_e(0)|}{|\Psi|} \right)^{1/\beta} \right),$$

причем функция \tilde{f} разложима в ряд по $y = \varepsilon (|\Psi_e(0)|/|\Psi|)^{1/\beta}$. При $\alpha = 0$ и $\beta = 1/3$ разложение Φ_0 начинается с члена, пропорционального $|\Psi|^6$ (считаем, что $\tilde{f}(0) \neq 0$). Таким образом, фактически удается все задачи рассматривать, используя как интерполяционное исходное трехчленное выражение (2.13).

Подчеркнем, что выше мы сразу выбрали значения критических индексов $\alpha = 0$ и $\beta = 1/3$, так как это с доступной сейчас точностью отвечает экспериментальным данным (все критические индексы выше и ниже точки перехода считаются одинаковыми, что также подтверждается имеющимися экспериментами; это замечание относится и к индексам, используемым несколько ниже). Можно было бы, конечно, развивать Ψ -теорию с заранее не фиксированными значениями критических индексов, но, по крайней мере на данном этапе, это привело бы лишь к неоправданному пока усложнениям. Сказанное относится, по существу, и к градиентному члену $(\hbar^2/2m)/|\nabla\Psi|^2$, который можно было бы обобщить путем замены ^{32, 61},

$$\frac{\hbar^2}{2m} \rightarrow \frac{\hbar^2}{2m^*} m^*(\eta, \varepsilon) = \varepsilon^{-\sigma} f_1 \left(\frac{\eta}{\eta_e(0) |\varepsilon|^{1/\beta}} \right),$$

причем $\sigma = \hat{\eta}\nu$, а индексы ν и $\hat{\eta}$ входят в выражение для длины когерентности $\xi \sim \varepsilon^{-\nu}$ и функции Грина $G_\eta(r \rightarrow 0) \sim r^{-(1+\hat{\eta})}$. Выше мы полагали, что $\nu = 2/3 = 2\beta$ и $\hat{\eta} = 0$ (как известно из ряда примеров ¹⁷, индекс $\hat{\eta}$ весьма мал — обычно порядка процентов, а, быть может, и равен нулю). Кроме того функция f_1 заменялась постоянной.

Вопрос о значении индекса $\hat{\eta}$ связан с проблемой выбора параметра порядка для гелия II. Дело в том, что помимо параметра порядка Ψ , определяющего наблюдаемые величины v_s и ρ_s (или j_s) согласно (1.1) — (1.3), в гелии II имеется еще такая величина как концентрация атомов гелия n_0 , обладающих нулевым импульсом (бозе-конденсат). Именно, величина n_0 (и связанная с ней комплексная функция $\tilde{\Psi}$, такая что $n_0 = |\tilde{\Psi}|^2$), имеет ясный микроскопический смысл и может считаться параметром порядка. Согласно ²⁸, если использовать такой параметр порядка $\tilde{\Psi}$ (заметим, что в ²⁸ приняты другие обозначения, так что $\tilde{\Psi}$ играет роль Ψ и наоборот) и при $T < T_\lambda$ положить $|\tilde{\Psi}| = \sqrt{n_0} \propto \varepsilon^\beta$ и $C_p \propto \varepsilon^{-\alpha}$, то $\rho_s \propto |\Psi|^2 \propto \varepsilon^{2\beta - \hat{\eta}\nu}$. Учитывая одно из используемых в теории подобия соотношений, а именно связь $2\beta - \hat{\eta}\nu = (2 - \alpha)/3$, получаем при $\alpha = 0$ (логарифмический ход теплоемкости) значение $2\beta - \hat{\eta}\nu = 2/3$. Температурная зависимость ρ_s оказывается поэтому отвечающей опыту и при $\hat{\eta} \neq 0$. И наоборот, если $\hat{\eta} = 0$, то параметры порядка Ψ и $\tilde{\Psi}$, по крайней мере вблизи λ -точки, совпадают (или, точнее, пропорциональны друг другу). Сделаем в этой связи еще несколько замечаний. Одночастичная матрица плотности системы из N частиц, по определению, есть (система здесь считается находящейся в чистом состоянии, т. е., во всяком случае, при $T = 0$)

$$\rho(r, r') = \int \psi^*(r, r_i) \psi(r', r_i) dr_i, \quad (2.55)$$

где $\psi(r, r_i)$ — истинная волновая функция системы, зависящая от координат всех N

*) В пользу такого заключения указывают, в частности, данные измерений зависимости намагниченности m от поля h в случае магнитных фазовых переходов (см., например, ⁶⁴). Связь между m и h при этом подобна (2.54): $h = |\varepsilon|^{2-\alpha-\beta} \times f'(m/m_e(0) |\varepsilon|^{1/\beta})$. Из опыта известно ⁶⁴, что разложение функции $f' \equiv df/dx$ по $x^2 = (m/m_e(0) |\varepsilon|^{1/\beta})^2$ с удержанием трех первых членов годится вплоть до значений $x \approx 1,8$.

частиц ($i = 2, \dots, N$; координаты одной из частиц обозначены через \mathbf{r} и в другой точке через \mathbf{r}' ; разумеется, $d\mathbf{r}_i = d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 \dots d\mathbf{r}_N$).

Для обычных жидкостей или несверхпроводников $\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rightarrow 0$ при $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \rightarrow \infty$, но для сверхтекучей жидкости, как можно думать, $\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rightarrow \rho_0 \neq 0$ при $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \rightarrow \infty$. Во всяком случае, такое свойство означает, что частицы системы имеют отличную от нуля вероятность иметь равный нулю импульс, а это как раз и отвечает безконденсации (концентрация частиц с равным нулю импульсом n_0 отлична от нуля или, как чаще говорят, конечна *). При использовании операторов $\hat{\psi}^+(\mathbf{r})$ и $\hat{\psi}(\mathbf{r})$ рождения и уничтожения частицы в точке \mathbf{r} можно при любой температуре написать $\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \langle \hat{\psi}^+(\mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r}') \rangle$, где скобки $\langle \rangle$ отвечают как квантовомеханическому, так и статистическому усреднению. Макроскопическую волновую функцию, характеризующую сверхтекучую (сверхпроводящую) систему, естественно ввести так ²⁶:

$$\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \rightarrow \infty} = \tilde{\Psi}^*(\mathbf{r}) \tilde{\Psi}(\mathbf{r}'). \quad (2.56)$$

В (2.56) мы пишем $\tilde{\Psi}$ вместо Ψ , чтобы подчеркнуть ясную из изложенного выше связь именно величины $\tilde{\Psi}$ с концентрацией частиц в конденсате $n_0(t)$. Если среднее $\langle \rangle$ брать по ансамблю с нарушенной симметрией, для которого параметр порядка имеет определенную (заданную) фазу, то можно написать $\tilde{\Psi} = \langle \hat{\psi}(\mathbf{r}) \rangle$ (см. ^{28, 67}).

В случае гелия II обе величины $\rho_s(t)$ и $n_0(t)$ могут наблюдаться; другое дело, что измерение $n_0(t)$, например, по рассеянию нейтронов, фактически еще очень затруднительно и вблизи λ -точки совсем еще не производилось.

Какую из величин ρ_s или n_0 правильнее связать с модулем параметра порядка и соответственно выбрать Ψ или $\tilde{\Psi}$ в качестве такого параметра? При феноменологическом подходе к проблеме мы не видим для такого выбора никаких аргументов принципиального характера и полагаем, что выбор должен диктоваться лишь соображениями удобства и максимальной простоты уравнений (и, разумеется, результатами их сопоставления с опытом, поскольку даже самые удобные и простые уравнения, плохо согласующиеся с опытом, не имеют ценности). В этой точке зрения нет никаких сомнений (по крайней мере на данном этапе), что в качестве параметра порядка, фигурирующего в Ψ -теории сверхтекучести, нужно выбрать величину $\tilde{\Psi}$, связанную с ρ_s и v_s выражениями (1.1) и (1.2). Так мы и поступаем.

С развитием микротеоии вопрос о роли Ψ и $\tilde{\Psi}$ должен решиться автоматически, поскольку обе величины будут выражены через микропараметры. При этом, как мы видели, функция $\tilde{\Psi}$ непосредственно выражается через матрицу плотности $\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ и в этом смысле «ближе» к микротеоии. Но отсюда еще вовсе не следует, что уравнение, определяющее $\tilde{\Psi}$, вблизи λ -точки окажется проще и прозрачнее уравнения для Ψ , которая будет как-то выражена через $\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ и, возможно, другие величины **).

Остается добавить, что определения параметра порядка через Ψ и $\tilde{\Psi}$ вблизи λ -точки не исключают друг друга и могут оказаться идентичными. Дело в том, что величине $\sqrt{\rho_s/m} \equiv \sqrt{n_s}$ сопоставляется, по сути дела (с точностью до возможной слабо зависящей от температуры перенормировки массы $m \rightarrow m^* \propto t^{-\hat{\eta}v}$), модуль локального значения некоторой макроскопической волновой функции Ψ , уже содержащей усреднение по областям порядка длины корреляции ξ_M . В то же время с корнем из концентрации частиц в конденсате $\sqrt{n_0}$ естественно сопоставить модуль полного среднего значения той же функции $\tilde{\Psi}$ с учетом сколь угодно длинноволновых флуктуаций, в частности, флуктуаций фазы. Эти два типа средних, вообще говоря, не совпадают, так как при учете длинноволновых флуктуаций фазы ^{69, 61}

$$|\tilde{\Psi}| = |\langle \Psi \rangle| = |\langle \eta e^{i\varphi} \rangle| \approx |\Psi| |\langle e^{i\varphi} \rangle| = |\Psi| \exp\left(-\frac{\langle \varphi^2 \rangle}{2}\right), \quad (2.57)$$

*) Насколько нам известно, указанное свойство одночастичной матрицы плотности ($\rho_0 \neq 0$), как характеристики сверхтекучего состояния, было впервые сформулировано Л. Д. Ландау (см. ⁶⁵). В дальнейшем это свойство получило название недиагонального дальнего порядка (НДП или ODLRO), поскольку речь идет о недиагональных элементах ρ -матрицы (для диагональных ее элементов $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$). Для сверхпроводников о НДП и связанной с этим понятием интерпретации макроскопической Ψ -функции (параметра порядка) кратко речь была еще в статье ²⁶. В дальнейшем этот вопрос рассматривался в большом числе статей (см. ^{66, 67} и литературу, цитируемую в ⁶⁷).

**) В случае сверхпроводимости, по сути дела, может возникнуть аналогичная проблема. Феноменологически, однако, вводилась ²⁶ только функция $\tilde{\Psi}$, связанная с глубиной проникновения магнитного поля в сверхпроводник. В дальнейшем те же уравнения для $\tilde{\Psi}$ были получены ⁶⁸ из микротеоии сверхпроводимости. При этом флуктуации, особенно малые для сверхпроводников, не учитывались и функции Ψ и $\tilde{\Psi}$ фактически отождествлялись (см. ниже замечания о соотношении (2.57)).

где скобки $\langle \rangle$ отвечают дополнительному усреднению по флуктуациям с длинами волн $\Lambda = 2\pi/q \gg \xi_M$. В работе ⁷⁰, исходя из указанного различия, была простым образом объяснена температурная зависимость $n_0(T)$ при низких температурах, отличающаяся от зависимости $n_s(T) \equiv \rho_{se}(T)/m$. Было объяснено также, в принципе, отличие n_0 от полной концентрации частиц n . Вблизи λ -точки отличие $|\Psi|$ от $|\tilde{\Psi}| = |\langle \Psi \rangle|$ тоже, в принципе, не исключено, но, как мы видели (см. (2.49,а)), в этой области величина $\langle (\delta\phi)^2 \rangle$, по крайней мере в используемом приближении, мала и не зависит от $t = T_\lambda - T$. Именно поэтому и представляется весьма вероятным, что вблизи λ -точки параметры Ψ и $\tilde{\Psi}$ (в пространственно-однородном случае) отличаются лишь численным множителем или практически (при $\hat{\eta} = 0$) совпадают. Кстати сказать, из приведенного рассмотрения можно заключить, что именно локальный параметр порядка Ψ естественно использовать для наших целей.

Итак, Ψ -теория сверхтекучести, сформулированная в разделе 2.1, действительно связана с рядом ограничений и предположений. Однако по причинам, ясным из изложенного и еще обсуждаемым в заключительной главе V, мы считаем такую ситуацию вполне нормальной и не препятствующей широкому использованию Ψ -теории сверхтекучести для решения конкретных задач, чему и посвящена следующая глава III.

III. РАССМОТРЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ЗАДАЧ И ЭФФЕКТОВ В ГЕЛИИ ВБЛИЗИ λ -ТОЧКИ

3.1. Размерные эффекты в пленках, капиллярах и порах (смещение λ -точки, уменьшение плотности ρ_s и изменение теплоемкости C_p)

Обращение модуля параметра порядка $|\Psi| = \eta = \sqrt{\rho_s/m}$ в нуль на твердой стенке (граничное условие (2.24)), а вероятно и на свободной поверхности гелия II (см. раздел 3.3 ниже), приводит к появлению размерных эффектов в «образцах» (пленки, капилляры и т. п.) с характерными размерами L , сравнимыми с корреляционной длиной $\xi_M(t)$. Действительно, если «на концах» (на стенках или свободной поверхности) $|\Psi| = 0$, то и среднее значение $|\Psi|$ во всем объеме пленки или капилляра будет меньше, чем для гелия II в большом объеме. Таким образом, непосредственно ясно уменьшение среднего значения $\bar{\rho}_s$, что приводит, например, к уменьшению скорости четвертого звука в пористых материалах. С уменьшением размера L (толщины пленки и т. д.) понижается, естественно, и температура λ -точки $T_\lambda(L)$, при которой $\rho_s(T_\lambda) = 0$. Происходит также изменение равновесного значения термодинамического потенциала, а следовательно, и теплоемкости и других термодинамических величин. Эти эффекты на основе Ψ -теории сверхтекучести обсуждались в ^{25, 27, 29, 61, 71–75}; имеется также ряд экспериментальных данных ^{44, 76–90} (см. также ссылки на более ранние работы в этих статьях и особенно в статьях ^{74, 76, 77}). Однако вопрос о количественном сопоставлении теории с опытом остается, по сути дела, еще открытым. Поэтому мы остановимся на размерных эффектах довольно подробно.

В настоящей главе III (за исключением раздела 3.4) гелий считается покоящимся и поэтому параметр Ψ можно считать вещественным и положительным, подчиняющимся уравнению (2.20). Для удобства напомним здесь это уравнение для случая, когда ψ_0 изменяется лишь в направлении z

$$\begin{aligned} \frac{d^2\psi_0}{dz_*^2} &= [-1 + (1-M)\psi_0^2 + M\psi_0^4]\psi_0, \\ z_* &= \frac{z}{\xi_M(t)}, \quad \xi_M = \xi_0 \left(\frac{3+M}{3} \right)^{1/2} = \xi_{00} \left(\frac{3+M}{3} \right)^{1/2} t^{-2/3} = \\ &= 2,74 \cdot 10^{-8} \left(\frac{3+M}{3} \right)^{1/2} t^{-2/3} \text{ см}, \\ \psi_0 &= \frac{\Psi}{(1,43\rho_\lambda/m)^{1/2} t^{1/3}}, \quad t = T_\lambda - T. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Уравнение (3.1) имеет первый интеграл

$$\left(\frac{d\psi_0}{dz_*}\right)^2 + \psi_0^2 - \frac{1-M}{2}\psi_0^4 - \frac{M}{3}\psi_0^6 = \text{const} \equiv I, \quad (3.2)$$

и любая задача для плоского слоя решается в квадратурах. Начнем, однако, с самого простого случая, когда плоский слой (пленка) с толщиной d переходит в сверхтекучее состояние при некоторой температуре $T_\lambda(d)$ путем перехода второго рода, т. е. в точке перехода $\psi_0 = 0$. Тогда достаточно близко к точке перехода значение ψ_0 стремится к нулю, и в правой части уравнения (3.1) можно ограничиться первым членом, а значит, $\psi_0(z) = C_1 \sin z_* + C_2 \cos z_*$. Для слоя, с учетом граничных условий (2.24), имеем

$$\psi_0(0) = 0, \quad \psi_0(d) = 0 \quad (3.3)$$

или, как иногда оказывается более удобным, можно записать

$$\psi_0(0) = 0, \quad \left(\frac{d\psi_0}{dz}\right)_{z=d/2} = 0. \quad (3.3a)$$

Очевидно, при таких условиях $\psi_0(z) \simeq C_1 \sin z_*$, и нетривиальное решение появляется лишь при $d \geq d_c$, где $\sin(d_c/\xi_M) = 0$, т. е.

$$d_c = \pi \xi_M(t) = 8,61 \cdot 10^{-8} \left(\frac{3+M}{3}\right)^{1/2} t^{-2/3} \text{ см}. \quad (3.4)$$

Отсюда, в силу определения $\xi_M(t)$ и учитывая, что везде выше $T_\lambda \equiv T_\lambda(d \rightarrow \infty)$, имеем

$$\Delta T_\lambda \equiv T_\lambda - T_\lambda(d) = \frac{[(3+M)/3]^{3/4} (\pi \xi_{00})^{3/2}}{d^{3/2}} = \frac{2,53 \cdot 10^{-11} [(3+M)/3]^{3/4}}{d^{3/2}} \text{ }^\circ\text{K}, \quad (3.4a)$$

где d — толщина рассматриваемого слоя в см (при такой постановке вопроса, когда мы определяем температуру $T_\lambda(d)$, естественно опустить индекс «с» у d). Для капилляра с круглым сечением радиуса r_0 и сферической полости (поры или капли) с радиусом R_0 в уравнении (2.20) целесообразно использовать цилиндрические или сферические координаты соответственно, причем в (3.1) производная $d^2\psi_0/dz_*^2$ заменяется на

$$\frac{1}{r_*} \frac{d}{dr_*} \left(r_* \frac{d\psi_0}{dr_*} \right) \quad \text{и} \quad \frac{1}{R_*^2} \frac{d}{dR_*} \left(R_*^2 \frac{d\psi_0}{dR_*} \right).$$

Вместо граничного условия (3.3a) теперь имеем

$$\psi_0(r_0) = 0, \quad \left(\frac{d\psi_0}{dr}\right)_{r=0} = 0; \quad \psi_0(R_0) = 0, \quad \left(\frac{d\psi_0}{dR}\right)_{R=0} = 0. \quad (3.5)$$

Поступая так же, как и выше, получаем (2,4048 — первый корень беселевой функции $J_0(r)$):

$$r_{0,c} = 2,4048 \xi_M, \quad \Delta T_\lambda = T_\lambda - T_\lambda(r_0) = \frac{1,69 \cdot 10^{-11} [(3+M)/3]^{3/4}}{r_0^{3/2}}, \quad (3.6)$$

$$R_{0,c} = \pi \xi_M, \quad \Delta T_\lambda = T_\lambda - T_\lambda(R_0) = \frac{2,53 \cdot 10^{-11} [(3+M)/3]^{3/4}}{R_0^{3/2}}. \quad (3.7)$$

Проверкой справедливости теории служит соблюдение зависимости *) $\Delta T_\lambda \propto d^{-3/2}$, а измерение коэффициента позволяет, в принципе, найти

*) Точнее, несоблюдение этой зависимости противоречило бы теории, в то время как выполнение закона $\Delta T_\lambda \propto d^{-3/2}$ должно иметь место и при более общих предположениях, но при условии, что $\xi(t) \propto t^{-2/3}$. Ниже мы не будем повторять подобных оговорок, связанных с общеизвестной «асимметрией» при интерпретации опытов, согласующихся и несогласующихся с выводами той или иной теории.

единственный остававшийся свободным параметр M . К сожалению, при $M \leq 1$, когда имеет место фазовый подход второго рода и справедливы написанные формулы, зависимость d_c или ΔT_λ от M является довольно слабой (при изменении M от 0 до 1 коэффициенты в формулах (3.4а), (3.6), (3.7) изменяются лишь в $(4/3)^{3/4}$ раза, т. е. на 24%). При $M > 1$ переход пленки из нормального (гелий I) в сверхтекучее (гелий II) состояние оказывается, как мы увидим ниже, переходом первого рода, причем критическое значение толщины d_{tr} , отвечающее термодинамической точке перехода (точке равенства термодинамических потенциалов), и, соответствующее «смещение» $\Delta T_\lambda = T_\lambda - T_{tr}(d)$ зависит от M по-прежнему очень слабо. Так, например, для плоскопараллельной щели $d_{tr} = 4,4\xi_0$ при $M \rightarrow \infty$, т. е. отличается от значения d_c при $M = 0$ всего лишь в 1,4 раза. Таким образом, из известных опытных данных нельзя считать исключенными даже очень большие значения M . С другой стороны, характерная зависимость $\Delta T_\lambda \propto d_{tr}^{3/2}$; не зависящая от M , подтверждается на эксперименте^{44, 74, 78, 81, 82, 88}.

Одной из актуальнейших задач дальнейших исследований является измерение $\Delta T_\lambda(d)$ в достаточно широких щелях, т. е. близко к $T_\lambda \equiv T_\lambda(d \rightarrow \infty)$. Только в этом случае выполняется необходимое для количественной справедливости теории условие $\xi_M \gg a \sim 3 \cdot 10^{-8}$ (см. (1.4), (2.21)) и в то же время возможно достаточно точное измерение толщины d . С другой стороны, подобные измерения, по-видимому, вполне реальны, так как с гелием II удается работать очень близко к λ -точке (см., например, ^{58, 91}), где достигнуты значения $t \lesssim 10^{-6}$ °K). Для примера заметим, что при $d = 1 \text{ мкм} = 10^{-4} \text{ см}$ длина $\xi_M(t = \Delta T_\lambda) = d_c/\pi = 3,2 \cdot 10^{-5} \text{ см}$ и разность

$$\Delta T_\lambda(d) = 2,5 \cdot 10^{-5} \left[\frac{3+M}{3} \right]^{3/4} \text{ °K};$$

ясно, что даже щели с $d = 10^{-5} - 10^{-6} \text{ см}$, если их можно создать и контролировать их размер, еще вполне пригодны с точки зрения выполнения условия $\xi_M \gg a$.

Остановимся теперь на другом предельном случае очень толстых слоев, когда достаточно решить задачу для полупространства. В этом случае расстояния удобно измерять в единицах $\xi_0(t) = \xi_M \sqrt{3/(3+M)} = 2,74 \cdot 10^{-8} t^{-2/3} \text{ см}$. Таким образом, положим $y = z/\xi_0(t)$, после чего уравнение (3.1) и его первый интеграл (3.2) примут вид

$$2 \frac{d^2 \psi_0}{dy^2} = [-(2 - v_0^2) + 2(1 - 2v_0^2) \psi_0^2 + 3v_0^2 \psi_0^4] \psi_0, \quad (3.8)$$

$$2 \left(\frac{d\psi_0}{dy} \right)^2 + (2 - v_0^2) \psi_0^2 - (1 - 2v_0^2) \psi_0^4 - v_0^2 \psi_0^6 = E, \quad (3.9)$$

где $v_0^2 = 2M/(M+3)$ и $E = (M+3)I/6$ — некоторая новая постоянная. Уравнение (3.9) можно также переписать следующим образом:

$$2 \left(\frac{d\psi_0}{dy} \right)^2 - (1 - \psi_0^2)^2 (1 + v_0^2 \psi_0^2) + 1 = E, \quad (3.9a)$$

откуда ясно удобство измерять расстояния в единицах ξ_0 и заменить параметр M на v_0 .

Найдем решение уравнения (3.8) при граничных условиях (гелий заполняет область $0 \leq y \leq \infty$)

$$\psi_0(0) = 0, \quad \psi_0(\infty) = 1.$$

Разумеется, при $y \rightarrow \infty$ производная $d\psi_0/dy \rightarrow 0$. В этом случае, оче-

видно, постоянная E в (3.9а) равна 1, и уравнение интегрируется в элементарных функциях

$$\psi_0(y) = \frac{\text{th}(y \sqrt{(1+v_0^2)/2})}{\sqrt{1+v_0^2} \text{ch}^{-2}(y \sqrt{(1+v_0^2)/2})}. \quad (3.10)$$

В простейшем варианте, когда $M = 0$,

$$\psi_0(z) = \text{th} \frac{z}{\xi_0 \sqrt{2}}, \quad \rho_s(z) = \rho_{se} \text{th}^2 \frac{z}{\xi_0 \sqrt{2}}, \quad |\rho_{se}| = 1,43 \rho_\lambda t^{2/3}. \quad (3.11)$$

Отметим, что на больших расстояниях от стенки

$$\psi_0(z) \approx 1 - \exp\left(-\frac{z \sqrt{2(1+v_0^2)}}{\xi_0}\right).$$

Длина $\xi_M = \xi_0 \sqrt{2(1+v_0^2)} = \xi_0 \sqrt{(3+M)/6(1+M)}$, имеющая смысл корреляционной длины модуля параметра Ψ ниже λ -точки, изменяется лишь в $\sqrt{3}$ раз при изменении M от 0 до ∞ . Этим и обуславливается, как мы увидим ниже, сравнительно слабая зависимость от M различного рода поверхностных и размерных эффектов в толстых пленках.

Помимо самого распределения $\rho_s(z)$ вблизи стенки интерес представляют поверхностный «дефицит» сверхтекучей массы

$$\Delta = \int_0^\infty [\rho_{se} - \rho_s(z)] dz, \quad (3.12)$$

поверхностная энергия

$$\sigma = \int_0^\infty [\Phi_{II}(\rho_s(z)) - \Phi_{II}(\rho_{se})] dz = \int_0^\infty [\Phi_{II-I}(\rho_s) - \Phi_{II-I}(\rho_{se})] dz, \quad (3.13)$$

а также некоторые производные от поверхностной энергии *): $S_\sigma = -(\partial\sigma/\partial T)_\mu$ — поверхностная энтропия, $C_\sigma = -T(\partial^2\sigma/\partial T^2)_\mu$ — поверхностная теплоемкость и $m_\sigma = -(\partial\sigma/\partial\mu)_T$ — избыточная поверхностная масса. Кроме того, в случае растворов гелия-3 в гелии-4 интерес также может представлять избыточная поверхностная масса He^3 : $m_3, \sigma = -(\partial\sigma/\partial\mu_3)_{\mu, T}$, где μ_3 — химический потенциал He^3 .

Термодинамический потенциал $\Phi_{II-I}(\rho_s)$ на единицу объема согласно (2.13) и (2.15) при $v_s = 0$ равен

$$\Phi_{II-I}(\rho_s) \equiv \Phi_{II}(p, T, \rho_s) - \Phi_I(p, T) = \\ = \Phi_{I-II}(\rho_{se}) [-(2-v_0^2)\psi_0^2 + (1-2v_0^2)\psi_0^4 + v_0^2\psi_0^6 + 2\left(\frac{d\psi_0}{dy}\right)^2], \quad (3.14)$$

$$\Phi_{I-II}(\rho_{se}) \equiv \Phi_I - \Phi_{II}(\rho_{se}) = \frac{\Delta C_p}{2T_\lambda} t^2, \quad t = T_\lambda - T,$$

$$y = \frac{z}{\xi_0(t)}, \quad v_0^2 = \frac{2M}{M+3}.$$

Подставляя решение (3.10) в (3.12) и (3.13) с учетом (3.14), причем удобно от интегрирования по координате перейти к интегрированию по ψ_0 и использовать (3.9а), получаем

$$\Delta(t) = \xi_0(t) \rho_{se}(t) \frac{\sqrt{2}}{v_0} \ln(v_0 + \sqrt{1+v_0^2}), \quad (3.15)$$

$$\sigma(t) = \xi_0(t) \Phi_{I-II}(\rho_{se}) \frac{1}{2\sqrt{2}v_0^3} [(1+4v_0^2) \ln(v_0 + \sqrt{1+v_0^2}) - \\ - v_0 \sqrt{1+v_0^2} (1-2v_0^2)]. \quad (3.16)$$

*) Как уже подчеркивалось (см. раздел 2.1), при решении статических пространственно-неоднородных задач нужно пользоваться не потенциалом $\Phi(p, T)$, а потенциалом $\Omega(\mu, T)$.

Производные σ по T и по μ , ввиду степенной зависимости σ от $t = T_\lambda(\mu) - T$, выражаются, очевидно, через саму σ и t :

$$S_\sigma = \sigma'_t(t) = (2 - \alpha - \nu) t^{-1} \sigma(t) = \frac{4}{3} t^{-1} \sigma(t), \quad (3.17)$$

$$C_\sigma = -T_\lambda \sigma''_{tt}(t) = (2 - \alpha - \nu)(1 - \alpha - \nu) T_\lambda t^{-2} \sigma(t) = -\frac{4}{9} \frac{T_\lambda}{t^2} \sigma(t), \quad (3.18)$$

$$m_\sigma = \sigma'_\mu(t = T_\lambda(\mu) - T) = -\sigma'_t \frac{dT_\lambda}{d\mu} = \left| \frac{dT_\lambda}{d\mu} \right| S_\sigma, \quad (3.19)$$

$$m_{3,\sigma} = -\sigma''_{\mu_3}(t = T_\lambda(\mu, \mu_3) - T) = -\frac{dT_\lambda}{d\mu_3} S_\sigma. \quad (3.20)$$

В рассматриваемой нами схеме критические индексы $\alpha = 0$ и $\nu = 2/3$. Если $M = 0$, когда справедливо решение (3.14), расчет особенно прост и непосредственно, или из (3.14) при $\nu_0 \rightarrow 0$, получаем

$$\Delta_0 = \sqrt{2} \xi_0(t) \rho_{se}(t) = 0,81 \cdot 10^{-8} \text{ з/см}^2, \quad (3.15a)$$

$$\sigma_0 = \frac{4\sqrt{2}}{3} \xi_0(t) \Phi_{I-II}(\rho_{se}) = 9,0 \cdot 10^{-2} t^{4/3} \text{ эрг/см}^2. \quad (3.16a)$$

При этом

$$S_\sigma = 0,12 t^{1/3} \text{ эрг/см}^2 \cdot \text{град}, \quad (3.17a)$$

$$C_\sigma = -8,7 \cdot 10^{-2} t^{-2/3} \text{ эрг/см}^2 \cdot \text{град}, \quad (3.18a)$$

$$m_\sigma = 1,54 \cdot 10^{-10} t^{1/3} \text{ з/см}^2. \quad (3.19a)$$

Для измерения профиля $\rho_s(z)$ можно проводить, например, хотя это и нелегко сделать, зондирование вторым звуком, на чем мы остановимся в разделе 3.2. Величины Δ и σ (а также ее производные) можно измерять, используя «толстые» пленки, для которых толщина *)

$$d \gg \xi_0 = 2,74 \cdot 10^{-8} t^{-2/3} \text{ см}.$$

В этом случае средние по сечению значения $\bar{\rho}_s$ и $\bar{\Phi}_{II} \equiv \Phi_I - \Phi_{I-II}$ в пленке равны

$$\bar{\rho}_s = \rho_{se} - \frac{2\Delta}{d} = \rho_{se} \left(1 - \frac{2l(t)}{d} \right), \quad (3.20a)$$

$$\bar{\Phi}_{II} = \Phi_{II}(\rho_{se}) + \frac{2\sigma}{d}. \quad (3.20b)$$

Величину $l = \Delta(t, M)/\rho_{se}(t)$ часто называют длиной восстановления (healing length). Аналогичные формулы имеют место и для других величин. Так, например,

$$\bar{S}_{II} = S_{II}(\rho_{se}) + \frac{2S_\sigma}{d} = S_{II}(\rho_{se}) + \frac{8}{3} t^{-1} \frac{\sigma}{d}, \quad (3.20в)$$

$$\bar{C}_p = C_p(\rho_{se}) + \frac{2C_\sigma}{d} = C_p(\rho_{se}) - \frac{8}{9} \frac{T_\lambda}{t^2} \frac{\sigma}{d}, \quad (3.20г)$$

$$\bar{\rho} = \rho(\rho_{se}) + \frac{2m_\sigma}{d} = \rho(\rho_{se}) + \frac{8}{3} t^{-1} \left| \frac{dT_\lambda}{d\mu} \right| \frac{\sigma}{d}. \quad (3.20д)$$

Измерения перечисленных величин, а в случае растворов еще и $m_{3,\sigma}$, могут, в принципе, служить для определения параметра M или для проверки теории, если значение M известно из других опытов. К сожалению, зависимость Δ и σ от M (она входит в (3.15) и (3.16) через $\nu_0^2 = 2M/(3+M)$) является довольно слабой, как это ясно из табл. II.

*) Точнее, как мы увидим ниже, достаточно, чтобы d превосходила «критическое» значение толщины d_c или d_{tr} (в случае, когда фазовый переход в пленке является переходом первого рода) на величину порядка $2\xi\bar{M} = 2\xi_0 \sqrt{(3+M)/6(1+M)}$.

Таблица II

M	$v_0^2 = 2M/(3 + M)$	$\Delta/\xi_0 \rho_{se}$	$\sigma/\xi_0 \Phi_{I-II}(\rho_{se})$
0	0	1,414	1,886
1	1/2	1,317	1,976
2	4/5	1,272	2,026
∞	2	1,146	2,208

Для пленок произвольной толщины результаты для $\psi_0(z)$ и других величин не выражаются в элементарных функциях. При качественном исследовании задачи удобно воспользоваться механической аналогией, поскольку уравнение (3.8) при замене y на время t и ψ_0 на координату точки x описывает движение точки с массой 4 в поле потенциала (рис. 1)

$$V(x) = (2 - v_0^2)x^2 - (1 - 2v_0^2)x^4 - v_0^2x^6 = 1 - (1 - x^2)^2(1 + v_0^2x^2). \quad (3.21)$$

Уравнение же (3.9) имеет смысл закона сохранения энергии, причем полная энергия $(V + 2\dot{x}^2)$ равна E . Распределению $\psi_0(y)$ на половине толщины пленки $(0 \leq y \leq d/2\xi_0)$ соответствует, очевидно, траектория частицы на участке от $x = 0$ до точки поворота x_m , где значение x_m определяется из решения уравнения

$$E - V(x_m) = 0. \quad (3.22)$$

Используя это обстоятельство, выражение для распределения $\psi_0(y)$ сразу же можно записать в параметрической форме (y изменяется в интервале от 0 до $d/2\xi_0$)

$$y = V\sqrt{2} \int_0^{x \equiv \psi_0} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}.$$

Подставляя в это выражение в качестве верхнего предела x_m , получаем связь между амплитудой распределения $x_m \equiv \psi_0(d/2)$ и толщиной пленки

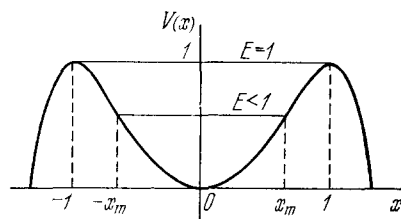
$$\frac{d}{\xi_0} \equiv D = 2\sqrt{2} \int_0^{x_m} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}. \quad (3.23)$$

Величина D имеет, очевидно, на языке механической аналогии смысл полупериода колебаний. Проанализируем соотношение (3.23) несколько более подробно. С этой целью подставим в него $V(x)$ и E согласно (3.21) и (3.22) и сделаем под интегралом замену $x/x_m = \sin \varphi$.

После некоторых преобразований получим

$$D \equiv \frac{d}{\xi_0} = 2\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{R(x_m^2, \varphi)}, \quad (3.24)$$

$$R(x_m^2, \varphi) = [(2 - v_0^2) - (1 - 2v_0^2)(1 + \sin^2 \varphi)x_m^2 - v_0^2(1 + \sin^2 \varphi + \sin^4 \varphi)x_m^4]^{1/2}. \quad (3.25)$$

Рис. 1. График функции $V(x)$.

При $x_m^2 \rightarrow 0$ подынтегральная функция обращается в $(2 - v_0^2)^{-1/2}$ и мы, как это и должно быть, получаем (см. 3.4)

$$d_c = D_c \xi_0 = \pi \xi_0 \sqrt{2/(2 - v_0^2)} = \pi \xi_0 \sqrt{(3 + M)/3} = \pi \xi_M(t).$$

Найдем теперь следующий (первый) член разложения D по x_m^2 :

$$\begin{aligned} D = \frac{d}{\xi_0} &= 2 \sqrt{\frac{2}{2 - v_0^2}} \int_0^{\pi/2} \left[1 + \frac{1 - 2v_0^2}{2(2 - v_0^2)} x_m^2 (1 + \sin^2 \varphi) + \dots \right] d\varphi = \\ &= D_c \left(1 + \frac{3}{8} (1 - M) x_m^2 + \dots \right), \quad D_c = \pi \sqrt{\frac{3 + M}{3}}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Из (3.26) видно, что при $M > 1$ безразмерная длина D при увеличении x_m вначале убывает. В то же время при $x_m \rightarrow 1$ «период» D (толщина пленки) неограниченно растет. Таким образом, D , как функция от x_m , имеет минимум $D = D_{c1}$ при некотором значении $x_m = x_{m,c}$. Если теперь, наоборот, мы будем рассматривать x_m как функцию D , то на участке $D_{c1} < D < D_c$ эта функция является двузначной, т. е. одному и тому же значению толщины пленки $d = D\xi_0$ здесь отвечает два различных распределения $\psi_0(y)$ с различной амплитудой x_m .

Для установления природы этой двузначности обратимся к анализу поведения полного избыточного термодинамического потенциала пленки, отнесенного к единице поверхности, $\tilde{\Phi}_{II-I} \equiv \int \Phi_{II-I}(\rho_s) dz = \int [\Phi_{II}(\rho_s) - \Phi_I] dz$. Механическим аналогом величины $\tilde{\Phi}_{II-I}$ (точнее, отношения $\mathcal{F} = \tilde{\Phi}_{II-I}/(\Phi_{I-II}(\rho_{se}) \xi_0(t))$) является интеграл действия частицы за полупериод колебаний

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\Phi}_{II-I}}{\xi_0 \Phi_{I-II}(\rho_{se})} &\equiv \mathcal{F} = 2 \int_0^{D/2} [2\dot{x}^2 - V(x)] dt = \\ &= -ED + 4\sqrt{2} \int_0^{x_m} \sqrt{E - V(x)} dx. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Производная действия $\mathcal{F}'(D)$ по полупериоду колебаний равна, как известно, $-E$ — полной энергии частицы с противоположным знаком (в этом можно убедиться также и прямым дифференцированием формулы (3.25), для чего предварительно под интегралом нужно сделать замену $x = x/x_m$). Поскольку по смыслу $E = V(x_m) > 0$, то последнее означает, что \mathcal{F} монотонно убывает с увеличением D . Легко также определить и знак второй производной функции $\mathcal{F}(D)$. Имеем:

$$\mathcal{F}''(D) = -E'(D) = -\frac{E'(x_m^2)}{D'(x_m^2)}.$$

Но $E'(x_m^2) = dV/d(x^2) > 0$. Поэтому $\mathcal{F}''(D) < 0$, если $D'(x_m^2) > 0$, и наоборот, $\mathcal{F}''(D) > 0$, если $D'(x_m^2) < 0$. Используя полученную информацию относительно знаков производных, нетрудно построить весь график зависимости $\mathcal{F}(D)$. При этом надо иметь в виду, что $\mathcal{F}(D = D_c) = \mathcal{F}'(D = D_c) = 0$, а при больших D кривая $\mathcal{F}(D)$ асимптотически приближается к прямой $2\tilde{\sigma} - D$, где $\tilde{\sigma} = \sigma/(\xi_0 \Phi_{I-II}(\rho_{se}))$ (см. формулу (3.206)). Качественный вид графика функции $\mathcal{F}(D)$ изображен в нижней половине рис. 2. Указанный график типичен для фазовых переходов первого рода. Здесь точка D_{tr} пересечения нижней кривой с осью абсцисс отвечает термодинамической точке перехода (точке равенства термодинамических потенциалов),

а участки 1 и 2 перегретым и переохлажденным состояниям. Верхняя ветвь кривой (изображенная на рис. 2 штриховой линией) отвечает неустойчивым состояниям. В дополнение к графику $\mathcal{P}(D)$ в верхней половине рис. 2 приведен график функции $\tilde{M}_s(D) = \rho_{se}^{-1} \int \rho_s(z) dz$. Вид этого графика, имеющего S-образный характер, также свидетельствует о переходе первого рода.

Качественные графики функций $\mathcal{P}(D)$ и $\tilde{M}_s(D)$ в более простом для анализа случае $M \leq 1$ приведены на рис. 3.

Итак, в зависимости от значения параметра M фазовый переход в пленке может быть фазовым переходом первого ($M > 1$) или второго

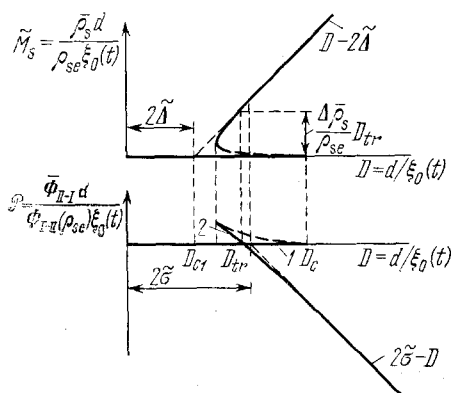


Рис. 2. Зависимость величины \tilde{M}_s и безразмерного термодинамического потенциала \mathcal{P} от толщины пленки для случая $M > 1$.

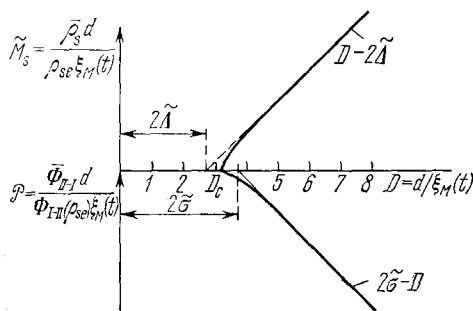


Рис. 3. Зависимость величины \tilde{M}_s и безразмерного термодинамического потенциала \mathcal{P} от толщины пленки для случая $M \leq 1$.

($M < 1$) рода ^{29, 61}. Значение $M = 1$ отвечает трикритической точке. На величину параметра M , в принципе, может влиять давление или введение примеси He^3 . В частности, если концентрация He^3 в растворе $x_3 > x_{3,t}$ (при давлении насыщенных паров $x_{3,t} \approx 67\%$), то переход в сверхтекучее состояние и в неограниченной жидкости оказывается переходом первого рода. В этом случае заведомо $M > 1$. Ситуация менее ясна при $x_3 < x_{3,t}$ и даже в чистом He^4 , поскольку систематические исследования λ -перехода в достаточно толстых пленках или щелях ($d \gtrsim (0,1 \div 1)$ мкм), с хорошо контролируемой геометрией, еще не проводились, а отличить фазовый переход второго рода от слабого фазового перехода первого рода на практике бывает трудно (согласно ⁷⁴ в тонких пленках переход в сверхтекучее состояние в чистом He^4 является скорее переходом второго рода).

При количественном исследовании поведения различных термодинамических функций пленки интеграл в правой части формулы (3.27) удобно записать в виде, аналогичном (3.24), (3.25):

$$I_1 = 4\sqrt{2} \int_0^{x_m} \sqrt{E - V(x)} dx = 4\sqrt{2} x_m^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi R(x_m^2, \varphi) d\varphi. \quad (3.28)$$

Средний термодинамический потенциал пленки при этом равен:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_{II}(d) &= \Phi_I + \Phi_{I-II}(\rho_{se}) \left(-E + \frac{I_1}{D} \right), \\ \Phi_{I-II}(\rho_{se}) &= \frac{\Delta C_p}{2T_\lambda} t^2, \quad D = \frac{d}{\xi_0(t)}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

где согласно (3.21) и (3.22)

$$E \equiv E(x_m^2) = x_m^2 [(2 - v_0^2) - (1 - 2v_0^2)x_m^2 - v_0^2 x_m^4] = 1 - (1 - x_m^2)^2 (1 + v_0^2 x_m^2). \quad (3.30)$$

К аналогичному виду удобно привести и выражение для $\bar{\rho}_s(d)$:

$$\bar{\rho}_s(d) = \rho_{se}(t) \left(x_m^2 - \frac{I_2}{D} \right), \quad \rho_{se} = 1,43 \rho_\lambda t^{2/3}, \quad (3.31)$$

$$I_2 = 2\sqrt{2} x_m^2 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \varphi d\varphi}{R(x_m^2, \varphi)}.$$

Выражения (3.29), (3.31) совместно с (3.28), (3.30) и (3.24), (3.25) определяют зависимости $\bar{\Phi}_{II}(d)$ и $\bar{\rho}_s(d)$ в параметрической форме, как функции от параметра x_m , имеющего смысл амплитуды распределения $\psi_0(z)$, т. е. максимального значения, достигаемого функцией $\psi_0(z)$ на половине толщины пленки.

Дифференцируя (3.29) по $t = T_\lambda - T$ и учитывая при этом, что, как уже отмечалось, $\mathcal{F}'(D) = (d/dD)(-ED + I_2) = -E(D)$, найдем выражения для средней плотности энтропии и средней теплоемкости пленки

$$\bar{S}_{II}(d) = S_I + S_{I-II}(\rho_{se}) \left(-E + \frac{2}{3} \frac{I_1}{D} \right), \quad S_{I-II}(\rho_{se}) = \frac{\Delta C_p}{T_\lambda} t, \quad (3.32)$$

$$\bar{C}_{II}(d) = C_I + \Delta C_p \left[E - \frac{2}{9} \frac{I_1}{D} + \frac{2}{9} DE'(D) \right], \quad (3.33)$$

$$E'(D) = \frac{E'(x_m^2)}{D'(x_m^2)} = \frac{(2 - v_0^2) - 2(1 - 2v_0^2)x_m^2 - 3v_0^2 x_m^4}{I_3(x_m^2)}, \quad (3.34)$$

$$I_3(x_m^2) = \sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \frac{(1 - 2v_0^2)(1 + \sin^2 \varphi) + 2v_0^2 x_m^2 (1 + \sin^2 \varphi + \sin^4 \varphi)}{R^3(x_m^2, \varphi)} d\varphi.$$

Обсудим полученные соотношения. Начнем со случая толстых пленок, для которых толщина

$$d \gg \xi_M^-(t) = \xi_0 \left[\frac{3+M}{6(1+M)} \right]^{1/2} = 2,74 \cdot 10^{-8} t^{-2/3} \left[\frac{3+M}{6(1+M)} \right]^{1/2} \text{ см.}$$

В этом случае в (3.29), (3.31) — (3.33) можно положить $x_m^2 = E = 1$, $E'(D) = 0$. Соответствующие интегралы I_1 и I_2 при $x_m^2 = 1$ легко берутся, и от (3.29), (3.31) — (3.33), мы, как это и должно быть, возвращаемся к асимптотическим формулам (3.20). Отметим, что выход на асимптотические формулы (3.20) для толстых пленок осуществляется экспоненциально быстро, с поправками типа $\exp\{-(d - d_0)/\xi_M^-\}$, где $d_0 \sim \min(d_{tr}, d_c)$ (d_{tr} — критическое значение толщины, отвечающее при $M > 1$ равновесной температуре перехода). Таким образом, оказывается, что с точностью, лучшей чем 5%, указанными формулами можно пользоваться уже при

$$d > d_{tr} + 2\sqrt{2}\xi_M^-.$$

По поводу температурной зависимости $\bar{\rho}_s$ и \bar{C}_p в толстых пленках сделаем еще несколько замечаний. В сочетании с (3.15) результат (3.20a) означает, что

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_s &= \rho_{se}(t) - \frac{\xi_0(t) \rho_{se}(t)}{d} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{v_0} \ln(v_0 + \sqrt{1 + v_0^2}) = \\ &= \rho_{se}(t) - K_M \rho_{se}(T_\lambda(d)), \quad v_0^2 = \frac{2M}{M+3}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

т. е. для толстой пленки средняя плотность $\bar{\rho}_s$ просто «сдвинута» на величину $K_M \rho_{se}(T_\lambda(d))$ по сравнению с плотностью $\rho_{se}(T)$ в большом объеме. Постоянная K_M изменяется от 0,90 (при $M = 0$) до 0,52 (при $M \rightarrow \infty$) (см. примеч. при корр. 2 на стр. 210).

С другой стороны, отличие теплоемкости \bar{C}_p для толстой пленки от теплоемкости $C_p(\rho_{se})$ в большом объеме уже не сводится к простому сдвигу, а согласно (3.20г) возрастает при повышении температуры пропорционально $t^{-2/3}$. Максимальное значение разности $C_p(\rho_{se}) - \bar{C}_p(d)$, достигаемое на границе применимости асимптотических формул, т. е. при $d \approx d_{tr} + 2\sqrt{2}\xi_M^-$, составляет примерно (0,1–0,2) ΔC_p . (см. примеч. при корр. 3 на стр. 210).

Обратимся теперь к случаю тонких пленок с $d < d_{tr} + 2\sqrt{2}\xi_M^-$. Здесь анализ достаточно прост лишь в случае, когда $M \leq 1$, т. е. когда фазовый переход в пленке является фазовым переходом второго рода. Допустим вначале, что $M < 1$. В пределе, когда $x_m^2 \ll 1$, из (3.26) находим

$$x_m^2 = \frac{8}{3(1-M)} \left(\frac{D}{D_c} - 1 \right) = \frac{8}{3(1-M)} \left[\frac{\xi_0(T_\lambda(d))}{\xi_0(T)} - 1 \right] \approx \approx \frac{16}{9(1-M)} \frac{T_\lambda(d) - T}{T_\lambda - T_\lambda(d)}. \quad (3.36)$$

Используя это выражение, из (3.34) получаем *)

$$\bar{\rho}_s \approx \rho_{se}(T) \frac{x_m^2}{2} = \frac{8}{9(1-M)} \rho_{se}(T) \frac{T_\lambda(d) - T}{T_\lambda - T_\lambda(d)} \approx \approx \frac{1,27}{1-M} [T_\lambda - T_\lambda(d)]^{-1/3} [T_\lambda(d) - T], \quad (3.37)$$

где последнее выражение очевидным образом применимо лишь при условии, что

$$T_\lambda(d) - T \leq \Delta T_\lambda \equiv T_\lambda - T_\lambda(d). \quad (3.38)$$

Как ясно из (3.37) и (3.38), линейная зависимость ρ_s от температуры T должна наблюдаться лишь в узкой области вблизи температуры появления сверхтекучести в пленке $T_\lambda(d)$. Вряд ли можно надеяться четко выявить этот эффект по измерениям скорости четвертого звука в пористых материалах, заполненных гелием II. Неопределенность размера пор и необходимость учитывать изменение этих размеров на расстояниях порядка $\xi_0(t)$ могут привести к существенным изменениям картины. Поэтому имеющиеся данные для пористых материалов лишь подтверждают наличие сдвига $\Delta T_\lambda(d)$, но не могут использоваться для количественной проверки приведенных выше формул. К этому нужно добавить, что поры во всяком случае не должны быть столь малы, что $\Delta T_\lambda(d) \gtrsim 0,1^\circ \text{K}$, ибо в противном случае Ψ -теория вообще в количественном отношении не применима (условие (1.4)). Последнее замечание относится, в частности, к работе ⁹⁰, в которой $\Delta T_\lambda = 0,22^\circ \text{K}$. Как по этой причине, так и на основании приведенного в работе ⁹⁰ рис. 1, мы еще не видим никаких оснований констатировать какое-либо противоречие между теорией и наблюдениями. Отметим, кроме того, что в работе ⁸⁹, в отличие от ⁹⁰, наблюдалась и область (3.38), в которой $\bar{\rho}_s$ линейно зависит от $T_\lambda(d) - T$. Несомненно, нужно стремиться измерить $\bar{\rho}_s(t)$ для достаточно широких щелей (или капилляров, пор и т. п.) с вполне определенными размерами.

*) Результат (3.37) при $M = 0$ совпадает с приведенным в работе ⁷³.

Вычислим теперь величину скачка теплоемкости $\Delta \bar{C}_p \equiv \bar{C}_{p,II} - C_{p,I}$ в пленке при $T = T_\lambda(d)$. Из (3.33), (3.34), используя также (3.30) и (3.36), находим *)

$$\begin{aligned} \Delta \bar{C}_p(d) &\equiv \bar{C}_{p,II}(T_\lambda(d)) - C_{p,I}(T_\lambda(d)) = \\ &= \Delta C_p \left(E - \frac{2}{9} \frac{I_2}{D} + \frac{2}{9} D E'_D \right) \Big|_{x_m^2=0} = \\ &= \frac{2}{9} \Delta C_p D_c \left(\frac{E'(x_m^2)}{D'(x_m^2)} \right)_{x_m^2=0} = \frac{32 \Delta C_p}{9(3+M)(1-M)}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Отметим, что величина «скачка» теплоемкости в пленке даже при $M = 0$ оказывается несколько большей, чем «скачок» теплоемкости в «массивном» гелии ΔC_p . Кроме того, значение $\Delta \bar{C}_p(T_\lambda(d))$ не зависит от толщины пленки, в противоположность заключению, сделанному в работе ⁷². В этой связи интерпретация представленных там экспериментальных данных вызывает у нас сомнения. Общая картина поведения $\Delta \bar{C}_p(T)$, вытекающая из изложенного здесь анализа, очевидно, такова: при $d > d_c + 2\sqrt{2}\xi_M$, когда пленку можно считать «толстой», $\Delta \bar{C}_p$ вначале убывает по мере увеличения температуры, в соответствии с формулой (3.20г); далее, при $d \sim d_c + 2\sqrt{2}\xi_M$ она достигает минимума $\Delta \bar{C}_{p \min} \approx (0,8 - 0,9)\Delta C_p$, после чего начинает возрастать и при $T \rightarrow T_\lambda(d)$ стремится к значению, определенному формулой (3.39).

При $M \rightarrow 1$ теплоемкость \bar{C}_p расходится при $T = T_\lambda(d)$ в соответствии с тем, что значение $M = 1$ отвечает трикритической точке. Можно показать, что характер особенности $\bar{C}_p(T)$ при $T \rightarrow T_\lambda(d)$ является при том корневым:

$$\bar{C}_{p,II} = C_{p,I} + 0,37 \Delta C_p \sqrt{\frac{T_\lambda - T_\lambda(d)}{T_\lambda(d) - T}}, \quad M = 1, \quad \frac{T_\lambda - T_\lambda(d)}{T_\lambda} \ll 1. \quad (3.39б)$$

Также по корневому закону обращается в этом случае в нуль и плотность сверхтекучей компоненты

$$\bar{\rho}_s = 0,73 \rho_{se}(T) \sqrt{\frac{T_\lambda(d) - T}{T_\lambda - T_\lambda(d)}}, \quad M = 1, \quad \frac{T_\lambda - T_\lambda(d)}{T_\lambda} \ll 1. \quad (3.37а)$$

При $M > 1$ для выяснения положения точки перехода (температуры $T_{tr}(d)$ или «критического» значения толщины слоя d_{tr}), а также скачков при $T = T_{tr}(d)$ плотности $\bar{\rho}_s$, энтропии $\Delta \bar{S}$, теплоемкости $\Delta \bar{C}_p$ и определения пределов температурного гистерезиса требуются численные расчеты. Некоторые результаты такого рода расчетов приведены в табл. III.

В последнем столбце таблицы III приведены значения относительного скачка давления $E_{tr} \equiv [p_{II}(T_{tr}(d)) - p_{I-II}(\rho_{se})]$ реализующегося в пленке, если толщина пленки (слоя) является фиксированной **). Факти-

*) При нефиксированных значениях критических индексов для теплоемкости α и корреляционной длины ν результат (3.39) имел бы вид

$$\Delta \bar{C}_p = \frac{\nu^2}{(2-\alpha)(1-\alpha)} \frac{16}{(3+M)(1-M)} \Delta C_p. \quad (3.39а)$$

В частности, при использовании самосогласованного варианта (2.5) — (2.8) относительная величина скачка теплоемкости в пленке равнялась бы $\Delta \bar{C}_p / \Delta C_p = 2/3$.

**) Избыточное давление в пленке, связанное с ее переходом в сверхтекучее состояние, определяется по формуле

$$p_{II} - p_I = \left(\frac{\partial \bar{\Omega}_{I-II}}{\partial d} \right)_{\mu, T} = \Omega_{I-II}(\rho_{se}) E \left(\frac{d}{\xi_0(t)} \right),$$

где $\Omega_{I-II}(\rho_{se}) = (\Delta C_\mu / 2T_\lambda) t^2$, $\Delta C_\mu \approx \Delta C_p = 0,76 \text{ Дж} \cdot \text{см}^{-1} \cdot \text{град}^{-1}$, а E определяется из (3.30).

Таблица III

M	$\frac{v_0^2}{2M} = \frac{d_{tr}}{3+M}$	$\frac{D_{tr}}{d_{tr}} = \frac{d_{tr}}{\xi_0}$	$D_c = \pi \sqrt{\frac{3+M}{3}}$	$D_{c1} = \frac{d_{c1}}{\xi_0}$	$x_m^2, c = \psi_0^2 \left(\frac{d_{tr}}{2} \right)$	$\frac{\Delta \bar{\rho}_s}{\rho_{se}}$	$\frac{\Delta \bar{S}}{S_{I-11}(\rho_{se})}$	$\frac{\Delta \bar{C}_p}{\Delta C_p}$	E_{tr}
9/7	0,6	3,735	3,755	3,728	0,20	0,100	0,094	6,11	0,28
2	0,8	3,895	4,056	3,845	0,45	0,226	0,196	2,04	0,59
3	1	4,017	4,443	3,898	0,60	0,304	0,248	1,36	0,74
4,5	1,2	4,101	4,967	3,914	0,69	0,352	0,280	1,10	0,82
7	1,4	4,186	5,736	3,910	0,76	0,391	0,293	1,00	0,88
17	1,7	4,291	8,112	3,882	0,83	0,434	0,308	0,91	0,93
∞	2	4,404	∞	3,841	0,88	0,468	0,320	0,85	0,96

чески, однако, в случае пленок заданной величиной является давление пара над пленкой, а скачком изменяется при $T = T_{tr}(p)$ ее толщина. Это обстоятельство нужно учитывать при сравнении предсказаний теории с экспериментом. Быстрое изменение толщины или давления пара над пленкой при $T \sim T_\lambda(d)$ имеет место и в случае, когда фазовый переход в пленке является переходом второго рода. Подробнее об этом см. ^{74,75}.

К сожалению, сравнение развитой теории с опытом в отношении термодинамических величин в пленках в непосредственной близости от температуры перехода $T_\lambda(d)$ или $T_{tr}(d)$ затруднительно по еще одной причине. Дело в том, что, как мы упоминали в разделе 2.4, теплоемкость и другие аналогичные величины (энтропия, термодинамический потенциал и т. п.) зависят от длинноволновых флуктуаций. Соответствующий вклад относился нами к членам типа $\Phi_I(p, T)$, $S_I(p, T)$ и т. д. и предполагался симметричным относительно замены t на $-t$, т. е. не влияющим на разность $\Phi_{II} - \Phi_I$. В случае гелия в больших объемах это, в общем, подтверждается на эксперименте. Однако в случае пленок ситуация может быть иной, и вклад флуктуаций при $t < 0$ и $t > 0$ может оказаться различным (см., например, ⁹²). В этом случае рассматриваемая Ψ -теория должна была бы быть подвергнута определенным изменениям. Заметим, что при вычислении $\bar{\rho}_s(d)$ эта трудность, по-видимому, не стоит столь остро, поскольку длинноволновые флуктуации лишь несколько размывают переход (в результате и при $T > T_\lambda(d)$ имеется некоторая «парасверхтекучесть»; см., например, ^{40,93}). Подчеркнем, что отмеченные трудности на пути сравнения теории с опытом (даже для пленок с хорошо контролируемой толщиной) не делают соответствующие эксперименты менее интересными и важными.

3.2. Распределение плотности сверхтекучей компоненты во внешних полях

Влияние границ является не единственным фактором, приводящим к неоднородности модуля параметра порядка $|\Psi| = \eta = \sqrt{\rho_s/m}$ в покоящемся гелии. К такому же результату приводит и действие на жидкость различного рода внешних полей, например, поля тяжести, стрикционных сил электрического и магнитного поля, или поля ван-дер-ваальсовых сил. При этом поле изменяет плотность жидкости ρ , а вместе с ней и температуру λ -перехода $T_\lambda \equiv T_\lambda(\rho)$. В результате, если потенциал сил поля $V(r)$ не постоянен в пространстве, то фазовый переход в сверхтекучее состояние совершается не одновременно по всему «образцу», а вначале в сверхтекучее состояние (при понижении температуры) переходят те области жидкости, в которых плотность ρ ниже. Области, которые уже перешли в сверхтекучее состояние, отделены от соседних «нормальных» областей размы-

тыми фазовыми границами, причем ширина и форма границы (характер распределения $\rho_s(\mathbf{r})$ в переходном слое) зависят от градиента поля, корреляционных эффектов, учитываемых в выражении (2.15) с помощью градиентного по Ψ члена, а также от вида плотности термодинамического потенциала. Уже отсюда ясно, что изучение распределения $\rho_s(\mathbf{r})$ в переходной области представляет значительный интерес.

Вопрос о характере неоднородных распределений $\rho_s(\mathbf{r})$ во внешних полях и о возможностях экспериментального изучения такого рода распределений рассматривался на основе Ψ -теории сверхтекучести в статьях ^{38, 94}. Кроме того, для частного случая границы HeI — HeII в поле тяжести ряд предварительных оценок был сделан также в статьях ^{95, 96} и экспериментальной работе ⁹¹. Здесь за недостатком места и учитывая, что рассмотрение в ^{38, 94} является довольно полным, мы при изложении упомянутых выше работ будем опускать многие детали.

При решении пространственно-неоднородных задач, когда существенны изменения плотности ρ , нужно рассматривать термодинамический потенциал

$$\tilde{\Omega}_{II}(\mu, T; \Psi, \rho) = \int \left[F_{II0}(\rho, T, |\Psi|^2) + \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \Psi|^2 - \mu \rho \right] dV \quad (3.40)$$

и минимизировать этот потенциал по $\Psi^*(\mathbf{r})$ и по $\rho(\mathbf{r})$ одновременно.

В присутствии внешнего поля $\mathbf{G} = \nabla V(\mathbf{r})$, действие которого отнесено к единице массы, в подинтегральное выражение в (3.40) нужно добавить член $\rho V(\mathbf{r})$ — потенциальную энергию частиц в поле, а также, вообще говоря (если плотность заметно меняется на расстояниях порядка межатомных), член $(\delta/2)(\nabla \rho)^2$, учитывающий корреляции ρ . В результате для определения равновесных значений $\Psi_e(\mathbf{r})$ и $\rho_e(\mathbf{r})$ получим систему связанных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi &= \left(\frac{\partial F_{II0}}{\partial |\Psi|^2} \right)_{\rho, T} \Psi, \\ \delta \Delta \rho &= \left(\frac{\partial F_{II0}}{\partial \rho} \right)_{|\Psi|^2, T} - \mu + V(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Если, однако, градиенты плотности ρ малы, что предполагается в дальнейшем и гарантируется при соблюдении условия (2.21), то члены с пространственными производными ρ можно отбросить. Далее, от плотности свободной энергии $F_{II0}(\rho, T, |\Psi|^2)$ удобно перейти к плотности термодинамического потенциала $\Omega_{II0}(\mu_0, T, |\Psi|^2)$ в переменных $\mu_0, T, |\Psi|^2$, где μ_0 — химический потенциал гелия в отсутствие внешнего поля

$$\mu_0 = \left(\frac{\partial F_{II0}}{\partial \rho} \right)_{|\Psi|^2, T} = \mu - V(\mathbf{r}). \quad (3.42)$$

Уравнения (3.41) при этом разделяются и принимают следующий вид:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi = \left(\frac{\partial \Omega_{II0}}{\partial |\Psi|^2} \right)_{\mu_0, T} \Psi, \quad (3.43)$$

$$\rho = - \left(\frac{\partial \Omega_{II0}}{\partial \mu_0} \right)_{|\Psi|^2, T}. \quad (3.43a)$$

Теперь перейдем к приведенной ψ -функции (2.12), безразмерным координатам \mathbf{r}_{**} (см. (2.17)) и воспользуемся для $\Omega_{II0} - \Omega_I$ формулой, аналогичной (2.13). Уравнение (3.43) примет при этом вид

$$\Delta_{**} \psi = \frac{3}{3+M} (-t|t|^{1/3} + (1-M)|t|^{2/3}|\psi|^2 + M|\psi|^4) \psi, \quad (3.44)$$

аналогичный (2.18), но отличающийся от этого уравнения в том отношении, что расстояние до λ -перехода $t = T_\lambda - T$ теперь уже само является,

вообще говоря, функцией координат *), поскольку согласно (3.42)

$$t = T_{\lambda}(\mu_0) - T = T_{\lambda}(\mu - V(\mathbf{r})) - T \approx t_0 - \frac{dT_{\lambda}}{d\mu} V(\mathbf{r}), \quad (3.45)$$

где $t_0 = T_{\lambda_0} - T + (dT_{\lambda}/d\mu)(\mu - \mu_{\lambda_0})$ — исходное расстояние до некоторой точки $(T_{\lambda_0}, \mu_{\lambda_0})$ на λ -кривой в отсутствие внешнего поля и $dT_{\lambda}/d\mu$ — наклон λ -кривой в указанной точке (при давлении насыщенных паров $dT_{\lambda}/d\mu = -1,27 \cdot 10^{-9}$ град·г·эрг⁻¹ **).

Отметим, что если бы вместо (2.13) мы воспользовались для Ω_{II0} — Ω_I более общей формулой (см. ³⁸ и раздел 2.4)

$$\Omega_{II0} - \Omega_I = \frac{\Delta C_{\mu}}{2T_{\lambda}} t^2 f\left(\frac{\psi}{|t|^{1/3}}\right),$$

то уравнение (3.44) имело бы вид

$$\Delta_{**}\psi = |t|^{4/3} f'\left(\frac{\psi}{|t|^{1/3}}\right).$$

Таким образом, если бы вид функции $\psi(z)$ в области переходного слоя был известен из эксперимента, то, строя зависимость $y \equiv (d^2\psi/dz_{**}) |t(z_{**})|^{-4/3}$ от $x \equiv \psi/|t|^{1/3}$, можно было бы определить вид функции $f(x)$, а, значит, и вид плотности термодинамического потенциала, причем при всех x и $t \leq 0$, а не только при $x \leq 1$ и $t > 0$, как это имеет место в случае пленок. К вопросу о способах измерения профиля плотности $\rho_s(z)$ мы еще вернемся, а пока что, за недостатком информации о полном виде функции $f(x)$, примем, как и в разделе 2.1, уравнение (3.44) и рассмотрим на его основе несколько конкретных задач.

Начнем со случая медленно меняющихся полей и допустим вначале, что поле G вообще является однородным. В этом случае (ось z считаем направленной вдоль поля)

$$V_G = -Gz. \quad (3.46)$$

В частном случае гравитационного поля постоянная G имеет, очевидно, смысл ускорения силы тяжести g . Удобно координату z отсчитывать от плоскости $t = t_0 - (dT_{\lambda}/d\mu)Gz = 0$, отвечающей границе раздела фаз HeI — HeII в поле (без учета корреляционных эффектов), и перейти к новой приведенной $\tilde{\psi}$ -функции и новой безразмерной координате y

$$\tilde{\psi} = \frac{\Psi}{\Psi_G}, \quad y = \frac{z}{l_G}, \quad (3.47)$$

где характерные масштабы Ψ_G и l_G равны

$$\Psi_G = \left(\frac{\rho_{sG}}{m}\right)^{1/2}, \quad \rho_{sG} = 1,43\rho_{\lambda} \left(\frac{\xi_{00}}{l_G}\right) = 0,21 \left(\frac{\xi_{00}}{l_G}\right) \text{ г/см}^3, \quad (3.48)$$

$$G = \xi_{00}^{3/5} \left(\left|\frac{dT_{\lambda}}{d\mu}\right| G\right)^{-2/5}.$$

*) В принципе, при переходе к другим термодинамическим переменным могли бы также измениться коэффициенты в уравнении (2.18) (численное значение параметра M_2 и численные величины масштабов ξ_{00} и Ψ_{00} , указанные в (2.12), (2.17); см. также (2.9)). Фактически, однако, соответствующая перенормировка коэффициентов оказывается очень малой и, в частности, при переходе от переменных (p, T, Ψ) к (μ_0, T, Ψ) не превышает 2% (подробнее см. ³⁸).

**) В уравнениях, используемых в ⁹⁵ и ³⁶, вместо производной $dT_{\lambda}/d\mu$ стоит производная $\rho_{\lambda} dT_{\lambda}/dp$. Неявное отождествление этих двух производных имело место также в экспериментальной работе ⁹¹. Отметим, что хотя отличие $dT_{\lambda}/d\mu$ от $\rho_{\lambda} dT_{\lambda}/dp$ довольно мало ($\sim 2\%$), его учет приближает полученное в ⁹¹ значение наклона λ -кривой $dp_{\lambda}/dT = -113,9 \text{ атм/}^\circ\text{К}$ к наилучшему экспериментальному значению $dp_{\lambda}/dT = -111,05 \text{ атм/}^\circ\text{К}$ ⁹⁶ (исправленное значение dp_{λ}/dT , следующее из ⁹¹, равно $-111,6 \text{ атм/}^\circ\text{К}$).

В частности, для гравитационного поля ($G = g = 981 \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}$)

$$\begin{aligned} \rho_{sg} &= 1,43 \rho_\lambda \frac{\xi_{00}}{l_g} = 8,6 \cdot 10^{-7} \text{ г/см}^3, \\ l_g &= \xi_{00}^{3/5} \left(\left| \frac{dT_\lambda}{d\mu} \right| g \right)^{-2/5} = 6,7 \cdot 10^{-3} \text{ см}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

В переменных (3.47) уравнение (3.44) принимает вид

$$\frac{d^2 \tilde{\psi}}{dy^2} = \frac{3}{3+M} [-y|y|^{1/3} + (1-M)|y|^{2/3} \tilde{\psi}^2 + M \tilde{\psi}^4] \tilde{\psi}. \quad (3.50)$$

Решения уравнения (3.50), отвечающие значениям $M = 0$ и $M = 1$, приведены на рис. 4, где штриховой линией изображено также распределение $\tilde{\psi}(y)$, которое имело бы место без учета корреляционных эффектов. Обращает на себя внимание тот факт, что кривые с $M = 0$ и $M = 1$

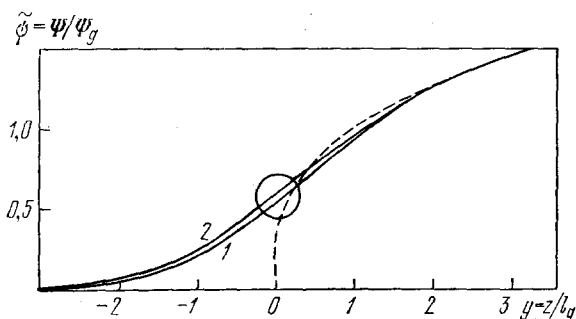


Рис. 4. Распределение параметра порядка $\tilde{\psi}(y)$ вблизи фазовой границы раздела He I — He II в поле тяжести.

Сплошные кривые получены путем численного решения уравнения (3.50) для двух значений параметра M : $M = 0$ (кривая 1) и $M = 1$ (кривая 2). Штриховой линией показано распределение $\tilde{\psi}(y) = y^{1/3}$, которое имело бы место без учета корреляционных эффектов.

области не имеет большого значения, и используемое уравнение (3.44) является, по всей вероятности, достаточной аппроксимацией для описания поведения $\rho_s(z)$ в переходном слое.

В случае неоднородного, но слабо меняющегося поля потенциал $V(z)$ может быть разложен в ряд вблизи точки $z = z_0$, в которой $t = T_\lambda(z) - T = 0$:

$$V(z) = V(z_0) + G(z - z_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 V}{dz^2} \right)_{z=z_0} (z - z_0)^2 + \dots \quad (3.51)$$

При этом, если

$$\left(\frac{d^2 V}{dz^2} \right)_{z=z_0} \frac{l_g}{2G} \ll 1, \quad (3.51a)$$

то в окрестности точки $z = z_0$ поле по-прежнему можно считать однородным, и справедливо все предшествующее рассмотрение. Сказанное, очевидно, относится и к неплоским границам раздела, если только радиус кривизны границы много больше ее толщины l_g .

Экспериментально наряду с силой тяжести интерес представляют также стрикционные силы, возникающие в электрическом и магнитном полях. В электрическом поле дополнительный химический потенциал

жидкости равен

$$\mu_E = V_E(\mathbf{r}) = \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)_T \frac{E^2(\mathbf{r})}{8\pi} \approx - \frac{\alpha_0 E^2(\mathbf{r})}{2}, \quad (3.52)$$

где E — напряженность поля, ϵ — диэлектрическая проницаемость и $\alpha_0 = 3,1 \cdot 10^{-2} \text{ см}^3/\text{г}$ — поляризуемость гелия в расчете на 1 г. Аналогичная формула, но с заменой α_0 на диамагнитную восприимчивость гелия $\alpha_H = -0,47 \cdot 10^{-6} \text{ см}^3/\text{г}$, имеет также место в случае магнитного поля (замена E на H). Смещения λ -точки под действием однородных электрического или магнитного поля, обусловленные изменением ρ , довольно малы. Так, при $E \sim E_{\text{пробоя}} \sim 2 \cdot 10^6 \text{ в/см}$ смещение λ -точки составляет $\Delta T_\lambda(E) = T_\lambda(E) - T_\lambda(0) \sim 1 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ\text{К}$, а для магнитного поля соответствующие значения еще меньше (при $H \sim 10^5 \text{ э}$ смещение $\Delta T_\lambda(H) \sim -3 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{К}$). Естественно, что и в неоднородном поле распределение $\rho_s(\mathbf{r})$ изменяется (с переходом в He I) лишь в сравнительно узкой окрестности λ -перехода. Тем не менее внутри указанной области действие неоднородного электрического и магнитного полей вполне сравнимо и может даже превосходить то, которое оказывает в силу своего веса, например, столб гелия высотой 1 см (смещение λ -точки, вызываемое давлением столба гелия, составляет $1,25 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{К/см}$). По этой причине исследование действия на параметр порядка электрического и магнитного полей также возможно и представляет интерес, поскольку, варьируя напряженность и конфигурацию поля, можно изменять (сужать или растягивать) ширину переходной области между гелием I и гелием II, создавать локальные области с пониженной или повышенной концентрацией плотности сверхтекучей части, играющие роль собирающих или рассеивающих линз для волн второго звука⁹⁴ и пр. Не исключено и использование локальных уплотнений ρ в He II в электрическом поле для исследования эффектов, типа эффекта близости или аналога эффекта Джозефсона^{36*}). Для иллюстрации возможностей применения электрического и магнитного полей оценим, например, ширину границы раздела фаз HeI — HeII в поле заряженной нити радиуса R . В этом случае $E \sim 1/r$ (r — расстояние до оси нити) и, как следует из (3.48), (3.51) и (3.52),

$$l_E = \xi_0^{3/5}(t_0) \left[\frac{r_0(t_0)}{2} \right]^{2/5}, \quad (3.53)$$

где $r_0(t_0) = \sqrt{|dT_\lambda/d\mu| (\alpha_0 E_R^2)/2t_0} R$, E_R — напряженность поля у поверхности нити и t_0 — значение разности температур $T_{\lambda,0} - T$ вдали от нити (подробнее см. ³⁸). При $E_R \sim 10^6 \text{ в/см}$, $t_0 \sim 10^{-6} \text{ }^\circ\text{К}$ и $R \sim 0,1 \text{ см}$ длина $l_E \sim 8,8 \cdot 10^{-3} \text{ см}$. В случае проводника с током при напряженности поля у поверхности проводника $H \sim 10^5 \text{ э}$ и тех же значениях t_0 и R аналогичная оценка дает значение $l_H \sim 2,7 \cdot 10^{-3} \text{ см}$.

Обратимся теперь к случаю быстро меняющихся в пространстве полей, для которых условие (3.51 а) уже не выполняется. Реально такого рода полями являются поле ван-дер-ваальсовых сил вблизи твердой стенки и поле микроскопических заряженных тел (ионы в гелии). Рассмотрим вначале первый случай.

Потенциал, действующий на гелий со стороны твердого тела, равен⁹⁷

$$V(z) = - \frac{\theta}{z^3}, \quad (3.54)$$

*) Электрическое и магнитное поля было бы также интересно использовать для устранения эффекта неоднородности столба жидкости в поле тяжести вблизи обычных критических точек «жидкость — пар» или вблизи критических точек расслаивания смесей, в частности растворов ^3He в ^4He .

где z — расстояние до стенки и θ — постоянная, зависящая от материала тела (типично, $\theta \sim (1 - 10) \cdot 10^{-14} \text{ эрг} \cdot \text{см}^3 \text{г}^{-1}$). Без учета корреляционных эффектов действие потенциала (3.54) должно было бы приводить к образованию вблизи стенки слоя HeI, толщина которого z_0 увеличивается при $T \rightarrow T_{\lambda 0}$ по закону

$$z_0 = \left(\frac{\theta}{t_0} \left| \frac{dT_\lambda}{d\mu} \right| \right)^{1/3} = z_{00} t_0^{-1/3} = (2,3 - 5,0) \cdot 10^{-8} t_0^{-1/3} \text{ см.} \quad (3.55)$$

Фактически, однако, такой четко выраженный слой не образуется, а для определения зависимости $\rho_s(z)$ в области действия «пристеночного потенциала» (3.54) требуется решить уравнение (3.44) с

$$t \equiv t(z) = t_0 - \left| \frac{dT_\lambda}{d\mu} \right| \frac{\theta}{z^3} \quad (3.56)$$

и с граничными условиями

$$\psi(0) = 0, \quad \psi(\infty) = \psi_e = t_0^{1/3}. \quad (3.57)$$

Заметим, что при учете ван-дер-ваальсовых сил условия $\psi(0) = 0$ на стенке можно было и не налагать, заменив его (как и в задаче о вихре; см. раздел 3.4) физически очевидным требованием отсутствия экспоненциально нарастающих решений.

Поскольку в области $z = z_0$ потенциал (3.54) меняется довольно быстро, то для качественного исследования задачи зависимость $t(z)$ можно приближенно заменить выражением

$$t(z) = \begin{cases} t_0 & \text{при } z > z_0, \\ -|dT_\lambda/d\mu| \theta/z^3 & \text{при } z < z_0. \end{cases} \quad (3.56a)$$

Асимптотика $\psi(z)$ при $z < z_0$, с учетом (3.57), имеет вид

$$\Psi(z < z_0) = cz \exp\left(-\frac{l_0}{z}\right), \quad (3.58)$$

где c — постоянная интегрирования и

$$l_0 = \frac{z_{00}^2}{\xi_{00}} \sqrt{\frac{3}{3+M}}, \quad z_{00} = \left(\theta \left| \frac{dT_\lambda}{d\mu} \right| \right)^{1/3} = (2,3 - 5,0) \cdot 10^{-8} \text{ см} \cdot \text{град}^{-1/3}. \quad (3.59)$$

С другой стороны, в области $z > z_0$ справедливо «свободное» решение без поля (см. формулу (3.10))

$$\Psi(z > z_0) = \Psi_e(t_0) \frac{\text{th}[(z-b)/2\xi_M^-]}{\sqrt{1 + [2M/(3+M)] \text{ch}^{-2}[(z-b)/2\xi_M^-]}}, \quad (3.58a)$$

«сдвинутое» от стенки на некоторое расстояние b . Производя «сшивание» выражений (3.58) и (3.58a) при $z = z_0$ (требуем равенства функций и их производных), для постоянных c и b находим значения

$$b = \frac{l_0}{1 + (l_0/z_0)}, \quad c = \frac{\Psi_e(t_0)}{\sqrt{2} \xi_0 [1 + (l_0/z_0)]} e^{l_0/z_0}, \quad (3.60)$$

причем условием применимости этих формул является требование

$$\psi_0(z_0) = \psi(z_0) t_0^{-1/3} = \frac{\Psi(z_0)}{\Psi_e(t_0)} \approx \frac{cz_0 e^{-l_0/z_0}}{\Psi_e(t_0)} \approx \frac{z_0}{\sqrt{2} \xi_0} = \frac{z_{00}}{\sqrt{2} \xi_{00}} t_0^{1/3} \ll 1. \quad (3.61)$$

Из (3.60) и (3.59) следует, что при малых значениях разности $t_0 \equiv T_{\lambda 0} - T$, когда $l_0/z_0 = (l_0/z_{00}) t_0^{1/3} \ll 1$, расстояние b , на котором Ψ эффективно обращается в нуль, от температуры практически не зависит и не превышает нескольких межатомных расстояний. Это оправдывает применение вблизи

λ -точки формул раздела 3.2, полученных без учета ван-дер-ваальсовых сил. В то же время при удалении от λ -точки (например, для материала с $\theta \sim 10^{-13}$ эрг·см³г⁻¹ при $t_0 \sim 2 \cdot 10^{-3}$ °К) эффекты, связанные с влиянием ван-дер-ваальсовых сил, становятся, вообще говоря, существенными, как это ясно из рис. 5 (кривые 2) и фактически наблюдалось на эксперименте⁸³.

В случае микроскопических заряженных тел (ионы в гелии) наличие короткодействующего электрострикционного потенциала (3.52) также приводит к некоторому смещению точки, в которой эффективно $\Psi = 0$, от границы иона в глубь гелия, однако величина этого смещения довольно

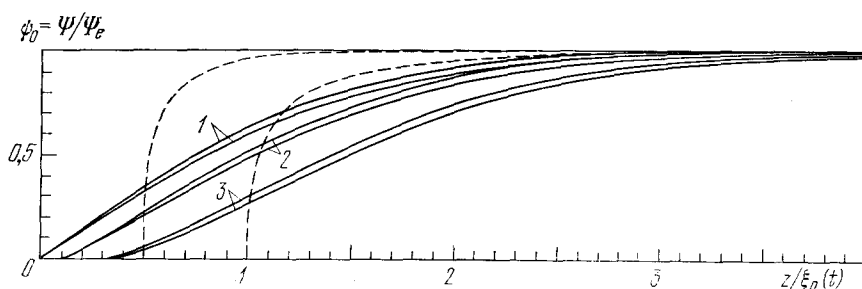


Рис. 5. Распределение параметра порядка $\psi_0(y)$ вблизи твердой стенки с учетом поля ван-дер-ваальсовых сил.

Сплошные кривые получены путем численного решения уравнения (3.44) с потенциалом (3.54) для двух значений параметра M : $M = 0$ (нижние кривые) и $M = 1$ (верхние кривые). Кривые 1 получены без учета влияния поля, но с граничным условием (2.26). Кривые 2 и 3 отвечают значениям отношения z_0/ξ_0 , равным соответственно $1/4$ и $1/2$. Штриховыми линиями изображено распределение $\psi_0(y)$, которое имело бы место с учетом влияния ван-дер-ваальсовых сил, но в отсутствие корреляционных эффектов.

мала и даже при $T \rightarrow T_{\lambda 0}$ не превышает размера иона (т. е. радиуса «твердого остова» $R_0^+ \approx 7$ Å в случае положительного иона или, в случае отрицательного иона, радиуса электронного «пузырька» $R_0^- \approx 17$ Å; см. ¹⁵, § 81). Тем не менее наличие самого этого условия означает существование вблизи иона области с пониженной концентрацией сверхтекучей компоненты, эффективная ширина которой, определяемая интегралом

$$\frac{4\pi}{3} (R_{\text{eff}}^\pm)^3 = 4\pi \int_{R_0^\pm}^{\infty} \left[1 - \frac{\rho_s(r)}{\rho_{se}} \right] r^2 dr \sim R_0^\pm \xi_M^2(t),$$

неограниченно растет при $T \rightarrow T_{\lambda 0}$. Это может приводить к ряду эффектов. Рассмотрим, например, вопрос о подвижности ионов⁹⁸. Выше λ -точки подвижность ионов можно оценить по формуле Стокса для силы сопротивления при обтекании твердого шара вязкой жидкостью (для положительных ионов)

$$F^+ = 6\pi\eta R_0^+ v_\infty \quad (3.62)$$

или по формуле Рыбчинского — Адамара для силы сопротивления при обтекании пустой полости (отрицательные заряды)

$$F^- = 4\pi\eta R_0^- v_\infty. \quad (3.62a)$$

Здесь η — вязкость гелия I и v_∞ — скорость потока жидкости на бесконечности. Ниже λ -точки можно воспользоваться теми же формулами (с заменой η на η_n и v на v_n — вязкость и скорость нормальной компоненты), но при этом нужно учесть, что плотность нормальной компоненты распределена вокруг иона неравномерно, вследствие чего значение скорости $v_{n,i}$ вблизи иона отличается от значения скорости $v_{n,\infty}$ вдали от иона.

В грубом приближении можно считать, что

$$\rho_n(r) = \begin{cases} \rho & \text{при } r < R_{\text{eff}}, \\ \rho_{ne} = \rho - \rho_{se} & \text{при } r > R_{\text{eff}}, \end{cases}$$

откуда, с использованием уравнения непрерывности ($\rho_n(r) v_n(r) = \text{const}$), находим

$$v_{ni} = \frac{\rho_{ne}}{\rho} v_{n\infty}.$$

Но именно скорость v_{ni} вблизи иона должна, очевидно, входить в выражения (3.62) для силы сопротивления. Таким образом, непосредственно ниже λ -точки имеем

$$F^+ = 6\pi\eta_n R_0^+ \left(1 - \frac{\rho_{se}}{\rho}\right) v_{n\infty}, \quad F^- = 4\pi\eta_n R_0^- \left(1 - \frac{\rho_{se}}{\rho}\right) v_{n\infty}$$

или, поскольку $F^\pm = \frac{e}{\mu_\pm} v_\infty$, то

$$\frac{1}{\mu_\pm} = \frac{1}{\mu_{\pm, \lambda}} \left(1 - \frac{\rho_{se}}{\rho}\right), \quad (3.63)$$

где $\mu_{\pm, \lambda}$ — значение подвижности ионов в λ -точке. Изложенные соображения имеют лишь качественный характер. Тем не менее, температурный закон (3.63) хорошо согласуется с экспериментом⁹⁹.

В заключение кратко остановимся на возможности экспериментального изучения неоднородных распределений плотности сверхтекучей части гелия II вблизи λ -точки путем «зондирования» их волнами второго звука⁹⁴. Для простоты ограничимся случаем медленно меняющейся плотности, когда для анализа распространения волны достаточно использовать приближение геометрической оптики и, более того, можно пренебречь эффектами поглощения и дисперсии звука.

Конкретно, рассмотрим нормальное падение плоской волны второго звука на границу раздела HeI — HeII в поле тяжести. Тогда, как показано в⁹⁴, при оптимальном выборе частоты $\omega \sim 200$ гц (когда, с одной стороны, еще применимо приближение геометрической оптики и в то же время эффекты поглощения и дисперсии звука можно считать малыми) проникновение волны второго звука в область «нормальной» фазы ($z < 0$, см. рис. 4) возможно до расстояний

$$|z| \lesssim z_c \sim \frac{5}{6} \left\{ \ln \left[\left(\frac{3+M}{3} \right)^{1/2} \frac{0,84}{\gamma} \right] \right\}^{3/5} l_g,$$

где γ — некоторый коэффициент, определяемый характером возрастания поглощения второго звука на больших частотах, и значение длины l_g дается формулой (3.49). Если $\gamma \lesssim 0,1$, как это следует из экспериментальных данных¹⁰⁰, то $z_c \geq 1,5 l_g$ и набег фазы в области «хвоста» распределения $\Psi(z)$ (см. рис. 4)

$$\delta\phi = \omega \int_0^{-z_c} \frac{dz}{u_2(z)} \quad (3.64)$$

Достаточно велик ($\delta\phi \gtrsim 2\pi$); здесь $u_2(z) = \sqrt{TS^2\rho_s(z)/\rho\rho_n C_p} \propto \Psi(z)$ — скорость второго звука.

Для измерения фазы волны (или времени запаздывания звукового импульса $\tau = \delta\phi/\omega$) нужно, видимо, на расстоянии $|z| < z_c$ поместить некоторую стенку и наблюдать отражение от нее второго звука. Изменяя, далее, положение стенки или сдвигая (за счет изменения температуры) границу раздела фаз, можно найти $\delta\phi(z)$, а следовательно, согласно (3.64), восстановить и интересующую нас функцию $\Psi(z)$.¹⁰¹

Все сказанное в равной степени относится и к электрическому (и к магнитному) полю, с тем лишь отличием, что характерный масштаб l_g должен быть здесь заменен на l_E (или, соответственно, l_H). При этом возникает дополнительная возможность менять ширину границы раздела и глубину проникновения звука путем изменения напряженности поля.

Таким образом, на обсуждаемом пути можно рассчитывать на получение сведений о функции $\rho_s(\mathbf{r})$ в слабо меняющемся поле. Отметим, однако, что проведение соответствующих экспериментов весьма не просто, поскольку в случае, например, гравитационного поля, для контроля относительного положения границы раздела фаз и «зеркала» с точностью до $(1-0,1) l_g \sim 10^{-2}-10^{-3}$ см требуется контролировать температуру с точностью до $(0,1 \div 1) l_g \cdot |dT_\lambda/d\mu| g \sim 10^{-8}-10^{-9}$ К. Тем не менее подобная степень стабильности, по-видимому, может быть достигнута (см. ⁹¹).

При изучении отражения второго звука от стенки без поля, и в некоторых других случаях, когда приближение геометрической оптики неприменимо, можно проверять полную систему уравнений гелия II вблизи λ -точки (см. раздел 4.1), а также исследовать вопрос о ходе $\rho_s(\mathbf{r})$ вблизи стенки, границы гелия с паром и т. д. Определенный интерес в этом плане может представлять применение для анализа отраженного от неоднородного слоя звукового импульса методов обратной задачи теории рассеяния ¹⁰¹.

Можно надеяться, что изучение распространения второго звука вблизи λ -точки в неоднородном гелии станет важным методом изучения сверхтекучести.

3.3. Поверхностное натяжение и граничное условие на свободной поверхности

В вопросе о характере граничного условия для макроскопического параметра порядка (плотности сверхтекучей компоненты) на свободной поверхности гелия II нельзя привести столь же прямых и убедительных соображений в пользу условия $\Psi = 0$, как это имело место в случае границы между гелием II и твердым телом (см. Введение и раздел 2.2). Тем не менее ряд заключений, основанных на анализе энергии границы в зависимости от предполагаемого значения параметра Ψ на ней (т. е. значения $\Psi(0) \equiv \Psi(z=0)$), можно сделать и для этого случая. Начнем со следующей простой оценки ³⁷ (ниже гелий считаем покоящимся, поэтому функцию $\Psi(z)$ полагаем вещественной и положительной).

Границу между гелием II и его паром можно рассматривать по аналогии с границей «сверхпроводник — нормальный металл». В последнем случае известно ⁴⁸, что макроскопическая волновая функция проникает в нормальный металл, но это проникновение связано с проигрышем свободной энергии (на единицу площади границы)

$$\sigma_N = \frac{\hbar^2}{m} \int_{(N)} \left(\frac{d\Psi}{dz} \right)^2 dz \approx \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Psi^2(0)}{\lambda}. \quad (3.65)$$

Здесь $\Psi(0) \equiv \Psi(z=0)$ — уже упоминавшееся значение $\Psi(z)$ на границе (для простоты функция Ψ считается на границе непрерывной) и λ — некоторая характерная глубина, на которую Ψ -функция «проникает» в нормальную («N») область. В случае контакта между сверхпроводником и нормальным металлом ⁴⁸ $\lambda \sim \xi_N = \hbar v_F / k_B T$, где v_F — скорость электронов на поверхности Ферми в нормальном металле; в случае же пара над поверхностью гелия, за отсутствием другой информации, длину λ можно, например, положить равной по порядку величины тепловой длине волны атома гелия в паре, т. е.

$$\lambda \sim \lambda_T = \sqrt{2\pi\hbar^2/mk_B T} \approx 5,9 \text{ \AA}.$$

С другой стороны, в сверхпроводящей (сверхтекучей) фазе «S» с изменением Ψ вблизи границы связана поверхностная энергия

$$\sigma_S = \frac{\hbar^2}{m} \int_{(S)} \left(\frac{d\Psi}{dz} \right)^2 dz \sim \frac{\hbar^2}{m} \frac{(\Psi_\infty - \Psi(0))^2}{2\sqrt{2}\xi_0(t)}, \quad (3.66)$$

где $\Psi_\infty \equiv \Psi_e(t)$ — равновесное значение параметра порядка вдали от границы и $\xi_0(t)$ — температурно-зависимый радиус корреляции (в варианте теории с $M=0$).

Складывая эти два вклада (3.65) и (3.66) и минимизируя по $\Psi(0)$, видим, что минимум полной поверхностной энергии $\Phi_S = \sigma_S + \sigma_N$ достигается при *)

$$\psi_0(0) \equiv \frac{\Psi(0)}{\Psi_\infty} \approx \frac{\lambda}{\sqrt{2}\xi_0(t)} \sim t^{2/3}. \quad (3.67)$$

Соответствующее минимальное значение поверхностной энергии при этом равно

$$\sigma = \sigma_S + \sigma_N \approx \sigma_S \sim \frac{\hbar^2 \Psi_e^2(t)}{2\sqrt{2}m\xi_0(t)} \sim 10^{-2} t^{4/3} \text{ эрг/см}^2. \quad (3.68)$$

Таким образом мы видим, что если величина параметра λ при $T \rightarrow T_\lambda$ является конечной, то вблизи λ -точки с хорошей степенью точности можно полагать, что $\Psi = 0$ на свободной границе. Попутно мы также получили, что в этих условиях вклад σ_N при вычислениях термодинамических величин можно не учитывать **).

К вопросу о выводе граничных условий можно подойти и несколько иным, но, по сути дела, эквивалентным способом, если без каких-либо конкретных предположений о смысле параметра λ рассматривать уже упоминавшийся в разделе 2.2 функционал^{47, 48, 103-107}

$$\delta\Phi_S = \int \left\{ [\Phi_{II0}(\Psi) - \Phi_{II0}(\Psi_e)] + \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla\Psi|^2 \right\} dV + \frac{\hbar^2}{2m\lambda} \int |\Psi(0)|^2 dS. \quad (3.69)$$

Здесь второй интеграл учитывает весь собственно «поверхностный» вклад в энергию границы, т. е. сумму вкладов $\sigma_N + \sigma_{SN}$, уже проминимизированную по $\Psi_N(0)$ (см. сноску *) на этой странице).

Варьируя (3.69) по $\Psi(0)$, для определения $\Psi(0)$ получаем уравнение

$$\frac{d\Psi}{dz} \Big|_{z=0} + \lambda^{-1}\Psi(0) = 0, \quad (3.70)$$

*) В случае сверхпроводников, помимо уменьшения, имеется также «скачок» значения параметра Ψ на границе. Это обстоятельство феноменологически можно было бы учесть, рассматривая наряду с выражениями (3.65) и (3.66) также корреляционный вклад в поверхностную энергию, связанный с различием в значениях параметра порядка $\Psi_S(0)$ и $\Psi_N(0)$ по обе стороны границы,

$$\sigma_{SN} \sim \frac{\hbar^2}{m\lambda_1} [\Psi_S(0) - \Psi_N(0)]^2,$$

где λ_1 — некоторая новая длина. Минимизирование полной поверхности энергии $\sigma = \sigma_N + \sigma_S + \sigma_{SN}$ по $\Psi_S(0)$ и $\Psi_N(0)$ и привело бы к появлению «скачка» параметра Ψ , причем

$$\Delta\Psi \equiv \Psi_S(0) - \Psi_N(0) \approx \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda} \Psi_S(0).$$

**) При нефиксированных значениях критических индексов результат (3.67) имел бы вид³⁷

$$\psi_0(0) \sim t^{\nu-\nu}, \quad (3.67a)$$

в то время как полная поверхностная энергия по-прежнему определялась бы вкладом от изменения Ψ в упорядоченной (сверхтекучей) фазе

$$\sigma \approx \sigma_S \sim t^{2-\alpha-\nu} = t^{2(2-\alpha)/3}. \quad (3.68a)$$

В работе¹⁰² соотношение (3.67a) было подвергнуто критике на том основании, что для полуограниченной дву- и, по-видимому, трехмерной модели Изинга это соотношение нарушается¹⁰³ и, следовательно, в критической области λ уже нельзя считать температурно-независимой величиной. Отметим, однако, что в случае модели Изинга речь фактически идет о контакте двух сред, из которых только одна может обладать магнитным порядком (т. е., по сути дела, речь идет о контакте между ферромагнитной системой и вакуумом). В случае же пара над поверхностью гелия обе граничащие подсистемы могли бы стать сверхтекучими (другое дело, что в паре с заданной плотностью ρ_{vap} этот переход совершился бы при гораздо более низкой температуре) и, значит, между значениями Ψ по обе стороны границы возможны корреляции (или, как еще говорят, возможен эффект близости). Очевидно, о подобных корреляциях не имеет смысла говорить в случае границы с вакуумом и, вообще, в случае границы раздела сред, состоящих из разнородных материалов.

или, если перейти к приведенной ψ_0 -функции (2.20) и воспользоваться уравнением (3.9а) с $E = 1$ (полупространство), то

$$\begin{aligned}\psi_0(0) &= \frac{\lambda}{\xi_0(t) \sqrt{2}} [1 - \psi_0^2(0)] \sqrt{1 + v_0^2 \psi_0^2(0)}, \\ \psi_0(0) &= \frac{\Psi(z=0)}{\Psi_e(t)}, \quad \xi_0(t) = 2,74 \cdot 10^{-8} t^{-2/3} \text{ см.}\end{aligned}\quad (3.71)$$

Соответствующее полное значение поверхностной энергии при этом равно

$$\begin{aligned}\delta\Phi_S &= \frac{\delta\tilde{\Phi}_S}{S} \sigma(t) - \frac{3}{4} \sigma_0(t) \left\{ 2 \int_0^{\psi_0(0)} (1 - \psi_0^2) \sqrt{1 + v_0^2 \psi_0^2} d\psi_0 - \right. \\ &\quad \left. - \psi_0(0) [1 - \psi_0^2(0)] \sqrt{1 + v_0^2 \psi_0^2(0)} \right\},\end{aligned}\quad (3.72)$$

где S — площадь границы и значения $\sigma(t)$ и $\sigma_0(t)$ даются формулами (3.16) и (3.16а). При $\lambda/\sqrt{2}\xi_0(t) \ll 1$ из (3.71) получаем результат (3.67), а из (3.72) следует, что

$$\delta\Phi_S \approx \sigma(t) \propto t^{4/3}, \quad (3.72a)$$

в согласии с выше приведенным выражением (3.68).

Из формул (3.71) и (3.72) можно найти также поправочные члены к (3.67) и (3.68)

$$\psi_0(0) = \frac{\lambda}{\sqrt{2}\xi_0(t)} \left[1 - \frac{1}{2(M+1)} \left(\frac{\lambda}{\xi_0} \right)^2 + O \left(\frac{\lambda}{\xi_0} \right)^4 \right], \quad (3.71a)$$

$$\delta\Phi_S = \sigma(t) - \frac{3}{4} \frac{\sigma_0(t)\lambda}{\xi_0(t)\sqrt{2}} \left[1 + O \left(\frac{\lambda}{\xi_0} \right)^2 \right]. \quad (3.72b)$$

Аналогичные поправочные члены, которые могут представлять интерес при удалении от λ -точки, легко получить и для других величин, используемых в разделе 3.1. Мы, однако, не будем на этом останавливаться.

Функционал (3.69) и следующие из него выражения (3.71) и (3.72) могут быть использованы и при анализе более общих случаев, когда, например, $\lambda \gg \xi_0(t)$ или λ имеет отрицательный знак. Такие ситуации возможны в случае некоторых других (например, магнитных) фазовых переходов^{48, 103–107 *}). В применении же к нашей задаче мы полагаем, что $\lambda > 0$ и является величиной порядка атомных размеров (других параметров в задаче просто не видно, поскольку при $T \approx T_\lambda$ все длины a , λ_T и $a_{\text{вар}} \approx 10 a$ являются величинами одного порядка).

Проверять граничные условия для функции Ψ можно, используя данные измерений смещений λ -точки, средней плотности сверхтекучей части и термодинамических величин в тонких щелях, каналах и пленках He II, о чем уже шла речь в разделах 2.2 и 3.1. Но, пожалуй, наиболее непосредственно условие на свободной границе может проявляться в поведении вблизи λ -точки коэффициента поверхностного натяжения³⁷. Дело в том, что с неоднородностью Ψ вблизи границы связана дополнительная поверхностная энергия, в силу чего поверхностное натяжение гелия II также должно содержать дополнительный вклад $\delta\sigma \equiv \sigma_{II} - \sigma_I = \delta\Phi_S$, отсутствующий в нормальной фазе. Поскольку показатель степени в выражении для $\delta\sigma(t)$ близок к 1 (см. формулы (3.68), (3.72a)), то при грубых измерениях наличие указанного вклада должно, очевидно, проявляться как некоторый «излом» на кривой зависимости $\sigma(T)$ при $T \approx T_\lambda$. Существование такого излома было отмечено еще в работе¹⁰⁸ и подтверждено последующими более точными измерениями^{109, 110}; при этом экспериментальная величина излома $(d\delta\sigma/dT)_{\text{экс}} = 0,0226 \text{ эрг}\cdot\text{см}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$ (оцененная в¹¹⁰ при $\varepsilon \equiv t/T_\lambda = 0,01$) близка к вычисленной по формуле (3.16), согласно которой при $t = 0,0217^\circ\text{K}$ $(d\delta\sigma/dT)_{\text{теор}} \approx \frac{\delta\sigma}{t} = 0,0252 - 0,0295 \text{ эрг}\cdot\text{см}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$. Некоторое отличие теоретических и экспериментальных значений, равно как и отмечавшееся в^{109, 110} плохое функциональное согласие наблюдаемой температурной зависимости $\delta\sigma(t)$ в области $t \gtrsim 0,01^\circ\text{K}$ с форму-

*) Ситуация, когда $\lambda \gg \xi_0(t)$, имеет, в частности, место для границы «сверхпроводник — вакуум» (или «сверхпроводник — диэлектрик»). В этом случае $\lambda \sim \xi^2(0)/a \sim 1 \text{ см}$, и условие (3.70) близко к условию $d\Psi/dz = 0$ вплоть до очень малой окрестности температуры сверхпроводящего перехода $T_c - T \lesssim 10^{-8}^\circ\text{K}$. Сказанное, разумеется, не противоречит примечанию**) на стр. 194, поскольку параметр λ , как характеристику энергии границы, можно вводить и для тех сред, между которыми невозможны эффекты близости. Отметим, что именно в последнем случае можно ожидать, что параметр λ в критической области окажется температурно-зависимой величиной.

лой (3.16), вполне можно объяснить поправками типа приведенной в формуле (3.726). При этом соответствующее значение параметра λ , которое требуется для объяснения опытных данных, оказывается приблизительно равным $\lambda \approx (1 - 3) \lambda_T \approx 6 - 18 \text{ \AA}$.

В связи с изложенным следует, однако, отметить, что к поведению, аналогичному (3.68), может приводить ¹⁰² также в некоторых случаях и учет длинноволновых флуктуаций параметра порядка. Дело в том, что для «образца» конечных размеров (скажем, слоя гелия, толщиной L) флуктуационная часть плотности свободной энергии $\delta\Phi_{fl}(\eta_e, t, L)$ содержит поправки типа $\delta\Phi_{fl}(\eta_e, t) \xi_0(t)/L$, по сравнению с соответствующей флуктуационной частью плотности свободной энергии $\delta\Phi_{fl}(\eta_e, t)$ бесконечного образца (см. выражение (2.50), где в случае конечной системы суммирование нужно проводить по дискретному спектру флуктуаций). При умножении на объем слоя $V = SL$ эти поправки и дают, очевидно, поправки к поверхностной энергии $\delta\tilde{\Phi}_{S, fl}$.

Подчеркнем, что существование флуктуационных поправок $\delta\tilde{\Phi}_{S, fl}$ также связано с определенным типом граничным условием ^{111, 112}, и потому тоже представляет значительный интерес; правда, граничное условие налагается в данном случае не на сам равновесный параметр порядка, а на его флуктуации. К сожалению, детальное количественное вычисление величины соответствующего флуктуационного вклада пока не проводилось. Из общих соображений и по аналогии с поведением флуктуационной части теплоемкости можно лишь ожидать, что этот вклад должен быть приблизительно одинаковым выше и ниже λ -точки, но при этом при $t > 0$ и $t < 0$ он может иметь разный знак ¹⁰² (см. также ¹⁰³ и ¹¹¹).

При учете возможных флуктуационных поправок к температурной зависимости коэффициента поверхностного натяжения интерпретация экспериментальных данных оказывается пока неоднозначной, ввиду трудности выделения регулярной части в зависимости $\sigma(t) = \sigma_{reg} + \sigma_{fl} + \delta\sigma$, причем в λ -точке $\sigma_{fl} = 0$ и $\delta\sigma = 0$. В принципе, однако, регулярная часть σ_{reg} (по определению, не имеющая особенностей в λ -точке) может быть отделена. Далее, выше λ -точки $\delta\sigma = 0$, и таким образом определяется также вклад $\sigma_{fl}(t < 0) \equiv \sigma_{fl}(T > T_\lambda)$. Если, наконец, $\sigma_{fl}(t) = |\sigma_{fl}(-t)|$, то мы сможем выделить вычислявшийся выше вклад $\delta\sigma(t > 0)$. Вполне возможно, вместе с тем, что $\sigma_{fl} \ll \delta\sigma$, и тогда уже имеющиеся измерения дают именно поверхностную энергию; как упоминалось, в этом случае $\lambda = 6 - 18 \text{ \AA}$.

Помимо очевидной желательности возможно более точного определения функции $\sigma(t)$, в случае чистого гелия II, находящегося под давлением насыщенных паров, целесообразно определять натяжение $\sigma(t)$ для растворов ^3He в ^4He (при этом следует также измерять концентрацию ^3He вблизи поверхности).

3.4. К р и т и ч е с к а я с к о р о с т ь с в е р х т е к у ч е г о т е ч е н и я . В и х р е в а я н и т ь

Помимо задач, рассматривавшихся выше в предположении об отсутствии течения, имеется ряд других, в которых скорость $v_s \neq 0$. При этом, во-первых, нужно указать на то, что появление течения изменяет равновесное значение ρ_s . В результате при некоторой скорости v_{sc} сверхтекучесть исчезает или сверхтекучее течение теряет устойчивость. Во-вторых, в рамках Ψ -теории вихревая нить в гелии II имеет структуру, в частности, на самой оси нити $\rho_s(0) = 0$. То же относится и к вихревому кольцу и некоторым другим течениям.

Начнем с равномерного и однородного течения в безграничном гелии II, т. е. практически в достаточно широком канале. В этом случае согласно (2.15) и (2.13) термодинамический потенциал гелия II равен $\Phi_{II}(p, T, \Psi) = \Phi_{II0} + \frac{\rho_s v_s^2}{2} =$

$$= \Phi_I + \frac{3\Delta C_p}{(3+M)T_\lambda} \left[-t^{4/3} \frac{\rho_s}{\rho_{00}} + \frac{1-M}{2} t^{2/3} \frac{\rho_s^2}{\rho_{00}} + \frac{M}{3} \frac{\rho_s^3}{\rho_{00}^3} \right] + \frac{\rho_s v_s^2}{2}, \quad (3.73)$$

$$\rho_{00} = 1,43\rho_\lambda \approx 0,21 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3} \text{ град}^{-2/3}.$$

Для фазового перехода второго рода в точке перехода $\rho_s = 0$, а сама точка перехода $T_\lambda(v_{sc2})$ определяется из условия обращения в нуль коэффициента при ρ_s . Таким образом, переход происходит для скорости

$$v_{sc2} = \left(\frac{6\Delta C_p}{(3+M)T_\lambda \rho_{00}} \right)^{1/2} t^{2/3} = 5,8 \cdot 10^3 \left(\frac{3}{3+M} \right)^{1/2} t^{2/3} \text{ см} \cdot \text{сек}^{-1}. \quad (3.74)$$

Напомним, что согласно (2.12), (2.17) и (2.19) корреляционная длина

$$\xi_M = \left(\frac{3+M}{3} \right)^{1/2} \left(\frac{\hbar^2 \rho_{00} T_\lambda}{2m^2 \Delta C_p} \right)^{1/2} t^{-2/3}$$

и, следовательно,

$$v_{sc2} = \frac{\hbar}{m \xi_M}.$$

Заметим, что в самосогласованном варианте (2.5), (2.8)

$$v_{sc2} = \left(\frac{2a}{m} \right)^{1/2} t^{1/2} = \left(\frac{2\Delta C_p}{T_\lambda |d\rho_{se}/dT|} \right)^{1/2} t^{1/2} = 4,5 \cdot 10^3 t^{1/2} \text{ см} \cdot \text{сек}^{-1}. \quad (3.75)$$

Это выражение было получено еще в работе ²⁰ до развития Ψ -теории; поскольку фактически зависимость $\rho_{se} \propto t$ в достаточно широком интервале температур уже несправедлива, выражение (3.75) использоваться ниже не будет. Однако в сверхтекучем He^3 и, вероятно, для растворов He^3 в He^4 вблизи трикритической точки вполне разумно использовать именно выражение типа (3.75).

Соотношение (3.74), как и в случае (3.4), можно «обернуть», т. е. найти происходящий при течении сдвиг температуры λ -точки

$$\begin{aligned} \Delta T_\lambda(v_s) &\equiv T_\lambda(v_s=0) - T_\lambda(v_s) = \\ &= \frac{v_s^{3/2}}{[6\Delta C_p/(3+M) T_\lambda \rho_{00}]^{3/4}} = 2,3 \cdot 10^{-6} \left(\frac{3+M}{3} \right)^{3/4} v_s^{3/2} \text{ }^\circ\text{К}. \end{aligned} \quad (3.76)$$

В принципе, можно измерять не только v_{sc} или ΔT_λ , но и изменение с v_s плотности ρ_s . Так, используя (3.73) и условие $\partial\Phi_{II}/\partial\rho_s = 0$, имеем

$$\rho_{se}(v_s) = \rho_{00} t^{2/3} \left(1 - \frac{T_\lambda \rho_{00}}{2\Delta C_p t^{4/3}} v_s^2 \right), \quad (3.77)$$

где для простоты положено $M = 0$.

Выше считалось, что скорость нормальной части жидкости $v_n = 0$. Если же $v_n \neq 0$, то как из общих соображений, так и из конкретных выражений, приведенных в разделе 4.1, следует, что в формулах (3.74) — (3.77) нужно заменить

$$v_s \rightarrow |\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n| \equiv w. \quad (3.78)$$

Одна из возможностей наблюдать сдвиг ΔT_λ или изменение $\rho_{se}(w)$, обусловленные наличием скорости $w = |\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n|$, состоит в измерении температуры перехода T_λ в присутствии потока тепла. Понижение T_λ в присутствии потока тепла действительно наблюдается (см., например, ¹¹³), но интерпретация соответствующих измерений еще недостаточно ясна. Во всяком случае, речь не идет об однородном течении в отсутствии вихрей и поэтому приведенные выше формулы неприменимы. С другой стороны, ясно, что вблизи λ -точки зависимость различных эффектов и величин от скорости w или потока тепла может рассматриваться на основе уравнений, обсуждаемых в разделе 4.1 (см. также раздел 4.2).

Наблюдаемые на опыте ^{5,114} критические скорости для широких каналов и щелей значительно меньше скорости (3.74). Это вполне понятно, поскольку в широких каналах уже при скоростях $v_s \ll v_{sc2}$, происходит рождение вихрей. Для тонких каналов и щелей рождение вихрей затруднено, и критическая скорость может определяться обсуждаемым здесь эффектом.

Считая, что для узких каналов и щелей $v_n = 0$, воспользуемся уравнением (2.20). Направим ось z перпендикулярно к щели, а ось y вдоль

щели и направления скорости v_s . При этом скорость v_s можно считать постоянной вдоль щели (предполагается, что ширина щели постоянна). Положим $\Psi(y, z) = e^{i(m/\hbar)v_s y} \Psi(z)$, что как раз и отвечает течению со скоростью v_s (см. (1.2)). Тогда для $\psi_0(z) = \Psi(z) / \left[\left(\frac{\rho_{00}}{m} \right)^{1/2} t^{1/3} \right]$ из (2.20) получаем уравнение

$$\frac{d^2 \psi_0}{dz^2} = \left[-1 + \frac{3+M}{6} \frac{\rho_{00} T_\lambda}{\Delta C_p} \frac{v_s^2}{t^{4/3}} + (1-M) \psi_0^2 + M \psi_0^4 \right] \psi_0. \quad (3.79)$$

Очевидно, что это уравнение отличается от (3.1) лишь членом $(v_s/v_{sc2})^2 \psi_0$, пропорциональным v_s^2 . Поэтому все результаты, полученные в разделе 3.1 при $v_s = 0$, легко обобщаются на случай скорости $v_s \neq 0$. Так, для щели с шириной d в качестве условия появления решения с $\rho_s \neq 0$ вместо (3.4) получаем (см. также (3.74))

$$\left. \begin{aligned} d \left[1 - \left(\frac{v_s}{v_{sc2}} \right)^2 \right]^{1/2} &= \pi \xi_M(t) = \frac{8.6 \cdot 10^{-8} [(3+M)/3]^{1/2}}{t^{2/3}} \text{ см}, \\ v_{sc2} &= 5.8 \cdot 10^3 \left(\frac{3}{3+M} \right)^{1/2} t^{2/3} \text{ см} \cdot \text{сек}^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (3.80)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \Delta T_\lambda &= T_\lambda - T_\lambda(d, v_s) = \left(\frac{3+M}{3} \right)^{3/4} \left(\frac{\pi^2 \xi_{00}^2}{d^2} + \frac{\rho_{00} T_\lambda v_s^2}{2 \Delta C_p} \right)^{3/4} = \\ &= \left[\left(\frac{3+M}{M} \right) \left(\frac{7.4 \cdot 10^{-15}}{d^2} + 3 \cdot 10^{-8} v_s^2 \right) \right]^{3/4} \text{ К}, \end{aligned} \quad (3.81)$$

где $T_\lambda \equiv T_\lambda(d \rightarrow \infty, v_s = 0)$, толщина d измеряется в см и v_s в см·сек⁻¹; разумеется, при $d \rightarrow \infty$ или при $v_s = 0$ формула (3.81) переходит соответственно в (3.76) или в (3.4а).

При заданных d и t критическая скорость v_{sc2} , при которой $\rho_s = 0$, согласно (3.81) равна

$$v_{sc2}(d) = \left[1 - 7.4 \cdot 10^{-15} \frac{(3+M)/3}{d^2 t^{4/3}} \right]^{1/2} v_{sc2}, \quad (3.82)$$

где, разумеется, $v_{sc2} \equiv v_{sc2}(d \rightarrow \infty)$ определяется выражением (3.74)

Мы снабдили критическую скорость v_{sc2} индексом 2, поскольку эта скорость является, можно сказать, максимальной критической скоростью — при $v_s \rightarrow v_{sc2}$ плотность $\rho_s \rightarrow 0$. Однако, даже если не касаться возможности образования вихрей или каких-то иных «возбуждений», сверхтекучее течение теряет устойчивость при некоторой критической скорости $v_{sc1} < v_{sc2}$. Дело в том, что поток сверхтекучей части гелия II $j_s = \rho_s v_s$, как функция v_s , имеет максимум. В самом деле, для однородного течения (широкие щели) согласно (3.77),

$$j_s = \rho_s(v_s) v_s = \rho_{00} t^{2/3} \left(1 - \frac{T_\lambda \rho_{00}}{2 \Delta C_p t^{4/3}} v_s^2 \right) v_s, \quad (3.83)$$

и $dj_s/dv_s = 0$ для скорости

$$v_{sc1} = \frac{1}{\sqrt{3}} v_{sc2} = 3.3 \cdot 10^3 t^{2/3} \quad (3.84)$$

(см. (3.74); как и в (3.77), мы ограничиваемся в (3.84) случаем $M = 0$).

При $v_s > v_{sc1}$ поток j_s падает с ростом v_s , что и является указанием на появление неустойчивости. Убедиться в появлении неустойчивости можно, рассматривая закон изменения малых возмущений во времени. В данном случае, однако, в этом нет нужды, так как сверхтекучее течение может считаться термодинамически квазиравновесным. Поэтому достаточно вычислить вторые производные термодинамического потенциала

и выяснить, имеет ли место минимум потенциала. Такой простой расчет (см., например ³⁹) и приводит к выводу о неустойчивости течения с $dj_s/dv_s < 0$.

В применении к узким щелям и каналам вычисление скорости v_{sc1} требует использования решений для $\rho_s(z)$ типа полученных в разделе 3.1. При этом поток j_s , конечно, неоднороден по z (поток $j_s = 0$ на стенке и максимален в середине щели). Неясно поэтому, как применять условие неустойчивости $dj_s/dv_s < 0$, локально (при каждом z) или в среднем по щели? В этой связи не будем здесь приводить результаты некоторых имеющихся расчетов ³⁹. Нужно еще обобщить эти расчеты (в частности, на случай $M \neq 0$) и, главное, исследовать течение на устойчивость методом малых возмущений. Затем следует сравнить полученные значения v_{sc1} с оценками, основанными на представлении о критической скорости сверхтекучего течения как о пороге для рождения вихрей и т. д. (при этом следует иметь в виду, что, как ясно из нижеследующего, вихри в гелии II вблизи λ -точки, вообще говоря, существенно отличаются от вихрей вдали от λ -точки). Таким образом, задача о критической скорости вблизи λ -точки в целом еще не решена даже в простейших условиях (однородная щель). То же можно сказать об эффектах в пористой среде, для неоднородных по сечению каналов, «эффекте близости», и т. д. ^{71,115,116} (сказанное касается создания достаточно полной картины и не означает, конечно, отрицания ценности качественных или даже количественных соображений, содержащихся в цитированных и некоторых других статьях).

Вторым важнейшим классом сверхтекучих течений, помимо одномерного прямолинейного течения, рассмотренного выше, являются течения, связанные с вращением. Здесь простейшим и в то же время важнейшим объектом является, видимо, изолированная вихревая нить. Соответствующую задачу мы сейчас и рассмотрим ²⁵.

Опираясь на уравнение (2.20) с $M = 0$, представим функцию

$$\Psi = \Psi_0 \left[\left(\frac{\rho_{00}}{m} \right)^{1/2} t^{1/3} \right]$$

в виде

$$\Psi(r, \varphi) = \Psi(r) e^{in\varphi},$$

где $n = 1, 2, \dots$, а r и φ — цилиндрические координаты с осью z , совпадающей с осью вихревой нити. Скорость \mathbf{v}_s имеет лишь составляющую $v_{s\varphi} = \frac{\hbar n}{mr}$, причем циркуляция

$$\oint \mathbf{v}_s d\mathbf{l} = 2\pi r v_{s\varphi} = \frac{2\pi n \hbar}{m}. \quad (3.85)$$

Заметим, что если бы в исходных выражениях (1.2), (2.15), (2.16) вместо массы атома гелия m стояла некоторая эффективная масса $m_{\text{eff}}(p, T)$, то циркуляция равнялась бы $2\pi n \hbar / \sqrt{m m_{\text{eff}}}$. Но циркуляция не может меняться с изменением температуры. В то же время при $T = 0$ формула (3.85) также справедлива ¹¹⁷. Кроме того, в неоднородных внешних условиях (скажем, в поле тяжести) циркуляция при замене m на $m_{\text{eff}}(p, T)$ зависела бы от выбора контура, т. е. не была бы постоянной. Отсюда, как и по соображениям, изложенным в конце раздела 2.1, следует, что в (1.2), (2.15), (2.16) $m_{\text{eff}} = m$.

Для вихревой нити уравнение (2.20) принимает вид ($r_* = r/\xi_0$, $\psi_0 = \Phi_0 e^{in\varphi}$)

$$r_*^2 \frac{d^2 \Phi_0}{dr_*^2} + r_* \frac{d\Phi_0}{dr_*} + (r_*^2 - n^2) \Phi_0 - r_*^2 \Phi_0^3 = 0. \quad (3.86)$$

При $r_* \rightarrow 0$ функция Φ_0 имеет вид $C_1 r_*^{\pm |n|}$. Решения с $\Phi_0 \sim C_1 r_*^{-|n|}$ не имеют физического смысла, так как $\psi_0 \rightarrow \infty$ при $r_* \rightarrow 0$. Нужно выбрать решение $\Phi_0(r_* \rightarrow 0) = C r_*^{|n|}$, и, следовательно, на оси нити $\rho_s = 0$. При $r_* \rightarrow \infty$ плотность $\rho_s = m |\Psi|^2 = m \Phi^2$ должна равняться невозмущенной плотности ρ_{se} , т. е. $\Phi_0(r_* \rightarrow \infty) = 1$. Как легко видеть, искомое решение уравнения (3.86) при больших r_* имеет вид

$$\Phi_0^2 = 1 - \frac{n^2}{r_*^2}, \quad r_* \gg 1. \quad (3.87)$$

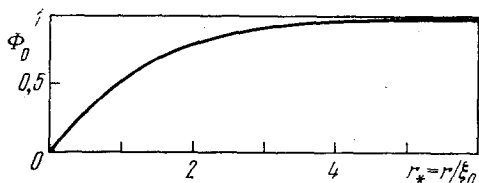


Рис. 6. Решение уравнения (3.86) для функции $\Phi_0(r_*)$.

Во всем интервале $0 \leq r_* \leq \infty$ уравнение (3.86) в квадратурах не интегрируется. Результаты его численного решения для $n = 1$ приведены на рис. 6.

Термодинамический потенциал единицы длины нити (имеется в виду разность термодинамических потенциалов при наличии и в отсутствии циркуляции скорости) равен

$$\left. \begin{aligned} f &= \left(\frac{\pi \hbar^2}{m^2} \right) \rho_{se} N, \quad N = N_1 + N_2, \\ N_1 &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \left[\Phi_0^4 - 2\Phi_0^2 + 2 \left(\frac{d\Phi_0}{dr_*} \right)^2 + 1 \right] r_* dr_*, \\ N_2 &= n^2 \int_0^{R/\xi_0} \Phi_0^2 \frac{dr_*}{r_*}. \end{aligned} \right\} \quad (3.88)$$

Здесь R — некоторый максимальный радиус интегрирования (диаметр сосуда, расстояние между вихревыми нитями), который нужно ввести при рассмотрении бесконечно длинной нити. Если плотность $\rho_s = \rho_{se} = \text{const}$, как это имело бы место при неучете градиентного члена, то $N = N_e = n^2 \ln(R/a)$, где a — некоторое расстояние атомного масштаба. В обсуждаемой же задаче в результате численного расчета имеем

$$\left. \begin{aligned} n=1: \quad N &= \ln \left(1,46 \frac{R}{\xi_0} \right), \\ n=2: \quad N &= 4 \ln \left(0,59 \frac{R}{\xi_0} \right), \\ n=3: \quad N &= 9 \ln \left(0,38 \frac{R}{\xi_0} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.89)$$

Отсюда ясно, что при достаточно большом R (изолированная нить) различие между N_e и N сравнительно невелико (это связано с тем, что основной вклад в f вносит далекая, «классическая» область). При этом энергия примерно пропорциональна n^2 и состояний с $n > 1$ учитывать не нужно (выгоднее образование двух нитей с $n = 1$, чем одной нити с $n > 1$).

Дифференцируя выражение типа (3.88) по температуре, химическому потенциалу или химическому потенциалу примеси He^3 , можно получить связанные с вихревой нитью вклады в энтропию и плотность, а также найти соответствующее изменение концентрации He^3 вблизи нити.

Поскольку $\xi_0 = 2,74 \cdot 10^{-8} t^{-2/3}$, ясно, что с приближением к λ -точке нить утолщается и, например, при $t = T_\lambda - T = 10^{-3}^\circ \text{K}$ плотность ρ_s вблизи оси нити существенно отличается от равновесного значения ρ_{se} вплоть до расстояний $r \sim (3-4) \xi_0 \sim 10^{-5} \text{ см}$ от оси нити (см. рис. 6). При еще меньших значениях t толщина нити вполне уже может оказаться

соизмеримой с шириной даже макроскопических каналов и щелей. Именно в таких условиях и нужно использовать Ψ -теорию сверхтекучести. К сожалению, возникающие здесь задачи (вихревое кольцо; короткая вихревая нить между перпендикулярными к ее оси стенками; вихревая нить в щели со стенками, параллельными оси нити вращения капли¹¹⁸ и др. еще не решены; некоторые результаты, см., впрочем, в^{119,120}). Мы не говорим уже о различных нестационарных задачах, связанных с образованием и колебаниями вихревых нитей и вихревых колец (для решения таких задач следует использовать уравнения, приведенные в разделе 4.1, поскольку выше рассматривалось лишь стационарное течение гелия II).

Вращающийся гелий II является, как известно, одним из основных объектов при изучении сверхтекучести (см. обзоры^{16,120,121}). При приближении к λ -точке некоторые задачи с вращением, естественно, требуют привлечения Ψ -теории сверхтекучести (см.¹²⁰, раздел 12). Ограничимся здесь таким примером: сосуд с гелием II вращается с угловой скоростью ω , причем радиус сосуда $R \gg \xi_0$. С увеличением ω расстояние между вихревыми нитями становится порядка ξ_0 , т. е. порядка толщины нити, и средняя плотность ρ_s в сосуде сильно понижается. С дальнейшим ростом ω плотность ρ_s вообще обращается в нуль, т. е. сверхтекучесть исчезает. Согласно²⁷ соответствующее критическое значение $\omega_{c2} \approx 10^{11} t^{4/3} \text{ сек}^{-1}$, или понижение температуры λ -точки в результате вращения

$$\Delta T_\lambda = T_\lambda(\omega = 0) - T_\lambda^*(\omega = \omega_{c2}) = 5,4 \cdot 10^{-3} \omega^{3/4}$$

К сожалению, этот эффект довольно мал, так как даже при $\omega \sim 10^4$ сдвиг $\Delta T_\lambda \sim 5 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{K}$. С другой стороны, в этой задаче речь идет о «грубом» эффекте — полном подавлении сверхтекучести. Более деликатные изменения во вращающемся гелии II, связанные с непостоянством ρ_s в вихревых нитях, могут оказаться существенными и при значительно меньших значениях ω , но $t \lesssim 10^{-3} \text{ }^\circ\text{K}$.

IV ОБЩАЯ Ψ -ТЕОРИЯ СВЕРХТЕКУЧЕСТИ ВБЛИЗИ λ -ТОЧКИ (ДВИЖЕНИЕ СВЕРХТЕКУЧЕЙ И НОРМАЛЬНОЙ КОМПОНЕНТ, НЕСТАЦИОНАРНОСТЬ)

4.1. Основные уравнения

Выше рассматривался либо покоящийся гелий II, либо рассматривалось его стационарное сверхтекучее течение. Очевидно, Ψ -теория сверхтекучести вблизи λ -точки в общем случае должна относиться и к случаям, когда движется не только сверхтекучая, но и нормальная компонента гелия II (плотность нормальной компоненты $\rho_n = \rho - \rho_s$, ее скорость есть v_n). При этом движение может быть и нестационарным, и должна учитываться диссипация и релаксация параметра порядка. Соответствующей теории посвящено лишь сравнительно небольшое число работ^{122-125,93}, ряд вопросов еще не выяснен, а возникающие конкретные задачи не решены. Поэтому настоящий раздел будет поневоле довольно кратким.

Начнем со стационарного движения, но с $v_n \neq 0$. Более того, будем считать, что скорость v_n однородна в пространстве, так что

$$\text{div } v_n = 0, \quad \frac{\partial v_n}{\partial t} = 0. \quad (4.1)$$

В этом случае в системе отсчета K' , движущейся относительно лабораторной системы K со скоростью v_n , движение гелия II является чисто сверхтекучим и ничем не может отличаться от рассмотренного ранее. Это значит, что для макроскопической волновой функции гелия II Ψ' в системе K'

термодинамический потенциал имеет вид (2.15). Произведем теперь преобразование Галилея к системе K , причем, как известно (см., например, ¹²⁶, § 17):

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{v}_n t, \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}' + m \mathbf{v}_n, \quad E = E' + \mathbf{p} \mathbf{v}_n + \frac{m v_n^2}{2},$$

$$\Psi(\mathbf{r}) = \Psi'(\mathbf{r} - \mathbf{v}_n t) \exp\left(\frac{i}{\hbar} m \mathbf{v}_n \mathbf{r}\right), \quad (4.2)$$

где рассматривается некоторая частица с массой m и, естественно, штрихованные величины относятся к системе K' , а нештрихованные к системе K .

Переходя в (2.15) от Ψ' к Ψ , согласно (4.2), сразу же получаем

$$\Phi_{II} = \frac{m}{2} \left| \left(-\frac{i\hbar}{m} \nabla - \mathbf{v}_n \right) \Psi \right|^2 + \Phi_{II0}(\rho, T, |\Psi|^2). \quad (4.3)$$

К тому же результату можно прийти и следующим путем. Плотность энергии гелия II в лабораторной системе K естественно записать в виде

$$E = \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \Psi|^2 + \frac{\rho_n v_n^2}{2} + E_{II0}(\rho, S, |\Psi|^2), \quad (4.4)$$

где $\rho_n = \rho - m |\Psi|^2 = \rho - \rho_s$ есть, очевидно, плотность нормальной части гелия II. Найдем теперь плотность энергии E' в системе K' , в которой $v'_n = 0$. Как известно, и согласуется с (4.2) при замене m на ρ ,

$$E = E' + \mathbf{p}' \mathbf{v}_n + \frac{\rho v_n^2}{2}, \quad (4.5)$$

$$\mathbf{p}' = \mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n = \rho_s (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n),$$

где $\mathbf{j} = \rho_s \mathbf{v}_s + \rho_n \mathbf{v}_n \equiv \mathbf{j}_s + \mathbf{j}_n$ — полная плотность импульса в системе K .

Из (4.4) и (4.5) сразу же получаем

$$E' = \frac{m}{2} \left| \left(-\frac{i\hbar}{m} \nabla - \mathbf{v}_n \right) \Psi \right|^2 + E_{II0}(\rho, S, |\Psi|^2). \quad (4.6)$$

Переход отсюда к (4.3) представляет собой переход к другим переменным и другому термодинамическому потенциалу и не вызывает сомнений, по крайней мере при $\rho = \text{const}$.

Варьируя интеграл $\int \Phi_{II} dV$, с использованием выражения (4.3), по Ψ^* при заданной скорости \mathbf{v}_n , получаем искомое уравнение для Ψ :

$$\frac{m}{2} \left(-\frac{i\hbar}{m} \nabla - \mathbf{v}_n \right)^2 \Psi + \frac{\partial \Phi_{II0}}{\partial |\Psi|^2} \Psi = 0, \quad (4.7)$$

которое при $\mathbf{v}_n = 0$ переходит, разумеется, в (2.16).

В работе ¹²² уравнение, эквивалентное (4.7), было получено путем варьирования (минимизации) выражения (4.4), но при условии, что $\mathbf{j} = \text{const}$, т. е. при заданном полном импульсе жидкости. Такое требование эквивалентно выделению энергии E' ; минимизация же энергии E без условия $\mathbf{j} = \text{const}$ означала бы минимизацию также и кинетической энергии жидкости как целого, не имеющей отношения к термодинамическим свойствам системы. Отделяя в (4.7) вещественную и мнимую части, получаем два уравнения, которые выразим через $\rho_s = m \eta^2$, $\mathbf{v}_s = (\hbar/m) \nabla \varphi$,

$$\Psi = \eta e^{i\varphi}, \quad \mu_s = \left(\frac{\partial \Phi_{II0}}{\partial |\Psi|^2} \right)_{p, T} = m \left(\frac{\partial \Phi_{II0}}{\partial \rho_s} \right)_{p, T} :$$

$$-\frac{\hbar^2}{4m^2} \Delta \rho_s + \frac{\hbar^2 (\nabla \rho_s)^2}{8m^2 \rho_s} + \frac{\rho_s (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n)^2}{2} + \mu_s \rho_s = 0, \quad (4.8)$$

$$\text{div} [\rho_s (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n)] = 0. \quad (4.9)$$

Разумеется, уравнение (4.9) получается также и эквивалентным способом: умножая (4.7) на Ψ^* , умножая сопряженное уравнение на Ψ и вычитая эти выражения друг из друга.

Заметим, что при переходе от (4.7) к (4.8), (4.9) условие $\operatorname{div} \mathbf{v}_n = 0$ не использовалось. Если же учесть условия $\operatorname{div} \mathbf{v}_n = 0$ и $\nabla \rho = 0$, при которых выше было получено уравнение (4.7), то соотношение (4.9) тождественно с уравнением непрерывности

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = \operatorname{div} (\rho_s \mathbf{v}_s + \rho_n \mathbf{v}_n) = 0.$$

Мы остановились столь подробно на выводе (тремя способами!) уравнения (4.7), поскольку в статье ¹²³ (см. также ¹⁵, § 33) уравнение (4.7) считается неправильным и предлагается другое, отличающееся слагаемым

$$-\frac{i\hbar\Psi}{2\rho_s} \operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) = \frac{i\hbar\Psi}{2\rho_s} \operatorname{div} \rho_s (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n)$$

и получающееся при варьировании $\int \Phi_{II} dV$ с Φ_{II} согласно (4.3) при фиксированном значении разности $\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n$. Но именно для последнего требования не видно никаких оснований. Помимо изложенного, это следует из того факта, что из предлагаемых в ¹²³ уравнений не следует уравнение непрерывности.

В частности, это относится к случаю, когда $\mathbf{v}_n = 0$ и, следовательно, $\operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) = \operatorname{div} \rho_s \mathbf{v}_s$; тогда, вместо нашего уравнения (2.16), в ¹²³ получается такое:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + \frac{\partial \Phi_{II 0}}{\partial |\Psi|^2} \Psi + \frac{i\hbar \operatorname{div} (\rho_s \mathbf{v}_s)}{2\rho_s} \Psi = 0. \quad (4.10)$$

Из этого уравнения и ему сопряженного не вытекает никакого закона сохранения или, другими словами, мнимая часть уравнения (4.10) тождественно равна нулю. Поэтому нет оснований считать, что $\operatorname{div} \rho_s \mathbf{v}_s = 0$. Постулирование же этого закона из независимых соображений и противостоит естественно и возвращает нас к уравнению (2.16). Поскольку Ψ -теория сверхпроводимости ²⁶ следует из микротeorии, можно также отметить, что ей соответствует именно уравнение (2.16), а не (4.10).

Аналогичная ситуация имеет место и при $\mathbf{v}_n \neq 0$: из уравнения, предлагаемого в ¹²³, закон сохранения импульса не вытекает, в то время как из (4.7) при $\operatorname{div} \mathbf{v}_n = 0$ и $\nabla \rho = 0$ такой закон $\operatorname{div} \mathbf{j} = \operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) = 0$, как мы видели, непосредственно следует (между тем, в ¹²³ утверждается, что условие $\operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) = 0$ является лишним, и для него нет никаких оснований).

Для дальнейшего, однако, нам нужно иметь уравнение типа (4.7), пригодное и при $\operatorname{div} \mathbf{v}_n \neq 0$ и $\nabla \rho \neq 0$. Если к левой части уравнения (4.7) добавить член

$$-\left(\frac{i\hbar}{2m |\Psi|^2} \operatorname{div} \rho \mathbf{v}_n \right) \Psi, \quad (4.11)$$

то мнимая часть такого уравнения будет и при $\operatorname{div} \mathbf{v}_n \neq 0$ и $\nabla \rho \neq 0$ иметь вид $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$. С другой стороны, член (4.11) содержит Ψ^* в знаменателе, что не представляется правдоподобным (это, конечно, относится и к (4.10) и ко всему варианту, предлагаемому в ¹²³). Далее, при $\operatorname{div} \mathbf{v}_n \neq 0$ имеют место эффекты типа второй вязкости и вообще нет оснований, чтобы Ψ -функция определялась уравнением типа (4.7), не содержащим диссипативных членов. По всем этим соображениям, при переходе к общей системе уравнений, пригодной и в нестационарном случае, и при $\operatorname{div} \mathbf{v}_n \neq 0$, мы будем опираться на уравнение (4.7), как это и делалось в ¹²².

Отсылая за подробностями к этой работе ¹²², выпишем сразу соответствующую полную систему уравнений для функции $\Psi = \eta e^{i\Phi}$, скорости нормальной компоненты v_n , а, также плотности ρ и энтропии единицы объема S :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + (\mu + \mu_s) m \Psi - i\Lambda \left[\frac{1}{2} \left(\frac{i\hbar}{m} \nabla + v_n \right)^2 + \mu_s \right] m \Psi, \quad (4.12)$$

$$\mu_s = \left(\frac{\partial E_{II0}}{\partial \rho_s} \right)_{\rho, S}, \quad \mu = \left(\frac{\partial E_{II0}}{\partial \rho} \right)_{\rho_s, S};$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} j &= 0, \\ j &= \rho_s v_s + \rho_n v_n, \quad \rho_n = \rho - m |\Psi|^2, \\ \rho_s v_s &= -\frac{i\hbar}{2} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*), \\ \rho_s &= m |\Psi|^2, \\ \frac{\partial j_i}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{ih}}{\partial x_h} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

$$\Pi_{ih} = \rho_n v_{ni} v_{nh} + p \delta_{ih} + \frac{\hbar^2}{4m} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \frac{\partial \Psi^*}{\partial x_h} - \Psi \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x_i \partial x_h} + \text{к. с.} \right) - \eta_n \left(\frac{\partial v_{ni}}{\partial x_h} + \frac{\partial v_{nh}}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ih} \operatorname{div} v_n \right); \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div} \left(S v_n - \frac{\kappa}{T} \nabla T \right) = \frac{R}{T},$$

$$R = \kappa \left(\frac{\nabla T}{T} \right)^2 + \frac{\eta_n}{2} \left(\frac{\partial v_{ni}}{\partial x_h} + \frac{\partial v_{nh}}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ih} \operatorname{div} v_n \right)^2 + \frac{2\Lambda m \rho_s}{\hbar} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{i\hbar}{m} \nabla + v_n \right)^2 + \mu_s \right] m |\Psi|^2, \quad (4.15)$$

где давление $p = -E_{II0} + TS + \mu\rho + \mu_s\rho_s$, η_n — коэффициент первой вязкости для нормальной компоненты гелия II и безразмерный вещественный коэффициент Λ определяет в рассматриваемой области вблизи λ -точки величину второй вязкости и, как ясно из дальнейшего, время релаксации параметра порядка τ :

$$\frac{1}{\tau} = \frac{2\Lambda m}{\hbar} \rho_s \frac{\partial \mu_s}{\partial \rho_s} \equiv \frac{2\Lambda m}{\hbar} \rho_s \left(\frac{\partial^2 E_{II0}}{\partial \rho_s^2} \right)_{\rho, S} \quad (4.16)$$

Отметим, что в выражении для Π_{ih} в (4.14) и в уравнении (4.12) отброшены члены, связанные со второй вязкостью, не зависящей от релаксации ρ_s (дело в том, что вблизи λ -точки вторая вязкость, обусловленная релаксацией ρ_s , оказывается доминирующей).

Вещественная часть уравнения (4.12) после деления на $m\eta$ и взятия градиента имеет вид

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} + \nabla \left\{ \mu + \mu_s - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta \eta}{\eta^2} + \frac{v_s^2}{2} - \frac{\hbar \Lambda}{2m \rho_s} \operatorname{div} [\rho_s (v_s - v_n)] \right\} = 0. \quad (4.17)$$

Мнимая же часть уравнения (4.12) после умножения на $2m\eta/\hbar$ такова:

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_s v_s = -\frac{2\Lambda m}{\hbar} \left[\mu_s - \frac{\hbar^2}{2m^2} \frac{\Delta \eta}{\eta} + \frac{(v_s - v_n)^2}{2} \right] \rho_s. \quad (4.18)$$

В пространственно-однородном гелии II и при $v_s = v_n$, для малых отклонений от равновесия $\rho'_s = \rho_s - \rho_{se}$, из (4.18) имеем

$$\frac{\partial \rho'_s}{\partial t} = -\frac{2\Lambda m}{\hbar} \left(\frac{\partial \mu_s}{\partial \rho_s} \right)_{\rho_{se}} \rho_{se} \rho'_s, \quad (4.19)$$

поскольку в этом случае

$$\mu_s(\rho_{se}) = \left[\left(\frac{\partial E_{II0}}{\partial \rho_s} \right)_{\rho, S} \right]_{\rho_s = \rho_{se}} = 0;$$

из (4.19) как раз и вытекает связь (4.16).

Достаточно далеко от λ -точки можно считать, что релаксация наступает мгновенно, т. е. $\tau \rightarrow 0$ или, формально, $\Lambda \rightarrow \infty$. Именно такой предел и отвечает гидродинамической теории сверхтекучести Ландау¹⁴⁻¹⁶, в которой в используемых переменных $\rho_s = \rho_s(\rho, S)$ и $\mu_s + [(\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n)^2/2] = 0$ (см., например, (4.8), при пренебрежении градиентными членами). Кроме того, в теории Ландау не учитываются, конечно, градиентные члены, пропорциональные \hbar^2 . С учетом сказанного ясно, что при $\Lambda \rightarrow \infty$ уравнение (4.18) становится неопределенным, т. е. не накладывает каких-либо ограничений на ρ_s , как это и должно быть в подобных условиях. Уравнение же (4.17) переходит в соответствующее уравнение двухжидкостной гидродинамики,

$$\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \nabla \left(\mu + \frac{v_s^2}{2} \right) = \nabla [\zeta_s \operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n)] \equiv \nabla [\zeta_s \operatorname{div} \rho_s (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n)], \quad (4.20)$$

где $\zeta_s = \frac{\hbar \Lambda}{2m\rho_s} = \frac{\hbar^2}{4m^2\rho_s^2 (\partial \mu_s / \partial \rho_s) \tau}$ — один из коэффициентов второй вязкости (см. ¹⁵, § 18); положить $\Lambda \rightarrow \infty$ в выражении для ζ_s нельзя потому, что вторая вязкость была бы бесконечна. Если $\Lambda = \text{const}$ (не зависит от $t = T_\lambda - T$), то время релаксации $\tau \sim t^{-4/3}$ (см. (4.16) при $\partial \mu_s / \partial \rho_s = \text{const} \cdot t^{2/3}$). Если же, как имеются некоторые основания полагать^{70, 122a, 123}, $\tau \sim t^{-1}$, то $\Lambda \sim t^{-1/3}$.

При упомянутых выше предположениях вся система уравнений (4.12)–(4.15) в целом также переходит в уравнения двухжидкостной гидродинамики *), чего, конечно, и следовало ожидать (каких-либо трудностей в этом вопросе, упоминаемых в конце статьи¹²¹, мы не видим).

За пределами теории Ландау, но в предположении, что градиенты ρ_s малы, как это может иметь место при распространении звука в толще гелия II, система (4.12)–(4.15) упрощается и сводится к следующей:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \nabla \left[\mu + \mu_s + \frac{v_s^2}{2} - \frac{\hbar \Lambda}{2m\rho_s} \operatorname{div} \rho_s (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n) \right] = 0, \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho_s \mathbf{v}_s + \rho_n \mathbf{v}_n) = 0, \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_n v_{ni} + \rho_s v_{si}) + \frac{\partial}{\partial x_k} [\rho_n v_{ni} v_{nk} + \rho_s v_{si} v_{sk} + p \delta_{ik} - \\ - \eta_n \left(\frac{\partial v_{ni}}{\partial x_k} + \frac{\partial v_{nk}}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \operatorname{div} \mathbf{v}_n \right)] = 0, \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div} (S \mathbf{v}_n) = \frac{1}{T} \operatorname{div} (\kappa \nabla T) + \frac{1}{T} \left\{ \frac{\hbar \Lambda}{2m\rho_s} [\operatorname{div} \rho_s (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n)]^2 + \right. \\ \left. + \frac{2\Lambda m}{\hbar} \left[\frac{1}{2} (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n)^2 + \mu_s \right]^2 \rho_s + \frac{\eta_n}{2} \left(\frac{\partial v_{ni}}{\partial x_k} + \frac{\partial v_{nk}}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \operatorname{div} \mathbf{v}_n \right)^2 \right\}, \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_s \mathbf{v}_s = - \frac{2\Lambda m}{\hbar} \left[\mu_s + \frac{(\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n)^2}{2} \right] \rho_s. \quad (4.25)$$

*) Одно из основных уравнений гидродинамической теории сверхтекучести — условие $\operatorname{rot} \mathbf{v}_s = 0$ — следует, очевидно, из самого определения $\mathbf{v} = (\hbar/m) \nabla \varphi$ (см. (1.2)).

Система (4.21)–(4.25) по форме совпадает с уравнениями двухжидкостной гидродинамики с заменой химического потенциала μ на

$$\mu + \mu_s = \left(\frac{\partial E_{II 0}}{\partial \rho} \right)_{\rho_s, s} + \left(\frac{\partial E_{II 0}}{\partial \rho_s} \right)_{\rho, s}$$

и с конкретизацией выражения для коэффициента второй вязкости ζ_2 . Кроме того, конечно, появляется уравнение (4.25), определяющее релаксацию плотности ρ_s , которая уже не считается заданной функцией ρ и S .

4.2. Распространение звука. Теплосопrotивление вблизи твердой стенки

Полученная в разделе 4.1 полная система гидродинамических уравнений гелия вблизи λ -точки сравнительно еще мало использовалась. Важнейшим ее применением является исследование, на основе уравнений (4.21)–(4.25), характера распространения звука в однородном покоемся гелии II (причем в простейшей ситуации, когда длина волны звука $\lambda = 2\pi/k$ много больше длины когерентности $\xi_M(t)$, и, следовательно, градиентов по ρ_s членов можно не учитывать). Однако и в этом случае вопрос нельзя считать полностью выясненным. Дело в том, что в ^{123,15} сделаны лишь оценки, имеющие целью установить температурные зависимости дисперсии и поглощения звуков; интересно также количественное же сопоставление предсказаний теории с опытом ¹²⁷. Кроме того, в ^{123, 15} использовалась система уравнений, отличающаяся от (4.21)–(4.25) отсутствием в левой части уравнения (4.21) члена, типа второй вязкости (см. раздел 4.1). В то же время учет этого члена, по крайней мере в задаче о поглощении второго звука, может оказаться существенным. Наконец (и это, пожалуй, наиболее важно), в ¹²² и ¹²³ рассматривался лишь релаксационный механизм поглощения первого и второго звуков и совершенно не учитывалось взаимодействие звука с флуктуациями параметра Ψ (см. ^{128–130}). Между тем «флуктуационный механизм» (который, как показывают оценки, зависит от температуры по тому же закону, что и вклад от релаксации Ψ) может играть заметную роль даже в гидродинамической области частот $\omega \ll 1$; в области же $\omega \gg 1$, а также при $T > T_\lambda$ именно он становится определяющим.

Попытка рассмотреть влияние флуктуаций на поглощение (дисперсию) первого звука и на теплопроводность гелия была предпринята в работах ^{93, 125} для области температур выше λ -точки. Однако в ⁹³ использовался сильно упрощенный вариант теории, и хотя в качественном отношении результаты расчета ⁹³, вероятно, правильны, их связь с изложенным в разделе 4.1 подходом еще требует обсуждения. В ¹²⁵, наоборот, в качестве исходных применялись именно уравнения типа (4.12)–(4.15), однако в таком их варианте ¹²⁴, при котором значение критического индекса $\eta = 1/2$, и, следовательно, связь между Ψ -функцией и плотностью ρ_s дается выражением: $\rho_s = (m^2/m^*) \cdot |\Psi|^2$, $m^* \propto |t|^{1/3}$. Кроме того, в работе ¹²⁵, как и в ¹²³, в уравнении для v_s опускался член типа второй вязкости и делался ряд других предположений, обоснованность которых еще нужно проверить.

В силу сделанных замечаний, а также за недостатком места, мы не будем останавливаться на результатах перечисленных и некоторых других работ. Укажем лишь, что в качественном отношении, для гидродинамической области частот $\omega \ll 1$, полученные в ^{93, 123, 125} выражения в основном согласуются с экспериментом ¹²⁷ и с другими более строгими методами расчета (см. ^{70, 130} и ссылки в ¹³⁰), использующими идеи динамической теории подобия и метод ϵ -разложения.

Отметим, что более детальное исследование проблемы распространения звука (в первую очередь — первого и второго звука, а также теплопроводности выше λ -точки) в однородном гелии может послужить для дополнительного выяснения обсуждавшегося в разделе 4.1 вопроса об отсутствии (или наличии) в уравнении (4.7) дополнительных членов, ясных из (4.10) и (4.11).

В свете сказанного становится ясным, что изучение особенностей распространения звука не только в однородном, но и, тем более, в неоднородном гелии (и, в частности, исследование отражения и трансформации звуковых волн на границе гелия II с твердым телом или паром) является, вообще говоря, весьма сложной задачей. Некоторое представление о характере возможных здесь особенностей дает решение частной задачи о «взаимодействии» статического теплового потока ($\omega = 0$) с неоднородным распределением $\rho_s(z)$ вблизи твердой стенки. Указанная задача интересна и сама по себе, поскольку приводит к заключению о существовании в пристеночном слое гелия II внутреннего приграничного теплового сопротивления, резко возрастающего вблизи λ -точки.

Рассмотрим ^{61, 131} полупространство гелия II, ограниченное твердым телом, и пусть в гелий из твердого тела переходит стационарный малый поток тепла q . На больших расстояниях от стенки z этот поток вызывает встречное конвективное течение нормаль-

ной и сверхтекучей компонент. На малых расстояниях, однако, если выполнено условие $\rho_s(0) = 0$ на стенке, конвективная составляющая теплового потока отсутствует. Действительно, из условия $\rho_s = 0$ и из условия обращения в нуль перпендикулярной составляющей полного потока массы $j_\perp = \rho_s v_{s\perp} + \rho_n v_{n\perp} = 0$ следует, что на границе $v_{n\perp}$ также обращается в нуль. Условие $v_{n\perp} = 0$ сохранится, очевидно, и в случае произвольного течения. Таким образом, на малых расстояниях от стенки обмен теплом между твердым телом и гелием II осуществляется, как и в обычных жидкостях, лишь за счет нормальной теплопроводности.

Для того чтобы оценить расстояние l_T , на котором затухает теплопроводная составляющая теплового потока и формируется конвективное противотечение, обратимся к уравнениям (4.12) — (4.15). Линеаризованная форма этих уравнений для интересующего нас стационарного случая имеет вид

$$j = \rho_s^{(0)} v_s + \rho_n^{(0)} v_n, \quad (4.26)$$

$$T^{(0)} S^{(0)} v_n - \kappa \frac{dT'}{dz} = q, \quad (4.27)$$

$$\frac{dp'}{dz} = \rho^{(0)} \frac{d\mu'}{dz} + S^{(0)} \frac{dT'}{dz} + \rho_s^{(0)} \frac{d\mu'_s}{dz} = \frac{4}{3} \eta_n \frac{d^2 v_n}{dz^2} + \rho_s^{(0)} \frac{d}{dz} \left(\frac{\hbar^2}{2m^2 \eta^{(0)}} \frac{d^2 \eta'}{dz^2} \right), \quad (4.28)$$

$$\frac{d\mu'}{dz} = \frac{d}{dz} \left(\frac{\hbar^2}{2m^2 \eta^{(0)}} \frac{d^2 \eta'}{dz^2} - \mu'_s - \frac{\hbar \Lambda}{2m \rho_s^{(0)}} \frac{d\rho^{(0)} v_n}{dz} \right), \quad (4.29)$$

$$\frac{d}{dz} (\rho_n^{(0)} v_n) = \frac{2\Lambda m \rho_s^{(0)}}{\hbar} \left(\mu'_s - \frac{\hbar^2}{2m^2 \eta^{(0)}} \frac{d^2 \eta'}{dz^2} \right). \quad (4.30)$$

Здесь штрихом обозначены малые добавки и индексом «0» помечены невозмущенные значения величин. Заметим, что во всех написанных уравнениях возмущения μ'_s и η' входят в виде комбинации $\mu'_s - (\hbar^2/2m^2 \eta^{(0)}) d^2 \eta'/dz^2$. Это позволяет с помощью уравнения (4.30) исключить переменную η' из первых четырех уравнений. Исключая далее с помощью (4.27) и (4.29) производные термодинамических величин $d\mu'/dz$ и dT'/dz из третьего уравнения, для $v_n(z)$ получим уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} \eta_n \frac{d^2 v_n}{dz^2} + \rho_n^{(0)} \frac{d}{dz} \left(\frac{\hbar}{2\Lambda m \rho_s^{(0)}} \frac{d\rho_n^{(0)} v_n}{dz} \right) + \\ + \rho^{(0)} \frac{d}{dz} \left(\frac{\hbar \Lambda}{2m \rho_s^{(0)}} \frac{d\rho^{(0)} v_n}{dz} \right) - \frac{S^{(0)}}{\kappa} (S^{(0)} T^{(0)} v_n - q) = 0. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Вблизи λ -точки можно положить $\rho_n^{(0)} \simeq \rho^{(0)} \simeq \rho_\lambda$ и $S^{(0)} \simeq S_\lambda$. Далее, в (4.31) можно пренебречь членом, содержащим первую вязкость, так как коэффициент η_n не имеет аномалии в λ -точке. Наконец, от скорости v_n удобно перейти к теплопроводной составляющей теплового потока $q_T = q - S^{(0)} T^{(0)} v_n$. После указанных упрощений уравнение (4.31) принимает вид

$$l^2 \frac{d}{dz} \left[\frac{\rho_{se}}{\rho_s^{(0)}(z)} \frac{dq_T}{dz} \right] - q_T(z) = 0, \quad (4.32)$$

где введено обозначение

$$l^2 = \frac{\kappa}{S_\lambda^2 T_\lambda} \frac{\hbar \rho_\lambda^2 (1 + \Lambda^2)}{2\Lambda m \rho_{se}}. \quad (4.33)$$

В случае температур, относительно далеких от λ -точки, изменением плотности $\rho_s(z)$ вблизи стенки можно пренебречь и тогда очевидно, что как раз длина l и имеет смысл характерного расстояния l_T , на котором затухает теплопроводная составляющая теплового потока и формируется конвективное противотечение (см. также ^{16, 132}). Температура T вблизи стенки, распределена при этом следующим образом:

$$T(z) = T(0) + \frac{ql}{\kappa} (1 - e^{-z/l}). \quad (4.34)$$

Мы видим, что обмен теплом между гелием II и твердым телом (паром) сопровождается возникновением градиента температуры, локализованным в пристеночном слое (с толщиной l) внутри жидкости.

Полный перепад температур составляет $\Delta T \equiv T(z = \infty) - T(z = 0) = lq/\kappa$. Величину $R_{l,t} \equiv \Delta T/q = l/\kappa$ естественно назвать внутренним приграничным

тепловым сопротивлением *). В критической области, даже если параметр Λ зависит от расстояния до λ -точки по закону $\Lambda = \Lambda_0 t^{-1/3}$ (см. раздел 4.1), длина l возрастает, как $l = l_0 t^{-1/2}$, т. е. по более слабому степенному закону, чем радиус корреляции, и потому изменение $\rho_s^{(0)}(z)$ вблизи границы становится существенным. Различные формы распределения $\rho_s^{(0)}(z)$ вблизи стенки приведены в разделе 3.1. Мы воспользуемся простейшим из них, отвечающим удержанию в феноменологическом разложении для плотности термодинамического потенциала лишь первых двух членов (см. (3.11))

$$\rho_s^{(0)}(z) = \rho_{se} \operatorname{th}^2 \left[\frac{z}{\sqrt{2} \xi_0(t)} \right].$$

Для этого профиля уравнение (4.32) удастся решить в явном виде. Решение выражается через гипергеометрическую функцию

$$q_T(z) = q \frac{\Gamma(c-a) \Gamma(c-b)}{\Gamma(c) \Gamma(c-a-b)} \operatorname{ch}^{-B} \left(\frac{z}{\sqrt{2} \xi_0} \right) {}_2F_1 \left(a, b; c; \operatorname{ch}^{-2} \frac{z}{\sqrt{2} \xi_0} \right), \quad (4.35)$$

где $a = \frac{1}{2} \left(B - \frac{1}{2} + \sqrt{B^2 + \frac{1}{4}} \right)$, $b = \frac{1}{2} \left(B - \frac{1}{2} - \sqrt{B^2 + \frac{1}{4}} \right)$, $c = B + 1$ и через B обозначено отношение $B^2 = 2\xi_0^2(t)/l^2(t)$. Интегрируя (4.35), найдем также общее выражение для термосопротивления

$$R_{\text{int}} \equiv \frac{\Delta T}{q} = \frac{\xi_0}{\sqrt{2} \kappa} \frac{\Gamma(c-a) \Gamma(c-b) \Gamma(B/2) \Gamma(1/2)}{\Gamma(c) \Gamma(c-b-a) \Gamma((B+1)/2)} {}_3F_2 \left(a, b, \frac{B}{2}; c, \frac{B+1}{2}; 1 \right). \quad (4.36)$$

Рассмотрим два предельных случая:

1) $B \ll 1$ (т. е. $\xi_0 \sqrt{2} \ll l$). В этом пределе ${}_3F_2(a, b, B/2; c, (B+1)/2; 1) \rightarrow 1$, $\Gamma(B/2) \rightarrow 2/B$, а все остальные Γ -функции сокращаются. В результате находим, что $R_{\text{int}} = l/\kappa$, в согласии с (4.34) и ^{16,132}.

2) $B \gg 1$. При больших значениях B функция ${}_3F_2(a, b, B/2; c, (B+1)/2; 1) \rightarrow (9/4B)^{1/4}$, а фактор, содержащий Γ -функции, стремится к значению $2\Gamma(5/4) B^{1/4} (2/B)^{1/2}$. В результате в этом пределе, отвечающем $T \rightarrow T_\lambda$, для R_{int} находим асимптотическую формулу

$$R_{\text{int}} = \sqrt[4]{18} \Gamma\left(\frac{5}{4}\right) \frac{! \sqrt{\xi_0(t) l(t)}}{\kappa} \approx 1,84 \frac{\sqrt{\xi_0(t) l(t)}}{\kappa}.$$

Таким образом, при $l \ll \xi_0$ конвективный поток эффективен⁹ формируется не на длине l , а на среднем геометрическом из длин l и ξ_0 . Температурная зависимость R_{int} при $T \rightarrow T_\lambda$ такова:

$$R_{\text{int}} \propto \begin{cases} t^{-1/2}, & \Lambda = \text{const}, \\ t^{-7/12}, & \Lambda = \Lambda_0 t^{-1/3}. \end{cases}$$

Отметим, что характер температурной зависимости R_{int} зависит также от вида используемых уравнений. В частности, при использовании системы уравнений ¹²³

$$R_{\text{int}} \propto \begin{cases} t^{-1/2}, & \Lambda = \text{const}, \\ t^{-5/12}, & \Lambda = \Lambda_0 t^{-1/3}. \end{cases}$$

Подстановка численных значений показывает, что R_{int} при $t \sim 0,1^\circ\text{K}$ на 3–4 порядка величины ниже, чем типичные значения «акустического» теплового сопротивления на границе He II и твердых тел (при $T \sim 2^\circ\text{K}$). Это затрудняет наблюдение аномалии теплосопротивления при обмене теплом между гелием II и твердым телом. Тем не менее, при прохождении тепла через границу гелия с паром, а также, быть может, и в случае «мягких» кристаллов с низкими значениями температуры Дебая, наблюдение указанной аномалии представляется, в принципе, возможным даже при $t \sim 0,1^\circ\text{K}$.

Наличие экспоненциально затухающих решений типа (4.34), (4.35) может сказываться и в ряде других эффектов. Так, например их нужно учитывать при отражении, прохождении и трансформации волн второго звука на границах гелия II, при расчете подвижности малых частиц (ионов) в He II и т. п. Возможно, в частности,

*) Величину R_{int} следует отличать от «акустического» теплового сопротивления R_a , также присутствующего на границе и связанного с особенностями обмена фоонами между средами (см. ¹⁶, гл. 12). Последний механизм не специфичен для сверхтекучей жидкости, но вдали от λ -перехода именно он является основным. В силу этого, при низких температурах R_{int} в случае границы He II–твердое тело дает лишь малую поправку к полному тепловому сопротивлению $R_K = R_a + R_{\text{int}}$. Наоборот, в непосредственной близости к λ -точке, а также при обмене теплом между He II и паром главным может оказаться вклад R_{int} .

что наблюдавшееся экспериментально¹³³ резкое уменьшение вблизи λ -точки коэффициента отражения второго звука от свободной поверхности гелия II связано именно с этим обстоятельством. Соответствующий круг задач представляет большой интерес, и их имело бы смысл рассмотреть в дальнейшем.

Одним из интересных применений полной системы временных уравнений (4.12) — (4.15) является также вычисление вблизи λ -точки сил взаимного трения, действующих на вихри во вращающемся гелии II^{122a}. К сожалению, о работе^{122a} нам стало известно лишь после окончания настоящей статьи, в связи с чем мы не можем остановиться на ней сколько-нибудь подробно.

V. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Развитая выше Ψ -теория сверхтекучести гелия II представляет собой, во-первых, обобщение двухжидкостной гидродинамики сверхтекучей жидкости на район λ -точки. Во-вторых, Ψ -теория феноменологически описывает сам λ -переход в жидком гелии с учетом определенных граничных условий (практически, речь идет об условии $\rho_s = 0$ на стенке и, предположительно, на свободной поверхности). Как следствие, предсказываются и могут быть количественно рассмотрены различные размерные и гидродинамические эффекты. По своему типу Ψ -теория сверхтекучести во многом подобна Ψ -теории сверхпроводимости^{26,48,68,134,135}. Родственные схемы развивались и обсуждаются в применении к сверхтекучему He^3 (см.^{63,136,137}), в случае сверхтекучести нейтронной и протонной жидкостей в нейтронных звездах¹³, для описания совокупности экситонов¹¹ и в теории лазеров¹³⁸, а также при рассмотрении доменных стенок¹³⁹ и поверхностных эффектов в ферромагнетиках^{103–107}. Следует упомянуть и об известной близости Ψ -теории с работами, посвященными квазигидродинамике неидеального бозе-газа^{140,141} и «плотной» сверхтекучей жидкости¹⁴². Мы не будем уже приводить здесь ссылки на появившиеся в последние годы многочисленные статьи, в которых близкие представления и аппарат используются в квантовой теории поля.

Как и всякая феноменологическая теория (кроме тех, которые более или менее последовательно выводятся из микротeorии), Ψ -теория сверхтекучести строится на основе ряда предположений, оправдываемых как путем привлечения экспериментальных данных, так и стремлением к возможной простоте исходных уравнений и производимых с их помощью вычислений. В соответствии со сказанным мы заранее фиксируем критические индексы, полагая $\beta = 1/3$, $\nu = 2/3$, $\alpha = 0$ и $\hat{\eta} = 0$, т. е. используем зависимости $\rho_s \propto t^{2/3}$, $\xi \propto |t|^{-2/3}$, $C_p \propto \ln |t|$, $G_\eta(r \rightarrow 0) \propto r^{-1}$ (см., в частности, (2.9), (2.10), (2.19), (2.39)). Все другие предположения, которые делаются (например, ограничение членами не выше $|\Psi|^6$ в разложении термодинамического потенциала в ряд) также представляются, по крайней мере на данном этапе, вполне естественными и, по-видимому, не связаны с существенными ограничениями или условиями, лимитирующими точность или даже саму возможность сравнения теории с опытом. Впрочем, было бы только полезно и целесообразно во всех конкретных задачах (см. главы III и IV) исследовать возможное влияние различных мыслимых модификаций теории (изменение критических индексов, учет членов порядка $|\Psi|^8$ и т. п.). Ясно, однако, что в настоящее время вполне оправдано использование именно простейшей, непротиворечащей опыту схемы — такой и является обсуждаемая в настоящей статье Ψ -теория сверхтекучести гелия II вблизи λ -точки.

Подчеркнем, что эта теория, как и ее возможное развитие (в применении к гелию II под давлением и к растворам He^3 в He^4) и обобщения (из их числа особенно интересным представляется рассмотрение сверхтекучести He^3), идут значительно дальше, чем при использовании существующей теории фазовых переходов второго рода, в которой для одно-

родной системы устанавливаются лишь предельные (при $t = (T_\lambda - T) \rightarrow 0$) соотношения и связи между критическими индексами. Действительно, общая система уравнений, приведенная в разделе 4.1, полна, и позволяет, в принципе, найти зависимость всех величин (ρ_s , v_s , v_n , а также ρ и S или другой пары переменных) от координат и времени. Тем самым, и предсказания теории весьма содержательны и могут быть проверены на опыте. Именно последняя задача сейчас и является, конечно, центральной, помочь ее решению — такова основная цель настоящей статьи. Те конкретные эксперименты, которые следовало бы осуществить, частично ясны из сказанного в гл. III и в разделе 4.2. Здесь же особенно следует подчеркнуть необходимость работать достаточно близко к λ -точке. Так, например, корреляционная длина $\xi_0 = 2,74 \cdot 10^{-8} / t^{2/3} \sim 3 \cdot 10^{-7} \text{ см} \sim 10 a$ при $t \sim 1/30^\circ \text{ K}$. Таким образом, только при $t \leq 1/10 - 1/30^\circ \text{ K}$ даже формально выполнено основное условие применимости теории $\xi_M \gg a \sim 3 \cdot 10^{-8} \text{ см}$ (см. (2.21)). Фактически же желательно иметь больший «запас» и проводить измерения при $t < 10^{-2}^\circ \text{ K}$.

С другой стороны, согласно (3.4а) с $M = 0$, для щели с шириной, скажем, в 10^{-4} см , которую можно надежно контролировать, смещение температуры λ -точки $\Delta T_\lambda \sim 3 \cdot 10^{-5}^\circ \text{ K}$, т. е. очень малое. Короче говоря, чтобы и теория была хорошо применима (если, конечно, она вообще справедлива!) и используемые щели, каналы и т. п. имели макроскопический размер, действительно следует сконцентрировать внимание на непосредственной близости к λ -точке. Именно несоблюдение этого условия в первую очередь и привело к той неопределенности, которую приходится в настоящее время констатировать при сопоставлении теории с экспериментом. Итак, главное, чего недостает, — это измерений вблизи λ -точки в достаточно близкой к ней области и, одновременно, в строго контролируемых условиях (имеется в виду фиксация толщины щелей или пленок и т. д.). Только после получения соответствующих данных выяснится, в какой степени, с какой точностью обсуждаемая Ψ -теория сверхтекучести отвечает реальности. При этом, если надежно будут установлены расхождения теории с опытом, то в зависимости от их характера можно будет конкретно рассмотреть пути обобщения теории. Мы полагаем, однако, что и в подобном случае изложенная здесь Ψ -теория сверхтекучести сохранит известное значение. Впрочем, вполне возможно, что точность этой теории окажется достаточно высокой и никаких существенных ее обобщений вообще не потребуются.

В заключение мы рады возможности поблагодарить Л. П. Питаевского за обсуждение ряда вопросов и замечания.

Примечания при корректуре. 1 (к стр. 160). Отметим, что, поскольку точка перехода является особой точкой термодинамического потенциала, численные значения коэффициентов A_0 , B_0 , C_0 могут, вообще говоря, отличаться при $T > T_\lambda$ и $T < T_\lambda$. Ниже, однако (в целях простоты и имея в виду применение теории, главным образом, для области температур ниже λ -точки), мы, как правило, отвлекаемся от этого обстоятельства (см. также замечания в разделах 2.4 и 3.2).

² (к стр. 183). Именно такого рода «смещение» зависимости $\bar{\rho}_s(T)$ и наблюдается в эксперименте (см. например, ⁸⁸⁻⁹⁰), но не дает возможности оценить численное значение параметра M , поскольку данные соответствующих опытов относятся к недостаточно широком ($\Delta T_\lambda \gtrsim 10^{-2}^\circ \text{ K}$) и, как правило, нерегулярным каналам с большой неопределенностью в размере пор.

³ (к стр. 183). К сожалению нам не известны сколько-нибудь точные измерения теплоемкости C_p в «толстых» пленках гелия.

Физический институт им. П. Н. Лебедева АН СССР
ВНИИ метрологической службы
Госстандарта СССР

ОБОЗНАЧЕНИЯ И НЕКОТОРЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ ПАРАМЕТРЫ

1. Атомные и другие постоянные

$$\begin{aligned}
 m &\equiv m_4 = 6,6464 \cdot 10^{-24} \text{ г} — \text{масса атома He}^4, \\
 M_4 &= 4,0026 \text{ г/атом} — \text{атомный вес He}^4, \\
 \frac{2\pi\hbar}{m} &= \frac{h}{m} = 0,997 \cdot 10^{-3} \text{ см} \cdot \text{сек}^{-1} — \text{квант циркуляции в сверхтекучем He II}, \\
 \alpha_0 &= 3,1 \cdot 10^{-2} \text{ см}^3 \text{г}^{-1} — \text{диэлектрическая восприимчивость He}^4, \\
 \alpha_H &= -0,47 \cdot 10^{-6} \text{ см}^3 \text{г}^{-1} — \text{диамагнитная восприимчивость He}^4, \\
 g &= 980,665 \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2} — \text{ускорение силы тяжести}.
 \end{aligned}$$

2. Параметры λ -точки чистого гелия He⁴ при давлении насыщенных паров

$$\begin{aligned}
 T_\lambda &= 2,172^\circ \text{K} — \text{температура } \lambda\text{-точки } (^\circ \text{K} \equiv \text{град}), \\
 p_\lambda &= 0,05 \text{ атм} — \text{давление}, \\
 \rho_\lambda &= 0,14617 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3} — \text{плотность}, \\
 S_\lambda &= 1,56 \cdot 10^7 \text{ эрг} \cdot \text{г}^{-1} \text{ } ^\circ \text{K}^{-1} (^\circ \text{K}^{-1} \equiv \text{град}^{-1}) — \text{энтропия} \\
 \left. \begin{aligned}
 \frac{dp_\lambda}{dT} &= -111,05 \text{ атм } ^\circ \text{K}^{-1}, \\
 \frac{d\rho_\lambda}{dT} &= -0,2425 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3} \text{ } ^\circ \text{K}^{-1}, \\
 \frac{dS_\lambda}{dT} &= 2,558 \cdot 10^7 \text{ эрг} \cdot \text{г}^{-1} \text{ } ^\circ \text{K}^{-2}, \\
 \frac{d\mu_\lambda}{dT} &= -78,54 \cdot 10^7 \text{ эрг} \cdot \text{г}^{-1} \text{ } ^\circ \text{K}^{-1}
 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{в } \lambda\text{-точке,} \\ \\ \text{наклон } \lambda\text{-кривой} \\ \text{в разных переменных,} \end{array} \\
 \Delta C_p &= 5,2 \cdot 10^7 \text{ эрг} \cdot \text{г}^{-1} \text{ } ^\circ \text{K}^{-1} = 0,76 \cdot 10^7 \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-1} \text{ } ^\circ \text{K}^{-3} — \text{«скачок» теплоемкости в } \lambda\text{-точке}, \\
 C_0 &= 1,30 \cdot 10^7 \text{ эрг} \cdot \text{г}^{-1} \text{ } ^\circ \text{K}^{-1} = 0,190 \cdot 10^7 \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-1} \text{ } ^\circ \text{K}^{-3} — \text{коэффициент при логарифмической части теплоемкости } (C_p = \text{const} - C_0 \ln |T - T_\lambda|), \\
 \rho_{se} &= \rho_{00} (T_\lambda - T)^{2/3}, \rho_{00} = 1,43 \rho_\lambda = 0,209 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3} \text{ } ^\circ \text{K}^{-2/3} — \text{температурная зависимость плотности сверхтекучей части в «массивном» He II около } \lambda\text{-точки}.
 \end{aligned}$$

3. Некоторые характерные длины

$$\begin{aligned}
 \lambda_T &= \sqrt{2\pi\hbar^2/mk_B T_\lambda} = 5,92 \cdot 10^{-8} \text{ см} — \text{тепловая длина волны атома He}^4 \text{ при } T = T_\lambda, \\
 a &= \left(\frac{m}{\rho_\lambda}\right)^{1/3} = 3,57 \cdot 10^{-8} \text{ см} — \text{среднее межатомное расстояние в жидком гелии при } T = T_\lambda, \\
 \xi_M &\equiv \xi_M^+ = \xi_0 \left(\frac{3+M}{3}\right)^{1/2} = 2,74 \cdot 10^{-8} \left(\frac{3+M}{3}\right)^{1/2} |T_\lambda - T|^{-2/3} \text{ см} — \text{температурно-зависящая длина корреляции для области выше } \lambda\text{-точки (см. (2.17) и (2.19))}, \\
 \xi_{\bar{M}} &= \xi_0 \sqrt{\frac{3+M}{6(1+M)}} — \text{та же длина для области ниже } \lambda\text{-точки (см. (2.47))}, \\
 \xi_0 &= \xi_{00} (T_\lambda - T)^{-2/3}, \xi_{00} = \left(\frac{\hbar^2 \rho_{00} T_\lambda}{2m^2 \Delta C_p}\right)^{1/2} = 2,74 \cdot 10^{-8} \text{ см } ^\circ \text{K}^{2/3} — \text{корреляционная длина в варианте теории с } M = 0 \text{ (см. (2.17) и (2.19))}, \\
 \xi_\varphi &= \frac{k_B T_\lambda m^2}{4\pi\hbar^2 \rho_{se}} = \frac{a^3 \rho_\lambda}{2\lambda_T^2 \rho_{00}} (T_\lambda - T)^{-2/3} = 0,453 \cdot 10^{-8} (T_\lambda - T)^{-2/3} \text{ см} — \text{корреляционная длина для флуктуаций фазы (см. (2.41a))}, \\
 l_g &= \xi_{00}^{3/5} \left(\frac{1}{g} \left|\frac{d\mu_\lambda}{dT}\right|\right)^{2/5} = 6,67 \cdot 10^{-3} \text{ см} — \text{характерная ширина границы раздела фаз He I — He II в поле тяжести,} \\
 \lambda &— \text{параметр длины в граничном условии (2.26).}
 \end{aligned}$$

4. Важнейшие из других обозначений

- $\Psi = \eta e^{i\varphi}$ — комплексный параметр порядка («эффективная волновая функция»),
 $\rho_s = m |\Psi|^2 = m\eta^2$ — плотность сверхтекучей части гелия II,
 $\mathbf{v}_s = \frac{\hbar}{m} \nabla \varphi$ — скорость сверхтекучей части гелия II,
 $\mathbf{j}_s = \rho_s \mathbf{v}_s = \hbar \eta^2 \nabla \varphi = -\frac{i\hbar}{2} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*)$ — поток сверхтекучей части жидкости,
 $\rho = \rho_s + \rho_n$ — полная плотность гелия,
 ρ_n — плотность нормальной части жидкости,
 \mathbf{v}_n — скорость нормальной части жидкости,
 p — давление,
 S — энтропия, отнесенная к единице объема,
 μ — химический потенциал (обычно в $\text{эрг} \cdot \text{г}^{-1}$),
 x_3, μ_3 — концентрация и химический потенциал He^3 (в случае растворов $\text{He}^3 - \text{He}^4$),
 C — теплоемкость, C_p — теплоемкость при постоянном давлении, C_μ — теплоемкость при постоянном μ ,
 $\Phi(p, T, \Psi)$ — плотность термодинамического потенциала,
 $\Omega(\mu, T, \Psi)$ — плотность термодинамического потенциала для переменной μ -химического потенциала,
 $F(\rho, T, \Psi)$ — плотность свободной энергии,
 $E(\rho, S, \Psi)$ — плотность внутренней энергии,
 $\Phi_{\text{II}0}(p, T, |\Psi|^2)$ — плотность термодинамического потенциала для однородного, покоящегося гелия II,
 $\Phi_{\text{I}}(p, T)$ — то же для гелия I,
 $\mu_s = \left(\frac{\partial \Phi_{\text{II}0}}{\partial \rho_s} \right)_{p, T}$ — химический потенциал сверхтекучей части жидкости (см. (2.16a)),
 $\Phi_{\text{II}}(\rho_{se})$ — равновесное значение плотности термодинамического потенциала $\Phi_{\text{II}0}$,
 $\Phi_{\text{I-II}}(\rho_{se}) \equiv \Phi_{\text{I}} - \Phi_{\text{II}}(\rho_{se}) = \frac{\Delta C_p}{2T_\lambda} t^2$ — разность равновесных значений плотностей термодинамического потенциала для He I и He II (за вычетом регулярной части),
 $\Omega_{\text{I-II}}(\rho_{se}) \equiv \Omega_{\text{I}} - \Omega_{\text{II}}(\rho_{se}) = \frac{\Delta C_\mu}{2T_\lambda} t^2 \approx \frac{\Delta C_p}{2T_\lambda} t^2$ — то же для переменных (μ, T) ,
 $\tilde{\Phi}_{\text{II}} = \int \Phi_{\text{II}} dV$ — термодинамический потенциал гелия II,
 $M = \frac{C_0}{A_0 \eta_{00}^2}$ — параметр теории (см. (2.13), (2.14), (2.18), (2.20)),
 $v_0^2 = \frac{2M}{M+3}$ — другая форма для того же параметра,
 $\Psi_e = \eta_e = \sqrt{\frac{\rho_{se}}{m}} = \Psi_{00} t^{1/3}$, где $\Psi_{00} = \sqrt{\frac{\rho_{00}}{m}}$, — равновесное значение Ψ -функции в однородном, покоящемся гелии,
 $\psi = \frac{\Psi}{\Psi_{00}}$ — приведенная Ψ -функция,
 $\psi_e = t^{1/3}$ — ее равновесное значение (при $\Psi = \text{const}$) в гелии II,
 $\psi_0 = \frac{\Psi}{\Psi_e}$ — приведенная Ψ -функция, используемая при решении граничных задач (в равновесии для однородного и покоящегося гелия II $\psi_{0e} = 1$); в разделе 2 гл. III используется также приведенная функция $\tilde{\psi}$ (см. (3.47), (3.48)),
 $\mathbf{r}_* = \frac{\mathbf{r}}{\xi_M}$, $r_* = \frac{r}{\xi_M}$ — безразмерный радиус-вектор и его модуль,

- $r_{**} = \frac{r}{\xi_{00}}$ — приведенные координаты; z, z_*, z_{**} — расстояния в одномерных задачах,
- $y = \frac{z}{\xi_0(t)}$ — расстояние, измеряемое в единицах длины ξ_0 ,
- q — волновой вектор флуктуации,
- $q_{\max} \equiv q_c = \frac{Q}{\xi_M}$ — обрезающий волновой вектор, Q — параметр теории,
- $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \zeta, \hat{\eta}, \nu$ — критические индексы (см., например, ¹⁷⁻¹⁹),
- d — толщина пленки или щели,
- $T_\lambda(d)$ — температура λ -перехода гелия в пленке, щели или капилляре,
- $T_{tr}(d)$ — то же, но для перехода первого рода,
- $\Delta T_\lambda = T_\lambda - T_\lambda(d)$ — смещение температуры λ -перехода гелия в пленке,
- $d_c = \pi \xi_M(t)$ — минимальное значение толщины пленки, для которого еще возможна сверхтекучесть,
- d_{tr} — значение толщины пленки в точке равновесного фазового перехода первого рода,
- $D = d/\xi_0(t)$ — безразмерная толщина пленки,
- Δ — поверхностный «дефицит» сверхтекучей массы (см. (3.12)),
- σ — «избыточная» поверхностная энергия гелия II (см. (3.13)),
- $S_\sigma, C_\sigma, m_\sigma, m_{3\sigma}$ — производные от этой энергии: поверхностные энтропия и теплоемкость, избыточная поверхностная масса, избыточная концентрация He^3 ,
- $\bar{\rho}_s \equiv \bar{\rho}_s(d)$ — средняя (по сечению) плотность сверхтекучей части в пленке, щели или капилляре,
- $\bar{\Phi}_{I-II} \equiv \bar{\Phi}_{I-II}(d), \bar{S}_{I-II} \equiv \bar{S}_{I-II}(d), \bar{C}_{II-I} \equiv \bar{C}_{II-I}(d)$ — то же для разностей плотностей термодинамических функций $He I$ и $He II$ (за вычетом регулярной части),
- $E = \frac{\bar{\Omega}_{I-II}}{\bar{\Omega}_{I-II}(\rho_{se})}$,
- $\mathcal{P} = \frac{\bar{\Phi}_{I-II} d}{\bar{\Phi}_{I-II}(\rho_{se}) \xi_0(t)}$,
- $\tilde{M}_s = \frac{\bar{\rho}_s \cdot d}{\rho_{se} \xi_0(t)}$,
- V_G — потенциал сил поля G , действующего за единицу массы гелия,
- $v_{sc2} = \frac{\hbar}{m \xi_M} = 5,8 \cdot 10^3 \left(\frac{3}{3+M} \right)^{1/2} t^{2/3} \text{ см} \cdot \text{сек}^{-1}$ — критическая скорость сверхтекучего течения, отвечающая обращению ρ_s в нуль,
- $v_{sc1} = \frac{v_{sc2}}{\sqrt{3}}$ (при $M = 0$) — скорость, при которой сверхтекучее течение становится неустойчивым (см. (3.74), (3.84)),
- Λ — безразмерный параметр теории, фигурирующий во временных уравнениях,
- $\tau = \left[\frac{2\Lambda m}{\hbar} \rho_s \left(\frac{\partial \mu_s}{\partial \rho_s} \right) \right]^{-1}$ — время релаксации параметра Ψ ,
- η_n — первая вязкость,
- $\zeta_i (i = 1, 2, 3, 4)$ — вторые вязкости,
- κ — теплопроводность,
- $u_2 = \sqrt{T \frac{S^2 \rho_s}{\rho \rho_n C_p}}$ — скорость второго звука.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. W. H. Keesom, Helium, Amsterdam, Elsevier, 1942 (имеется перевод: В. Кeesом, Гелий, М.: ИЛ, 1949).
2. F. L. London, Superfluids, v. 2, Macroscopic Theory of Superfluid Helium, N.Y., J. Wiley and Sons, 1954.
3. Z. M. Galasiewicz, Helium-4, Oxford, Pergamon Press, 1971.

4. J. Wilks, *The Properties of Liquid and Solid Helium*, Oxford, Clarendon Press, 1967.
5. W. E. Keller, *Helium-3 and Helium-4*, N.Y., Plenum Press, 1969.
6. J. Wheatley, *Rev. Mod. Phys.* **47**, 415 (1975); *Phys. Today* **29** (2), 32 (1976).
7. В. Л. Гинзбург, А. А. Собянин, *Письма ЖЭТФ* **15**, 343 (1972);
8. В. А. Акуличев, В. А. Буланов, *ЖЭТФ* **65**, 668 (1973). *Акуст. ж.* **20**, 817 (1974).
9. M. Bretz, T. T. Chung, *J. Low Temp. Phys.* **17**, 480 (1974).
10. С. А. Москаленко, Бозе-эйнштейновская конденсация экситонов и биэкситонов, Кишинев, «Штиинца», 1970; *ФТТ* **4**, 276 (1962).
11. Л. В. Келдыш, в кн. *Проблемы теоретической физики. Сборник памяти И. Е. Тамма*, М., «Наука», 1972, стр. 433.
12. В. Л. Гинзбург, *УФН* **97**, 601 (1969); *J. Stat. Phys.* **1**, 3 (1969).
13. G. Baum, Ch. Pethick, *Ann. Rev. Nucl. Sci.* **25**, 27 (1975).
14. Л. Д. Ландау, *ЖЭТФ* **11**, 592 (1941); *J. Phys. USSR* **11**, 91 (1947).
15. И. М. Халатников, *Теория сверхтекучести*, М., «Наука», 1971.
16. S. Putterman, *Superfluid Hydrodynamics*, Amsterdam, North-Holland, 1974.
17. А. З. Паташинский, В. Л. Покровский, *Флуктуационная теория фазовых переходов*, М., «Наука», 1975.
18. Г. Стенли, *Фазовые переходы и критические явления*, М., «Мир», 1973.
19. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика*, М., «Наука», 1976, гл. XIV.
20. В. Л. Гинзбург, *ДАН СССР* **69**, 161 (1949).
21. Л. Д. Ландау, И. М. Халатников, *ibid.* **96**, 469 (1954).
22. В. Л. Гинзбург, *ЖЭТФ* **14**, 134 (1944).
23. В. Л. Гинзбург, *ЖЭТФ* **29**, 254 (1955).
24. Г. А. Гамцемлидзе, *ЖЭТФ* **34**, 1434 (1958).
25. В. Л. Гинзбург, Л. П. Питаевский, *ibid.*, p. 1240.
26. В. Л. Гинзбург, Л. Д. Ландау, *ЖЭТФ* **20**, 1064 (1950).
27. Ю. Г. Мамаладзе, *ЖЭТФ* **52**, 729 (1967); *Phys. Lett.* **A27**, 322 (1968).
28. B. D. Josephson, *ibid.* **21**, 608 (1966).
29. D. J. Amit, *ibid.* **A26**, 448, 466 (1968).
30. D. J. Amit, M. Luban, *ibid.* **A27**, 487, M. Luban, D. J. Amit, *J. Phys. Soc. Japan*, Suppl. **26**, 120 (1968), M. Luban, E. Asscher, *Physica* **78**, 113 (1974).
31. H. Stenschke, G. Falk, *Zs. Phys.* **210**, 111; **212**, 308 (1968). H. Stenschke, *ibid.* **216**, 456 (1968); **220**, 238; **221**, 469 (1969).
32. D. Stauffer, *ibid.* **221**, 122.
33. H. J. Mikeska, *ibid.* **229**, 57.
34. Y. Kuramoto, *Progr. Theor. Phys.* **40**, 668 (1968); **41**, 604 (1969).
35. D. J. Amit, *J. Phys. and Chem. Sol.* **31**, 1099 (1970).
36. В. А. Слюсарев, М. А. Стржеменский, *ЖЭТФ* **58**, 1457 (1970).
37. А. А. Собянин, *ЖЭТФ* **61**, 433 (1971).
38. А. А. Собянин, *ЖЭТФ* **63**, 1780 (1972).
39. L. Kramer, *Phys. Rev.* **179**, 149 (1969).
40. M. Revzen, *ibid.* **185**, 337.
41. J. R. Clow, J. D. Reppy, *Phys. Rev. Lett.* **16**, 887 (1966); *Phys. Rev.* **A5**, 424 (1972).
42. J. A. Tyson, D. H. Douglass, *Phys. Rev. Lett.* **17**, 472 (1966). J. A. Tyson, *Phys. Rev.* **166**, 166 (1968).
43. J. A. Tyson, D. H. Douglass, *Phys. Rev. Lett.* **21**, 1308 (1968).
44. M. Kriss, I. Rudnick, *J. Low Temp. Phys.* **3**, 339 (1970).
45. D. S. Greywall, G. Ahlers, *Phys. Rev.* **A7**, 2145 (1973).
46. G. Ahlers, *ibid.* **A10**, 1670 (1974).
47. T. G. Wang, D. D. Elleman, E. E. Olli, M. M. Saffren, *Phys. Rev. Lett.* **30**, 485 (1973).
48. П. Де Жен, *Сверхпроводимость металлов и сплавов*, М., «Мир», 1968.
49. Р. О. Зайцев, *ЖЭТФ* **48**, 644, 1759 (1965); **50**, 1055 (1966).
50. В. Л. Гинзбург, *ФТТ* **2**, 2031 (1960).
51. А. П. Леванюк, *ЖЭТФ* **36**, 810 (1959).
52. А. П. Леванюк, *ФТТ* **5**, 1176 (1963).
53. D. J. Amit, *J. Phys.* **C7**, 3369 (1974).
54. L. P. Kadanoff et al., *Rev. Mod. Phys.* **39**, 395 (1967).
55. R. Bausch, *Zs. Phys.* **254**, 81 (1972).
56. K. G. Wilson, *Rev. Mod. Phys.* **47**, 773 (1975). К. Вильсон, Дж. Когут, *Ренормализационная группа и ϵ -разложение*, М., «Мир», 1975.
57. M. J. Buckingham, W. M. Fairbank, *Progr. Low Temp. Phys.* **3**, 80 (1961).

58. G. Ahlers, Phys. Rev. A3, 696 (1971); A8, 530 (1973).
59. K. H. Mueller, F. Pobbel, G. Ahlers, Phys. Rev. Lett. 34, 513 (1975).
60. F. J. Wegner, Phys. Rev. B5, 4529 (1972),
E. Bresin, D. J. Wallace, K. G. Wilson, *ibid.* B7, 232 (1973),
A. D. Bruce, A. Aharony, *ibid.* B10, 2078 (1974).
61. А. А. Собянин, Канд. диссертация (М., ФИАН СССР, 1975).
62. А. З. Паташинский, В. Л. Покровский, ЖЭТФ 64, 1445 (1973).
63. A. J. Leggett, Rev. Mod. Phys. 47, 331 (1975).
64. J. T. Ho, J. D. Litster, Phys. Rev. Lett. 22, 603 (1969).
65. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Статистическая физика, М., Гостехиздат, 1951, стр. 427.
66. O. Penrose, L. Onsager, Phys. Rev. 104, 576 (1956).
C. N. Yang, Rev. Mod. Phys. 34, 694 (1962).
67. J. de Boer, Physica 69, 193 (1973).
68. Л. П. Горьков, ЖЭТФ 36, 1918; 37, 833, 1467 (1959).
69. T. M. Rice, Phys. Rev. A140, 1889 (1965).
J. A. Tyson, Phys. Lett. A28, 526 (1969).
70. R. A. Ferrel, N. Menyhard, H. Schmidt, F. Schwabl, P. Szepfalussy, Ann. Phys. (N.Y.) 47, 565 (1968).
71. E. Guyon, I. Rudnick, J. de Phys. 29, 1081 (1968).
72. S. A. Scott, E. Guyon, I. Rudnick, J. Low Temp. Phys. 9, 389 (1972).
73. Л. В. Кикнадзе, Ю. Г. Мамаладзе, ФНТ 1, 219 (1975); 2, 413 (1976).
74. K. R. Atkins, I. Rudnick, Progr. Low Temp. Phys. 6, 37 (1970).
75. M. Revzen, I. Rudnick, L. S. Schulman, Phys. Lett. A46, 479 (1974).
76. D. F. Brewer, J. Low Temp. Phys. 3, 205 (1970).
77. L. Meyer, *ibid.*, p. 199.
78. I. Rudnick, J. C. Fraser, *ibid.*, p. 225.
79. F. Pobell, H. Chan, L. R. Corruccini, R. P. Henkel, S. W. Shwenterley, J. D. Reppy, Phys. Rev. Lett. 28, 542 (1972).
80. S. Gregory, C. C. Lim, Phys. Rev. A9, 2252 (1974).
81. G. G. Ihas, F. Pobell, *ibid.*, p. 1278.
82. W. C. Thomlinson, G. G. Ihas, F. Pobell, Phys. Rev. Lett. 31, 1284 (1973); Phys. Rev. B11, 4292 (1975).
83. E. S. Sabisky, C. H. Anderson, Phys. Rev. Lett. 30, 1122 (1973).
84. M. Chester, L. C. Yang, J. B. Stephens, *ibid.* 29, 211 (1972).
85. J. H. Scholtz, E. O. McLean, I. Rudnick, *ibid.* 32, 147 (1974).
86. J. A. Herb, J. G. Dash, *ibid.* 35, 171 (1975).
87. M. Chester, L. C. Yang, *ibid.* 31, 1377 (1973).
88. Н. Е. Дюмин, Э. Р. Рудаковский, ФНТ 2, 175 (1976).
89. C. W. Kiewiet, H. E. Hall, J. D. Reppy, Phys. Rev. Lett. 35, 1286 (1975).
90. Г. А. Гамцемлидзе, ЖЭТФ 70, 1312 (1976).
91. G. Ahlers, Phys. Rev. 171, 278 (1968).
92. S. Doniach, Phys. Rev. Lett. 31, 1450 (1973).
93. D. Stauffer, V. K. Wong, J. Low Temp. Phys. 2, 599 (1970).
94. В. Л. Гинзбург, А. А. Собянин, Письма ЖЭТФ 17, 698 (1973).
95. Л. В. Кикнадзе, Ю. Г. Мамаладзе, О. Д. Чейшвили, в кн. Труды X Международной конференции по физике низких температур, т. 1, М., ВИНТИ, 1967, стр. 491.
96. H. A. Kierstead, Phys. Rev. 162, 153 (1967).
97. И. Е. Дзялошинский, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, УФН 73, 381 (1961).
98. А. А. Собянин, доклад на 9-м Всесоюзном Бакурианском коллоквиуме по сверхтекучести и сверхпроводимости (1974).
99. D. M. Sittion, F. E. Moss, in: Proc. of 13th Intern. Conference on Low Temperature Physics (LT-13), v. 1, N.Y. — Lnd., Plenum Press, 1974, p. 479.
100. G. Winterling, F. S. Holmes, T. T. Greytak, Phys. Rev. Lett. 30, 427 (1973).
101. С. К. Немировский, ФНТ 2, 81 (1976).
102. P. C. Hohenberg, J. Low Temp. Phys. 13, 433 (1973).
103. K. Binder, P. C. Hohenberg, Phys. Rev. B6, 3461 (1972); B 9, 2194 (1974).
104. М. И. Каганов, А. Н. Омелянчук, ЖЭТФ 61, 1679 (1971).
М. И. Каганов, ЖЭТФ 62, 1196 (1972).
105. D. L. Mills, Phys. Rev. B3, 3887 (1971).
106. P. Kumar, *ibid.* B10, 2928 (1974).
107. T. C. Lubensky, M. H. Rubin, *ibid.* B11, 4533; B12, 3885 (1975).
108. K. R. Atkins, Y. Narahara, *ibid.* A138, 437 (1965).
109. F. M. Gasparini, J. Eckardt, D. O. Edwards, S. Y. Shen, J. Low Temp. Phys. 13, 437 (1973).

110. J. H. Magerlein, T. M. Sanders, Phys. Rev. Lett. 36, 258 (1976).
111. M. N. Barber, M. E. Fisher, Phys. Rev. A8, 1124 (1973).
112. S. Greenspoon, R. K. Pathria, *ibid.*, p. 2657.
113. S. M. Bhagat, R. A. Lasken, *ibid.* A4, 264 (1971); A5, 2297 (1972).
114. W. M. van Alphen, R. De Bruyn Ouboter, J. L. Olijhoek, K. W. Taconis, Physica 40, 490 (1969).
J. S. Langer, J. D. Reppy, Progr. Low Temp. Phys. 6, 1 (1970).
G. B. Hess, Phys. Rev. Lett. 27, 977 (1971).
J. R. Clow, J. D. Reppy, Phys. Rev. A5, 424 (1972).
J. C. Weaver, *ibid.* A6, 378.
R. C. Childers, J. T. Tough, J. Low Temp. Phys. 15, 53 (1974).
K. Telschow, I. Rudnick, T. G. Wang, Phys. Rev. Lett. 32, 1292 (1974).
115. Ю. Г. Мамаладзе, О. Д. Чейшвили, ЖЭТФ 50, 169 (1966); 52, 182 (1967).
116. R. F. Lynch, J. R. Pellam, Phys. Rev. Lett. 36, 369 (1976).
117. R. P. Feynman, in: Progress Low Temperature Physics, Ed. C. J. Gorter, Amsterdam, North-Holland, 1955, ch. II.
118. B. A. Huberman, Phys. Lett. A37, 225 (1971).
119. A. G. Van Vijfeijken, A. Walraven, F. A. S t a a s, Physica 44, 415 (1969).
E. R. Huggins, *цит. в* ⁹⁹ сборник, p. 135.
120. E. L. Andronikashvili, Yu. G. Mamaladze, Rev. Mod. Phys. 38, 567 (1966); Progr. Low Temp. Phys. 5, 79 (1967).
121. S. Putterman, Phys. Rept. C4, 67 (1972).
122. Л. П. Питаевский, ЖЭТФ 35, 408 (1958).
- 122a. Л. П. Питаевский, Письма ЖЭТФ 24 (1976).
123. И. М. Халатников, ЖЭТФ 57, 489 (1969).
124. T. Usui, Progr. Theor. Phys. 41, 1603 (1969).
125. H. Ueyama, *ibid.* 45, 25 (1971).
126. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, М., «Наука», 1974.
127. M. Barmatz, I. Rudnick, Phys. Rev. 170, 224 (1968).
J. A. Tyson, Phys. Rev. Lett. 21, 1235 (1968).
R. D. Williams, I. Rudnick, *ibid.* 25, 276 (1970).
См. также: С. Экштейн, И. Экштейн, Дж. Кеттерсон, Дж. Вигнос, в кн. «Физическая акустика», под ред. У. Мезона и Р. Терстона (пер. с англ. под редакцией И. Л. Фабелинского), т. 6, М., «Мир», 1973, стр. 288.
128. А. П. Леванюк, ЖЭТФ 69, 1304 (1965).
В. Л. Гинзбург, ДАН СССР 105, 240 (1955).
129. P. L. Young, A. Biennstock, J. Phys. Chem. Sol. 33, 1 (1972).
130. P. C. Hohenberg, in: Critical Phenomena. Proc. of the Intern. School of Physics «Enrico Fermi», Course LI, N.Y.-Lnd., Academic Press, 1971 (имеется перевод в кн. Квантовая теория поля и физика фазовых переходов, М., «Мир», 1975).
B. I. Halperin, P. C. Hohenberg, S. Ma, Phys. Rev. B10, 139 (1974).
B. I. Halperin, P. C. Hohenberg, E. D. Siggia, *ibid.* B13, 1299 (1976).
P. C. Hohenberg, A. Aharony, B. I. Halperin, E. D. Siggia, *ibid.*, p. 2986.
131. А. А. Собянин, в кн. Тезисы докладов 18-го Всесоюзного совещания по физике низких температур, Киев, 1974, стр. 29.
132. R. Krönig, in: Proc. of the Intern. Conference on Low Temperature Physics, Oxford, England, 1951, p. 99.
W. M. Saslow, Phys. Lett. A35, 241 (1971).
133. F. I. Bucholz, D. Brandt, H. Wiehert, *ibid.*, p. 471.
134. A. Schmid, Phys. kondens. Materie 5, 302 (1966).
135. Л. П. Горьков, Н. Б. Копнин, УФН 116, 413 (1975).
136. V. Ambegaokar, P. G. de Gennes, D. Rainer, Phys. Rev. A9, 2676 (1974).
137. G. Barton, M. A. Moore, J. Phys. C7, 4220 (1974); J. Low Temp. Phys. 21, 489 (1975).
M. C. Cross, *ibid.*, p. 525.
138. H. Haken, Rev. Mod. Phys. 47, 67 (1975); Zs. Phys. 20, 413; 21, 105; 22, 69, 73 (1975).
139. Л. Н. Булаевский, В. Л. Гинзбург, ЖЭТФ 45, 472 (1963).
140. Л. П. Питаевский, ЖЭТФ 13, 451 (1961).
141. P. Gross, Nuovo Cimento 20, 454 (1961); J. Math. Phys. 4, 190 (1963).
142. D. J. Thouless, Ann. Phys. (N.Y.) 52, 403 (1969).