

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

538.3(018).

НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ О СИЛАХ И ТЕНЗОРЕ ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА В МАКРОСКОПИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ*В. Л. Гинзбург, В. А. Угаров*

Вопрос о тензоре энергии-импульса в макроскопической электродинамике сравнительно недавно обсуждался на страницах УФН^{1, 2}. Тем не менее по ряду причин нам представляется уместным вернуться к этой проблеме. Во-первых, сила Абрагама была, наконец, измерена на опыте³, почти через 70 лет после того как выражение для нее было получено теоретически⁴⁻⁶. Во-вторых, в последние годы (в частности, после опубликования статей^{1, 2}) появился целый ряд материалов, посвященных этому кругу вопросов (помимо литературы, приведенной в^{1, 2}, см., например, ⁷⁻²²). В-третьих, мы хотим не только учесть часть этих материалов, но и дополнить статью² несколькими замечаниями, что может способствовать устранению некоторых недоразумений. Методический характер настоящей заметки побуждает не стремиться к особой краткости и поэтому вновь привести некоторые выражения, уже фигурировавшие ранее².

1. Тензор энергии-импульса в макроскопической электродинамике (и, впрочем, в электродинамике вообще) является величиной в известном смысле вспомогательной. Основными же величинами являются объемные силы (или, как раньше говорили, пондермоторные силы), а также плотность энергии и поток энергии. Именно силы входят в уравнения движения для среды или отдельных зарядов и могут, в принципе, быть измерены. Будем рассматривать макроскопическую среду, характеризуемую вещественными диэлектрической проницаемостью ϵ и магнитной проницаемостью μ (впрочем, ряд выражений будет носить более общий характер). Дисперсией, как частотной, так и пространственной, будем пренебрегать. Не будет учитываться также анизотропия. Разумеется, такое приближение имеет весьма ограниченную область применимости (в основном это низкочастотные поля), но нас будет интересовать как раз подобная ситуация. Помимо силы Лоренца с плотностью

$$\mathbf{f}^{\text{Л}} = \rho_e \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{j} \mathbf{B}] \quad (1)$$

на изотропную неподвижную среду (жидкость) в статическом поле действует еще сила, плотность которой $\mathbf{f}_m$ равна сумме плотностей двух сил:

$$\mathbf{f}_m = \mathbf{f}_{m1} + \mathbf{f}_{m2}, \quad (2)$$

$$\mathbf{f}_{m1} = -\frac{E^2}{8\pi} \nabla \epsilon - \frac{H^2}{8\pi} \nabla \mu, \quad \mathbf{f}_{m2} \equiv \mathbf{f}_{\text{стр}} = \nabla \left(\left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right) \frac{E^2}{8\pi} \right) + \nabla \left(\left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right) \frac{H^2}{8\pi} \right).$$

В формулах (1), (2) и ниже ρ_e — плотность заряда, $\mathbf{j}$ — плотность тока, ρ — плотность среды, $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ — напряженности электрического и магнитного полей, а $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ — электрическая и магнитная индукция. В выражениях (2) предполагается, что

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (3)$$

причем ϵ и μ считаются функциями точки $\mathbf{r}$ и плотности среды ρ .

В достаточно медленно меняющемся электромагнитном поле полное выражение для плотности силы получается добавлением к (2) плотности «силы Абрагама»

$$\mathbf{f}_{m3} \equiv \mathbf{f}^A = \frac{\epsilon\mu - 1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{E}\mathbf{H}] \quad (4)$$

и, таким образом, плотность полной силы $\mathbf{f}_m^{(t)}$ равна *)

$$\mathbf{f}_m^{(t)} = \mathbf{f}_{m1} + \mathbf{f}_{m2} + \mathbf{f}^A. \quad (5)$$

Как статическая сила (2), так и полная сила (5) получаются обычно несколько непоследовательным образом (здесь и иногда ниже для краткости вместо «плотности силы» говорится просто о силе).

Так, сначала рассматривают вариацию энергии при смещениях среды, что позволяет найти силу $\mathbf{f}_m$ (см. ²³ § 15 и 34; ²⁴ § 32 и 66); сила $\mathbf{f}^A$ добавляется затем к $\mathbf{f}_m$ на основе уравнений поля и общих соображений (²³, § 56). Между тем желательно получить и силы и другие выражения (плотность энергии, поток энергии, плотность импульса) единым образом на базе уравнений поля. На таком выводе мы и остановимся.

2. Уравнения поля запишем в обычном виде:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (6)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (7)$$

$$\text{div } \mathbf{D} = 4\pi \rho_e, \quad (8)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (9)$$

Эти уравнения можно считать справедливыми и для движущихся тел (сред), если отказаться от связей типа (3). Для наших целей достаточно рассмотреть медленно движущиеся тела (пренебрежение членами порядка u^2/c^2 , где u — скорость тела или среды относительно используемой «лабораторной» системы отсчета). Этот случай подробно рассмотрен в курсе ²⁴ (см. гл. VIII). При обсуждении закона сохранения энергии естественно обратиться именно к движущимся средам, поскольку сила, действующая на среду $\mathbf{f}_m$, «работает» только, если скорость среды $\mathbf{u}$ не равна нулю. Кроме того, стрикционная сила $\mathbf{f}_{m2}$ зависит от $(\partial\epsilon/\partial\rho)$ и связана с возможностью изменения плотности среды, которая контролируется уравнением непрерывности $(\partial\rho/\partial t) + \text{div } \rho\mathbf{u} = 0$, содержащим скорость $\mathbf{u}$.

В медленно движущейся среде (см. ²⁴, § 111)

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon \mathbf{E} + \left(\epsilon - \frac{1}{\mu} \right) \left[\frac{\mathbf{u}}{c} \mathbf{B} \right], \\ \mathbf{E} &= \frac{1}{\epsilon} \mathbf{D} - \left(1 - \frac{1}{\epsilon\mu} \right) \left[\frac{\mathbf{u}}{c} \mathbf{B} \right], \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B} + \left(\epsilon - \frac{1}{\mu} \right) \left[\frac{\mathbf{u}}{c} \mathbf{E} \right] = \frac{1}{\mu} \mathbf{B} + \left(1 - \frac{1}{\epsilon\mu} \right) \left[\frac{\mathbf{u}}{c} \mathbf{D} \right], \quad (11)$$

*) Мы опускаем здесь плотность силы $-\nabla p$, где p — давление в среде.

где предполагается, что в покоящейся среде справедливы связи (3); кроме того, по предположению, скорость среды $\mathbf{u}$ постоянна в пространстве и во времени, или, точнее, производными по $\mathbf{r}$ и t везде можно пренебречь (будет сохранена лишь дивергенция $\text{div } \mathbf{u}$, входящая в уравнение непрерывности).

Умножая скалярно уравнения (6) и (7) соответственно на $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, производя затем вычитание полученных выражений и используя тождество $\mathbf{E} \text{rot } \mathbf{H} - \mathbf{H} \text{rot } \mathbf{E} = -\text{div } [\mathbf{E}\mathbf{H}]$, мы приходим к теореме Пойнтинга *):

$$\frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \mathbf{H} \right) = -\mathbf{j}\mathbf{E} - \text{div } \mathbf{S}; \quad \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{H}]. \quad (12)$$

Вычислим теперь производную

$$\frac{\partial w^M}{\partial t} = \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D}\mathbf{E} + \mathbf{B}\mathbf{H}),$$

используя соотношения (10) и (11). При этом для вычисления $\partial \varepsilon / \partial t$ и $\partial \mu / \partial t$ воспользуемся соотношением

$$\frac{d\varepsilon}{dt} \equiv \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \varepsilon = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \frac{d\rho}{dt} = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \rho \text{div } \mathbf{u}$$

и аналогичным для $d\mu/dt$, где использовано уравнение непрерывности $(\partial \rho / \partial t) + \text{div } \rho \mathbf{u} = 0$, в силу которого

$$\frac{d\rho}{dt} \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \rho = -\rho \text{div } \mathbf{u}.$$

Кроме того, предполагается, очевидно, что изменение ε (а также μ) для данного элемента среды связано лишь с изменением ее плотности ρ . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} &= -\mathbf{u} \nabla \varepsilon - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \rho \text{div } \mathbf{u}, \\ \frac{\partial \mu}{\partial t} &= -\mathbf{u} \nabla \mu - \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \rho \text{div } \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (13)$$

и в силу связей (10), (11) мы получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \left(1 - \frac{1}{\varepsilon \mu} \right) \left[\frac{\mathbf{u}}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right] - \mathbf{D} \left\{ \mathbf{u} \nabla \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) - \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right) \rho \text{div } \mathbf{u} \right\}, \\ \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon \mu} \right) \left[\frac{\mathbf{u}}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right] - \mathbf{B} \left\{ \mathbf{u} \nabla \left(\frac{1}{\mu} \right) - \frac{1}{\mu^2} \left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right) \rho \text{div } \mathbf{u} \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Используя (14) и еще раз учитывая связи (10) — (11), с последовательным пренебрежением, как и ранее, членами порядка u^2/c^2 , получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial w^M}{\partial t} &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \mathbf{H} \right) + \frac{1}{8\pi} E^2 (\mathbf{u} \nabla \varepsilon) + \frac{E^2}{8\pi} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right) \rho \text{div } \mathbf{u} + \\ &\quad + \frac{1}{8\pi} H^2 (\mathbf{u} \nabla \mu) + \frac{H^2}{8\pi} \left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right) \rho \text{div } \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (15)$$

Наконец, комбинируя (15) с (12), имеем

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{D}\mathbf{E} + \mathbf{B}\mathbf{H}}{8\pi} \right) &= -\frac{\partial w^M}{\partial t} = \\ &= \mathbf{j}\mathbf{E} + \mathbf{f}_m \mathbf{u} + \text{div} \left\{ \mathbf{S} - \mathbf{u} \frac{1}{8\pi} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \rho \right) E^2 - \mathbf{u} \frac{1}{8\pi} \left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \rho \right) H^2 \right\}, \end{aligned} \quad (16)$$

*) Иногда теоремой Пойнтинга называют также соотношение, получающееся из (12) интегрированием по объему.

где $\mathbf{f}_m$ — выражение (2) и $\mathbf{f}_m \mathbf{u}$ есть работа силы над средой *). Очевидно, соотношение (16) имеет смысл закона сохранения энергии, причем w^M можно считать плотностью энергии, а полный поток энергии

$$\mathbf{S}^t = \mathbf{S} - \frac{\mathbf{u}}{8\pi} \left\{ \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right) \rho E^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right) \rho H^2 \right\}. \quad (17)$$

Само по себе появление дополнительного потока энергии, пропорционального скорости среды $\mathbf{u}$, не может вызвать удивления. Вместе с тем у нас еще нет уверенности в том, что учет пропорциональной $\mathbf{u}$ добавки к $\mathbf{S}$ не лежит за пределами точности приведенного расчета. Последнее замечание не относится, однако, к интересующему нас члену $\mathbf{f}_m \mathbf{u}$. Полученное выражение для этого члена определяет силу $\mathbf{f}_m$. Такой вывод выражения (2) для силы $\mathbf{f}_m$, по сути дела, эквивалентен обычно используемым статическим вычислениям. Но вывод годится не только для статического случая и уже поэтому является более общим. Он кажется нам и более последовательным.

Возникает, однако, вопрос: почему же в (16) не фигурирует также сила Абрагама $\mathbf{f}^A$? Ведь эта сила, если она действительно существует, должна производить работу на равных правах с силой $\mathbf{f}_m$. Поэтому в (16) должна, казалось бы, входить полная сила

$$\mathbf{f}_m^{(t)} = \mathbf{f}_m + \mathbf{f}^A.$$

Ответ на этот вполне естественный вопрос состоит в том, что закон сохранения (16), как и другие аналогичные соотношения, отнюдь не определяют все величины однозначным образом. В самом деле, допустим, что на среду действует также сила Абрагама (4), которую запишем в более общем виде

$$\mathbf{f}^A = \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} \{[\mathbf{DB}] - [\mathbf{EH}]\}. \quad (18)$$

Тогда ничто не мешает записать соотношение (16) — закон сохранения энергии — заменив $\mathbf{f}_m$ на полную силу $\mathbf{f}_m^{(t)} = \mathbf{f}_m + \mathbf{f}^A$ и одновременно, плотность энергии w^M на плотность

$$w^A = \frac{\mathbf{DE} + \mathbf{BH}}{8\pi} - \frac{\mathbf{u}}{4\pi c} \{[\mathbf{DB}] - [\mathbf{EH}]\}, \quad \frac{\partial w^A}{\partial t} = \frac{\partial w^M}{\partial t} - \mathbf{f}^A \mathbf{u}. \quad (19)$$

Таким образом, если выбрать для плотности энергии выражение Минковского w^M , то силу $\mathbf{f}^A$ учитывать не следует — нужно считать, что она отсутствует. Наоборот, предположение о существовании силы $\mathbf{f}^A$ связано с выбором для плотности энергии в медленно движущейся среде выражения Абрагама w^A , приведенного в (19).

Сказанное справедливо и в отношении закона сохранения импульса и, естественно, закона сохранения энергии-импульса. Все подобные законы сохранения не могут однозначно определять входящие в них величины и, конкретно, тензор энергии-импульса T_{ik} . Даже, если дивергенция этого тензора равна нулю, к нему можно добавить выражение с равной нулю дивергенцией. Если же, как в нашем случае, рассматриваются плотность энергии, тензор натяжений и плотность импульса электромагнитного поля в среде, то дивергенция тензора энергии-импульса $\partial T_{ik} / \partial x_k$ вообще не равна нулю — нулю должна равняться лишь дивергенция полного тензора энергии-импульса $T_{ik}^{(t)} = T_{ik} + T_{ik}^{(m)}$, где $T_{ik}^{(m)}$ — тензор энер-

*) Приведенный вывод отличается от содержащегося в § 115 третьего издания (1946 г.) книги Тамма ²⁴ лишь учетом членов с $\partial \varepsilon / \partial \rho$ и $\partial \mu / \partial \rho$ (И. Е. Тамм предполагал, что $\partial \varepsilon / \partial \rho = 0$ и $\partial \mu / \partial \rho = 0$; заметим, что § 115 и 116 издания 1946 г. были И. Е. Таммом изъяты из последующих изданий в связи с его неудовлетворенностью освещением вопроса о тензоре энергии-импульса Минковского и Абрагама).

гии-импульса среды. Очевидно, однозначное разделение $T_{ik}^{(t)}$ на T_{ik} и $T_{ik}^{(m)}$ только на основании закона сохранения $\partial T_{ik}^{(t)}/\partial x_k = 0$ не представляется возможным.

Прежде чем сделать еще несколько замечаний на этот счет — они связаны с выбором T_{ik} в форме Минковского или в форме Абрагама, — остановимся на выводе закона сохранения импульса электромагнитного поля из уравнений поля. Точнее, конечно, речь идет о том законе сохранения, который приобретает смысл закона сохранения импульса после уточнения смысла входящих в него величин.

3. Для этой цели умножим векторно уравнение (6) на $\mathbf{B}$, а уравнение (7) — на $\mathbf{D}$ и сложим соответствующие выражения. В результате сразу получаем

$$\frac{1}{4\pi} \{[\mathbf{D} \text{ rot } \mathbf{E}] + [\mathbf{B} \text{ rot } \mathbf{H}]\} = -\frac{1}{c} [\mathbf{jB}] - \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{DB}]. \quad (20)$$

Это и есть то единственное соотношение, связанное с законом сохранения импульса, которое можно получить из уравнений поля. В силу упомянутой неоднозначности при получении выражения для силы на основании одного лишь закона сохранения (12), придать соотношению (20) вид закона сохранения

$$\frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial g_\alpha}{\partial t} = f_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3) \quad (21)$$

с конкретизацией отдельных членов можно только, используя дополнительные соображения, касающиеся вида полной силы $\mathbf{f}$, тензора натяжений $\sigma_{\alpha\beta}$ и плотности импульса поля $\mathbf{g}$. Так, во всяком случае, $\mathbf{f} = \mathbf{f}^L + \mathbf{f}_m^{(t)}$, причем плотность лоренцовой силы $\mathbf{f}^L$ известна (см. (1)), а $\mathbf{f}_m^{(t)}$ еще подлежит определению. Поэтому добавим к правой и левой частям соотношения (20) одинаковые члены $-\rho_e \mathbf{E} = -\mathbf{E} \text{ div } \mathbf{D}/4\pi$ (см. (8)). Тогда соотношение (20) запишется в виде

$$\frac{1}{4\pi} \{[\mathbf{D} \text{ rot } \mathbf{E}] + [\mathbf{B} \text{ rot } \mathbf{H}] - \mathbf{E} \text{ div } \mathbf{D}\} = -\mathbf{f}^L - \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{DB}]. \quad (20a)$$

Введем теперь тензор натяжений Минковского

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(1)} = \frac{1}{4\pi} \{E_\alpha D_\beta + H_\alpha B_\beta\} - \delta_{\alpha\beta} \frac{\mathbf{DE} + \mathbf{BH}}{8\pi}. \quad (22)$$

В результате дифференцирования и простых преобразований (они подробно проделаны в книге ²⁴, § 105) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}^{(1)}}{\partial x_\beta} = & -\frac{1}{4\pi} \{[\mathbf{D} \text{ rot } \mathbf{E}] + [\mathbf{B} \text{ rot } \mathbf{H}] - \mathbf{E} \text{ div } \mathbf{D}\}_\alpha + \\ & + \frac{1}{8\pi} \left\{ \left(\frac{\partial E_\beta}{\partial x_\alpha} D_\beta - E_\beta \frac{\partial D_\beta}{\partial x_\alpha} \right) + \left(\frac{\partial H_\beta}{\partial x_\alpha} B_\beta - H_\beta \frac{\partial B_\beta}{\partial x_\alpha} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (23)$$

Комбинируя (23) с (20a), можно записать закон сохранения импульса в форме (21):

$$\frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}^{(1)}}{\partial x_\beta} = f_\alpha + \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{DB}]_\alpha - \frac{E^2}{8\pi} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_\alpha} - \frac{H^2}{8\pi} \frac{\partial \mu}{\partial x_\alpha}, \quad (24)$$

где второе выражение в фигурных скобках, входящее в (23), преобразовано с учетом связей (3), справедливых для неподвижной среды.

Если принять выражение для силы в виде (5), соотношение (24) следует подвергнуть дальнейшему видоизменению. Нужно ввести тензор натяжений стрикционных сил

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(2)} = \left\{ \frac{1}{8\pi} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \rho \right) E^2 + \frac{1}{8\pi} \left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \rho \right) H^2 \right\} \delta_{\alpha\beta} \quad (25)$$

и плотность импульса электромагнитного поля

$$g^A = \frac{1}{4\pi c} [\mathbf{E}\mathbf{H}]. \quad (26)$$

Тогда закон сохранения импульса (24) принимает окончательную форму:

$$\frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial g_\alpha^A}{\partial t} = f_\alpha^\Pi + f_{m,\alpha}^{(t)}, \quad (27)$$

где $\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}^{(1)} + \sigma_{\alpha\beta}^{(2)}$, а f_α^Π и $f_m^{(t)}$ — силы, определенные в (1) и (5).

Совершенно очевидно, что если бы мы считали плотность импульса поля равной

$$g^M = \frac{1}{4\pi c} [\mathbf{D}\mathbf{B}], \quad (28)$$

то закон сохранения импульса имел бы вид

$$\frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial g_\alpha^M}{\partial t} = f_\alpha^\Pi + f_{m,\alpha}, \quad (29)$$

где $f_m = f_m^{(t)} - f^A$ — действующая на среду сила (2).

Таким образом, в согласии со сказанным ранее, мы видим, что на основании одного закона сохранения нельзя однозначно решить вопрос о выборе выражения для плотности импульса поля в среде. Разумеется, все сказанное справедливо и при использовании тензора энергии-импульса T_{ik} , закон сохранения которого просто объединяет законы сохранения энергии и импульса.

Для удобства читателей приведем здесь выражения для тензоров энергии-импульса Минковского T_{ik}^M и Абрагама T_{ik}^A ($i, k = 1, 2, 3, 4$; $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = ict$). Их вид для случая неподвижной среды — он ясен из (16), (27) и (29) — таков *):

$$T_{ik}^M = \begin{pmatrix} \sigma_{\alpha\beta} & -icg^M \\ -\frac{i}{c} S & w \end{pmatrix}, \quad g^M = \frac{\varepsilon\mu}{4\pi c} [\mathbf{E}\mathbf{H}] = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \mathbf{S}, \quad \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{H}], \quad (30)$$

$$\frac{\partial T_{ik}^M}{\partial x_k} = f_i^\Pi + f_{m,i}, \quad f_\alpha^\Pi = \left\{ \rho_e \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{j}\mathbf{B}] \right\}_\alpha, \quad f_4^\Pi = \frac{i}{c} (\mathbf{j}\mathbf{E}), \quad (31)$$

$$T_{ik}^A = \begin{pmatrix} \sigma_{\alpha\beta} & -icg^A \\ -\frac{i}{c} S & w \end{pmatrix}, \quad g^A = \frac{1}{4\pi c} [\mathbf{E}\mathbf{H}] = \frac{1}{c^2} \mathbf{S}, \quad \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{H}], \quad (32)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_{ik}^A}{\partial x_k} &= f_i^\Pi + f_{m,i} + f_i^A, \\ f_\alpha^A &= \frac{\varepsilon\mu - 1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{E}\mathbf{H}]_\alpha; \quad f_4^A = 0. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

*) Стрикционные силы нередко игнорируются, и поэтому тензорами T_{ik}^M и T_{ik}^A часто называют выражения, в которых вместо $\sigma_{\alpha\beta}$ фигурирует тензор $\sigma_{\alpha\beta}^{(1)}$ (см. (22) — (24)). Кроме того, уже в неподвижной, но анизотропной среде тензор натяжений Абрагама несколько отличается от тензора (22), о чем еще пойдет речь ниже (см. (36)).

Трехмерная сила $\mathbf{f}_m$ в (31) и (33) определяется выражением (2). Четвертые компоненты плотности силы $f_{m,i}$ как и силы f_i^A , определяемые обычным, образом, равны $(i/c)(\mathbf{f}\mathbf{u})$ и для неподвижной среды обращаются в нуль, т. е. $f_{m,4} = 0$, $f_4^A = 0$.

Кроме того, в неподвижной среде

$$w = w^M = w^A = \frac{\varepsilon E^2 + \mu H^2}{8\pi}. \quad (34)$$

Выражения (30) и (33) отличаются от приведенных в статье ² только тем, что в ² принималось $\mu = 1$ и рассматривалась лишь однородная среда ($\varepsilon = \text{const}$) с $(\partial\varepsilon/\partial\rho) = 0$, в силу чего сила $\mathbf{f}_m = \mathbf{f}_{m1} + \mathbf{f}_{m2}$ фактически игнорировалась. Если не использовать связей (3), то в (30) нужно заменить $\mathbf{g}^M$ выражением (28) и в (33) использовать для $\mathbf{f}^A$ формулу (18); кроме того,

$$w = (\mathbf{E}\mathbf{D} + \mathbf{B}\mathbf{H})/8\pi$$

и тензор $\sigma_{\alpha\beta}$ нужно брать соответственно в форме Минковского или Абрагама ($\sigma_{\alpha\beta}$ при пренебрежении стрикционными силами см. (22) и (36)).

Мы видим, что все различие между тензорами Минковского T_{ik}^M и Абрагама T_{ik}^A в рассматриваемом случае изотропной покоящейся среды связано с тем, полагать ли в уравнении $\partial T_{ik}/\partial x_k = f_i$ силу типа силы Абрагама равной нулю, выбирая при этом плотность импульса поля в среде $\mathbf{g} = \mathbf{g}^M$ (Минковский) или же принять плотность импульса поля в среде равной $\mathbf{g}^A = \mathbf{S}/c^2$, считая что на среду также действует сила с плотностью $\mathbf{f}^A$ (Абрагам).

4. Выбор между тензорами Минковского и Абрагама, т. е. нахождение «истинного» тензора энергии-импульса поля в среде сводится таким образом к вопросу о реальности силы Абрагама. Поскольку эта сила действует на среду, для ее измерения нужно рассматривать движение среды и, вообще, обратиться к процессам в среде. В теоретическом плане в существовании силы Абрагама (или, точнее, силы такого типа) не может быть никаких сомнений. В самом деле, если бы сила Абрагама отсутствовала, то на однородную среду с $(\partial\varepsilon/\partial\rho) = 0$ (и при $\rho_e = 0$, $\mathbf{j} = 0$) не действовала бы никакая сила, в частности, и при наличии тока поляризации $\partial/\partial t [(\mathbf{D} - \mathbf{E})/4\pi]$.

В то же время на ток проводимости лоренцова сила $(1/c)[\mathbf{j}\mathbf{B}]$ действует. Тем самым ток смещения не выступал бы на равных правах с током проводимости, что противоречит духу теории Максвелла и электронной теории. Собственно, на этом и было с самого начала основано возражение ⁴ против выбора тензора Минковского и соответствующего ему выражения для сил, действующих на среду. Правда, сила Абрагама $\mathbf{f}^A$ не равна лоренцовой силе, действующей на ток поляризации

$$\mathbf{f}^P = \frac{1}{4\pi c} \left[\frac{\partial(\mathbf{D} - \mathbf{E})}{\partial t}, \mathbf{B} \right] \equiv \frac{1}{c} \left[\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}, \mathbf{B} \right],$$

но эти силы родственны между собой и появление именно выражения $\mathbf{f}^A$, а не $\mathbf{f}^P$, связано с учетом некоторых других членов в выражении для сил. Пр продемонстрируем это на примере немагнитной среды из диполей. В этом случае сила, действующая на единицу объема поляризованной среды в поле $\mathbf{E}$, равна

$$\mathbf{f} = (\mathbf{P}\nabla) \mathbf{E} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} (\mathbf{E}\nabla) \mathbf{E} = \frac{\varepsilon - 1}{8\pi} \nabla E^2 - \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} [\mathbf{E} \text{ rot } \mathbf{E}],$$

поскольку поляризация

$$\mathbf{P} = N\mathbf{p} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \mathbf{E}.$$

Второй член здесь в силу уравнения $\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$ равен силе

$$\mathbf{f}^H = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi c} \left[-\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \mathbf{E} \right] = \frac{1}{c} \left[\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \mathbf{P} \right].$$

Очевидно, что

$$\mathbf{f}^P + \mathbf{f}^H = \mathbf{f}^A = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{E}\mathbf{H}].$$

Разумеется, этот пример не является каким-либо доказательством, он лишь иллюстрирует связь силы Абрагама с лоренцовой силой, действующей на ток поляризации.

Самое же общее выражение (18) для $\mathbf{f}^A$ следует из «закона сохранения импульса» (20)–(20а), в котором автоматически появляется член $(1/4\pi c) (\partial/\partial t) [\mathbf{D}\mathbf{B}]$, и из того факта, что сила, действующая на среду, должна, конечно, исчезать при переходе к вакууму. Иначе можно сказать и так: для получения силы, действующей на среду, нужно из соответствующего суммарного выражения для силы и изменения импульса $(1/4\pi c) (\partial/\partial t) [\mathbf{D}\mathbf{B}]$ вычесть изменение импульса самого поля $(1/4\pi c) (\partial/\partial t) [\mathbf{E}\mathbf{H}]$. То же, что для него нужно брать именно выписанное выражение, как считается, следует из требования релятивистской инвариантности и закона сохранения момента импульса, в силу которых плотность потока энергии $\mathbf{S} = (c/4\pi) [\mathbf{E}\mathbf{H}]$ должна (с точностью до множителя c^2) совпадать с пространственной плотностью импульса поля (см., например, ²³, § 56). Все эти рассуждения, однако, не бесспорны в плане обоснования выбора для силы типа Абрагама именно выражения (18). Все дело в том, что лишь поле и среда образуют замкнутую систему; разделение же полных величин (импульса, энергии и т. п.) на части, отвечающие подсистемам (полю и среде) не может не содержать известной условности. Поэтому, например, заранее не ясно, почему тензор энергии-импульса поля должен обязательно быть симметричным, в то время как такое требование не вызывает сомнений в применении ко всей системе в связи с необходимостью обеспечить сохранение момента импульса.

Мы не будем останавливаться на этих вопросах подробнее, но уже в свете сказанного ясно, что измерение силы Абрагама на эксперименте отнюдь не является излишним. К сожалению, сила $\mathbf{f}^A$ весьма мала и к тому же может быть измерена лишь при довольно специальной постановке задачи (¹, ²⁵) (в большинстве же случаев сила, действующая на среду, непосредственно не измеряется и использование тензоров Минковского и Абрагама приводит к одинаковым результатам; подробнее см. ²⁵). Недавно, однако, такие измерения удалось осуществить ³, причем, по-видимому, вполне успешно. На эксперименте использовался диск из титаната бария, для которого значение ε равнялось примерно 4000. В центре диска имелось небольшое отверстие, а края были алюминированы, так что получился цилиндрический конденсатор. Диск играл роль массы в крутильном маятнике и был подвешен между полюсами электромагнита (поле $B = H \approx 10$ кэс). На диск-конденсатор подавалась переменное напряжение с амплитудой 150 в (частота поля в кратком сообщении ³ не указана, но ясно, что она была весьма низкой и могла подстраиваться к собственной частоте крутильных колебаний). В описанной установке постоянное поле $\mathbf{B}$ перпендикулярно к переменной поляризации $\mathbf{P} = [(\varepsilon - 1)/4\pi] \mathbf{E}$ и плотность силы Абрагама равнялась $(1/c) [\partial \mathbf{P}/\partial t, \mathbf{B}]$. Амплитуда колебаний

маятника оказалась весьма близкой к той, которая следует из расчета с использованием силы Абрагама. Можно надеяться, что в близком будущем сила Абрагама будет измерена с большей точностью. Но уже сейчас, видимо, можно не сомневаться в наличии этой силы на основе экспериментальных данных, не говоря уже о теоретических соображениях. Таким образом, в настоящее время нет сомнений, что тензор Минковского не может рассматриваться в качестве «истинного», а выбор тензора Абрагама для достаточно простых случаев хорошо отвечает реальности.

5. Вместе с тем в теории излучения зарядов и других источников, движущихся в среде, особенно эффективно и, можно сказать, непосредственно используется именно тензор Минковского. Точнее, речь идет о применении выражения (28) для плотности импульса поля в среде. Именнo, считая импульс цуга волн равным $\mathbf{G}^M = \int \mathbf{g}^M dV$, мы приходим к связи $\mathbf{G}^M = (Wn/c) \mathbf{k}/k$, где $n = \sqrt{\epsilon\mu}$ — показатель преломления и W — энергия поля в цуге (при этом проводится усреднение по высокой частоте; подробнее см. в ²). На квантовом уровне эта связь отвечает выбору для импульса «фотона в среде» выражения $\hbar \mathbf{k} = (\hbar \omega n/c) \mathbf{k}/k$, где $\hbar \omega$ — энергия фотона и $\mathbf{k}$ — его волновой вектор. Как раз такие выражения нужно использовать для получения на базе применения законов сохранения энергии и импульса правильных результатов, таких, например, как условие излучения Вавилова — Черенкова. Естественно возникающий в этой связи вопрос о причине успеха при использовании «неверного» тензор Минковского был весьма полно освещен в статье ².

Дело сводится к следующему. Поле в среде, которая считается не диспергирующей, получает не импульс $\mathbf{G}^M$, а импульс

$$\mathbf{G}^A = \frac{W}{nc} \frac{\mathbf{k}}{k} = \frac{W}{c^2} \frac{c}{n} \frac{\mathbf{k}}{k},$$

соответствующий использованию тензора Абрагама *). Вместе с тем, в связи с существованием силы Абрагама

$$\mathbf{f}^A = \frac{n^2 - 1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{E}\mathbf{H}],$$

при излучении цуга волн находящимся в среде излучателем этой среде передается импульс силы

$$\mathbf{F}^A = \int \mathbf{f}^A dt dV = \frac{n^2 - 1}{cn} W \frac{\mathbf{k}}{k} = \mathbf{G}^M - \mathbf{G}^A.$$

Поэтому излучатель изменяет свой импульс на величину — $\mathbf{G}^M$, причем $\mathbf{G}^M = \mathbf{G}^A + \mathbf{F}^A$, совершенно такую же, как и при предположении о передаче только полю в среде (а не полю и среде) импульса Минковского.

В статье ² этот результат был получен и обсужден лишь при использовании ряда предположений. Среда считалась неподвижной, немагнитной и однородной; использовалась связь $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$. Между тем речь идет о весьма общем соотношении, которое должно носить универсальный характер. Так оно и есть в действительности.

*) Для диспергирующей среды, как ясно из общих соображений, электромагнитный импульс цуга волн $\mathbf{G}^A = (W/c^2) \mathbf{v}_{\text{гр}} = (W/c^2) d\omega/d\mathbf{k}$, где $\mathbf{v}_{\text{гр}} = d\omega/d\mathbf{k}$ — групповая скорость. Любопытно, что для изотропной плазмы с $\epsilon = n^2 = 1 - (\omega_p^2/\omega^2)$, когда $v_{\text{гр}} = cn$, имеет место равенство $\mathbf{G}^M = (Wn/c) \mathbf{k}/k = \mathbf{G}^A$. Заметим, что везде выше полная энергия $W = \int w^M dV = \int w^A dV$, поскольку речь идет о неподвижной среде.

Законы сохранения (12) и (20) были непосредственно получены из уравнений поля (6) — (7) и поэтому справедливы без каких-либо дальнейших допущений. Вводя, далее, тензор натяжений $\sigma_{\alpha\beta}$, можно привести уравнение (20) к виду

$$\frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = f_{\alpha}^{\text{л}} + \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} [\text{DB}]_{\alpha} + f'_{m, \alpha}, \quad (35)$$

где f'_m — некоторая сила, действующая на среду.

При использовании для $\sigma_{\alpha\beta}$ выражения Минковского (22) вид силы f'_m ясен из формулы (23), а с использованием также связей (3) имеем $f'_m = f'_{m1}$ (см. (2) и (24)). К тому же сила f'_{m1} для однородной среды равна нулю. Если в качестве $\sigma_{\alpha\beta}$ для неподвижной среды выбрать не выражение Минковского (22), а симметричный тензор натяжений Абрагама, отличающийся от (22) лишь заменой $E_{\alpha}D_{\beta}$ на $(E_{\alpha}D_{\beta} + E_{\beta}D_{\alpha})/2$ и аналогично для $H_{\alpha}B_{\beta}$:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta}^A = \frac{1}{8\pi} \{ (E_{\alpha}D_{\beta} + E_{\beta}D_{\alpha} + H_{\alpha}B_{\beta} + H_{\beta}B_{\alpha}) - \delta_{\alpha\beta} (\text{DE} + \text{BH}) \} = \\ = \sigma_{\alpha\beta}^M + \frac{1}{8\pi} (E_{\beta}D_{\alpha} - E_{\alpha}D_{\beta} + H_{\beta}B_{\alpha} - H_{\alpha}B_{\beta}), \end{aligned} \quad (36)$$

то в неподвижной изотропной среде (связи (3)) тем не менее $\sigma_{\alpha\beta}^A = \sigma_{\alpha\beta}^M$. Добавление к тензорам $\sigma_{\alpha\beta}^A$ или $\sigma_{\alpha\beta}^M$ стрикционного тензора $\sigma_{\alpha\beta}^{(2)}$ (см. (25)) или любых других одинаковых членов, очевидно, не изменяет разности $\sigma_{\alpha\beta}^M - \sigma_{\alpha\beta}^A$.

Рассмотрим теперь среду, на которую при наличии поля как раз и действует сила $f^{\text{л}} + f'_m$. Тогда изменение плотности импульса среды $g_{m, \text{м}}$ описывается уравнением *)

$$\frac{\partial g_{m, \text{м}}}{\partial t} = f^{\text{л}} + f'_m + h, \quad (37)$$

где h — плотность сил, не связанных непосредственно с наличием поля (например, $h = -\nabla p + \rho a$, где p — давление и a — ускорение силы тяжести).

Вычтем выражение (35), переписанное в векторной форме, из (37), и затем произведем интегрирование по всему пространству в предположении, что поля «на бесконечности» достаточно быстро убывают. Член с дивергенцией тогда не играет роли (он преобразуется в интеграл по поверхности и исчезает) и мы получаем

$$\frac{d}{dt} (G_{m, \text{м}} + G^M) = \int h dV, \quad (38)$$

где

$$G_{m, \text{м}} = \int g_{m, \text{м}} dV, \quad G^M = \frac{1}{4\pi c} \int [\text{DB}] dV = \int g^M dV.$$

В формуле (38) частные производные по времени заменены на полные производные, поскольку интегралы по всему пространству зависят только от t ; разумеется, для замкнутой системы, кроме того, $\int h dV = 0$.

Соотношение (38) представляет собой закон сохранения импульса для системы, состоящей из поля и среды. Но утверждать, как это кажется естественным на первый взгляд, что $G_{m, \text{м}}$ представляет собой импульс среды, а G^M — импульс поля, еще нельзя. В самом деле, пусть член

*) Скорость среды мы считаем равной нулю или же столь малой, что $dg_m/dt = (\partial g_m/\partial t) + (u \nabla) g_m \approx \partial g_m/\partial t$ и т. д.

$(1/4\pi c) (\partial/\partial t) [\mathbf{DB}]$ в формуле (35) представляет собой не изменение импульса поля, а равен

$$\frac{\partial \mathbf{g}_{m,A}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{DB}] = \mathbf{f}^A + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{g}^A, \quad (39)$$

где $\mathbf{f}^A$ — плотность некоторой объемной силы, действующей на среду, а $\mathbf{g}^A$ — плотность импульса поля (индекс «A» не означает пока обязательного отождествления $\mathbf{f}^A$ и $\mathbf{g}^A$ с выражениями Абрагама). Тогда и в правую часть соотношения (37) нужно добавить силу $\mathbf{f}^A$; разумеется, плотность импульса среды $\mathbf{g}_{m,A}$ будет уже иной — ее изменение определяется теперь уравнением

$$\frac{\partial \mathbf{g}_{m,A}}{\partial t} = \mathbf{f}^I + \mathbf{f}'_m + \mathbf{f}^A + \mathbf{h}. \quad (40)$$

Вычитая теперь уже выражения (35) из (40) и интегрируя далее по всему пространству, с учетом (39) получаем

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{G}_{m,A} + \mathbf{G}^A) = \int \mathbf{h} dV, \quad (41)$$

где

$$\mathbf{G}_{m,A} = \int \mathbf{g}_{m,A} dV, \quad \mathbf{G}^A = \int \mathbf{g}^A dV.$$

Наиболее естественно, конечно, отождествить $\mathbf{g}^A$ с выражением Абрагама (26), и тогда $\mathbf{f}^A$ определяется формулой (18). Однако, как ясно из сказанного, выбор выражения для $\mathbf{g}^A$ или $\mathbf{f}^A$ должен производиться на основании опытных данных или каких-то расчетов, лежащих за пределами самих уравнений для макроскопического поля, из которых вытекает лишь закон сохранения (20) или его непосредственные следствия.

Как это очевидно из (37) и (40),

$$\frac{\partial \mathbf{g}_{m,M}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{g}_{m,A}}{\partial t} + \mathbf{f}^A, \quad (42)$$

но это верно только в предположении, что сравниваются два варианта теории с одинаковыми силами $\mathbf{f}'_m$ и $\mathbf{h}$. В случае же интегральных величин равенство

$$\frac{d\mathbf{G}_{m,M}}{dt} = \frac{d\mathbf{G}_{m,A}}{dt} + \int \mathbf{f}^A dV \quad (43)$$

имеет уже место и для вариантов теории с различными $\mathbf{f}'_m$ и $\mathbf{h}$, если только

$$\int (\mathbf{f}'_{m,M} - \mathbf{f}'_{m,A}) dV = 0 \quad \text{и} \quad \int (\mathbf{h}_M - \mathbf{h}_A) dV = 0,$$

где индексы «M» и «A» отвечают силам в вариантах теории «M» и «A». (Разумеется, если объемные силы $\mathbf{f}'_m$ и $\mathbf{h}$ выражаются через $\frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}$, то соответствующие объемные интегралы переходят в поверхностные и, вообще говоря, обращаются в нуль.)

Из (38), (41), и (43) ясно, наконец, что равенство

$$\mathbf{G}^M = \mathbf{G}^A + \int \mathbf{f}^A dt dV \quad (44)$$

носит весьма общий характер и фактически не связано с частными предположениями.

Это равенство справедливо, в частности, для движущейся среды.

Разумеется, в силу релятивистской инвариантности уравнений поля сразу же ясно, что при переходе от неподвижной к равномерно движущейся среде никакие общие соотношения нарушаться не могут. Но полезно проследить это на примере тензоров Минковского и Абрагама.

По Минковскому, как в неподвижной, так и в движущейся среде выражения для $\sigma_{\alpha\beta}^M$, g^M и w^M определяются формулами (22), (28) и (34), причем стрикционных сил, исключительно простоты ради, сейчас не рассматриваем. По Абрагаму, в неподвижной среде выражения для $\sigma_{\alpha\beta}^A$, g^A и w^A задаются формулами (36), (26) и (34). В движущейся же среде *)

$$w^A = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{DE} + \mathbf{BH}) - \frac{u/c}{4\pi [1 - (u^2/c^2)]} ([\mathbf{DB}] - [\mathbf{EH}]),$$

$$g^A = \frac{\mathbf{S}}{c^2} = \frac{1}{4\pi c} \left\{ [\mathbf{EH}] - \frac{u/c^2}{1 - (u^2/c^2)} (u [\mathbf{DB}] - u [\mathbf{EH}]) \right\}. \quad (45)$$

Разумеется, если выражение для T_{ik} (т. е. для w , g , $\mathbf{S}$ и $\sigma_{\alpha\beta}$) в неподвижной среде задано, то соответствующие выражения для среды, движущейся со скоростью $u = \text{const}$, однозначным образом получаются в результате релятивистских преобразований.

Для движущейся среды в силу сказанного ранее

$$\mathbf{f}^A = \frac{\partial}{\partial t} (g^M - g^A) = \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ [\mathbf{DB}] - [\mathbf{EH}] + \frac{u (u [\mathbf{DB}] - u [\mathbf{EH}])}{1 - (u^2/c^2)} \right\}. \quad (46)$$

В неподвижной среде (или медленно движущейся среде, когда пренебрегают членами порядка u^2/c^2) выражение (46) совпадает с (18), где сила Абрагама вводилась для неподвижной среды и лишь при переходе к (19) среда считалась медленно движущейся.

Составляя баланс энергии и импульса при излучении пуга волн в движущейся среде, исходя из тензора Абрагама, нужно учесть, что энергия поля записывается в виде

$$W^A = \int w^A dV = W^M - \frac{u/c}{4\pi [1 - (u^2/c^2)]} \int \{[\mathbf{DB}] - [\mathbf{EH}]\} dV. \quad (47)$$

Кроме того, под действием силы $\mathbf{f}^A$, определяемой согласно (46), среда получает энергию

$$R^A = u \int \mathbf{f}^A dt \cdot dV = u \int \frac{([\mathbf{DB}] - [\mathbf{EH}]) dV}{4\pi c (1 - u^2/c^2)}. \quad (48)$$

Таким образом, полное изменение энергии излучателя равно $-(W^A + R^A) = -W^M$. Разумеется, этот результат ясен и без интегрирования, поскольку $(\partial w^M / \partial t) = (\partial w^A / \partial t) + \mathbf{f}^A u$, что для медленно движущейся среды уже было отражено в (19).

Изменение импульса излучателя также по-прежнему определяется выражением (44). (В применении к пугу волн и с усреднением по высокой частоте это соотношение было использовано в ² (см. формулы (38) и (39)).

Различие между тензорами натяжений $\sigma_{\alpha\beta}^M$ и $\sigma_{\alpha\beta}^A$ для движущейся среды здесь, как было пояснено, роли не играет (в выражениях типа (44) и (48) производится интегрирование по всему пространству, и при интегрировании по времени учитывается и период времени, когда пуг уже достаточно «оторвался» от излучателя). Следовательно, в согласии с общими соображениями, при рассмотрении процессов излучения в движущейся среде мы приходим к тем же результатам что и в неподвижной среде. В частности, при квантовой трактовке можно и в движущейся среде пользоваться для излучаемого и поглощаемого «фотона» выражениями $\hbar\omega$ и $\hbar k = (\hbar\omega n/c) k/k$, хотя мы знаем, что (так же, как и в неподвижной среде) речь идет не об энергии и импульсе самого поля в среде, а об изменениях энергии и импульса излучателя, находящегося в среде. Кстати, по этой

*) См. ²⁴, издание третье (1946), § 115 и 116; см. также ¹, приложение 4, или ⁶, § 35.

причине импульс $\hbar \mathbf{k}$ называют иногда квазиимпульсом фотона. И если в неподвижной среде величина $\hbar \omega$ равна энергии фотона, то в движущейся среде энергия $\hbar \omega$ скорее квазиэнергия, в том смысле, что она представляет собой сумму энергии поля W^A и работу силы Абрагама над средой R^A (см. (47) и (48)).

6. Выше и в ², как и в более ранних статьях одного из авторов ²⁶, все внимание было сосредоточено на обмене энергией и импульсом между излучателем и средой. Но, разумеется, представляет известный интерес и анализ процессов, происходящих в самой среде. Здесь различия между подходами Минковского и Абрагама становятся уже радикальными и приводят к разным результатам. Действительно, согласно Минковскому на прозрачную и однородную незаряженную среду в электромагнитном поле (например, при распространении пучка волн) вообще не действует никакая сила (мы отвлекаемся от стрикционной силы). Согласно Абрагаму — и это соответствует действительности, — на такую среду действует сила с объемной плотностью $\mathbf{f}^A$ (см. (4), (18) и (46), причем формулы (18) и (4) следуют из (46) при соответствующих частных предположениях).

Под действием силы $\mathbf{f}^A$ движение среды, конечно, изменяется, но никаких универсальных утверждений по этому поводу сделать нельзя, если не говорить о законе сохранения полного импульса (41). Дело в том, что плотность импульса $\mathbf{g}_m$, приобретаемого средой, зависит от тех уравнений, которыми описывается движение среды и, конкретно, от плотности силы $\mathbf{h}$ в уравнении движения среды (37) или (40). Кроме того, помимо силы Абрагама $\mathbf{f}^A$ даже на однородную среду действует, вообще говоря, стрикционная сила (2)

$$\mathbf{f}_{m,2} = \mathbf{f}_{\text{стр}} = \frac{1}{8\pi} \nabla \left\{ \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right) E^2 \right\}$$

(значительно меньшей в большинстве случаев силой, пропорциональной $\partial \mu / \partial \rho$, пренебрегаем).

Плотность импульса, сообщаемого среде при распространении в ней пучка электромагнитных волн, для некоторых моделей среды вычислена в статьях ^{1, 12, 20, 22}. Например, для газа из тяжелых пылинкок ¹ приобретаемая газом плотность импульса в точности равна *): $\mathbf{g}^M - \mathbf{g}^A = (n^2 - 1) \mathbf{g}^A$. Следовательно, полная плотность импульса поля и среды равна $\mathbf{g}^M$. Для очень жесткого твердого тела, действие силы $\mathbf{f}^A$ при не слишком высокой частоте в квазистационарном режиме практически полностью компенсируется силами упругости (но, разумеется, среда как целое получает импульс $\int \mathbf{f}^A dt dV$). Это утверждение можно проиллюстрировать на примере осциллятора, уравнение движения которого имеет вид $m(d^2x/dt^2) + kx = f = dg/dt$, где через f обозначена действующая сила. Если коэффициент упругости k очень велик, то большую часть

*) Для равновесного газа

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{\partial p}{\partial N} \frac{1}{M}, \quad \varepsilon = 1 + 4\pi\alpha N, \quad p = NkT,$$

$\rho = NM$, где α — поляризуемость частицы (молекулы), T — температура, N — концентрация и M — масса частиц. Очевидно, что $\partial p / \partial \rho = kT/M \rightarrow 0$ при $M \rightarrow \infty$. Таким образом, в этом случае стрикционная сила равна нулю и на среду действует лишь сила с плотностью $\mathbf{f}^A = (n^2 - 1) \partial \mathbf{g}^A / \partial t$, сообщающая единице объема газа в результате прохождения переднего фронта пучка волн импульс $\int \mathbf{f}^A dt = (n^2 - 1) \mathbf{g}^A$

времени смещение $x \approx f/k$, а $dx/dt \approx (df/dt)/k$, так что импульс осциллятора $m dx/dt \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$; вместе с тем при $k \rightarrow 0$ импульс $m dx/dt = \int f dt = g$.

Для модели среды, состоящей из диполей, полученное в ²⁰ значение плотности импульса поля и среды, промежуточное между g^M и g^A , также ни в коей мере не является универсальным, а характеризует в первую очередь используемую модель среды. Более подробное обсуждение вопроса о плотности импульса, возникающего в среде под действием электромагнитного поля, выходит за рамки настоящей статьи (см. в особенности ²²).

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР
Московский педагогический институт
им. В. И. Ленина

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Д. В. Скобельцын, УФН **110**, 253 (1973).
2. В. Л. Гинзбург, *ibid.*, стр. 309.
3. G. B. Walker, D. G. Lahoz, Nature **253**, 339 (1975).
4. A. Einstein, J. Laub, Ann. d. Phys. **26**, 541 (1908) (имеется перевод: А. Эйнштейн, Собрание научных трудов, т. 1, М., «Наука», 1965, стр. 126).
5. M. Abraham, Rc. Circ. mat. Palermo **28**, 1 (1909); **31**, 527 (1910).
6. В. Паули, Теория относительности, М.—Л., Гостехиздат, 1947, § 35.
7. U. E. Schröder, Zs. Naturforsch. **24a**, 1356 (1969).
8. J. Meixner, Zs. Phys. **229**, 352 (1969).
9. J. Vlieger, S. Emd, Physica **41**, 368 (1969).
10. K. Furutsu, Phys. Rev. **185**, 257 (1969).
11. M. G. Burt, R. Peierls, Proc. Roy. Soc. **333**, 133 (1973).
12. J. Gordon, Phys. Rev. **A8**, 14 (1973).
13. K. K. Thornber, Phys. Lett. **A43**, 501 (1973).
14. M. Pitteri, Nuovo Cimento **B18**, 144 (1973).
15. O. Costa de Beauregard, Lett. Nuovo Cimento **10**, 852 (1974).
16. R. Klima, V. A. Petržílka, Phys. Lett. **A43**, 151 (1973).
17. В. А. Желнорович, ДАН СССР **217**, 1029 (1974).
18. D. V. Skobel'tzyne, C. R. Ac. Sci. **B280**, 251, 287 (1975).
19. W. Israel, California Institute of Technology Preprint OAP-387 (1975).
20. R. Peierls, The Momentum of Light in Refracting Medium, Preprint, 1975.
21. Н. П. Коноплева, Изв. вузов, сер. «Радиофизика» (1976).
22. F. N. Robinson, Phys. Rept. **C16**, 313 (1975).
23. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, М., 1957.
24. П. Е. Тамм, Основы теории электричества, изд. 8-е, М., «Наука» (1966) (готовится изд. 9-е, практически совпадающее с 8-м).
25. I. Brevik, Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk. **37**, N13 (1970).
26. В. Л. Гинзбург, ЖЭТФ **10**, 589 (1940); УФН **69**, 535 (1959).