1976 г. Январь *Том 118, вып. 1*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

533.951

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ В МЕТАЛЛАХ И ПОЛУМЕТАЛЛАХ В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В. Я. Демиховский, А. П. Протогенов

СОДЕРЖАНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее десятилетие сформировался новый раздел физики твердого тела — электродинамика проводников, находящихся в сильном магнитном поле. Исследования спектра электромагнитных возбуждений, составившие основу этого раздела, отражены в хорошо известных обзорах [1-4] и монографиях [5-9].

Спектр электромагнитных возбуждений в классически сильных магнитных полях весьма разнообразен. В квантующем магнитном поле из-за многокомпонентности электронно-дырочной системы он становится более сложным, поскольку многочисленным электронным переходам между уровнями Ландау соответствуют, как правило, новые типы коллективных возбуждений. Кроме того, квантование влечет за собой изменения в спектре волн, которые существуют уже в классически сильных магнитных полях. В последние годы был опубликован цикл работ, в которых были открыты и теоретически изучены различные типы электромагнитных волн в квантующем магнитном поле.

Спектр электромагнитных возбуждений в твердых телах тесно связан с геометрией поверхности Ферми. Вследствие этого в металлах и полуметаллах могут распространяться возбуждения, которых нет в ионосферной и газоразрядной плазме, а также в металлах с изотропным квадратичным спектром носителей. Проблема спектра электромагнитных возбуждений в металлах, имеющих сложную поверхность Ферми, в последние годы также привлекла внимание теоретиков и экспериментаторов.

В настоящий обзор вошли работы, посвященные изучению электромагнитных волн в квантующих и классически сильных магнитных полях. Для исследования спектра электромагнитных возбуждений мы воспользовались законами сохранения, которые выполняются при взаимодействии электронов с бозевскими возбуждениями. С помощью законов сохранения в плоскости «частота — волновой вектор» для различных моделей электронного спектра построены области бесстолкновительного затухания возбуждений, взаимодействующих с электронами в магнитном поле. В чистых металлах и полуметаллах при достаточно низких температурах эти области определяют границы существования незатухающих коллективных возбуждений. Поскольку правила отбора устанавливают связь между поляризацией волны и типом резонансных переходов между уровнями Ландау, нетрудно определить области существования волн определенной поляризации. Тем самым с помощью областей прозрачности может быть проведена естественная классификация возможных решений дисперсионного уравнения для волн с заданной поляризацией. Для нахождения решения теперь достаточно рассмотреть лишь определенное «окно» в областях бесстолкновительного затухания, где аналитическое выражение для проводимости приобретает достаточно простой вид.

Области бесстолкновительного затухания дают также наглядную картину различных резонансных эффектов, связанных с другими элементарными возбуждениями. Поэтому такой подход является методически целесообразным при изучении резонансных эффектов, типа гигантских квантовых осцилляций поглощения звука, осцилляций скорости звука, геометрического резонанса, осцилляций затухания оптических фононов и т. д.

Обзор построен следующим образом. В гл. 2 рассматриваются области бесстолкновительного затухания для возбуждений с различной поляризацией. Движение областей затухания с изменением величины и направления магнитного поля иллюстрирует различные осцилляционные эффекты.

В главе 3 приведены основные уравнения электродинамики проводников, находящихся в квантующем магнитном поле. Найден тензор проводимости электронов в квантующем поле. Обсуждаются масштабы пространственной и временно́й дисперсии, а также вопрос о форме интеграла столкновений. В четвертой главе проанализирован спектр электромагнитных возбуждений в вырожденной магнитоактивной плазме в простейшей модели квадратичного и изотропного закона дисперсии электронов. Рассматриваются все типы классических и квантовых волн в электронной и электронно-дырочной плазме. Тонкая структура окон в областях бесстолкновительного затухания (см. ниже рис. 1—3) весьма чувствительна к температурному размытию функции распределения. Кроме того, границы областей могут размываться за счет электронных столкновений. Это приводит к затуханию возбуждений. В каждой области существует свой критерий слабого затухания волны, который накладывает ограничения на температуру и частоту столкновений. В связи с этим обсуждаются условия существования квантовых волн.

Пятая глава посвящена обсуждению работ, в которых изучались электромагнитные возбуждения в металлах со сложной поверхностью Ферми в классически сильных и квантующих магнитных полях. Здесь, как и в предыдущих главах, рассматриваются правила отбора, области бесстолкновительного затухания в металлах с анизотропным спектром, особенности тензора проводимости, а также основные типы электромагнитных волн и их связь с геометрией поверхности Ферми. Не обращаясь к деталям спектра волн, основное внимание мы уделили происхождению электромагнитных возбуждений и их классификации.

2. ОБЛАСТИ БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНОГО ЗАТУХАНИЯ

Распространение электромагнитных возбуждений в твердом теле в классически сильном или в квантующем магнитном поле описывается уравнениями Максвелла и классическим или квантовым уравнением движения заряженных частиц. Спектр возбуждений, как известно, находится из дисперсионного уравнения, которое в рассматриваемой системе вследствие многокомпонентности, пространственной и временно́й дисперсии и сильной анизотропии оказывается достаточно сложным. Для того, чтобы представить себе все многообразие возбуждений, мы в настоящей главе обратимся к законам сохранения, которые выполняются при взаимодействии электрона с бозе-возбуждением. Законы сохранения определяют пороги рождения электронно-дырочных пар различными бозевскими возбуждениями и, следовательно, указывают границы существования незатухающих возбуждений. С одной стороны порога, там, где переходы являются виртуальными, мнимая часть диэлектрической проницаемости равна нулю, а за порогом — отлична от нуля. В силу дисперсионных соотношений Крамерса — Кронига это приводит к особенности реальной части диэлектрической проницаемости на пороге. Поэтому резонансам могут соответствовать коллективные возбуждения, спектр которых лежит вблизи соответствующих резонансных частот.

Рассмотрим области бесстолкновительного затухания для изотропного квадратичного электронного спектра. Области затухания в металлах со сложной поверхностью Ферми мы рассмотрим в пятой главе.

В случае, когда движение электронов описывается классически, механизм бесстолкновительного затухания можно пояснить следующим образом. Продольная волна сильно взаимодействует с теми частицами, скорость которых приблизительно равна фазовой скорости волны. Такие

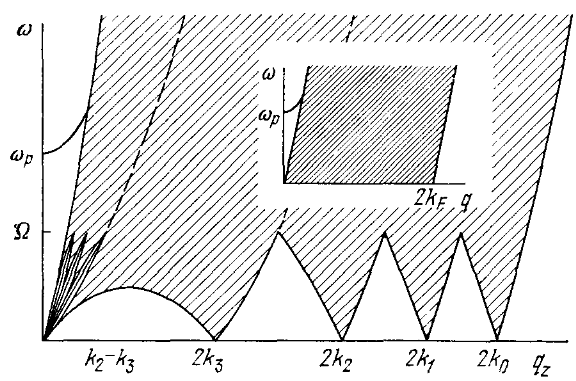

Рис. 1. Области затухания Ландау в квантующем магнитном поле ($\Delta n = 0$). Заполнены четыре уровня Ландау ($n_F = 4$). На рисунке показан спектр продольных квантовых волн и плазмона. В верхней части рисунка изображена область затухания Ландау в отсутствие магнитного квантования.

частицы «видят» почти постоянное электрическое поле волны, причем частицы, движущиеся быстрее волны, отдают ей энергию, а частицы, отстающие от волны, поглощают энергию. Поскольку в равновесном состоянии число медленных частиц всегда больше числа быстрых частиц, волна затухает. Этот механизм бесстолкновительного затухания продольных волн называется затуханием Ландау. Если электронный газ вырожден, то у затухания Ландау существует естественный порог $\omega/q = v_F$.

Бесстолкновительное затухание могут испытывать и циркулярно поляризованные волны, распространяющиеся вдоль магнитного поля. Для того чтобы понять физическую причину затухания поперечных волн, перейдем в систему координат, в которой скорость частицы вдоль магнитного поля равна нулю. Если частота волны в этой системе координат равна частоте вращения электрона, то электрон «видит» постоянное электрическое поле волны, лежащее в плоскости его вращения, и поглощает энергию. Такое затухание обычно называют циклотронным затуханием. В вырожденном электронном газе, когда максимальная скорость электрона равна v_F, пороги нормального и аномального циклотронного затухания определяются условием $\omega = \pm (\Omega \pm v_F q)$.

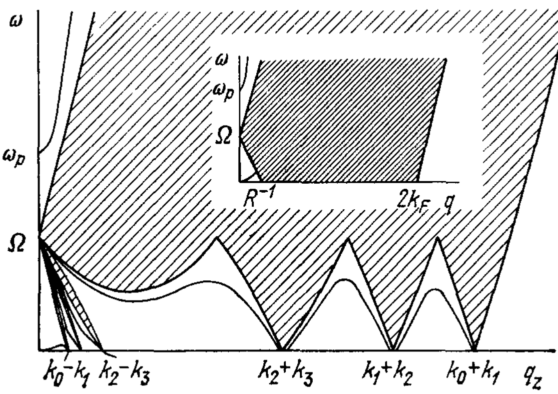

Рис. 2. Области циклотронного затухания в квантующем магнитном поле ($\Delta n = 1$, $n_F = 4$).

На рисунке показан спектр геликона, левополяризованных квантовых волн и высокочастотной левополяризованной волны. В верхней части рисунка изображена область нормального циклотронного затухания в отсутствие магнитного квантования.

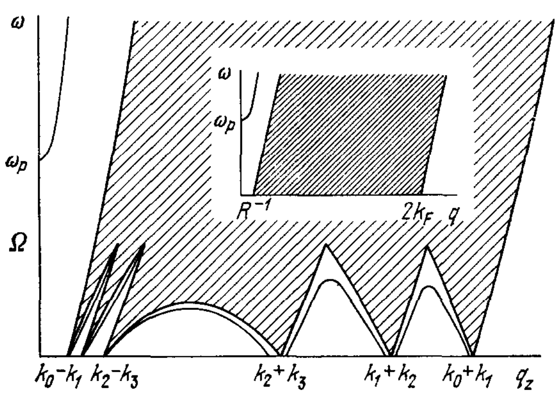

Рис. 3. Области аномального циклотронного затухания в квантующем магнитном поле ($\Delta n = -1$, $n_F = 4$).

На рисунке показан спектр правополяризованных квантовых волн и высокочастотной волны. В верхней части рисунка изображена область аномального циклотронного затухания в отсутствие магнитного квантования.

Если волна распространяется под углом к направлению постоянного магнитного поля, то взаимодействие частиц с электрическим и магнитным полем волны становится более сложным. Например, при распространении геликона под углом к направлению магнитного поля передача энергии от волны к частицам осуществляется за счет совместного действия переменных электрического и магнитного полей, лежащих в плоскости, перпендикулярной постоянному магнитному полю. При этом изменяется энергия движения частиц в направлении постоянного магнитного поля. В результате в области $\omega/q_z < v_F$ возникает магнитное затухание Ландау [1, 9].

Обратимся теперь к квантовой интерпретации бесстолкновительного затухания. Элементарное возбуждение с частотой ω и волновым вектором q затухает, если оно может родить электронно-дырочную пару. Этот процесс должен быть разрешен законами сохранения энергии и продольной компоненты импульса

$$\varepsilon_n(p_z) + \hbar\omega_q = \varepsilon_{n'}(p_z + \hbar q_z), \tag{2.1}$$

где

$$\varepsilon_n(p_z) = \hbar\Omega\left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{p_z^2}{2m} \tag{2.2}$$

энергия электрона в квантующем магнитном поле, n — номер уровня Ландау, p_z — проекция импульса на направление магнитного поля, $\hbar$ — постоянная Планка, Ω — циклотронная частота, m — масса электрона.

Кроме того, чтобы процесс был разрешен, должен выполняться принцип Паули: при нулевой температуре электрон в начальном состоянии должен находиться под поверхностью Ферми, а в конечном — иметь энергию, большую энергии Ферми.

В рассматриваемой системе существуют и другие сохраняющиеся величины, что приводит к определенным правилам отбора по квантовому числу n. Если волна распространяется вдоль магнитного поля, то $\Delta n = 0$ для продольной поляризации возбуждения и $\Delta n = 1$ ($\Delta n = -1$) для лево (право)-поляризованного возбуждения. Обсуждение законов сохранения, из которых следуют упомянутые правила отбора, проведено в работах [10, 11]. Если волна распространяется под углом к магнитному полю, то разрешены электронные переходы с произвольным изменением номера уровня Ландау.

Используя высказанные соображения, построим области бесстолкновительного затухания элементарных возбуждений в квантующем магнитном поле. Для этого решим уравнение (2.1) относительно p_z и, пользуясь неравенствами $\varepsilon_n(p_z) \leqslant \varepsilon_F$, $\varepsilon_{n'}(p_z + \hbar q_z) \geqslant \varepsilon_F$, найдем

$$\begin{aligned} \omega &\leqslant \Delta n\Omega \pm v_n q_z \pm \frac{\hbar q_z^2}{2m}, \\ \omega &\geqslant \Delta n\Omega \mp v_n q_z \pm \frac{\hbar q_z^2}{2m}, \end{aligned} \tag{2.3}$$

где $v_n = \sqrt{2[\varepsilon_F - (n + 1/2)\,\hbar\Omega]/m}$ — фермиевская скорость на n-м уровне Ландау, ε_F — энергия Ферми. Неравенства (2.3) определяют области бесстолкновительного затухания при произвольном $\Delta n = n' - n$. Они изображены на рис. 1—3. На рис. 1 показаны области бесстолкновительного затухания для переходов без изменения номера уровня Ландау ($\Delta n = 0$); рис. 2 и 3 соответствуют случаю, когда $\Delta n = 1$ и $\Delta n = -1$.

Обсудим эти рисунки. Распространение продольного возбуждения вдоль магнитного поля в кристаллах с изотропным квадратичным законом дисперсии электронов сопровождается переходами $\Delta n = 0$ и, следовательно, областью бесстолкновительного затухания возбуждений будет область, показанная на рис. 1. Пунктир в заштрихованной области показывает границы затухания для переходов внутри отдельного уровня Ландау ($n = n_F$). Полная картина затухания получена наложением областей затухания, отвечающих переходам на всех уровнях Ландау. Как видно из рисунка, в результате такой суперпозиции в плоскости (ω, q) возникают «окна», где затухание отсутствует. Условно можно выделить два типа окон. Одни из них выходят из начала координат, а другие расположены в области больших q вплоть до $2k_F$. Существенно, что все окна лежат ниже циклотронной частоты. Количество участков прозрачности первого типа на единицу меньше числа заполненных уровней Ландау, а число окон, примыкающих к оси q, равно n_F. Характерные импульсы $2\hbar k_n$, определяющие границы окон при $\omega = 0$, соответствуют электронным переходам из состояний с импульсом $-\hbar k_n$ в состояние с импульсом $\hbar k_n$ без изменения энергии. Для дальнейшего обсуждения заметим, что ширина участков затухания при малых q пропорциональна q^2. К оси q в интервале $(0, 2k_{n_F})$ примыкает область прозрачности, сформированная электронными переходами на высшем уровне Ландау. Высота ее равна $\hbar k_{n_F}^2/2m$.

Построенные области указывают те значения частоты и волнового вектора, при которых могут существовать незатухающие возбуждения. Эти возбуждения рассматриваются в гл. 4 п. а). Следует подчеркнуть, что волны существуют не во всех окнах. Положение дисперсионной кривой в плоскости (ω, q) определяется динамикой движения электронов.

Движение областей затухания с изменением величины и направления магнитного поля иллюстрирует изменение спектра электромагнитных волн и различные осцилляционные эффекты. С увеличением магнитного поля импульсы Ферми на отдельных уровнях Ландау $\hbar k_n$ изменяются по закону $\hbar k_n = \sqrt{2m\,[\varepsilon_F - (n + {}^1/_2)\,\hbar\Omega]}$. В результате размеры окон по оси q, а также их высота, пропорциональная Ω, увеличиваются. При изменении числа заполненных уровней, когда $2k_{n_F}$ стремится к нулю, происходит изменение числа окон и картина областей затухания резко изменяется вблизи начала координат. Это приводит к осцилляциям поглощения и скорости геликона [12] и звука [13, 14]. Движение областей затухания с изменением угла ϑ между $\mathbf{q}$ и $\mathbf{H}$, как следует из (2.1), сводится к растяжению масштаба вдоль оси $\mathbf{q}$ по закону $\cos^{-1}\vartheta$, что объясняет гигантские осцилляции поглощения [15] и скорости звука [16] при изменении θ. При обсуждении других резонансных эффектов [17–19] мы также будем обращаться к рис. 1—3.

Если возбуждение имеет левую круговую поляризацию и взаимодействует с электронами, то при распространении его вдоль магнитного поля правилами отбора разрешены переходы с $\Delta n = 1$. Соответстующие области затухания изображены на рис. 2. Как видно из рисунка, картина областей затухания здесь иная. Например, при нулевой частоте границы окон определяются разностью и суммой фермиевских импульсов $\hbar\,(k_n \pm k_{n+1})$ на соседних уровнях Ландау. Как и в первом случае, окна можно условно разделить на два типа: одни начинаются при $\omega = \Omega$ и $q = 0$, а другие примыкают к оси q. Соответственно общее число их равно $n_F - 2$ и $n_F - 1$. С ростом магнитного поля сумма $k_n + k_{n+1}$ уменьшается, а разность $k_n - k_{n+1}$ увеличивается. Это определяет изменение картины затухания с изменением магнитного поля. Увеличение угла между $\mathbf{q}$ и $\mathbf{H}$ приводит к растяжению масштаба вдоль оси q в $\cos^{-1}\vartheta$ раз. При $\vartheta = \pi/2$ области бесстолкновительного затухания вырождаются в линию $\omega = \Omega$.

На рис. 3 показаны области бесстолкновительного затухания для переходов $\Delta n = -1$. Такие переходы разрешены для правополяризованных волн, которые взаимодействуют с электронами и распространяются вдоль магнитного поля. Структура областей бесстолкновительного затухания, так же как и в двух предыдущих случаях, позволяет выделить окна двух типов и промежуточную область прозрачности. Характерные импульсы и число окон те же, что и в случае $\Delta n = 1$. Однако вид областей затухания иной. Области, показанные на рис. 2 и 3, характеризуют спектр электромагнитных волн в квантующем поле (см., например, п. б) гл. 4) и иллюстрируют различные резонансные эффекты для поперечно поляризованных возбуждений.

Следует иметь в виду, что если некоторое возбуждение с круговой поляризацией взаимодействует не с электронами, а с дырками, то правила отбора разрешают переходы $\Delta n = 1$ для правополяризованных волн и $\Delta n = -1$ — для левой круговой поляризации возбуждений. Поэтому рис. 2 дает картину областей затухания правополяризованных волн в дырочном газе и рис. 3 соответствует областям затухания левополяризованных возбуждений.

На всех границах областей затухания, изображенных на рис. 1—3, реальная часть диэлектрической проницаемости, как будет показано в третьей главе, имеет логарифмические особенности, а мнимая часть испытывает конечный скачок.

Если электромагнитная волна распространяется под углом к магнитному полю, то возможны переходы с произвольным изменением квантового числа n. Вследствие этого усложняется вид областей затухания, которые могут быть получены простым наложением областей затухания для $\Delta n = 0, \pm 1, \pm 2$ и т. д. Нетрудно убедиться, что области затухания, соответствующие переходам $\Delta n = \pm 2, \pm 3, \ldots$, похожи на области для $\Delta n = \pm 1$. Если пренебречь в (2.3) квантовыми эффектами, то при произвольном направлении распространения волны, границы областей затухания имеют вид $\omega = \Delta n \Omega \pm v_F q$, где $\Delta n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ В верхней части рис. 1—3 показаны области затухания для продольных, левополяризованных и правополяризованных волн в классически сильных магнитных полях ($\Omega \gg \nu$). При $\vartheta = \pi/2$ области затухания превращаются в линии $\omega = \Delta n \Omega$. Не обращаясь к деталям, укажем, что представление об областях бесстолкновительного затухания при произвольном Δn можно получить из работы [20]. Волны, распространяющиеся под углом к направлению магнитного поля, рассматриваются в п. г) гл. 4.

Учтем теперь спиновое расщепление. Оно приведет к двукратному увеличению числа магнитных трубок и к «расщеплению» границ областей бесстолкновительного затухания. Последнее в свою очередь приводит к появлению дополнительных возбуждений и вызывает расщепление резонансов в соответствующих осцилляционных эффектах. Характерные размеры участков прозрачности определяются соотношением циклотронной и спиновой частот [20]

$$\Omega_0 = g \mu_0 H,$$

здесь g — фактор спинового расщепления, μ_0 — магнетон Бора.

В серии работ Зырянова, Окулова и Силина изучались квантовые волны в электронной ферми-жидкости. В частности, в работах [21-23] были рассмотрены квантовые спиновые волны. Области бесстолкновительного затухания этих возбуждений можно найти, используя закон сохранения для процессов с изменением проекции спина. Предлагаемый подход может быть полезен и для анализа спектра спиновых волн. Однако спиновые волны в ферми-жидкости в настоящем обзоре не рассматриваются.

Характерные размеры и число окон в областях затухания в металлах и полуметаллах существенно различны. Это связано с тем, что в металлах число заполненных уровней даже в полях $H \sim 10^5$ *э* не меньше чем 10^3—10^4, а в полуметаллах и полупроводниках может быть заполнено несколько уровней Ландау. В результате в металлах не все окна удается разрешить при наблюдении резонансных эффектов. Неопределенность в законе сохранения энергии, связанная с электронными соударениями, и температурное размытие функции распределения приводят к расплыванию границ областей бесстолкновительного затухания, а в слабых магнитных полях к полному исчезновению эффектов квантования. Необходимые и достаточные условия существования различных резонансных эффектов в металлах и полуметаллах, а также условия наблюдения квантовых электромагнитных волн мы обсудим позже. Здесь мы отметим лишь, что если условия магнитного квантования

$$T \ll \hbar\Omega, \ \nu \ll \Omega \qquad (2.4)$$

не выполняются, то окна в областях бесстолкновительного затухания отсутствуют. Здесь T — температура в энергетических единицах, ν — частота столкновений.

3. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Спектр электромагнитных возбуждений в проводниках в квантующем магнитном поле можно найти из уравнений Максвелла и уравнения для матрицы плотности

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}, \qquad (3.1)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}, \qquad (3.2)$$

$$\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}[\hat{\mathscr{H}}, \hat{\rho}] = \left(\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial t}\right)_{\text{ст}}; \qquad (3.3)$$

здесь $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — напряженность электрического и магнитного поля, $\mathbf{j}$ — плотность тока, c — скорость света, $\hat{\rho}$ — одночастичная матрица плотности, $\hat{\mathscr{H}}$ — гамильтониан системы. Уравнения (3.1)—(3.3) связаны так:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}_0, t) = \operatorname{Sp}\left\{-\frac{1}{2}e\left[\hat{\mathbf{v}}_0 + \frac{e}{mc}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)\right]\delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r})\hat{\rho} + \text{э. с.}\right\}, \qquad (3.4)$$

где $\hat{\mathbf{v}}_0$ — оператор скорости, e — заряд электрона. Во внешнем постоянном магнитном поле и в поле электромагнитной волны гамильтониан нашей системы имеет вид

$$\hat{\mathscr{H}} = \frac{1}{2m}\left(\hat{\mathbf{p}} + \frac{e}{c}\mathbf{A}_0 + \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 - e\varphi, \qquad (3.5)$$

где $\mathbf{A}_0 = (0, Hx, 0)$, H — напряженность постоянного магнитного поля, направленного по оси z; $\mathbf{A}$ и $\varphi \sim \exp[i(\omega t - \mathbf{qr})]$ — векторный и скалярный потенциалы переменного электромагнитного поля, $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$ — оператор импульса. В линейном по $\mathbf{A}$-приближении имеем

$$\hat{\mathscr{H}} = \hat{\mathscr{H}}_0 + \hat{\mathscr{H}}_1, \qquad (3.6)$$

$$\hat{\mathscr{H}}_0 = m\hat{\mathbf{v}}_0^2/2, \quad \hat{\mathscr{H}}_1 = (e/2c)(\hat{\mathbf{v}}_0\mathbf{A} + \mathbf{A}\hat{\mathbf{v}}_0) - e\varphi, \qquad (3.7)$$

$$\hat{\mathbf{v}}_0 = \frac{1}{m}\left(\hat{\mathbf{p}} + \frac{e}{c}\mathbf{A}_0\right). \qquad (3.8)$$

Собственные функции оператора $\hat{\mathscr{H}}_0$ в принятой калибровке равны

$$|\nu\rangle = |n, k_y, k_z\rangle = V^{-1/3}\exp[i(k_y y + k_z z)]\,u_n(x + l_H^2 k_y), \qquad (3.9)$$

а собственные значения $\hat{\mathscr{H}}_0$ определяются выражением (2.2). Здесь V — нормировочный объем, $u_n(x)$ — собственная функция гармонического осциллятора, $l_H = (c\hbar/eH)^{1/2}$ — магнитная длина. Заметим, что взаимодействие собственного магнитного момента электрона с постоянным и переменным магнитным полем в гамильтониане (3.5) не учтено.

Для определения тока необходимо решить уравнение для матрицы плотности (3.3). Обсудим предварительно вид интеграла столкновений. В работах [24-26] показано, что интеграл столкновений для рассматриваемой системы в τ-приближении должен быть записан в следующей форме:

$$\left(\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial t}\right)_{\text{ст}} = -\frac{\hat{\rho} - \hat{\rho}_0(\hat{\mathscr{H}}, \mu)}{\tau}, \qquad (3.10)$$

где

$$\hat{\rho}_0(\hat{\mathscr{H}}, \mu) = \left[\exp\left(\frac{\hat{\mathscr{H}}-\mu}{T}\right)+1\right]^{-1}, \tag{3.11}$$

τ — постоянное время релаксации, μ — локальный химпотенциал, зависящий от $\mathbf{r}$ и t, значение которого определяется из условия сохранения числа частиц

$$\mathrm{Sp}\,\{\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\,[\hat{\rho}_0(\hat{\mathscr{H}}, \mu)-\hat{\rho}]\}=0. \tag{3.12}$$

Согласно (3.10) неравновесная матрица плотности релаксирует к локально равновесной матрице плотности, которая зависит от полного гамильтониана и локального значения μ. При этом интеграл столкновений, как следует из (3.12), сохраняет число частиц. Требования, предъявляемые к форме интеграла столкновений другими локальными законами сохранения, обсуждались в работах [24, 27]. Заметим, что τ-приближение в квантующем магнитном поле не может быть строго обосновано. В некоторых случаях оно дает заведомо неправильный результат. Например, с помощью τ-приближения невозможно получить правильное выражение для статической проводимости в квантующем поле в направлении, перпендкулярном к $\mathbf{H}$[28]. Однако для изучения явлений в высокочастотной области $\omega\tau \gg 1$ τ-приближение оказывается, как правило, достаточным.

Для того чтобы решить систему уравнений (3.1)—(3.3), необходимо найти неравновесную добавку к матрице плотности, а затем с помощью (3.4) определить ток и тензор проводимости. При произвольной ориентации вектора относительно магнитного поля выражение для плотности тока имеет громоздкий вид (см. Приложение).

Наиболее простые выражения для тензора проводимости σ_{ik} и тензора диффузии d_{ik} получаются в симметричной геометрии $\mathbf{q} \parallel \mathbf{H}$ и $\mathbf{q} \perp \mathbf{H}$. В этом случае некоторые матричные элементы и соответствующие компоненты тензоров, как следует из формул, приведенных в Приложении, обращаются в нуль.

В настоящем обзоре будут рассматриваться резонансные явления в высокочастотной области $\omega\tau \gg 1$ *). Поэтому мы приведем явные выражения для тензора проводимости лишь при $\omega\tau \gg 1$ и $\mathbf{q} \parallel \mathbf{H}$ [30, 31]. Из выражений (П.27)—(П.30) имеем

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{\omega_p^2}{4\pi i\omega}\left[1+\frac{1}{4\pi^2 l_H^4 n_0 q}(\Sigma_+ + \Sigma_-)\right], \tag{3.13}$$

$$\sigma_{xy} = \frac{\omega_p^2}{16\pi^3\omega l_H^4 n_0 q}(\Sigma_+ - \Sigma_-), \tag{3.14}$$

$$\sigma_{zz} = -\frac{3\omega_p^2\,\omega\Omega}{8\pi i q^3 v_F^3}\,\Sigma_0, \tag{3.15}$$

$$\Sigma_\pm = \sum_{n=0}^{n_F} \ln\left\{\left[\frac{v_n q-(\hbar q^2/2m)-(\Omega\pm\bar{\omega})}{v_n q+(\hbar q^2/2m)+(\Omega\pm\bar{\omega})}\right]^{n+1}\left[\frac{v_n q-(\hbar q^2/2m)-(\Omega\pm\bar{\omega})}{v_n q+(\hbar q^2/2m)-(\Omega\pm\bar{\omega})}\right]^{n}\right\}, \tag{3.16}$$

$$\Sigma_0 = \sum_{n=0}^{n_F} \ln\left\{\frac{[v_n q-(\hbar q^2/2m)]^2-\bar{\omega}^2}{[v_n q+(\hbar q^2/2m)]^2-\bar{\omega}^2}\right\}, \tag{3.17}$$

---

*) В низкочастотной области $\omega\tau \ll 1$ с помощью формул (П.25), (П.26) можно получить правильный критерий существования гигантских квантовых осцилляций коэффициента поглощения геликона и звука [29].

где $n_F = [(\varepsilon_F/\hbar\Omega)-(1/2)]$ — число заполненных уровней Ландау, $[x]$ — наименьшая целая часть x. При $\tau \to \infty$ мнимая часть Σ_0 равна π в областях бесстолкновительного затухания, показанных на рис. 1—3. Из выражений (3.13), (3.15) и (3.16), (3.17) видно, что вклад в компоненты σ_{xx} и σ_{xy} в соответствии с обсуждавшимися во второй главе правилами отбора дают переходы с изменением номера уровня Ландау на единицу ($\Delta n = \pm 1$), а в продольную компоненту тензора проводимости — переходы без изменения номера уровня Ландау ($\Delta n = 0$).

Рассматриваемая система характеризуется большим числом резонансных частот и значений волнового вектора, что связано с многокомпонентностью системы. Резонансные значения продольной компоненты волнового вектора (2.3), полученные из законов сохранения энергии и продольной компоненты импульса, определяют положение логарифмических особенностей компонент тензора проводимости (3.13)—(3.15). У поперечной компоненты волнового вектора также существуют резонансные значения. Из-за отсутствия точного сохранения этой компоненты характер резонансов здесь иной: вместо логарифмических особенностей при резонансных значениях $q_\perp$ возникают максимумы функции $f_{n,n+\Delta n}$. Функция $f_{n,n+\Delta n}$ максимальна при $q_\perp \approx R^{-1} = \dfrac{\Omega}{v_F}$, если $n = n_F$, $\Delta n = 1$, или при $q_\perp \approx l_H^{-1}$, если $n = 1$, $\Delta n = 1$, и при $q_\perp \approx k_F$, если $n = 1$, $\Delta n = n_F$. В этом можно убедиться, рассматривая явное выражение для функции $f_{n,n+\Delta n}$ (П. 18). Вернемся к уравнениям (3.1), (3.2). Исключив магнитное поле, после преобразования Фурье получим

$$\left[\frac{c^2q^2}{\omega^2}\delta_{ik} - \frac{c^2q_iq_k}{\omega^2} - \varepsilon_{ik}(\omega, q)\right] E_k(\omega, q) = 0, \tag{3.18}$$

где

$$\varepsilon_{ik}(\omega, q) = \delta_{ik} + \frac{4\pi}{i\omega}\left(\sigma_{ik}(\omega, q) + d_{ik}(\omega, q)\right) \tag{3.19}$$

— диэлектрическая проницаемость системы. Из (3.18) следует дисперсионное уравнение, определяющее спектр электромагнитных возбуждений в проводниках в сильном манитном поле

$$\operatorname{Det}\left|\frac{c^2q^2}{\omega^2}\delta_{ik} - \frac{c^2q_iq_k}{\omega^2} - \varepsilon_{ik}(\omega, q)\right| = 0. \tag{3.20}$$

В следующих главах будут обсуждаться различные решения дисперсионного уравнения (3.20).

4. КЛАССИФИКАЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЗБУЖДЕНИЙ

Области бесстолкновительного затухания, построенные во второй главе, определяют границы существования незатухающих электромагнитных волн и позволяют провести их классификацию в простейшей изотропной модели электронного спектра. Такая модель не может быть использована для расчета спектра возбуждений в реальных металлах. Однако исследование подобного рода необходимо для понимания общей структуры спектра электромагнитных волн.

а) Продольные электромагнитные волны

Рассмотрим сначала продольные волны, распространяющиеся вдоль магнитного поля. Области бесстолкновительного затухания для них показаны на рис. 1. В незаштрихованных участках мнимая часть продольной диэлектрической проницаемости равна нулю и дисперсионное уравнение (согласно (3.15), (3.20)) при $\tau^{-1} = 0$ имеет вид

$$\varepsilon_{zz} = 0, \tag{4.1}$$

$$\frac{q^2}{4\pi e^2} = \frac{m}{4\pi^2\hbar^2 l_H^2 q} \sum_{n=0}^{n_F} \ln \left| \frac{[v_n q - (\hbar q^2/2m)]^2 - \omega^2}{[v_n q + (\hbar q^2/2m)]^2 - \omega^2} \right|. \tag{4.2}$$

Решение уравнения (4.2) существует не во всех окнах. При фиксированной частоте левая часть уравнения (4.2) является монотонной функцией q. Поэтому, если в пределах некоторого окна правая часть (4.2) изменяется от $-\infty$ до $+\infty$ с изменением волнового вектора, то в окне существует решение. Такая ситуация реализуется в окнах, расположенных вблизи начала координат. Если знак особенности правой части на границах окна одинаковый, то решения может и не быть. Примером тому являются окна, примыкающие к оси q, где решение дисперсионного уравнения отсутствует.

Решения при $qR \ll 1$ и $\omega < \Omega$, как показано в работах [32, 33], имеют вид (см. также [34, 35])

$$\omega = u_n q, \qquad u_n = v_n + \alpha v_{n_F}^2 / v_F, \tag{4.3}$$

где α изменяется от единицы, если $v_n \approx v_F$, до $1/2$, если $v_n \approx v_{n_F}$; $v_{n_F} = \hbar\Omega/m$, $0 < n < n_F$. Возбуждения (4.3) обычно называют продольными квантовыми волнами. Заметим, что для $n \leqslant n_F$ отличие скорости продольной квантовой волны (4.3) δu_n от v_n гораздо меньше расстояния между соседними фермиевскими скоростями на уровнях Ландау δv_n, т. е. дисперсионная кривая проходит вблизи нижней границы окна. Если $n \ll n_F$, то $\delta u_n \sim \delta v_n$. В области больших ω не удается получить столь простого аналитического выражения. Однако ясно, что решение существует в каждом окне вплоть до $\omega = \Omega$ и $q = k_n - k_{n+1}$. Количество ветвей в соответствии с числом окон на единицу меньше числа заполненных уровней Ландау. Спектр продольных квантовых волн (4.3) показан на рис. 1. Существование в заряженной ферми-системе плазменных волн акустического типа, очевидно, связано с многокомпонентностью системы. Только в этом случае возможны относительные колебания компонент без существенного изменения суммарной плотности заряда.

При конечной температуре и длине свободного пробега продольные квантовые волны затухают. Затухание возбуждений будет малым, если дисперсионная кривая удалена от границы области бесстолкновительного затухания на величину бóльшую, чем интервал размытия области затухания. Отсюда следуют условия слабого затухания в n-м окне [33]

$$T \ll \frac{\hbar\Omega}{\sqrt{n}}, \qquad \nu \ll \frac{\omega\sqrt{n}}{n_F}, \tag{4.4}$$

справедливые в области $qR \ll n^{-1/2} \sim v_n/v_F$. Из (4.4) видно, что условия существования слабозатухающих волн в разных окнах неодинаковы. Условия, ограничивающие температуру и частоту столкновений, по-разному зависят от номера уровня Ландау n и n_F. Очевидно, что наиболее благоприятные условия реализуются в полуметаллах, когда $n_F \gg 1$.

Кроме квазинейтральных колебаний (4.3) в рассматриваемой системе при $\omega > v_0 q$ существует хорошо известное решение уравнения (4.1) — плазмон. При распространении плазмона вдоль $\mathbf{H}$ область существования его такая же, как в отсутствие поля, если не учитывать слабые осцилляции скорости v_0. Спектр продольных плазменных колебаний изучался в работах [36, 37]. Влияние магнитного квантования на плазмон сводится к малым поправкам ($\sim\hbar\Omega/\varepsilon_F$) [37] в коэффициенте перед q^2, учитывающем пространственную дисперсию, если $q \ll \omega_p/v_F$ и $\mathbf{q} \parallel \mathbf{H}$. В такой геометрии предельная частота $\omega(0)$ не зависит от магнитного поля.

Особенности диэлектрической проницаемости формируют не только спектр собственных электромагнитных колебаний в неограниченном пространстве. В граничных задачах они приводят к эффектам аномального проникновения внешнего поля в проводник. Усиление особенности диэлектрической проницаемости в квантующем поле существенно изменяет экранировку электрического поля. Как показано в работе [38], на больших расстояниях потенциал постоянного электрического поля убывает по закону

$$\varphi(z) \sim \sum_{n=0}^{n_F} \frac{a_n \sin 2k_n z}{z}, \tag{4.5}$$

где z — расстояние от поверхности проводника, а магнитное поле направлено по оси z. Таким образом, если частота внешнего поля равна нулю, то период фриделевских осцилляций (4.5) определяется высотой трубок Ландау $2k_n$. Именно при этих значениях q диэлектрическая проницаемость $\varepsilon_{zz}(0, q)$ имеет особенности (см. рис. 1). Экранирование поля точечного заряда в квантующем магнитном поле рассматривалось в работах [39, 40].

б) Поперечные электромагнитные волны

Перейдем к обсуждению закона дисперсии циркулярно поляризованных электромагнитных волн в квантующем магнитном поле. Дисперсионное уравнение для них, согласно (3.13)—(3.20) в областях, где затухание отсутствует (см. рис. 2,3), при $\tau^{-1} = 0$ имеет вид

$$\varepsilon_{\mp} = \frac{c^2q^2}{\omega^2}, \tag{4.6}$$

$$\sum_{n=0}^{n_F} \ln \left\{ \left| \frac{v_n q - (\hbar q^2/2m) + (\Omega \mp \omega)}{v_n q - (\hbar q^2/2m) - (\Omega \mp \omega)} \right|^{n+1} \left| \frac{v_n q + (\hbar q^2/2m) - (\Omega \mp \omega)}{v_n q - (\hbar q^2/2m) + (\Omega \mp \omega)} \right|^{n} \right\} =$$

$$= 4\pi^2 n_0 l_H^4 q \left(1 + \frac{c^2q^2}{\omega_p^2} - \frac{\omega^2}{\omega_p^2}\right), \tag{4.7}$$

где знак $\pm$ — соответствует право- и левополяризованным волнам. Вклад в дисперсионное уравнение для право- и левополяризованных волн в соответствии с правилами отбора дают переходы с $\Delta n = -1$ и $\Delta n = 1$.

Рассмотрим сначала левополяризованные волны. В области $\omega < \Omega - v_0 q + \hbar q^2/2m$ существует хорошо известное левополяризованное возбуждение — геликон [41]. При $qR \ll 1$ и $\omega \ll \Omega$ спектр волны, как это следует из (4.7), имеет вид

$$\omega = \frac{\Omega}{\omega_p^2} c^2 q^2. \tag{4.8}$$

Условия наблюдения геликонов сравнительно легко могут быть выполнены в чистых металлах, легированных полуметаллах и полупроводниках, поскольку затухание за счет столкновений пропорционально ν/Ω, а бесстолкновительное затухание при $\mathbf{q} \parallel \mathbf{H}$ отсутствует. Подробный анализ работ, посвященных изучению геликонов в твердых телах, содержится в обзоре Максфилда [2], к которому мы отсылаем читателя, интересующегося деталями.

Если частота геликона стремится к порогу бесстолкновительного затухания $\omega = \Omega - v_0 q + (\hbar q^2/2m)$ (см. рис. 2), то становится существенной пространственная дисперсия тензора диэлектрической проницаемости и дисперсионная зависимость $\omega(q)$ становится более сложной. В металлах это происходит при $qR \sim 1$, а в полуметаллах — при $qR \ll 1$. В неквантующих полях на пороге существует слабая (коновская) особенность в спектре геликона [1].

За порогом существуют левополяризованные квантовые волны, впервые изучавшиеся в работе Глика и Каллена [42]. Чтобы убедиться в существовании решения уравнения (4.7) в каждом окне, достаточно, так же как и в случае продольных квантовых волн, проанализировать изменение знака логарифмических особенностей на границах окон при фиксированной частоте. Для получения аналитического выражения нужно выделить в левой части (4.7) резонансные слагаемые, а вклад остальных учесть, заменив суммирование по n интегрированием. Авторы упомянутой работы [42] ограничились графическим исследованием дисперсионного уравнения (4.7). Аналитические выражения для спектра левополяризованных квантовых волн при $qR \ll 1$ и $\omega \sim \Omega$ приведены в работе [22]. Мы не станем приводить достаточно громоздкие аналитические выражения для спектра, а схематически изобразим, следуя [42], решения на рис. 2.

Дисперсионные ветви наиболее далеки от границ затухания в окнах, связанных с переходами между уровнями Ландау с $n \sim n_F$. Причем при частотах, соответствующих частотам геликона, продолженного за классический порог затухания, решение проходит приблизительно в середине окна. В отличие от продольных квантовых волн, левополяризованные квантовые волны существуют во всех окнах, в том числе при q порядка $2k_0$ [20]. Частота квантовых волн в этих областях вблизи точек $q = k_n + k_{n+1}$ обращается в нуль.

Рассмотрим спектр правополяризованных возбуждений. Картина областей бесстолкновительного затухания (см. рис. 3) указывает нам те участки плоскости (ω, q), где возможны решения. Как известно, при $qR \ll 1$ для лево- и правополяризованных волн существует высокочастотное решение дисперсионного уравнения (4.6)

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2q^2. \tag{4.9}$$

Эта волна принадлежит области $\omega > v_Fq - \Omega$ и поэтому не испытывает бесстолкновительного затухания. В области частот $\omega \leqslant \Omega$ в неквантующих полях правополяризованного возбуждения не существует.

Как видно из рис. 3, при $qR > 1$ и $\omega < \Omega$ в квантующих магнитных полях могут существовать правополяризованные квантовые волны [43]. Исследование знака логарифмических особенностей левой части уравнения (4.7) показывает, что они существуют во всех окнах в интервале $R^{-1} < q < 2k_0$ при частотах $\omega < \Omega$. Аналитическое выражение для спектра правополяризованных квантовых волн нетрудно получить вблизи $q = k_n - k_{n+1}$, выделив в уравнении (4.7) резонансное слагаемое:

$$\omega_n(q) = v_n\tilde{q} - (v_{n-1} - v_n)\,\tilde{q}\exp\left[-\frac{f(q)}{n}\right]; \tag{4.10}$$

здесь $f(q) = 4\pi^2 l_H^4 n_0 q$, $\tilde{q} = q - (k_n - k_{n+1})$.
В соответствии с количеством окон число решений (4.10) равно $n_F - 1$. Схематический вид решений в других областях показан на рис. 3.

Условия наблюдения правополяризованных квантовых волн могут быть найдены так же, как для продольных возбуждений: расстояние по частоте между дисперсионной кривой и ближайшим порогом должно быть больше его примесного и температурного уширения. Это ведет к следующим неравенствам

$$T \ll \hbar\Omega \exp\left[-\frac{f(q)}{n}\right], \qquad \nu \ll \Omega\frac{\tilde{q}}{k_n}\exp\left[-\frac{f(q)}{n}\right]. \tag{4.11}$$

Отметим, что условия наблюдения левополяризованных волн на частотах геликона, продолженного за порог затухания, менее жесткие, чем (4.11).

Условиям (4.11) можно удовлетворить в чистых металлах и полуметаллах при температурах $T \leqslant 1$ °К, частотах столкновений $\nu \sim 10^9$ *сек*$^{-1}$ и частоте волны $\omega \gg 10^{11}$ *сек*$^{-1}$. При этом магнитное поле в полуметаллах может быть порядка 10^4—10^5 *э*, а в металлах необходимы более сильные магнитные поля ($H \gg 3 \cdot 10^5$ *э*). Способ наблюдения правополяризованных и левополяризованных квантовых волн в металлах и полуметаллах, по-видимому, должен быть различным. В металле, где глубина скин-слоя $\delta \sim 10^{-6}$ *см*, должны эффективно возбуждаться квантовые волны с $q \sim \sim l_H^{-1}$ ($H > 10^5$ *э*). При этом будут наблюдаться особенности поверхностного импеданса, связанные с резонансным возбуждением квантовых волн. Детальная теория таких осцилляций поверхностного импеданса в настоящее время отсутствует. В полуметаллах глубина скин-слоя порядка 10^{-4} *см* и квантовые волны возбуждаются неэффективно. Поэтому способ изучения может быть основан на эффекте резонансного взаимодействия поперечных квантовых волн с высокочастотными ($\omega \gg 10^{11}$ *сек*$^{-1}$) акустическими фононами [44] или другими возбуждениями.

Как известно [45], особенности диэлектрической проницаемости при $\mathbf{q} \parallel \mathbf{H}$ приводят к эффектам аномального проникновения электромагнитного поля траекторного типа. В классически сильных магнитных полях эффект аномального проникновения поля был предсказан в работе [46]. Многочисленные пороги бесстолкновительного затухания поперечных волн, показанные на рис. 2 и 3, которым соответствуют особенности диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{\mp}$, очевидно, свидетельствуют о существовании аналогичных эффектов в квантующем магнитном поле. Однако детальный расчет этих эффектов до настоящего времени не проводился.

в) Волны в электронно-дырочной плазме

В этом разделе мы обсудим спектр электромагнитных возбуждений в двухкомпонентной электронно-дырочной плазме. Спектр поперечных волн и области их существования показаны на рис. 4,5. Рассмотрим сначала решения в классической области $qR \ll 1$. Дисперсионное уравнение для поперечных электромагнитных волн, распространяющихся вдоль магнитного поля,

$$\sum_{e,h} \varepsilon_{\mp} = \frac{c^2 q^2}{\omega^2}, \tag{4.12}$$

запишем в следующей форме:

$$\omega_{p_1}^2 \frac{\Omega_1}{\Omega_1 \mp \omega} + \omega_{p_2}^2 \frac{\Omega_2}{\Omega_2 \pm \omega} = \omega_{p_1}^2 + \omega_{p_2}^2 + c^2 q^2 - \omega^2. \tag{4.13}$$

Индексы 1 и 2 соответствуют электронам и дыркам, а верхний (нижний) знак отвечает левой (правой) круговой поляризации волны.

Если концентрации электронов и дырок не равны, то решениями уравнения (4.13) при условии

$$q^2 \ll q_h^2 = \frac{4\pi e^2 (n_1 - n_2)^2}{c^2 (n_1 m_2 + n_2 m_1)} \tag{4.14}$$

является геликон

$$\omega = \frac{cHq^2}{4\pi e \,|n_1 - n_2|}, \tag{4.15}$$

и возбуждение с противоположной поляризацией [47]

$$\omega(q) = \frac{eH}{c} \frac{|n_1 - n_2|}{m_2 n_1 + m_1 n_2} + \frac{n_1 m_1 + n_2 m_2}{n_1 m_2 + n_2 m_1} \cdot \frac{cHq^2}{4\pi e \,|n_1 - n_2|}. \tag{4.16}$$

Относительное затухание геликона равно

$$\gamma=\frac{n_1m_1+n_2m_2}{n_1m_2+n_2m_1}\frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega(0)}, \tag{4.17}$$

а для возбуждения (4.16)

$$\gamma=\frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega}, \tag{4.18}$$

где

$$\nu_{\text{эфф}}=\frac{\nu_1m_1n_1+\nu_2m_2n_2}{m_1n_1+m_2n_2}. \tag{4.19}$$

Предельная частота волны (4.16) $\omega(0)$ пропорциональна раскомпенсации n_2-n_1, а коэффициент перед q^2 отличается на множитель $\frac{n_1m_1+n_2m_2}{n_1m_2+n_2m_1}$ от

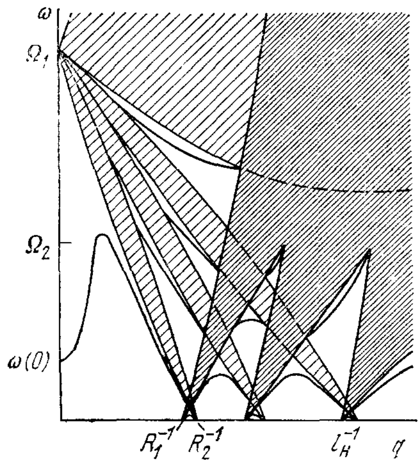

Рис. 4. Области бесстолкновительного затухания и спектр левополяризованных электромагнитных волн в электронно-дырочной плазме в квантующем магнитном поле $(n_2>n_1)$.

Показаны дисперсионные кривые квантовых волн, а также возбуждение (4.16), которое переходит в быструю магнитозвуковую волну и затем в квантовый допплерон.

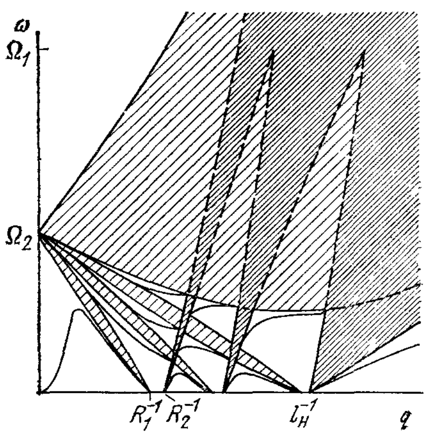

Рис. 5. Области бесстолкновительного затухания и спектр правополяризованных электромагнитных волн в электронно-дырочной плазме в квантующем магнитном поле $(n_2>n_1)$.

Показаны дисперсионные кривые квантовых волн и геликона, который переходит в альвеновскую волну и затем в квантовый допплерон.

соответствующего коэффициента в спектре геликона. Поляризация возбуждения (4.16) противоположна геликону: волна правополяризована в электронной $(n_1>n_2)$ плазме и имеет левую круговую поляризацию в дырочной плазме $(n_2>n_1)$.

Если концентрации электронов и дырок равны, то решением уравнения (4.13) является альвеновская и быстрая магнитозвуковая волны, которые при $\omega\ll\Omega_{1,2}$, как хорошо известно, имеют одинаковый закон дисперсии

$$\omega=v_\alpha q,\qquad v_\alpha=\frac{H}{\sqrt{4\pi n(m_1+m_2)}}, \tag{4.20}$$

и относительное затухание, равное

$$\gamma=\frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega}, \tag{4.21}$$

$$\nu_{\text{эфф}}=\frac{\nu_1m_1+\nu_2m_2}{m_1+m_2}. \tag{4.22}$$

Теоретические и экспериментальные работы, посвященные исследованию альвеновских волн в полуметаллах, отражены в обзоре Эдельмана [4].

В раскомпенсированных полуметаллах в области $q_k \ll q \ll R^{-1}$ геликон переходит в альвеновскую волну, а возбуждение (4.16) — в быструю магнитозвуковую. Изменение спектра от геликонного к альвеновскому экспериментально изучалось в раскомпенсированном висмуте в работе [48]. Волна (4.16) до настоящего времени не наблюдалась. По-видимому, это единственное возбуждение в классической области, не обнаруженное экспериментально.

В области сильной пространственной и временнóй дисперсии спектр рассмотренных возбуждений в квантующих полях претерпевает существенные изменения. Вблизи электронного и дырочного порогов бесстолкновительного затухания (см. рис. 4, 5) возникают новые ветви в спектре — квантовые допплероны [49]. В отличие от допплеронов в металлах со сложной поверхностью Ферми (см. гл. 5), квантовый допплерон возникает из-за усиления особенности на пороге затухания в квантующем магнитном поле. Оценки показывают, что квантовый допплерон вполне может наблюдаться в полуметаллах, например, в висмуте в полях $H \sim 10^4$—10^5 *э* и при температурах $T \leqslant 1$ °К.

Характер спектра квантовых волн в двухкомпонентной плазме, существующих за классической границей затухания $\omega = \pm (\Omega - v_F q)$, иллюстрируют рис. 4, 5. Области бесстолкновительного затухания, показанные на рис. 4,5, построены с учетом электронных и дырочных переходов, разрешенных при $\mathbf{q} \parallel \mathbf{H}$ для левополяризованных и правополяризованных волн. Продольные квантовые волны в двухкомпонентной плазме изучались в работе Константинова и Переля [33]. Все изменения по сравнению со случаем однокомпонентной плазмы сводятся к появлению второй серии продольных квантовых волн, связанных с дырочной системой. Отметим также, что в двухкомпонентной системе существует продольная волна Пайнса — Шриффера [50, 51], которая может испытывать гигантские квантовые осцилляции затухания.

г) Электромагнитные возбуждения, распространяющиеся под углом к направлению магнитного поля

Электромагнитные возбуждения, распространяющиеся под углом к направлению магнитного поля, как известно, существенно отличаются от возбуждений при $\mathbf{q} \parallel \mathbf{H}$. Действительно, у них меняется поляризация, спектр и затухание, появляются новые ветви. Соответствующие дисперсионные уравнения приобретают крайне запутанный вид. Поэтому для изучения решений полезно вновь обратиться к законам сохранения.

При распространении электромагнитных волн под углом к магнитному полю осуществляются переходы с произвольным Δn. Дополнительные резонансы возникают вследствие неоднородности электрического и магнитного поля волны в плоскости, перпендикулярной $\mathbf{H}$. Области бесстолкновительного затухания в этом случае получаются в результате суперпозиции областей затухания, отвечающих всевозможным переходам между уровнями Ландау. Вследствие этого изменяются (уменьшаются) области существования электромагнитных возбуждений. Точки окончания ветвей спектра квантовых волн можно найти, не решая дисперсионное уравнение. Для этого необходимо лишь определить точки пересечения границ затухания с противоположным знаком особенностей диэлектрической проницаемости. Существенно, что в каждом окне существует три типа квантовых волн. Можно показать, проведя исследование особенностей различных компонент тензора проводимости в дисперсионном уравнении, что в окнах, связанных с переходами $\Delta n = 0$, например, возникают решения, отвечающие почти продольной и двум почти поперечным поляризациям. При этом оказывается, что дисперсионные кривые поперечных волн расположены по отношению к границам на более близком расстоянии, чем дисперсионные кривые продольных квантовых волн. Здесь мы не станем анализировать общий случай, а ограничимся обсуждением некоторых наиболее важных эффектов.

Наиболее интересными являются эффекты, связанные с влиянием магнитного квантования на спектр классических электромагнитных волн: геликона, альвеновской и быстрой магнитозвуковой волны. В области существования волн $\omega < \Omega - v_F q$ эти эффекты связаны с резонансами $\Delta n = 0$ (см. рис. 1). В работе [12] предсказаны гигантские квантовые осцилляции затухания геликонов и тщательно проанализированы условия наблюдения осцилляций. Экспериментально эти осцилляции впервые наблюдались на алюминии [52]. Взаимодействие геликона, распространяющегося под углом к магнитному полю, с продольными квантовыми волнами изучалось в работе [53], где было показано, что квантовые волны, скорости которых близки к фазовой скорости геликона, изменяют поляризацию— становятся почти поперечными.

Обсудим теперь влияние квантования на спектр альвеновской и быстрой магнитозвуковой волн. В полуметаллах вследствие низкой концентрации носителей скорости этих волн согласно (4.20) больше фермиевской скорости и поэтому резонансное взаимодействие без изменения номера уровня Ландау ($\Delta n = 0$) с электронами отсутствует. В скомпенсированных металлах в реальных магнитных полях $v_\alpha \ll v_F$. По этой причине без магнитного квантования альвеновские волны в металлах ненаблюдаемы даже при $\mathbf{q} \parallel \mathbf{H}$, так как при произвольной ориентации $\mathbf{H}$ относительно кристаллографических осей из-за анизотропии электронного спектра существует затухание Ландау.

В работе [49] показано, что в квантующем поле альвеновская и быстрая магнитозвуковая волны могут распространяться, если они попадают в окна, изображенные на рис. 1, т. е. если их скорость принадлежит одному из интервалов $(v_n \cos\vartheta,\ v_{n-1}\cos\vartheta)$. С изменением угла между $\mathbf{q}$ и $\mathbf{H}$ скорость быстрой магнитозвуковой волны остается постоянной, а области затухания движутся, как это было показано во второй главе. Если скорость волны попадает в интервалы $\Delta v_n = \hbar q \cos\vartheta/m$, то быстрая магнитозвуковая волна затухает. Скорость альвеновской волны пропорциональна $\cos\vartheta$, поэтому, попав в область прозрачности, эта волна не испытывает гигантских осцилляций затухания с изменением угла.

Поскольку альвеновская и фермиевская скорости на n-м уровне Ландау — различные функции H, то у альвеновской и у быстрой магнитозвуковой волн будут наблюдаться гигантские осцилляции поглощения и с изменением магнитного поля. Период угловых гигантских осцилляций поглощения быстрой магнитозвуковой волны равен

$$\Delta\vartheta = \operatorname{ctg}\vartheta\cos^2\vartheta\,\frac{v^2_{nF1}}{v^2_\alpha}, \tag{4.23}$$

а по магнитному полю — для альвеновской и быстрой магнитозвуковой волн

$$\Delta H_{1,2} = \frac{H}{n_F + (v^2_{\alpha 1,2}/v^2_{n_{F1}})}, \tag{4.24}$$

где $\cos\vartheta > v_\alpha/v_{F1}$, $v^2_{n_{F1}} = \hbar\Omega_1/m_1$, $v^2_{\alpha 1} = v^2_\alpha\cos^2\vartheta$, $v^2_{\alpha 2} = v^2_\alpha$. Заметим, что аналогичные (4.23) угловые осцилляции затухания и скорости существуют и при распространении звуковых колебаний [15, 16]. Зависимость периода гигантских квантовых осцилляций по H (4.24) существенно отличается от соответствующих зависимостей в осцилляциях де Гааза- ван Альвена и в гигантских осцилляциях Гуревича, Скобова, Фирсова. Начиная с углов $\cos\vartheta \leqslant v_\alpha/v_{F1}$, угловые осцилляции быстрой магнитозвуковой волны прекращаются. Распространение быстрой магнитозвуковой волны в этом интервале углов без магнитного квантования рассматривал Скобов [54]. Критерий существования гигантских осцилляций поглощения быстрой магнитозвуковой и альвеновской волн в металле можно найти, потребовав, чтобы температурный и примесный разброс продольной скорости электронов $T/m_1v_{n_1}$ и ν/q был мал по сравнению с интервалом δv_{n_1}. Учитывая, что $\delta v_{n_1} = \hbar\Omega_1/m_1v_{n_1}$ ($\delta v_{0_1} = \hbar\Omega_1/m_1v_{F_1}$ для $n \sim 1$ и $\delta v_{n_F} = \hbar l_H^{-1}/m$ для $n \sim n_F$), получим

$$T \ll \hbar\Omega_1, \qquad \nu_1 \ll \omega\frac{v^2_{n_{F_1}}}{v^2_\alpha}. \tag{4.25}$$

Заметим, что эти условия являются более слабыми по сравнению с условиями наблюдения продольных квантовых волн (4.4). Условиям (4.25) можно удовлетворить в чистых металлах, где $\nu \sim 10^8$—10^9 *сек*$^{-1}$, в магнитных полях $H \sim 10^5$ *э* и при частоте волны $\omega \sim 10^{11}$—10^{12} *сек*$^{-1}$. Напомним, что для изучения альвеновских волн в металлах необходимо, чтобы толщина пластины, в которой могут наблюдаться стоячие волны, была меньше $(\mathrm{Im}\, q)^{-1} = v_\alpha/\nu_{\text{эфф}}$, что создает дополнительные трудности [4].

При $\vartheta = \pi/2$, как уже было указано, разрешены переходы с произвольным Δn. Закон сохранения энергии в этом случае имеет вид $\omega = \Delta n\Omega$ и поэтому области затухания вырождаются в серию линий. Из классических волн выживают быстрая магнитозвуковая волна в скомпенсированной плазме и возбуждение (4.16), если $n_1 \neq n_2$ [1, 49]. Кроме того, вблизи линий циклотронного резонанса $\omega = \Delta n\, \Omega_{e,h}$ существуют продольные и поперечные циклотронные волны, детально описанные в хорошо известном обзоре Канера и Скобова [1]. Эти волны возникают вследствие степенных особенностей компонент тензора проводимости при $\omega = \Delta n\Omega$. Графическое изображение спектра волн, а также областей затухания в металлах с изотропным и анизотропным законом дисперсии электронов приведено в обзоре [1].

Спектр электромагнитных волн, распространяющихся под углом к направлению магнитного поля, отражает особенности тензора проводимости, связанные с приближенным характером закона сохранения поперечной компоненты импульса. Зависимость проводимости от $q_\perp$ содержится в матричных элементах (П.10), причем резонансные значения $q_\perp$ соответствуют расстоянию между трубками Ландау в направлении, перпендикулярном к $\mathbf{H}$ (см. гл. 3). Вследствие этого частота волн, распространяющихся под углом к направлению магнитного поля, и их затухание осцилляторно зависят от $q_\perp$. Такие осцилляции обычно называют геометрическими. Геометрические осцилляции спектра циклотронных волн изучались в работе [55]. При произвольной ориентации $\mathbf{q}$ относительно $\mathbf{H}$ также возможны резонансные эффекты, связанные с точным выполнением законов сохранения энергии и продольной компоненты импульса и одновременно с приближенным законом сохранения поперечной компоненты импульса. Если угол ϑ близок к $\pi/2$, то в области $\omega < v_Fq\cos\vartheta$ в неквантующем магнитном поле при $qR = \pi\,(n + {}^1/_4)$, когда матричный элемент обращается в нуль, бесстолкновительное затухание Ландау отсутствует. При таких значениях q, как показано в работе Канера и Скобова [56], могут существовать волны с дискретным спектром. Фактически эти волны есть продолжение геликона, распространяющегося почти перпендикулярно к **H**, в коротковолновую часть спектра. Подробное описание дисперсии и затухания волн с дискретным спектром приведено в обзоре [1].

5. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В МЕТАЛЛАХ С АНИЗОТРОПНЫМ ЭЛЕКТРОННЫМ СПЕКТРОМ

Электронный спектр реальных проводников, как правило, далек от рассмотренной нами выше модели. Несферичность и неквадратичность спектра, а также многосвязность поверхности Ферми и существование открытых орбит приводят к изменению динамики отдельного электрона и, вследствие этого, к существенному изменению спектра коллективных электромагнитных возбуждений. Расчет тензора проводимости для достаточно сложной модели электронного спектра удается провести только в отдельных случаях, аппроксимируя реальный спектр такой функцией, которая позволяет получить аналитические выражения для σ_{ik}. В условиях, когда провести вычисление тензора проводимости не представляется возможным, использование законов сохранения для анализа различных резонансных эффектов в классически сильных и квантующих полях в металлах с анизотропным спектром может оказаться полезным еще в большей степени, чем ранее.

К каким же качественным изменениям в спектре электромагнитных возбуждений приводит анизотропия электронного спектра? Во-первых, вследствие изменения симметрии основного состояния даже при $\mathbf{q} \parallel \mathbf{H}$ правила отбора не запрещают электронные переходы с $\Delta n \neq 0$ для продольных волн, а для циркулярно поляризованных волн — с $\Delta n \neq \pm 1$. Поэтому в металлах со сложной поверхностью Ферми могут существовать электромагнитные возбуждения, сформированные дополнительными особенностями тензора проводимости. Во-вторых, новые ветви могут возникать из-за многокомпонентности системы, т.е. вследствие существования нескольких не эквивалентно расположенных относительно магнитного поля замкнутых участков поверхности Ферми. Необходимо также иметь в виду, что в реальных металлах особенности тензора проводимости на порогах бесстолкновительного затухания могут быть более сильными, чем в модели с квадратичным спектром. Усиление особенности проводимости приводит к существенному изменению предпорогового спектра различных возбуждений. Так, вблизи доплер-сдвинутого циклотронного резонанса геликон и альвеновские волны переходят в допплерон. Интересные резонансные эффекты могут существовать в металлах с открытыми поверхностями Ферми. Например, движение электронов в направлении, перпендикулярном к направлениям магнитного поля и открытости (в p-пространстве) ведет к смещению циклотронной частоты из-за эффекта Доплера и из-за этого к радикальной перестройке спектра циклотронных волн.

а) Электромагнитные волны в проводниках с анизотропным квадратичным спектром

Многие характерные особенности спектра электромагнитных волн в металлах с анизотропным квадратичным спектром удобно проследить на примере висмута. В этом параграфе мы не будем рассматривать электромагнитные возбуждения, которые существуют уже в металлах с изотропным электронным спектром. Влияние анизотропии электронного спектра висмута на спектр электромагнитных возбуждений, существующих в изотропной модели, детально рассматривалось в обзорах [1, 4].

Ферми-поверхность висмута хорошо известна (см., например, [57]). Она состоит из одного дырочного эллипсоида, ориентированного вдоль тригональной оси и трех сильно анизотропных электронных эллипсоидов *), расположенных в плоскости, перпендикулярной к оси C_3. Дырочный и электронные эллипсоиды расположены на границах зоны Бриллюэна, причем наибольшая ось электронных эллипсоидов наклонена к базисной плоскости под углом $\sim 6°$. Вклад в тензор проводимости от одного эллипсоида равен [59]

$$\sigma_{ik}^{j}=\frac{ie^2n_j}{m\omega}\delta_{ik}+\frac{ie^2}{\omega}\sum_{\alpha,\beta}\frac{(f_\beta-f_\alpha)\langle\alpha\mid V_i\mid\beta\rangle\langle\alpha\mid V_k\mid\beta\rangle^*}{\varepsilon_\beta-\varepsilon_\alpha-\hbar\omega-i\delta}, \tag{5.1}$$

где j — индекс долины, α_{ik} — безразмерный тензор обратных эффективных масс,

$$v_i=\frac{\alpha_{ik}}{m}\left(p_k+\frac{e}{c}A_k\right),$$

$|\alpha\rangle$ — решение уравнения Шрёдингера для частицы с анизотропным квадратичным законом дисперсии [60].

Рассмотрим сначала электромагнитные возбуждения в неквантующих магнитных полях [61], распространяющиеся вдоль выделенных симметрией кристалла направлений: $\mathbf{q}\parallel\mathbf{H}\parallel C_3$ или $\mathbf{q}\parallel\mathbf{H}\parallel C_2$. В первом случае из симметрии следует, что неравные нулю компоненты σ_{ik} имеют вид [62]

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}=\sigma_{yy}&=\frac{r_j}{2}(\sigma_{xx}^j+\sigma_{yy}^j),\\ \sigma_{xy}&=\frac{r_j}{2}(\sigma_{xy}^j-\sigma_{yx}^j),\end{aligned} \tag{5.2}$$

где r_j — число эквивалентных долин. Если $\mathbf{q}\parallel\mathbf{H}\parallel C_2$, то не равны нулю компоненты σ_{xx}, σ_{xy}, $\sigma_{yy}\neq\sigma_{xx}$ и σ_{zz}, причем $\sigma_{ik}=r_j\sigma_{ik}^j$.

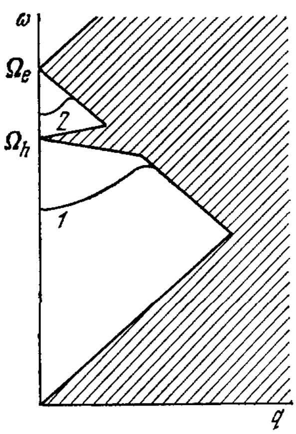

Рис. 6. Спектр продольной (1) и поперечной волн (2) в висмуте ($\mathbf{q}\parallel\mathbf{H}\parallel C_3$). Дисперсионные кривые альвеновской, быстрой магнитозвуковой волны и волны Пайнса — Шриффера на рисунке не показаны.

Пусть циркулярно поляризованная волна распространяется вдоль оси C_3. Тогда, как следует из выражений (5.1) и (5.2), при $q\to 0$ разрешены электронные переходы с $\Delta n=\pm 1$ для каждой круговой поляризации, а также дырочные переходы $\Delta n=-1$ — для левой круговой и $\Delta n=1$ — для правой круговой поляризации. Одновременное существование электронных переходов с $\Delta n=1$ и $\Delta n=-1$ для каждой поляризации связано с несферичностью электронных участков поверхности Ферми. Области бесстолкновительного затухания в висмуте, изображенные на рис. 6, определяют границы существования нового правополяризованного возбуждения, связанного с электронными и дырочными переходами $\Delta n=1$. Дисперсионное уравнение для поперечных волн при $q\to 0$ имеет вид

$$\frac{\alpha_1^e+\alpha_2^e}{2}\frac{\omega_p^2}{\Omega_e^2-\omega^2}\pm\frac{\omega_p^2}{\omega\Omega}\frac{\Omega_e^2}{\Omega_e^2-\omega^2}-\frac{\alpha_1^h\omega_p^2}{\omega(\omega\pm\Omega_h)}=\frac{c^2q^2}{\omega^2}; \tag{5.3}$$

здесь $\Omega_e=\Omega\sqrt{\alpha_1^e\alpha_2^e}$, $\Omega_h=\alpha^h\Omega$, $\alpha_{xx}=\alpha_1$, $\alpha_{yy}=\alpha_2$, $\alpha_{zz}=\alpha_3$, $\alpha_{zy}=\alpha_4$.

*) Энергетический спектр и форму поверхности Ферми висмута более подробно описывает модель Коэна [58].

Из уравнения (5.3) следует, что вдоль C_3 в интервале $\Omega_h < \omega < \Omega_e$ существует правополяризованное электромагнитное возбуждение, имеющее спектр [62]

$$\omega = \omega(0) + \frac{(\omega(0)-\Omega_h)(\Omega_e^2-\omega^2(0))}{(\alpha_1^e+\alpha_e^2+2\alpha_1^h)\,\omega_p^2\omega^2(0)} c^2q^2, \quad \omega(0) = \Omega_h\left[1+\frac{2(\alpha_1^e\alpha_2^e-(\alpha_1^h)^2}{\alpha_1^h(\alpha_1^e+\alpha_2^e+2\alpha_1^h)}\right]. \quad (5.4)$$

В области $\omega < \Omega_{e,h}$ (5.3) дает спектр альвеновской и быстрой магнитозвуковой волны. Мнимая часть в (5.4) — порядка частоты столкновений. Решение (5.4), как уже отмечалось, возникает только благодаря тому, что наряду с дырочными переходами $\Delta n = 1$ разрешены и электронные переходы $\Delta n = 1$.

В других полуметаллах (сурьма, мышьяк), где дырочные участки поверхности Ферми не находятся на оси C_3 и, следовательно, не являются поверхностями вращения, разрешены электронные и дырочные переходы $\Delta n = \pm 1$ и существует как правополяризованное, так и левополяризованное возбуждение типа (5.4).

При распространении продольных волн в висмуте вдоль оси C_3 вследствие отклонения одной из главных осей электронных эллипсоидов от базисной плоскости наряду с переходами с $\Delta n = 0$ возникают дополнительные резонансы с $\Delta n = \pm 1$, которые формируют спектр нового продольного возбуждения. Решение дисперсионного уравнения

$$\varepsilon_{zz}^0 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}(\alpha_3^e+\alpha_3^h+r^2q^2) + \frac{(\alpha_4^e)^2\,\omega_p^2}{\alpha_e^2(\Omega_e^2-\omega^2)} = 0, \quad (5.5)$$

где ε_{zz}^0 — диэлектрическая проницаемость решетки,

$$r^2 = \frac{3}{5}\left(\frac{v_{Fe}^2+v_{Fh}^2}{\omega^2} - \frac{1}{3}\frac{(\alpha_4^e)^2 v_{Fe}}{\alpha_2^e\Omega_e^2}\right),$$

при $q \to 0$ имеет вид

$$\omega^2 = \omega^2(0)(1+\rho^2q^2) \quad (5.6)$$

(см. рис. 6). Здесь

$$\omega^2(0) = \Omega_e^2(1-\gamma_e), \quad \rho^2 = \frac{3v_{Fe}^2\gamma_e}{5\omega^2(0)}\left(\frac{\Omega_e^2}{\omega^2(0)} - \frac{1}{3}\gamma_e\right), \quad \gamma_e = \frac{(\alpha_4^e)^2}{\alpha_2^e(\alpha_3^e+\alpha_3^h)}.$$

В изотропной модели при распространении волны под углом к магнитному полю разрешены переходы с произвольным Δn. Но их вклад в проводимость пропорционален некоторой степени q и поэтому решения, подобные (5.4) и (5.6), не возникают.

Если магнитное поле направлено вдоль бинарной оси, то в висмуте существуют две неэквивалентные электронные и одна дырочная группа носителей. При этом главная ось одного из электронных эллипсоидов и дырочного эллипсоида параллельна **H**. Главные оси двух других электронных эллипсоидов не совпадают с направлением магнитного поля. Таким образом, электронная система двухкомпонентна и характеризуется двумя циклотронными частотами Ω_{e1} и Ω_{e2}. Нетрудно убедиться, что при $qv_F \ll |\omega - \Omega_j|$ в интервале $\Omega_{e1} < \omega < \Omega_{e2}$ уже в изотропной модели в двухкомпонентной плазме с одинаковым типом носителей должно существовать поперечное электромагнитное возбуждение, у которого вектор поляризации вращается в ту же сторону, что и электроны. Не удивительно поэтому, что в висмуте при **H**, направленном вдоль оси C_2, существует такая электромагнитная волна. Ее спектр можно найти, записав дисперсионное уравнение при $qv_F \ll |\omega - \Omega_j|$

$$\left[\left(\varepsilon_{xx} - \frac{c^2q^2}{\omega^2}\cos^2\vartheta\right)\left(\varepsilon_{yy} - \frac{c^2q^2}{\omega^2}\right) - \varepsilon_{xy}\varepsilon_{yx}\right] = 0\,(q^4), \quad (5.7)$$

где ϑ — угол между $\mathbf{H} \| C_2$ и вектором $\mathbf{q}$, лежащим в плоскости x, z. Выражения для компонент тензора ε_{ij} и зависимость $\omega(q)$ весьма громоздки. Поэтому, следуя работе [63], приведем лишь численные значения коэффициентов в функции $\omega(q)$. При $\mathbf{q} \| \mathbf{H} \| C_2$ решение (5.7) в интервале $\Omega_{e1} < \omega < \Omega_{e2}$ имеет вид

$$\omega = 5{,}35\Omega_h \left\{1 + \left[0{,}34 + 0{,}27\left(\frac{500}{H}\right)^2\right] 10^{-7} q^2\right\}. \tag{5.8}$$

Если $\mathbf{q} \perp \mathbf{H} \| C_2$, $\mathbf{q} \| C_3$, то

$$\omega = 5{,}35\Omega_h \left\{1 + \left[0{,}25 + 0{,}37\left(\frac{500}{H}\right)^2\right] 10^{-7} q^2\right\}. \tag{5.9}$$

В этих выражениях учтена пространственная дисперсия тензора проводимости.

Возбуждения (5.8) и (5.9) наблюдались по осцилляциям поверхностного импеданса пластин висмута [63]. Зависимость $\partial R/\partial H$ и $\partial X/\partial H$ (поверхностный импеданс $Z = R + iX$) приведена на рис. 7 и 8. Условия эксперимента указаны в подписях к рисункам. Зависимость $\omega(q)$, найденная экспериментально, практически совпадает с (5.8) и (5.9), если считать, что при $\mathbf{q} \| \mathbf{H} \| C_2$ наблюдаются резонансы Рэлея ($n\lambda = d$, d — толщина пластины, λ — длина волны), а при $\mathbf{H} \perp \mathbf{q} \| C_3$ наблюдаются резонансы Фабри — Перо ($n\lambda/2 = d$). Предельная частота $\omega(0)$ возбуждений (5.8) и (5.9) была определена также в работе [64], где изучалась прозрачность висмута в инфракрасном диапазоне. На существование частоты $\omega(0)$ при $\mathbf{q} \perp \mathbf{H}$ было указано еще в работе [65], где это явление было названо диэлектрической аномалией.

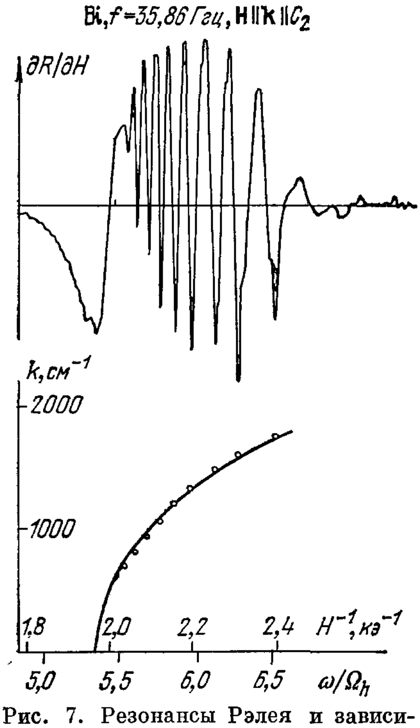

Рис. 7. Резонансы Рэлея и зависимость $k\left(\frac{\omega}{\Omega_h}\right)$, полученные на пластине висмута толщиной 0,47 *мм* при температуре $T \approx 1{,}5\,^\circ$K. Точки — эксперимент; кривая $k(\omega/\Omega_h)$ построена по формуле (5.8).

Вдоль направления C_2 может распространяться также продольная волна, происхождение которой объясняется анизотропией электронного спектра. В самом деле, в магнитном поле, направленном вдоль оси C_2, для одной группы электронов и для дырок разрешены переходы с $\Delta n = 0$. Для двух других электронных эллипсоидов, у которых ни одна из главных осей не совпадает с направлением $\mathbf{H}$, разрешены переходы с $\Delta n = \pm 1$, формирующие дополнительную, аналогичную (5.5) особенность в компоненте ε_{zz}. Это и приводит к существованию решения уравнения $\varepsilon_{zz} = 0$ в интервале $0 < \omega < \Omega_{e1}$.

Полуметаллы наиболее перспективны с точки зрения наблюдения квантовых волн. Это объясняется счастливым сочетанием параметров полуметаллов, определяющих спектр и затухание возбуждений. Малые концентрации носителей и малые эффективные массы в полуметаллах сочетаются с большим временем жизни носителей. Кроме этого, сильная анизотропия электронного спектра приводит к существованию во всех окнах квантовых волн с продольной и поперечной поляризацией.

Впервые продольные и поперечные квантовые волны, связанные с переходами $\Delta n = 0$, в полуметаллах изучались в работах [33, 62]. Здесь, следуя [62], мы рассмотрим поперечные квантовые волны. В висмуте и сурьме

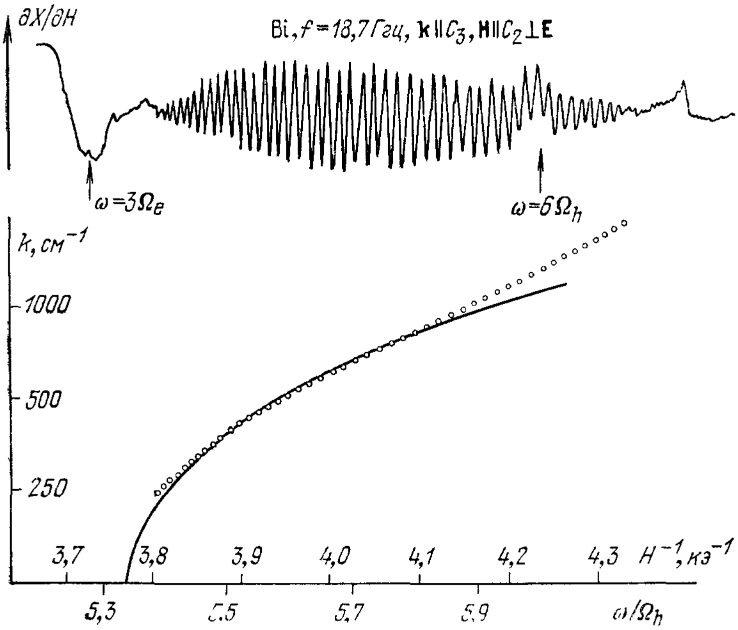

Рис. 8. Резонансы Фабри — Перо и зависимость $k\left(\frac{\omega}{\Omega_h}\right)$, полученные на пластине висмута толщиной 2 *мм* при температуре $T \approx 0{,}6$ °K.
Точки — эксперимент; кривая $k(\omega/\Omega_h)$ построена по формуле (5.9).

вдоль оси C_3 продольные и поперечные волны распространяются независимо. Как уже было отмечено, вклад в тензор проводимости $\sigma_\pm$ для циркулярно поляризованных возбуждений дадут не только переходы с $\Delta n = \pm 1$, но и $\Delta n = 0$. Это приведет к появлению в окнах, изображенных на рис. 1, циркулярно поляризованных волн. Дисперсионное уравнение для них согласно (3.20) и (5.1) имеет вид [62]

$$1-\frac{\omega}{\omega_r}-\frac{u^2}{v_\alpha^2}=\sum_{e,\,h}\mu G(u), \tag{5.10}$$

где $u = \omega/q$, $\omega_r = cH/4\pi n_0 e\rho^2 \sim \Omega v_\alpha^2/v_F^2$ (при частотах $\omega > \omega_r$ в спектре альвеновской и быстрой магнитозвуковой волн становится существенной пространственная дисперсия [66]),

$$\rho^2=\rho_e^2-\rho_h^2, \qquad \rho_i^2=\left(\frac{c}{eH}\right)^2\frac{m_0\varepsilon_F^i}{\alpha_{1i}\alpha_{2i}^2}\left(\alpha_{4i}^2-\frac{2}{5}\alpha_{2i}\alpha_{3i}\right), \tag{5.11}$$

v_α — скорость альвеновской волны в полуметалле, коэффициент $\mu = 3\pi n_0\varepsilon_F\alpha_4^2/\alpha_2^2H^2$ по порядку величины равен отношению плотности фермиевской энергии к магнитной. Функция $G(u)$ равна

$$G(u)=\sum_{n=0}^{n_F}\chi(n)\left[\left(1-\frac{u^2}{v_n^2}\right)^{-1}-1\right], \tag{5.12}$$

$$\chi(n)=\left(\frac{n}{n_F+\Delta}\right)^2[(n_F+\Delta)(n_F+\Delta-n)]^{-1/2}, \tag{5.13}$$

Δ — дробная часть отношения $\varepsilon_F/\hbar\Omega$. Уравнение (5.10) справедливо при условии $|u-v_n|\gg\hbar q/2m$, позволяющем разложить логарифмы в компоненте тензора ε_{xx}. В противном случае, когда решение $u_n(\omega)$ лежит вблизи v_n, особенности в правой части (5.10) логарифмические.

Левая часть уравнения (5.10) обращается в нуль на спектре альвеновской или быстрой магнитозвуковой волны *). При $v_\alpha<v_F$ из-за малости коэффициента μ решения уравнения (5.10), соответствующие квантовым волнам, существуют лишь вблизи классических решений в окнах, ближайших к тому, где левая часть (5.10) равна нулю. Квантовые волны, таким образом, появляются в соседних окнах как спутники альвеновской и быстрой магнитозвуковой волн. Если $v_\alpha>v_F$, то левая часть (5.10) велика во всех окнах и квантовые волны отсутствуют. Заметим, что в висмуте неравенство $v_\alpha>v_F$ выполняется уже в неквантующих полях. Поэтому условия наблюдения поперечных квантовых волн, связанных с переходами $\Delta n=0$, в висмуте неблагоприятные. Наиболее благоприятные условия наблюдения рассматриваемых квантовых волн реализуются в сурьме, где вследствие относительно высокой концентрации носителей требование $v_\alpha<v_F$ выполняется в квантующих магнитных полях.

Установим критерий существования поперечных квантовых волн. Для существования квантовых волн необходимо, чтобы величина правой части уравнения (5.10) в точке особенности при конечных ν и T была больше левой части уравнения. Кроме того, квантовые волны будут затухать только за счет столкновений, если соответствующая дисперсионная кривая удалена от границы окна на расстояние большее, чем температурное и примесное размытие его границы.

Если неравенство $|u-v_n|\gg\hbar q/2m$ не выполняется и скорость квантовой волны $u_n(\omega)$ близка к $v_n\sim v_\alpha$, то оба эти условия совпадают и имеют вид

$$\begin{aligned}\left|\ln\frac{\nu}{qv_n}\right|&\gg\left(1\mp\frac{\omega}{\omega_r}-\frac{u_n^2}{v_\alpha^2}\right)\mu^{-1},\\ \left|\ln\frac{T}{mv_n^2}\right|&\gg\left(1\mp\frac{\omega}{\omega_r}-\frac{u_n^2}{v_\alpha^2}\right)\mu^{-1}.\end{aligned} \tag{5.14}$$

Условия существования квантовых волн в окнах, прилегающих к тому окну, где расположена альвеновская волна, менее жесткие, чем (5.14). Как следует из уравнения (5.10), разность скоростей $u_n(\omega)-v_n$ в этом случае порядка $\alpha\hbar\Omega/mv_n$, где $\alpha\lesssim 1$. (Точное значение этого коэффициента можно найти численным решением уравнения (5.10).) Потребовав, чтобы разность $u_n(\omega)-v_n$ была больше примесного и температурного уширения границ затухания, получим

$$T\ll\alpha\hbar\Omega,\qquad \nu\ll\alpha\omega\frac{v_{nF}^2}{v_n^2}. \tag{5.15}$$

---

*) Нерезонансные слагаемые правой части приведут к перенормировке скорости магнитоплазменных волн. Ниже мы будем предполагать, что такая перенормировка произведена и в правой части оставлены только резонансные слагаемые.

Заметим, что эти условия являются достаточными для наблюдения гигантских квантовых осцилляций поглощения альвеновской и быстрой магнитозвуковой волн (см. (4.25)). Из (5.15) следует, что в квантующих магнитных полях, отвечающих $\mu \sim 1-10^{-1}$ и $v_\alpha < v_F$ в нескольких окнах, ближайших к тому окну, где находится альвеновская волна, при $T \leqslant 1\,°K$ и $\omega \sim 10^{11}-10^{12}$ *сек*$^{-1}$ в сурьме могут распространяться слабозатухающие поперечные квантовые волны, связанные с переходами $\Delta n = 0$.

б) Электромагнитные волны в металлах со сложной поверхностью Ферми

1) Рассмотрим теперь спектр электромагнитных возбуждений в металлах с более сложной поверхностью Ферми. Тензор проводимости в классически сильных магнитных полях в металлах с произвольным законом дисперсии электронов имеет вид [1]

$$\sigma_{ik}(\omega, \mathbf{q}, \mathbf{H}) = \frac{ie^2}{2\pi^2\hbar^3} \int dp_z\, |m_c| \sum_{\Delta n = -\infty}^{+\infty} \frac{V_{\Delta n,\, i} V^*_{\Delta n,\, k}}{\omega - \tilde{\mathbf{v}}\mathbf{q} + \Delta n \Omega + i\nu}, \tag{5.16}$$

где $m_c(p_z) = (1/2\pi)\partial S/\partial \varepsilon$ — циклотронная масса, $\Omega = eH/m_c c$, $S(\varepsilon, p_z)$ — площадь сечения изоэнергетической поверхности плоскостью $p_z = \mathrm{const}$, магнитное поле направлено по оси z,

$$V_{\Delta n,\, i} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v_i(\tau) \exp\left\{ -\frac{i}{\Omega} \int_0^{\tau} \{\mathbf{q}[\mathbf{v}(\tau') - \tilde{\mathbf{v}}] + \Delta n \Omega\}\, d\tau' \right\} d\tau, \tag{5.17}$$

$$\tilde{\mathbf{v}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{v}(\tau)\, d\tau, \qquad \tilde{v}_z = -\frac{1}{2\pi m_c} \frac{\partial S}{\partial p_z}, \tag{5.18}$$

$v_i(\tau)$ — компонента скорости электрона на поверхности Ферми, $\tilde{\mathbf{v}}$ — среднее значение скорости за циклотронный период. Заметим, что суммированию по гармоникам в (5.16) в квантовом случае соответствует суммирование по переходам Δn. Какие же Δn сейчас разрешены?

Рассмотрим циркулярно поляризованную волну, которая распространяется вдоль магнитного поля, направленного по оси симметрии высокого порядка. Пусть электронные орбиты на некотором участке многосвязной поверхности Ферми имеют ось симметрии m-го порядка. Правила отбора в этом случае [67] для $V^{\pm}_{\Delta n} = V_{\Delta n x} \pm iV_{\Delta n y}$ можно найти из (5.17), разложив функцию $v_i(\tau)$ и показатель экспоненты в ряд Фурье. Нетрудно убедиться, что функция $V^{\pm}_{\Delta n}$ не равна нулю, если

$$\Delta n = ms \pm 1, \qquad s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{5.19}$$

Для дырочных орбит верхний знак в правилах отбора (5.19) соответствует правой, а нижний знак — левой круговой поляризации. Аксиально симметричной поверхности Ферми отвечает, как мы уже знаем, $\Delta n = \pm 1$. Правила отбора для продольной волны в той же геометрии имеют вид

$$\Delta n = ms, \qquad s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{5.20}$$

При произвольной ориентации векторов $\mathbf{q}$ и $\mathbf{H}$ относительно оси симметрии поверхности Ферми разрешены переходы с любым Δn.

Знаменатель в подынтегральном выражении (5.16) при $\nu \to 0$ обращается в нуль на прямых

$$\omega = \Delta n \cdot \Omega(p_z) \pm \tilde{v}_z(p_z)\, q_z. \tag{5.21}$$

Это есть условие резонансного поглощения волны электронами с определенным p_z. Границу бесстолкновительного затухания, очевидно, можно найти как огибающую семейства прямых (5.21). Иными словами, границы затухания получаются из уравнения (5.21) и уравнения

$$\Delta n \frac{\partial \Omega (p_z)}{\partial p_z} = \pm q_z \frac{\partial v_z}{\partial p_z} \tag{5.22}$$

после исключения переменной p_z. Следовательно, для построения границ бесстолкновительного затухания необходимо предварительно найти циклотронную частоту и среднюю скорость на орбите как функцию p_z. Если семейство прямых (5.21) не имеет огибающей, то границы областей бесстолкновительного затухания определяются выражением (5.21) с экстремальными значениями циклотронной частоты и продольной скорости электрона. Форма границ, таким образом, оказывается тесно связанной с геометрией ферми-поверхности.

На границах областей бесстолкновительного затухания, определяемых уравнениями (5.21) и (5.22), проводимость имеет особенности, которые формируют спектр новых электромагнитных возбуждений. В частности, по этой причине вблизи границы допплер-сдвинутого циклотронного резонанса возникают моды, впервые рассмотренные в работах [68, 69] и названные впоследствии допплеронами [70]. Характер особенности зависит от геометрии поверхности Ферми.

С помощью выражения (5.16) можно провести общий анализ особенностей тензора проводимости на границах бесстолкновительного затухания. Здесь мы ограничимся, ради простоты, рассмотрением двух случаев, $\omega \to 0$ и $q \to 0$. Иерархия особенностей проводимости при $\omega \to 0$ для различных моделей поверхности Ферми изучалась в работе [71]. Авторы этой работы исходили из выражения для проводимости [72]

$$\sigma_\pm (q, H) = \frac{iec}{4\pi^3 H \hbar^3} \int dp_z \frac{S(p_z)}{1 - u(p_z) q \pm i\eta}, \tag{5.23}$$

которое получается из выражения (5.16) при $\omega \ll \Omega$, ν и $\Delta n = 1$. Здесь

$$u(p_z) = \frac{c}{2\pi e H} \frac{\partial S}{\partial p_z} = -\frac{\overline{v_z}(p_z)}{\Omega(p_z)} \tag{5.24}$$

— среднее смещение электронов в направлении магнитного поля за циклотронный период, $\eta = \nu/\Omega$.

Тип особенности проводимости определяется поведением функции $S(p_z)$ вблизи точки p_0, где смещение электронов за циклотронный период $u(p_z)$ экстремально. Очевидно, особенность будет более сильной в том случае, если числитель подынтегрального выражения (5.23) — площадь сечения поверхности Ферми — в точке p_0 не обращается в нуль. Разложив площадь S и производную $\partial S/\partial p_z$ вблизи p_0, после вычислений в (5.23) можно найти, что [71]

$$\sigma_\pm \sim [1 - u(p_0) q \pm i\eta]^{-(n-1)/n}, \tag{5.25}$$

если $S(p_0) \neq 0$, $\frac{\partial S(p_0)}{\partial p_z} \neq 0$, $\frac{\partial^n S(p_0)}{\partial p_z^n} = 0$, но $\frac{\partial^{n+1} S(p_0)}{\partial p_z^{n+1}} \neq 0$, $n \geqslant 2$. Например, для электронного спектра с поверхностью Ферми типа гофрированного цилиндра

$$\varepsilon = \frac{p_\perp^2}{2m} + \varepsilon_0 \sin^2 \frac{\pi p_z}{2k}, \tag{5.26}$$

если магнитное поле направлено по оси цилиндра, $n = 2$ (ε_0 — ширина энергетической зоны, $2k$ — размер зоны Бриллюэна). Следовательно, особенность $\sigma_\pm$ корневая. Для параболической модели Чемберса и Скобова [73]

$$\varepsilon=\frac{p_\perp^2}{2m}+v\,|p_z| \tag{5.27}$$

$n = \infty$ и проводимость имеет полюс первого порядка. Если в точке p_0 площадь сечения поверхности Ферми обращается в нуль — $S(p_0) = 0$, причем $\partial S(p_0)/\partial p_z \neq 0$, $\partial^n S(p_0)/\partial p_z = 0$, а $\partial^{n+1}S(p_0)/\partial p_z^{n+1} \neq 0$ и $n > 2$, то проводимость имеет особенности вида [71]

$$\sigma_\pm\sim[1-u(p_0)q\pm i\eta]^{-(n-2)/n}. \tag{5.28}$$

При $n = 2$ (эллиптическая опорная точка) особенность $\sigma_\pm$ — типа $x\ln x$. Из приведенных выражений видно, что особенность является более сильной, если площадь в точке, где смещение за циклотронный период экстремально, не равна нулю. Впервые на это обратили внимание Мак-Гродди, Стэнфорд и Стерн [68] и Оверхаузер и Родригес [69], которые изучали поведение геликонного спектра вблизи границы допплер-сдвинутого циклотронного резонанса в модели электронного спектра металла, находящегося в состоянии с периодическим распределением спиновой плотности [74]. Вследствие усиления особенности проводимости спектр геликона вблизи порога изменялся: геликон переходил в допплерон.

Допплерон как слабо затухающее возбуждение существует в том случае, если его дисперсионная кривая достаточно удалена от границы бесстолкновительного затухания. Это означает, что допплероны хорошо определены в металлах, где геометрия ферми-поверхности приводит к достаточно сильной особенности нелокальной проводимости. Действительно, если максимальная скорость (смещение за циклотронный период) достигается в эллиптической опорной точке, то у геликона или альвеновских волн на пороге затухания спектр обрывается. Если особенность проводимости логарифмическая, то, как следует из дисперсионного уравнения, удаление дисперсионной кривой экспоненциально мало́. Наибольшее расстояние до порога дает степенна́я особенность нелокальной проводимости.

2) В последние годы в работах Константинова, Скобова, Фишера и других были исследованы допплероны в металлах, имеющих сложную поверхность Ферми. Для расчета тензора проводимости использовались достаточно простые модели поверхности Ферми, которые, с одной стороны, позволяли найти аналитические выражения для $\sigma_\pm$, а с другой,— качественно правильно описывали ферми-поверхность, известную из других экспериментальных и теоретических работ. Обзор работ по допплеронам дан Скобовым в приложении к монографии [9]. В настоящем обзоре, не обращаясь к деталям эксперимента и теории, мы обсудим лишь некоторые характерные черты допплеронных решений. Нас будет интересовать в основном происхождение допплеронов и их связь с геометрией поверхности Ферми, а также место допплеронов в единой системе электромагнитных возбуждений.

Допплерон в кадмии [75, 76] формируется электронами из третьей зоны Бриллюэна, поверхность Ферми которых напоминает чечевицу [77], причем резонанс при $\mathbf{q} \parallel \mathbf{H} \parallel C_6$ связан с электронами опорной точки. Кроме того, в кадмии существует дырочный допплерон, обусловленный резонансом на дырочных орбитах, расположенных вблизи максимального (центрального) сечения монстра во второй зоне Бриллюэна. Функции $S_e(p_z)$, $S_h(p_z)$ и их производные, найденные в работе [78], были аппроксимированы в [75] простыми аналитическими выражениями, приводящими к логарифмической особенности проводимости электронов и дырок. Параметры спектра допплеронов, экспериментально обнаруженных в работе [75], хорошо согласуются с предложенной моделью.

В меди спектр допплерона весьма своеобразен [79]. Это объясняется тем, что с движением по p_z при **H**, направленном, например, вдоль бинарной оси, мы встречаем сначала дырочные, затем электронные орбиты и приходим к открытым траекториям. Отклонив **H** от бинарной оси на угол, больший 2°, можно избавиться от открытых траекторий. Дырочные участки поверхности Ферми не приводят к особенности нелокальной проводимости, поскольку в модели поверхности Ферми, принятой в работе [79], $u(p_z) \sim \partial S/\partial p_z$ монотонно изменяется от $-\infty$ до $+\infty$. Это означает, что бесстолкновительное затухание существует при всех q и пороги отсутствуют.

Переход от дырочных орбит к электронным сопровождается при некотором значении p_z конечным скачком площади $S(p_z)$ и обращением производной $\partial S/\partial p_z$ в $+\infty$. Сингулярность связана с тем, что граничная орбита проходит через седловую точку. Аналогично ведут себя эти функции при переходе от замкнутых электронных орбит к открытым. Следовательно, при некотором значении p_z внутри интервала, отвечающего электронным орбитам, производная $\partial S/\partial p_z$ минимальна, что приводит к бесстолкновительному затуханию при малых q вплоть до некоторого $q_{max} = 2\pi eH/c \left(\frac{\partial S}{\partial p_z}\right)_{min}$ и его отсутствию — при $q > q_{max}$. На пороге электронная проводимость в модели, использованной в работе [79], имеет корневую особенность и поэтому здесь существует допплерон. При **H**, направленном строго вдоль бинарной оси, из-за открытых орбит геликон сильно затухает [80]. Поэтому спектр допплерона в меди [79] в длинноволновой области не переходит в спектр геликона. Если магнитное поле направлено так, что открытые траектории отсутствуют, то существуют оба возбуждения. Графики функций $S(p_z)$ и $\partial S/\partial p_z$ для других направлений, построенные Пауэллом и приведенные в работе [81], позволяют найти пороги и проанализировать возможность существования допплеронов, распространяющихся вдоль иных кристаллографических направлений.

Все рассматривавшиеся до сих пор модели обладали аксиальной симметрией, что в ряде случаев не соответствовало реальной симметрии поверхности Ферми. Недостаток этих моделей в том, что они учитывают не все разрешенные правилами отбора электронные переходы (см. (5.19), (5.20)) и, следовательно, не описывают электромагнитные возбуждения, связанные с дополнительными резонансами. В работе [82], посвященной изучению кратных допплеронов в алюминии, была использована модель поверхности Ферми с осью симметрии четвертого порядка, качественно правильно передающая результат численного расчета функций $S(p_z)$, $\partial S/\partial p_z$ и $\Omega(p_z)$, найденных Ларсеном и Грейзеном [67]. Поверхность Ферми в алюминии, как известно, состоит из большой дырочной поверхности во второй зоне Бриллюэна и малой электронной поверхности — в третьей зоне. Поскольку концентрация электронов мала (менее 3% от концентрации дырок), их вклад в проводимость в [82] не учитывался. В соответствии с правилами отбора (5.19) в направлении [100] в алюминии должны распространяться правополяризованные допплероны, связанные с резонансами $\Delta n = 1, 5, 9$, и левополяризованные допплероны, сформированные переходами с $\Delta n = 3{,}7$. Теория кратных допплеронов в алюминии, развитая в работе [82], качественно правильно описывает результаты эксперимента. Кроме допплеронов, в алюминии существует, разумеется, и геликон, детально изученный Ларсеном и Грейзеном [67]. Области бесстолкновительного затухания и схематический вид дисперсионных кривых геликона, допплеронов и анизотронов в алюминии показаны на рис. 9. Пороги затухания построены по формулам (5.21) и (5.22) с использованием функций $\Omega(p_z)$ и $\widetilde{v}_z(p_z)$ из работы [67]. Допплероны в индии, где поверхность Ферми подобна поверхности Ферми алюминия, обнаружены в работе [83]. Отметим также, что в работах Константинова и Скобова [84, 85] было предсказано существование допплеронных решений уравнений Максвелла при $\mathbf{q}$, почти перпендикулярном к $\mathbf{H}$, в щелочных металлах, где поверхность Ферми практически изотропна. Появление решения обусловлено усилением особенности проводимости в такой геометрии.

Особенности диэлектрической проницаемости не только формируют спектр ω собственных электромагнитных волн в металле, но также тесно

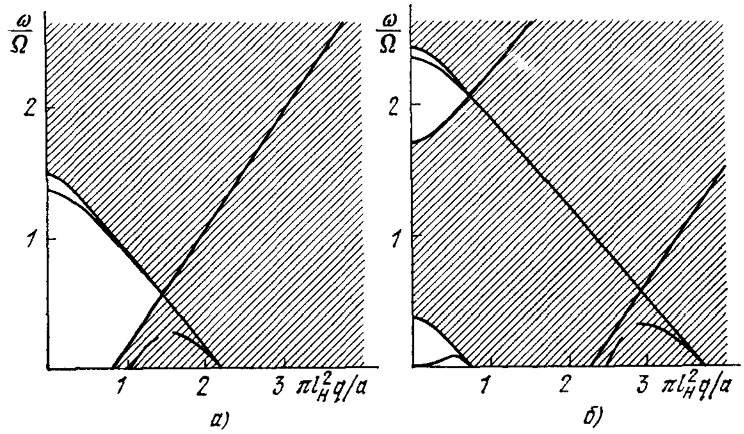

Рис. 9 Области бесстолкновительного затухания и спектр левополяризованных (*а*) и правополяризованных (*б*) волн в алюминии при $\mathbf{q} \parallel \mathbf{H} \parallel C_4$.

Границы затухания на рис. 9, *а* соответствуют резонансам с $\Delta n = 3$ и $\Delta n = -1$, а на рис 9, *б* — с $\Delta n = 1{,}5$ и $\Delta n = -3$. Схематически изображены дисперсионные кривые геликона, допплеронов и анизотронов.

связаны с эффектами траекторного проникновения электромагнитного поля в металл [45]. Связь собственных мод, спектр которых лежит вблизи резонансов, с эффектами аномального проникновения наиболее ясно проявляется на примере допплерона. Так как допплерон расположен вблизи границы доплер-сдвинутого циклотронного резонанса, длина волны допплерона незначительно отличается от максимального смещения электронов вдоль поля за циклотронный период, которое определяет период радиочастотного размерного эффекта Гантмахера — Канера. Поэтому осцилляции поверхностного импеданса, связанные с резонансным возбуждением допплерона и с размерным эффектом, имеют близкий период по магнитному полю. Величина тех и других осцилляций импеданса зависит от геометрии поверхности Ферми. Эта зависимость детально обсуждалась в уже упомянутых работах [75, 79, 82-85]. Пороги бесстолкновительного затухания, показанные ниже на рис. 12, позволяют найти период размерного эффекта для различных Δn на конечной частоте.

Допплероны существуют в области, где временна́я дисперсия несущественна. Поэтому в теоретических работах, где изучались допплероны, предполагалось, что $\omega \ll \Omega$ и эксперимент проводился в радиодиапазоне. Электронные переходы, которые отсутствовали в модели с изотропным спектром и разрешены правилами отбора (5.19) и (5.20), обуславливают существование в металлах других электромагнитных волн. Чтобы продемонстрировать это, рассмотрим область, где существенна временная и отсутствует пространственная дисперсия проводимости. Положим в (5.16)

$\omega \neq 0$, а $q = 0$. Тогда

$$\sigma_\pm(\omega, H) = \sigma_{xx} \pm i\sigma_{yx} = \frac{ie^2}{4\pi^2\hbar^3} \int dp_z \, |m_c| \sum_{\Delta n=-\infty}^{+\infty} \frac{V^\pm_{\Delta n}(V^+_{\Delta n} + V^-_{\Delta n})}{\omega - \Delta n\Omega(p_z) + i\nu}. \quad (5.29)$$

В изотропной модели при $\mathbf{q} \parallel \mathbf{H}$ и $q \to 0$ проводимость $\sigma_\pm$ как функция частоты имеет единственную особенность вида $(\omega - \Omega)^{-1}$. В анизотропной модели знаменатель (5.29) обращается в нуль при $\nu \to 0$ на частотах $\omega - \Delta n\Omega(p_z) = 0$. Интегрирование по p_z ослабляет эту особенность. Нас будет интересовать область $\Delta n\Omega_{\min} < \omega < \Delta n\Omega_{\max}$, в которой бесстолкновительное затухание равно нулю и могут существовать незатухающие циркулярно поляризованные возбуждения. Очевидно, что интервалы частот, где затухание отсутствует, существуют только при достаточно малых Δn. Поведение функции $\sigma_\pm(\omega)$ при $\omega \to \Delta n\Omega_{\text{extr}}$ можно найти аналогично (5.25) и (5.28). Если в экстремальной точке p_0 функция $\Omega(p_z)$ имеет вид $\Omega(p_z) = \Omega_{\text{extr}} + \alpha(p - p_0)^{2n}$ и числитель (5.29) не обращается в нуль, то проводимость имеет особенность вида

$$\sigma_\pm(\omega) \sim (\omega - \Delta n\Omega_{\text{extr}})^{-\frac{(2n-1)}{2n}} \quad (5.30)$$

Нетрудно убедиться, что знаки особенностей $\sigma_\pm$ в окнах вблизи $\Delta n\Omega_{\min}$ и $\Delta n\Omega_{\max}$ противоположны. Это и означает, что в интервале $\Delta n\Omega_{\min} < \omega < \Delta n\Omega_{\max}$ существует решение уравнения (4.6). Связанные с анизотропией электронного спектра возбуждения подобного типа естественно назвать анизотронами. Аналогичным образом можно убедиться, что в интервалах частот $\Delta n\Omega_{\min} < \omega < \Delta n\Omega_{\max}$ с Δn из (5.20) должны существовать продольные возбуждения. Как следует из сказанного, существование поперечных и продольных анизотронов связано фактически с тем, что в металлах с анизотропным спектром электроны во внешнем магнитном поле движутся по некруговым циклотронным орбитам. В случае, когда орбита имеет ось симметрии m-го порядка, координата и импульс продольного движения электрона содержат гармоники циклотронной частоты, кратные m, поскольку продольное движение промодулировано циклотронным вращением. Резонансное взаимодействие с продольной волной возникает при условии $\omega = ms\Omega_{\text{extr}}$. Из-за модуляции вращения электрона возникает резонансное взаимодействие с поперечными волнами на частотах $\omega = (ms \pm 1)\,\Omega_{\text{extr}}$. Эти резонансы и формируют продольные и поперечные анизотроны.

Анизотроны в алюминии изучались в работе [86]. На ЭВМ был рассчитан спектр правополяризованных волн, спектр которых находится вблизи дырочного резонанса $\Delta n = 5$ и левополяризованных волн — вблизи дырочного резонанса $\Delta n = 3$. Расчет показал, что отход начальной частоты волны от порога затухания составляет несколько процентов от циклотронной частоты. Спектр анизотронов схематически изображен на рис. 9.

До сих пор мы рассматривали резонансы на электронах, принадлежащих одному участку поверхности Ферми. Резонансы на различных участках многосвязной поверхности Ферми могут привести к существованию дополнительных поперечных и продольных возбуждений. Как уже отмечалось в п. 1 гл. 5, такие волны теоретически и экспериментально изучались в висмуте [61, 63].

3) Рассмотрим электромагнитные возбуждения в металлах с открытыми поверхностями Ферми при наличии открытых орбит. Сначала проанализируем условие резонансного поглощения волны в металлах с открытыми поверхностями Ферми в классически сильных магнитных полях. Инфинитному движению электронов в импульсном пространстве в на-

правлении оси p_x в координатном пространстве соответствует движение в направлении оси y со средней скоростью $\tilde{v}_y$ (p_z, p_y) (рис. 10). Условие резонансного поглощения поэтому содержит дополнительное слагаемое, пропорциональное $\tilde{v}_y$:

$$\omega = \Delta n\Omega \pm \tilde{v}_z \cos\vartheta q \pm \tilde{v}_y \sin\vartheta \sin\varphi q. \tag{5.31}$$

Обозначения в (5.31) ясны из рис. 10. Циклотронная частота и компоненты средней скорости $\tilde{v}_y$ и $\tilde{v}_z$ зависят от p_z и p_y. Особенность рассматриваемой ситуации состоит также в том, что циклотронная частота при некотором значении p_z, соответствующем траектории с самопересечением, по логарифмическому закону обращается в нуль [6]. Типичная зависимость Ω от p_z изображена на рис. 11.

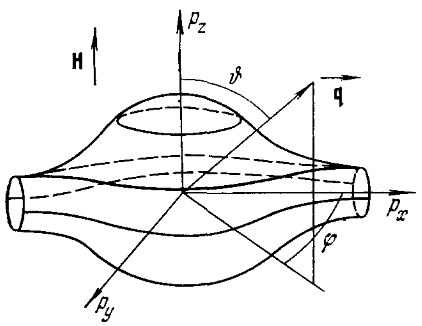

Рис. 10. Модель поверхности Ферми типа гофрированного цилиндра. Показаны закрытые, открытые орбиты и траектория с самопересечением.

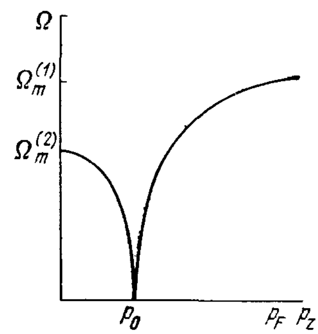

Рис. 11. Зависимость циклотронной частоты от p_z в магнитном поле, перпендикулярном к оси гофрированного цилиндра. p_0 — радиус шейки цилиндра.

Пусть волновой вектор перпендикулярен к направлению магнитного поля. Для закрытых орбит скорость $\tilde{v}_y$ равна нулю. Поскольку минимальная циклотронная частота равна нулю, бесстолкновительное затухание на электронах закрытых орбит существует во всей плоскости (ω, q). Пороги в затухании для переходов с фиксированным Δn определяются условием $\omega = \Delta n\Omega_{\max}^{(1)}$. Области затухания на электронах, принадлежащих открытым орбитам, по той же причине также заполняют всю плоскость (ω, q). Однако пороги здесь иные:

$$\omega = \Delta n\Omega_{\max}^{(2)} \pm \tilde{v}_{y\,\max} \sin\varphi q, \tag{5.32}$$

где $\tilde{v}_{y\,\max} = \hbar\Omega_{\max}^{(2)}/p_k \sim v_F$, $p_k = \hbar a_x/2l_H^2$, a_x — период решетки в направлении оси x. Условие (5.32) указывает на существование резонансных эффектов при распространении электромагнитных волн и звука.

К настоящему времени опубликовано сравнительно немного работ, в которых изучались электромагнитные волны в металлах с открытыми поверхностями Ферми при наличии открытых орбит. Как показано Буксбаумом и Вольфом [80], геликон и альвеновские волны в таких металлах распространяться не могут. Объясняется это тем, что в направлении y, перпендикулярном к направлению открытости и направлению магнитного поля, средняя скорость электронов не равна нулю и проводимость σ_{yy} в нулевом порядке по H^{-1} конечна и не зависит от магнитного поля. Появление большого диссипативного тока в направлении, перпендикулярном к вектору $\mathbf{q} \parallel \mathbf{H}$, ведет к сильному затуханию этих возбуждений.

Условие резонансного поглощения (5.32) указывает нам области в плоскости (ω, q), где возможно распространение электромагнитных возбуждений. Слабозатухающие электромагнитные волны в металлах при наличии открытых орбит изучались в работах [87, 88]. В первой из них в качестве модели открытой поверхности Ферми использовалась модель типа гофрированного цилиндра и были найдены решения дисперсионного уравнения для обыкновенной волны. Оказалось, что возбуждения, распространяющиеся перпендикулярно к **H** и направлению открытости, имеют спектр, локализованный вблизи порогов (5.32). В работе [88] в качестве модели была принята модель гофрированного цилиндра, состоящего из слабо пересекающихся сфер. Было показано, что в окрестности порога допплер-сдвинутого циклотронного резонанса (5.32), обусловленного электронами на открытой части поверхности Ферми, также могут существовать слабозатухающие электромагнитные возбуждения, подобные допплеронам. В отличие от работы [87] здесь решалось дисперсионное уравнение для возбуждений с необыкновенной поляризацией и было установлено, что допплерон, локализованный вблизи порога с $\Delta n = 1$, существует только при определенных требованиях к электронам на замкнутых участках поверхности Ферми.

4) Для исследования спектра электромагнитных возбуждений и различных резонансных эффектов в квантующих магнитных полях в металлах с анизотропной поверхностью Ферми полезно, как и ранее, построить области бесстолкновительного затухания и определить особенности проводимости. Ниже мы покажем, что при достаточно сложной поверхности Ферми магнитное квантование может приводить к появлению новых порогов и усиливать особенности проводимости. Будем считать, что энергия блоховского электрона в магнитном поле известна и является функцией только двух квантовых чисел, n и p_z. При произвольном законе дисперсии $\varepsilon_n(p_z)$, как и в простейшей модели спектра, должны существовать пороги бесстолкновительного затухания трех типов. Одни из этих порогов соответствуют процессам, в которых электроны из состояний с фермиевским импульсом p_n, поглощая квант поля, переходят в некоторое состояние над уровнем Ферми; другой отвечает переходам из состояния с импульсом $-p_n$ в состояния с импульсом, большем чем p_n, а третий обусловлен переходами из состояний под уровнем Ферми в состояние с p_n.

В металлах с анизотропным спектром могут существовать дополнительные пороги бесстолкновительного затухания. Покажем это. Рассмотрим для простоты электронные переходы без изменения квантового числа n. Соответствующий вклад в проводимость пропорционален

$$\int \frac{f_0[\varepsilon_n(p_z+\hbar q_z)]-f_0[\varepsilon_n(p_z)]}{\varepsilon_n(p_z+\hbar q_z)-\varepsilon_n(p_z)-\hbar\omega-i\delta}\,dp_z. \tag{5.33}$$

Пусть при фиксированных ω и q знаменатель в (5.33) обращается в нуль в некоторой точке p_z'. Разложим разность энергий в (5.33) вблизи этой точки в ряд по $\Delta p_z = p_z - p_z'$. Если p_z' совпадает с границами области интегрирования в (5.33) и разность первых производных в разложении знаменателя не равна нулю, то действительная часть (5.33) имеет логарифмическую особенность. Положение логарифмических особенностей согласно (5.33) определяется условиями:

$$\hbar\omega = \varepsilon_n(p_n \pm \hbar q_z) - \varepsilon_n(p_n), \quad \hbar\omega = \varepsilon_n(p_n) - \tilde{\varepsilon}_n(p_n - \hbar q_z). \tag{5.34}$$

Это — границы областей бесстолкновительного затухания, соответствующие трем указанным выше процессам поглощения.

Если точка p_z' находится внутри области интегрирования и разность первых производных в ней равна нулю, то проводимость имеет корневую особенность. Положение этого порога можно найти из уравнений

$$\varepsilon_n(p_z' + \hbar q_z) - \varepsilon_n(p_z') = \hbar\omega, \qquad \frac{\partial\varepsilon_n(p_z' + \hbar q_z)}{\partial p_z} = \frac{\partial\varepsilon_n(p_z')}{\partial p_z} \tag{5.35}$$

после исключения p_z'. Порогу (5.35) соответствуют электронные переходы из состояний под уровнем Ферми в состояния, лежащие над уровнем Ферми так, что в начальном и конечном состояниях скорости электронов равны.

Приведенные выше соображения удобно проиллюстрировать на примере электронного спектра типа гофрированного цилиндра (5.26) в магнитном поле, направленном по оси цилиндра

$$\varepsilon_n(p_z) = \hbar\Omega\left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{\varepsilon_0}{2}\left(1 - \cos\frac{p_z a}{\hbar}\right). \tag{5.36}$$

С помощью выражений (5.33) — (5.35) определим положение логарифмических и корневых особенностей продольной проводимости. Если высота трубки Ландау меньше половины зоны Бриллюэна, т. е. $k_n < \pi/2a$, то,

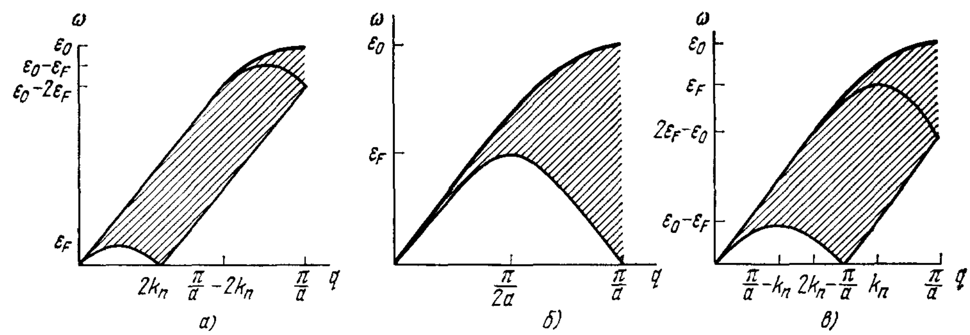

Рис. 12. Область затухания Ландау в модели электронного спектра (5.36).

Показаны области затухания, соответствующие электронным переходам на слабо заполненном уровне Ландау — $2k_n < \pi/a$ (рис. 12, а), сильно заполненном уровне — $2k_n > \pi/a$ (рис. 15, в) и уровне, заполненном наполовину, — $2k_n = \pi/a$ (рис. 15. б). На границах затухания, обозначенных тонкой линией, проводимость имеет логарифмическую особенность. На границах, обозначенных жирной линией, особенность корневая.

как следует из (5.34), затухание Ландау не равно нулю в интервале $\omega_- \leqslant \omega \leqslant \omega_+$, где пороговые значения частоты, на которой проводимость имеет логарифмическую особенность, равны

$$\omega_\pm = \omega_0(q)\left|\sin\left(k_n \pm \frac{1}{2}q\right)a\right|. \tag{5.37}$$

При $q > (\pi/a) - 2k_n$, когда становятся возможными процессы (5.35), появляется новая область затухания Ландау $\omega_+ < \omega < \omega_0$ и новый корневой порог (рис. 12, а)

$$\omega_0(q) = \frac{\varepsilon_0}{\hbar}\left|\sin\frac{qa}{2}\right|. \tag{5.38}$$

В том случае, когда высота трубки Ландау больше половины зоны ($k_n > \pi/2a$), границы затухания Ландау, где проводимость имеет логарифмическую особенность, определяются выражениями

$$\omega_\pm = \omega_0(q)\left|\sin\left(k_n \mp \frac{1}{2}q\right)a\right|. \tag{5.39}$$

В точке $q = 2k_n - (\pi/a)$, как и в предыдущем случае, отщепляется корневой порог (5.38) (см. рис. 12, *в*). Если высота трубки Ландау равна половине зоны, то корневой порог начинается при $q = 0$ (см. рис. 12, *б*). Мы не станем приводить здесь аналитические выражения для проводимости в модели (5.36). Они вполне аналогичны выражениям для проводимости квазиодномерных систем типа TCNQ, которые получены в недавно опубликованной работе [89].

Основной результат приведенного примера состоит в том, что в области малых скоростей бозевских возбуждений v, $q < | \pi/a - 2k_n |$ поведение мнимой и действительной частей проводимости в металлах с достаточно сложным спектром такое, как в модели $\varepsilon = p^2/2m$: особенности недиссипативной части проводимости логарифмические, а скачки диссипативной части — конечные. Поэтому характер гигантских квантовых осцилляций поглощения звука или геликона в металлах с анизотропной поверхностью Ферми прежний. Минимальные скорости в модели (5.36) отвечают электронам на слабо и сильно заполненных уровнях, т. е. электронам на экстремальных сечениях поверхности Ферми. Однако при распространении возбуждений со скоростями, близкими к максимальной скорости электрона, уже в области малых q резонансы могут усиливаться. Эти резонансы связаны с электронами на уровнях, заполненных наполовину. Усиление особенности проводимости может отразиться, например, на спектре быстрой магнитозвуковой волны в наклонном поле, когда $v_\alpha \sim v_F \cos \vartheta$.

Вообще говоря, энергия электрона в квантующем магнитном поле и периодическом поле решетки зависит от трех квантовых чисел. Это справедливо как в случае внутризонного, так и межзонного (см., например, [90]) магнитного пробоя. Если замкнутая орбита подходит близко к границам зоны Бриллюэна, то становится возможным туннельный переход с одной орбиты на другую. Когда вероятность перехода мала, энергия зависит только от n и p_z. Если вероятность перехода не мала, то необходимо учитывать зависимость энергии от третьего квантового числа. Это значит, что определенным значениям n и p_z отвечает некоторый интервал энергий — уровень Ландау превращается в магнитную зону. Для закрытых орбит уширение уровней Ландау экспоненциально мало́ [91]. Если в металле есть открытые орбиты, то экспоненциально мало́ расстояние между магнитными зонами. В переходной области, соответствующей траекториям, близким к траектории с самопересечением, ширина магнитной зоны порядка расстояния между уровнями Ландау.

Из сказанного ясен характер резонансов на электронах, отвечающих трем перечисленным группам орбит. Резонансам на закрытых траекториях с $\Delta n = 0$ и при $q \to 0$ соответствуют узкие области затухания и широкие участки прозрачности. Траекториям, лежащим вблизи траектории с самопересечением, соответствуют более широкие максимумы поглощения и более узкие окна. Открытые орбиты не приводят к особенностям в тензоре проводимости. Изменяя угол между волновым вектором электромагнитной волны или звука [92,93] и направлением магнитного поля, в металлах с открытыми поверхностями Ферми можно последовательно наблюдать различные типы резонансов.

6. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В настоящем обзоре мы попытались с единой точки зрения рассмотреть спектр электромагнитных возбуждений в проводниках, находящихся в сильном магнитном поле. Нас интересовало главным образом происхождение собственных электромагнитных мод и их связь со спектром фермиевских возбуждений. Проведенный анализ законов сохранения позволил определить положение различных ветвей спектра электромагнитных возбуждений в плоскости (ω, q) и дал естественную классификацию ряда резонансных эффектов при распространении электромагнитных волн и других бозевских возбуждений.

Несмотря на то, что в последние годы поток работ, в которых изучались электромагнитные возбуждения в металлах и полуметаллах, не ослабевал, ряд волн экспериментально еще не наблюдался. Это относится прежде всего к квантовым электромагнитным волнам. Поэтому в обзоре была предпринята попытка привлечь внимание экспериментаторов к еще не наблюдавшимся электромагнитным возбуждениям твердотельной плазмы.

Современное состояние теории позволяет проводить расчет спектра электромагнитных волн в конкретных металлах с использованием реальных моделей поверхности Ферми. В ближайшие годы, по-видимому, будут подробно проанализированы электромагнитные возбуждения в тех металлах, где достаточно полно исследован электронный спектр.

В металлах с простым законом дисперсии электронов весьма интересным, с теоретической точки зрения, является детальное изучение резонансных явлений в предпороговой области. До настоящего времени пороговые эффекты иследовались в рамках приближения самосогласованного поля. Исключением является работа [94], где при вычислении вершинной части и поляризационного оператора в предпороговой области в квантующем магнитном поле были просуммированы главные логарифмические расходящиеся диаграммы в ряду теории возмущений.

В обзоре обсуждались только линейные по амплитуде волны резонансные эффекты. С увеличением амплитуды поля картина пороговых явлений может существенно измениться. Исследованию нелинейных резонансных эффектов в сильных магнитных полях посвящен ряд теоретических [95-99] и экспериментальных [100-102] работ. Следует отметить, что подход, использованный в настоящем обзоре для анализа линейных резонансных эффектов, может быть полезен и для изучения нелинейных резонансных явлений.

Авторы признательны Э. А. Канеру и М. И. Каганову за полезные обсуждения

ПРИЛОЖЕНИЕ

Здесь, следуя работе [25], мы приведем вывод тензора проводимости электронного газа в квантующем магнитном поле. Неравновесную матрицу плотности будем искать в виде

$$\hat{\rho}=\hat{\rho}_0(\hat{\mathscr{H}},\ \mu)+\hat{\rho}_1, \tag{П.1}$$

где

$$\hat{\rho}_0(\hat{\mathscr{H}},\ \mu)=\rho_0(\hat{\mathscr{H}}_0,\ \mu_0)+\hat{\rho}_2. \tag{П.2}$$

Матрицы $\hat{\rho}_1$ и $\hat{\rho}_2$ линейны по амплитудам потенциалов $\mathbf{A}$ и φ, μ_0 — равновесное значение химпотенциала, $\hat{\rho}_0(\hat{\mathscr{H}}_0,\ \mu_0)$ — термодинамически равновесная матрица плотности. Нетрудно убедиться, что в представлении оператора $\hat{\mathscr{H}}_0$ (3.7) матричные элементы оператора $\hat{\rho}_2$ равны

$$\langle\nu\,|\,\hat{\rho}_2\,|\,\nu'\rangle=\frac{f_0(\varepsilon_{\nu'})-f_0(\varepsilon_\nu)}{\varepsilon_{\nu'}-\varepsilon_\nu}\langle\nu\,|\,\hat{\mathscr{H}}_1-\mu_1\,|\,\nu'\rangle; \tag{П.3}$$

здесь

$$\mu_1=\mu(\mathbf{r},\ t)-\mu_0 \tag{П.4}$$

— линейная по внешнему полю добавка к химпотенциалу, $f_0(\varepsilon_\nu)$ — функция распределения. Подставляя (П.1) в уравнение (3.3) и учитывая (3.10), (3.11) и (П.2) — (П.4), получим

$$\langle\nu|\hat\rho|\nu'\rangle = f_0(\varepsilon_\nu)\,\delta_{\nu\nu'} + \Lambda_{\nu'\nu}\langle\nu|\mathscr{H}_1-\mu_1|\nu'\rangle + \Lambda^{(1)}_{\nu'\nu}\langle\nu|\mu_1|\nu'\rangle, \tag{П.5}$$

где

$$\Lambda_{\nu'\nu} = \frac{i\omega\tau}{1+i\omega\tau}\Lambda^{(1)}_{\nu'\nu} + \frac{1}{1+i\omega\tau}\Lambda^{(2)}_{\nu'\nu}. \tag{П.6}$$

Матрицы $\Lambda^{(1)}_{\nu'\nu}$ и $\Lambda^{(2)}_{\nu'\nu}$ равны

$$\Lambda^{(1)}_{\nu'\nu} = \frac{f_0(\varepsilon_{\nu'}) - f_0(\varepsilon_\nu)}{\varepsilon_{\nu'} - \varepsilon_\nu - \hbar\omega + (i\hbar/\tau)}, \tag{П.7}$$

$$\Lambda^{(2)}_{\nu'\nu} = \frac{f_0(\varepsilon_{\nu'}) - f_0(\varepsilon_\nu)}{\varepsilon_{\nu'} - \varepsilon_\nu}. \tag{П.8}$$

Для вычисления тока (3.4) необходимо вычислить шпур. После ряда преобразований и перехода в (3.4) к фурье-представлению по пространственной и временной переменной получим

$$j_i(\omega,\mathbf{q}) = \frac{\omega_p^2}{4\pi c}\left[-A_i(\omega,\mathbf{q}) - I_{ik}A_k(\omega,\mathbf{q}) + K_i^{(1)}\varphi(\omega,\mathbf{q}) + \frac{1}{e}\left(K_i - K_i^{(1)}\right)\mu_1(\omega,\mathbf{q})\right]; \tag{П.9}$$

здесь $\omega_p^2 = 4\pi n_0 e^2/m$ — квадрат плазменной частоты, n_0 — концентрация, N — число частиц,

$$I_{ik} = \frac{2m}{N}\sum_{\nu'\nu}\Lambda_{\nu'\nu}\langle\nu'|V_i(\mathbf{q})|\nu\rangle\langle\nu'|V_k(\mathbf{q})|\nu\rangle^*, \tag{П.10}$$

$$\mathbf{V}(\mathbf{q}) = \frac{1}{2}\exp(i\mathbf{qr})\,\hat{\mathbf{v}}_0 + \frac{1}{2}\hat{\mathbf{v}}_0\exp(i\mathbf{qr}), \tag{П.11}$$

$$\mathbf{K} = \frac{2mc}{N}\sum_{\nu'\nu}\Lambda_{\nu'\nu}\langle\nu'|\mathbf{V}(\mathbf{q})|\nu\rangle\langle\nu'|\exp(i\mathbf{qr})|\nu^*\rangle, \tag{П.12}$$

$$K_i^{(\alpha)} = \frac{2mc}{N}\sum_{\nu'\nu}\Lambda^{(\alpha)}_{\nu'\nu}\langle\nu'|V_i(\mathbf{q})|\nu\rangle\langle\nu'|\exp(i\mathbf{qr})|\nu\rangle^*. \tag{П.13}$$

Матричные элементы, содержащиеся в этих выражениях, имеют следующий вид:

$$\langle n', k_y+q_y, k_z+q_z|\exp(i\mathbf{qr})|n, k_y, k_z\rangle = f_{n'n}(q_y), \tag{П.14}$$

$$\langle n', k_y+q_y, k_z+q_z|V_x(\mathbf{q})|n, k_y, k_z\rangle = i\Omega\frac{\partial f_{n'n}(q_y)}{\partial q_y}, \tag{П.15}$$

$$\langle n', k_y+q_y, k_z+q_z|V_y(\mathbf{q})|n, k_y, k_z\rangle = \frac{\Omega}{q_y}(n'-n)\,f_{n'n}(q_y), \tag{П.16}$$

$$\langle n', k_y+q_y, k_z+q_z|V_z(\mathbf{q})|n, k_y, k_z\rangle = \frac{\hbar}{m}\left(k_z+\frac{q_z}{2}\right)f_{n'n}(q_y). \tag{П.17}$$

Функция $f_{n'n}(q_y)$ равна

$$f_{n'n}(q_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\,u_{n'}(x + l_H^2 q_y)\,u_n(x). \tag{П.18}$$

Если $n' \geqslant n$, то

$$f_{n'n} = \sqrt{\frac{n!}{n'!}}\,\xi^{\frac{n'-n}{2}}\exp\left(-\frac{\xi}{2}\right)L_n^{n'-n}(\xi), \tag{П.19}$$

где $\xi = l_H^2 q_y^2/2$ и L_n^α — полином Лагерра. Если же $n' < n$, то следует пользоваться соотношением

$$f_{n'n} = (-1)^{n-n'}f_{nn'}. \tag{П.20}$$

Вернемся к выражению (П.9) и исключим в нем μ_1. Воспользовавшись (3.12), имеем

$$\varphi(\omega, \mathbf{q}) + \frac{1}{e}\mu_1(\omega, \mathbf{q}) = \frac{c\tau\,(K_i^{(1)\prime} - K_i^{(2)\prime})\,E_i}{L_1 + i\omega\tau L_2}, \tag{П.21}$$

$$K_i'(\omega - i\tau^{-1}, \mathbf{q}) = K_i^*(\omega + i\tau^{-1}, \mathbf{q}), \tag{П.22}$$

$$L_\alpha = \frac{2mc^2}{N}\sum_{\nu\nu'} \Lambda_{\nu'\nu}^{(\alpha)} \,|\langle\nu'\,|\exp(i\mathbf{q}\mathbf{r})\;\;\nu\rangle|^2. \tag{П.23}$$

После очевидных преобразований, подставив $\mu_1(\omega, q)$ из (П.21) в (П.9), запишем плотность тока в следующем виде:

$$j_i = (\sigma_{ik} + d_{ik})\,E_k, \tag{П.24}$$

$$\sigma_{ik} = \frac{\omega_p^2}{4\pi i\omega}(\delta_{ik} + I_{ik}), \tag{П.25}$$

$$d_{ik} = -\frac{\omega_p^2\tau}{4\pi(1 + i\omega\tau)}\cdot\frac{(K^{(1)} - K^{(2)})_i\,(K'^{(1)} - K'^{(2)})_k}{L_1 + i\omega\tau L_2}. \tag{П.26}$$

Слагаемое $d_{ik}E_k$ в (П.24) есть плотность диффузионного тока, исчезающего при $\tau \to \infty$, σ_{ik} — тензор проводимости электронного газа в квантующем магнитном поле. Приведем выражения для ненулевых компонент тензора проводимости и тензора диффузии при конечных $\omega\tau$ в симметричной геометрии $\mathbf{q} \parallel \mathbf{H}$:

$$\sigma_\pm = \sigma_{xx} \mp i\sigma_{xy} = \frac{\omega_p^2}{4\pi i\omega}\left\{1 + \frac{\hbar\Omega}{N(1 + i\omega\tau)}\times\right.$$
$$\times \sum_{n,k_y,k_z}(n + 1/2 \pm 1/2)\,[f_0(\varepsilon_{n\pm1,\,k_z+q_z}) - f_0(\varepsilon_{n,\,k_z})]\times$$
$$\left.\times\left[\frac{i\omega\tau}{\varepsilon_n(k_z + q_z) - \varepsilon_n(k_z) - \hbar(\omega \mp \Omega - i\tau^{-1})} + \frac{1}{\varepsilon_n(k_z + q_z) - \varepsilon_n(k_z) \pm \hbar\Omega}\right]\right\}, \tag{П.27}$$

$$\sigma_{zz} = \frac{\omega_p^2}{4\pi i\omega}\left\{1 + \frac{2\hbar^2}{Nm(1 + i\omega\tau)}\sum_{n,k_y,k_z}\left(k_z + \frac{q_z}{2}\right)^2[f_0(\varepsilon_{n,\,k_z+q_z}) - f_0(\varepsilon_{n,\,k_z})]\times\right.$$
$$\left.\times\left[\frac{i\omega\tau}{\varepsilon_n(k_z + q_z) - \varepsilon_n(k_z) - \hbar\omega - i\hbar\tau^{-1}} + \frac{1}{\varepsilon_n(k_z + q_z) - \varepsilon_n(k_z)}\right]\right\}, \tag{П.28}$$

$$d_{zz} = -\frac{i\omega\omega_p^2}{4\pi c^2q^2(\omega\tau)^2}\cdot\frac{L_1^2}{L_1 + i\omega\tau L_2}, \tag{П.29}$$

$$L_1(\bar\omega, q) = \frac{mc^2}{N}\sum_{n,k_y,k_z}\frac{f_0[\varepsilon_n(k_z + q_z)] - f_0[\varepsilon_n(k_z)]}{\varepsilon_n(k_z + q_z) - \varepsilon_n(k_z) - \hbar\bar\omega}; \tag{П.30}$$

здесь $\bar\omega = \omega - i\tau^{-1}$, $L_2 = L_1(0, q)$. Ненулевые компоненты тензоров проводимости и диффузии в другой геометрии — $\mathbf{q} \perp \mathbf{H}$ —, приведены в работе [25]. Там же дано доказательство градиентной инвариантности приведенных выражений.

Горьковский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского
Научно-исследовательский радиофизический институт
(НИРФИ), Горький

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. E. A. Kaner, V. G. Skobov, Adv. Phys. **17**, 605 (1968).
2. Б. Максфилд, УФН **103**, 233 (1971).
3. J. Mertsching, Phys. Stat. Sol. **14**, 3 (1966); **26**, 9 (1968).
4. В. С. Эдельман, УФН **102**, 55, (1970).
5. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, М., Физматгиз, 1960.

6. И. М. Лифшиц, М. Я. Азбель, М. И. Каганов, Электронная теория металлов, М., «Наука», 1971.
7. А. А. Абрикосов, Введение в теорию нормальных металлов, М., «Наука», 1973.
8. А. И. Ахиезер, И. А. Ахиезер, Р. В. Половин, А. Г. Ситенко, К. Н. Степанов, Электродинамика плазмы, М., «Наука», 1974.
9. Ф. Платцман, П. Вольф, Волны и взаимодействия в плазме твердого тела, М., «Мир», 1975.
10. И. А. Малкин, В. И. Манько, ЖЭТФ 55, 1014 (1968).
11. Э. Г. Башканский, А. П. Протогенов, Уч. зап. ГГУ, сер. физ. 3, вып. 126 (1971).
12. В. Г. Скобов, Э. А. Канер, ЖЭТФ 46, 1809 (1964).
13. В. Л. Гуревич, В. Г. Скобов, Ю. А. Фирсов, ЖЭТФ 40, 786 (1961).
14. А. Я. Бланк, Э. А. Канер, ЖЭТФ 50, 1013 (1966).
15. Ю. М. Гальперин, ЖЭТФ 57, 551 (1969).
16. А. П. Протогенов, В. Я. Демиховский, ФТТ 12, 3480 (1970).
17. В. Я. Демиховский, А. П. Протогенов, ЖЭТФ 58, 651 (1970).
18. В. Я. Демиховский, А. П. Протогенов, ФТТ 12, 1963 (1970).
19. В. Я. Демиховский, В. М. Соколов, Изв. АН СССР, сер. физ. 36, 1518 (1972).
20. В. Я. Демиховский, А. П. Протогенов, А. Л. Чернов, ФММ 33, 1129 (1972).
21 П. С. Зырянов, В. И. Окулов, В. П. Силин, Письма ЖЭТФ 8, 489 (1968); 9, 371 (1969).
22. П. С. Зырянов, В. И. Окулов, В. П. Силин, ФММ 28, 588 (1969).
23. П. С. Зырянов, В. И. Окулов, В. П. Силин, ЖЭТФ 58, 1295 (1970).
24. P. S. Zyryanov, V. I. Okulov, Phys. Stat. Sol. 21, 89 (1967).
25. J. Mertsching, Phys. Stat. Sol. 17, 799 (1966).
26. M. P. Greene, H. J. Lee, J. J. Quinn, S. Rodriguez, Phys. Rev. 177, 1019 (1969).
27. В. И. Окулов, ФММ 29, 924 (1970).
28. E. N. Adams, T. D. Holstein, J. Phys. Chem. Sol. 10, 251 (1959).
29. Э. А. Канер, В. Г. Скобов, ЖЭТФ 53, 373 (1967).
30. J. J. Quinn, S. Rodriguez, Phys. Rev. 128, 2487 (1962).
31. П. С. Зырянов, В. П. Калашников, ЖЭТФ 41, 1119 (1961).
32. С. Л. Гинзбург, О. В. Константинов, В. И. Перель, ФТТ 9, 2139 (1967).
33. О. В. Константинов, В. И. Перель, ЖЭТФ 53, 2034 (1967).
34. A. L. McWhorter, M. G. May, IBM J. Res. and Dev. 8, 285 (1964).
35. С. Б. Анохин, А. С. Кондратьев, Уч. зап. ЛГУ, вып. 15, 25 (1968).
36. П. С. Зырянов, ЖЭТФ 40, 1065 (1961).
37. M. J. Stephen, Phys. Rev. 129, 997 (1963).
38. В. Я. Демиховский, А. П. Протогенов, ФТТ 11, 1173 (1969).
39. M. E. Rensink, Phys. Rev. 174, 744 (1968).
40. N. J. Horing, ibid. 186, 434 (1969).
41. О. В. Константинов, В. И. Перель, ЖЭТФ 38, 161 (1960).
42. A. I. Glick, E. Callen, Phys. Rev. 169, 530 (1968).
43. В. Я. Демиховский, А. П. Протогенов, Письма ЖЭТФ 11, 591 (1970).
44. А. П. Протогенов, ЖЭТФ 62, 313 (1972).
45. В. Ф. Гантмахер, Э. А. Канер, УФН 94, 193 (1968).
46. В. Ф. Гантмахер, Э. А. Канер, ЖЭТФ 45, 1430 (1963).
47. А. П. Протогенов, В. Я. Демиховский, Письма ЖЭТФ 14, 518 (1971).
48. В. Г. Веселаго, М. В. Глушков, Л. В. Лынько, ibid. 13, 349.
49. В. Я. Демиховский, А. П. Протогенов, ФТТ 14, 1948 (1972).
50. D. Pines, J. Schriffer, Phys. Rev. 124, 1387 (1961).
51. О. В. Константинов, В. И. Перель, ФТТ 9, 3051 (1967).
52. C. C. Grimes, in: Proc. Symp. on Plasma Effects in Solids, Paris, 1964, p. 87.
53. Э. А. Канер, В. Г. Скобов, О. И. Любимов, ЖЭТФ 58, 730 (1970).
54. В. Г. Скобов, ФТТ 6, 2297 (1964).
55. Э. А. Канер, В. Г. Скобов, ibid., стр. 1104.
56. E A. Kaner, V. G. Skobov, Physics 2, 165 (1966).
57. Л. А. Фальковский, УФН 94, 3 (1968).
58. M. H. Cohen, E. I. Blount, Phil. Mag. 5, 115 (1960).
59. Л. Э. Гуревич, Р. Г. Тарханян, ФТП 3, 1139 (1969).
60. Л. Э. Гуревич, И. П. Ипатова, ЖЭТФ 37, 1324 (1959).
61. А. С. Гаревский, В. Я. Демиховский, ФММ 37, 257 (1974).
62. Э. А. Канер, В. Г. Скобов, ФТП 1, 1367 (1968).

63. В. С. Эдельман, А. С. Гаревский, В. Я. Демиховский, ФТТ **16**, 3739 (1974).
64. R. L. Blewitt, A. T. Sievers, J. Low Temp. Phys. **13**, 617 (1973).
65. G. E. Smith, L. C. Hebel, S. F. Buchsbaum, Phys. Rev. **129**, 154 (1963).
66. E. A. Kaner, V. G. Skobov, Phys. Lett. **A25**, 105 (1967).
67. P. K. Larsen, F. C. Greisen, Phys. Stat. Sol. **45**, 363 (1971).
68. J. C. McGroddy, J. R. Stanford, E. A. Stern, Phys. Rev. **141**, 437 (1966).
69. A. W. Overhauser, S. Rodriguez, ibid., p. 429.
70. Л. М. Фишер, В. В. Лаврова, В. А. Юдин, О. В. Константинов, В. Г. Скобов, ЖЭТФ **60**, 759 (1971).
71. D. S. Falk, B. Gerson, J. F. Carolan, Phys. Rev. **B1**, 407 (1970).
72. R. G. Chambers, Phil. Mag. **1**, 459 (1956).
73. R. G. Chambers, V. G. Skobov, J. Phys. **F1**, 202 (1971).
74. A. W. Overhauser, Phys. Rev. Lett. **13**, 190 (1964).
75. О. В. Константинов, В. Г. Скобов, В. В. Лаврова, Л. М. Фишер, В. А. Юдин, ЖЭТФ **63**, 224 (1972).
76. V. P. Naberezhnykh, D. E. Zherebchevskii, L. T. Tsymbal, T. M. Yaryomenko, Sol. State Comm. **11**, 1529 (1972).
77. R. W. Stark, L. M. Falicov, Phys. Rev. Lett. **19**, 795 (1967).
78. R. C. Tones, R. G. Goodrich, L. M. Falicov, Phys. Rev. **174**, 672 (1968).
79. В. В. Лаврова, С. В. Медведев, В. Г. Скобов, Л. М. Фишер, А. С. Чернов, В. А. Юдин, ЖЭТФ **66**, 700 (1974).
80. S. F. Buchsbaum, P. A. Wolf, Phys. Rev. Lett. **15**, 406 (1965).
81. B. Perrin, G. Weisbuch, A. Libchaber, Phys. Rev. **B1**, 1501 (1970).
82. В. Г. Скобов, Л. М. Фишер, А. С. Чернов, В. А. Юдин, ЖЭТФ **67**, 1218 (1974).
83. В. В. Лаврова, В. Г. Скобов, Л. М. Фишер, А. С. Чернов, В. А. Юдин, ФТТ **15**, 3379 (1973).
84. О. В. Константинов, В. Г. Скобов, ФТТ **12**, 2768 (1970).
85. О. В. Константинов, В. Г. Скобов, ЖЭТФ **61**, 1660 (1971).
86. В. Я. Демиховский, С. С. Савинский, ЖЭТФ (1975).
87. А. П. Протогенов, В. Е. Сауткин, Письма ЖЭТФ **17**, 324 (1973).
88. Э. А. Канер, О. И. Любимов, ЖЭТФ **65**, 778 (1973).
89. P. F. Williams, A. N. Bloch, Phys. Rev. **B10**, 1097 (1974).
90. А. А. Слуцкин, С. А. Соколов, Письма ЖЭТФ **14**, 60 (1971).
91. Г. Е. Зильберман, ЖЭТФ **33**, 387 (1957).
92. Ю. М. Гальперин, С. В. Ганцевич, В. Л. Гуревич, ЖЭТФ **56**, 1728 (1969).
93. Ю. М. Гальперин, ФТТ **11**, 1710 (1969).
94. С. А. Бразовский, ЖЭТФ **61**, 2401 (1971).
95. Ю. М. Гальперин, В. Д. Каган, ФТТ **10**, 2037 (1968).
96. Ю. М. Гальперин, В. И. Козуб, ЖЭТФ **63**, 1083 (1972).
97. Ю. И. Балкарей, Э. М. Эпштейн, ibid. стр. 660.
98. В. Я. Демиховский, А. П. Копасов, ЖЭТФ **64**, 1007 (1973).
99. А. П. Копасов, В. Я. Демиховский, ФТТ **15**, 3589 (1973).
100. W. Salaneck, Y. Sawada, E. Barstein, J. Phys. Chem. Soc. **32**, 2285 (1971).
101. А. П. Королюк, В. Ф. Рой, Письма ЖЭТФ **17**, 184 (1973).
102. А. П. Королюк, В. И. Хоткевич, М. А. Оболенский, В. И. Белецкий, ibid. **18**, 32.