1975 г. Сентябрь *Том 117, вып. 1*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

555.43

МНОГОКРАТНОЕ РАССЕЯНИЕ ВОЛН НА АНСАМБЛЕ ЧАСТИЦ И ТЕОРИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ

Ю. Н. Барабаненков

СОДЕРЖАНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ

Круг явлений, обусловленных многократным рассеянием волн на ансамбле частиц, весьма широк. Сюда относится, например, рассеяние света в веществах, находящихся в диспергированном состоянии [1, 2], таких как краски, порошки, коллоиды, полимеры, аэро- и гидрозоли, эмульсии, минеральные образования, снегообразные и бумагоподобные вещества. Многократное рассеяние света происходит в астрофизических [3, 4] объектах (звездные и планетные атмосферы, газовые туманности и межзвездная среда) и геофизических (почвы, воды и их покровы), в газах и жидкостях около критической точки фазового перехода [5, 6]. К многократному рассеянию волн относятся такие процессы, как рассеяние электромагнитных волн в плазме [7], рассеяние электронов на примесях в кристаллической решетке [8], перенос нейтронов в телах разнообразных форм и размеров [9], прохождение заряженных частиц через вещество [10, 11], взаимодействие космических лучей с веществом [12].

Для рассмотрения процессов многократного рассеяния применяются феноменологический и статистический подходы.

Содержание феноменологического подхода составляет теория переноса излучения в рассеивающей среде. Ее аппаратом является уравнение переноса [1, 13, 14], выражающее закон сохранения энергии излучения или условие баланса яркостей световых пучков с учетом их поляризации.

При статистическом рассмотрении многократного рассеяния волн исходят из стохастического волнового уравнения или из системы таких уравнений, для которых ставится и исследуется задача дифракции волн на статистическом ансамбле частиц.

Проблема статистического обоснования теории переноса излучения с помощью теории многократного рассеяния волн на ансамбле частиц принадлежит к числу принципиально важных и пока до конца нерешенных задач теоретической физики. Постановка этой проблемы обусловлена следующими причинами.

Теория переноса существует около ста лет. Тем не менее она до сих пор экспериментально не проверена из-за трудностей [2], связанных с ограниченностью моделей рассеивающей среды, поддающихся полноценному математическому анализу, и с несовершенством известных методов измерения коэффициентов, входящих в уравнение переноса. В то же время, теория переноса не дает указаний на способ вычисления этих коэффициентов, минуя их экспериментальное определение.

В связи с появлением лазерной техники создания волновых полей высокой степени когерентности стало актуальным выяснение условий, налагаемых на свойства среды и падающего волнового поля, а также способов детектирования рассеянного волнового поля, при которых оказывается применимой теория переноса.

За последние годы удалось найти точные решения [15–19] стационарной задачи рассеяния монохроматической волны для одномерной модели рассеивающей среды, исходя из стохастического волнового уравнения Гельмгольца. Полученные при этом результаты значительно расходятся [20] с вытекающими из решения [14] уравнения переноса.

Проблеме статистического обоснования теории переноса излучения с точки зрения теории многократного рассеяния волн посвящен обзор Розенберга [1], а также обзор [21]. В первом из них дается систематическое изложение постановки проблемы и вскрываются физические принципы ее решения. Однако во время написания этого обзора теория многократного рассеяния волн еще не была достаточно разработана. Во втором из упомянутых обзоров главное внимание уделено методам решения задач распространения волн в случайно-неоднородной среде с плавными флуктуациями показателя преломления и вопросы теории переноса рассмотрены не полно.

Данный обзор преследует цель обобщающего изложения того, как решается проблема статистического обоснования теории переноса с помощью современной теории многократного рассеяния волн на ансамбле частиц и в какой мере пока удается получить решение этой проблемы. Для построения теории многократного рассеяния волн в обзоре используется метод функций Грина и диаграммной техники Фейнмана, приводящий к уравнениям типа Дайсона и Бете — Солпитера. Этот метод отличается тем преимуществом, что является физически наглядным и наиболее адекватным теории переноса, а кроме того, включает в себя, как частный случай, многие другие известные методы. За последнее время благодаря работам [22–24] появилась возможность дать методу уравнений Дайсона и Бете — Солпитера математически строгое подтверждение в задачах нестационарного многократного рассеяния волновых пакетов в случайно-переменной среде.

2. ПРОБЛЕМА СТАТИСТИЧЕСКОГО ОБОСНОВАНИЯ ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА

Важную роль в теории переноса излучения играет понятие элементарного объема [1, 25–27] рассеивающей среды. Эта теория строится на представлениях лучевой оптики [1, 2, 28] и предполагает полную некогерентность актов рассеяния [27]. Объектом теории переноса являются фотометрические величины [27, 28], описывающие световой пучок и удовлетворяющие уравнению переноса.

Понятие элементарного объема рассеивающей среды довольно сложное. Этот объем ослабляет и рассеивает падающее на него излучение, причем с количественной стороны ослабление и рассеяние пропорционально величине объема [25]. Оптические свойства элементарного объема характеризуются коэффициентами экстинкции и рассеяния, а с учетом поляризации световых пучков — матрицами экстинкции и рассеяния [29, 30]. В теории переноса существенно предполагается, что рассеиваемые различными элементарными объемами световые пучки некогерентны между собой, т. е. их интенсивности складываются [1]. Между двумя последовательными актами рассеяния на элементарных объемах световые пучки распространяются согласно лучевой оптике.

Теория переноса оперирует фотометрической величиной лучевой яркости [26–28], определяющей поток энергии излучения через единичную площадку в единичном телесном угле и за единицу времени. При учете поляризации светового излучения вместо лучевой яркости выступает четырехкомпонентный вектор-параметр Стокса [13, 29, 30], первая компонента которого тождественна с яркостью светового пучка и три остальные определяют его поляризацию. Для лучевой яркости составляется уравнение переноса излучения в рассеивающей среде [13, 14]. Появление этого уравнения в физике в его первоначальном виде связано с именем О. Д. Хвольсона и датируется семидесятым годом прошлого века, а также с именами Шварцшильда и Шустера. Физическое содержание уравнения состоит в том, что изменение яркости светового пучка на элементе его длины складывается из ослабления, обусловленного поглощением и рассеянием, и из усиления за счет рассеяния в том же направлении света, облучающего соответствующий элементарный объем во всех прочих направлениях.

Уравнение переноса с учетом поляризации излучения было впервые одновременно и независимо сформулировано Чандрасекхаром [13] и Розенбергом [29] для изотропной рассеивающей среды, когда матрица экстинкции скалярна, и несколько ранее Соболевым [31], рассмотревшим частный случай релеевского рассеяния. Более общее уравнение переноса поляризованного светового излучения, позволяющее решать все задачи оптики анизотропных рассеивающих сред, в том числе и применительно к теории электро- и магнитооптических явлений в коллоидах, получено Розенбергом [30, 32]. В этом уравнении вместо коэффициента экстинкции выступает матрица дисперсии, которая распадается на сумму матриц экстинкции и фазовой. Из них матрица экстинкции описывает ослабление светового пучка определенной поляризации вследствие поглощения и рассеяния, а фазовая матрица — изменение поляризации светового пучка за счет различия скоростей распространения двух альтернативно поляризованных компонент.

Уравнение переноса светового излучения, записанное для вектор-параметра Стокса, оказывается матричным и выглядит гораздо сложнее классического уравнения переноса для лучевой яркости. Однако при исследовании многократного рассеяния электромагнитного излучения переход к такому сложному уравнению переноса необходим, так как многочисленные члены этого уравнения, учитывающие поляризационные эффекты, имеют, вообще говоря, тот же порядок величины, что и члены, содержащие только первую компоненту вектор-параметра Стокса. Классическое уравнение переноса для лучевой яркости применимо, строго говоря, только в случае скалярного излучения, например при описании переноса нейтронов [9].

При статистическом подходе имеют дело непосредственно с волновыми полями и их многократным рассеянием на ансамбле частиц, причем свойства этого ансамбля считаются заданными. Иначе говоря, предполагают, что имеют дело со слабыми полями, когда влияние поля на состояние вещества можно игнорировать или понимать его как малое возмущение. Это позволяет рассматривать среду и поле как самостоятельные системы и ограничить предмет исследования воздействием вещества на поле [2, 27].

Отсюда вытекает несколько сложных принципиальных вопросов на пути статистического обоснования теории переноса.

Один из них заключается в выяснении фотометрического понятия лучевой яркости с точки зрения статистической волновой теории [26–28]. Этот вопрос возникает также и в отсутствии рассеивающей среды при попытке фотометрического описания заданного частично когерентного волнового поля.

Пожалуй, самым сложным является вопрос о возможности введения понятия элементарного объема рассеивающей среды, исходя из статистической теории многократного рассеяния волн [26, 27]. Доказательство этой возможности дало бы теоретическое решение проблемы определения оптических параметров элементарного объема (коэффициентов экстинкции и рассеяния) путем их выражения через результат решения задачи дифракции волн на совокупности из небольшого числа частиц и через корреляционные функции частиц.

Не менее сложным при статистическом обосновании теории переноса оказывается вопрос о соотношении между этой теорией и теорией кооперативных эффектов [26, 27, 32], в которых существенную роль играют фазы волн, рассеянных на частицах среды, и корреляции частиц.

Статистическая теория многократного рассеяния волн на ансамбле частиц (см. обзоры [1, 33, 34]) *) в настоящее время далека от своего завершения. Математически она сводится к исследованию стохастического волнового уравнения со случайным эффективным рассеивающим потенциалом. Это уравнение решается, как правило, асимптотическими методами, использующими разложения по малым параметрам. Причем из отбрасываемых членов таких разложений оцениваются только некоторые. Лишь за последние годы стали появляться строгие методы решения стохастического волнового уравнения при специальных предположениях о свойствах рассеивающей среды [15, 22–24, 36].

Незавершенность статистической теории многократного рассеяния волн препятствует окончательному решению проблемы статистического обоснования теории переноса. Тем не менее на пути решения этой проблемы получен ряд интересных результатов, довольно убедительных с физической точки зрения, которые приводятся в данном обзоре. Из них мы выделим особо физические принципы, наметившие пути подхода к решению рассматриваемой проблемы, а также связанные с ней некоторые экспериментальные работы.

*) В обзорах [21, 35] рассматривается статистическая теория распространения волн в случайно-неоднородной непрерывной среде.

Фундаментальный вклад в исследование проблемы статистического обоснования теории переноса сделан Розенбергом [1, 32]. Из физических соображений им установлено, что взаимное влияние частиц при рассеянии на них волн распадается на две части — когерентную и некогерентную. При этом когерентная часть, за которую ответственны только ближайшие соседи той или иной частицы, проявляется исключительно в двух кооперативных эффектах, ответственных за совокупность дисперсионных явлений, а именно в изменении эффективного комплексного показателя (в общем случае матрицы) преломления среды и в отличии коэффициента (матрицы) рассеяния элементарного объема от его значения для изолированной частицы. В то же время некогерентная часть взаимодействия, обязанная своим происхождением всему объему рассеивающей среды, выступает в виде многократного рассеяния и становится объектом теории переноса.

В работах Розенберга [26–28] исследуется вопрос о статистико-электродинамическом содержании фотометрических величин и закономерностей в их применении к описанию частично когерентного волнового поля. Показывается, что введение фотометрических величин, как наблюдаемых (в квантовомеханическом смысле этого слова), предполагает использование приемников света, осуществляющих квадратичное детектирование и обладающих конечными размерами и конечной постоянной времени.

Одним из кооперативных оптических эффектов в рассеивающих средах, лежащих вне границ применимости теории переноса, является когерентное рассеяние «вперед». Этот эффект рассматривался в ряде работ [32, 37–39] и экспериментально обнаружен Ивановым, Хайруллиной и Харьковой [40]. В работе Хайруллиной и Иванова [41] приводятся сведения о том, что при освещении рассеивающей среды излучением, обладающим высокой степенью пространственной когерентности, световое поле, образующееся в результате интерференции рассеянных частицами волн, будет неоднородным в пространстве (так называемая зернистая структура) и флуктуирующим во времени. Характер образующейся зернистой структуры обусловлен оптическими и геометрическими параметрами и взаимным расположением частиц, а частота флуктуаций светового поля определяется подвижностью частиц, например, их броуновским движением.

Розенбергом [27] дан общий физический анализ условий применимости теории переноса к описанию многократного рассеяния частично когерентного падающего волнового поля в рассеивающей среде, свойства которой случайно меняются со временем вследствие, например, броуновского движения частиц. Выяснены критерии для выбора временных и пространственных масштабов усреднения квадратичных функций поля, приводящего к фотометрическим величинам. Рассмотрен предельный случай, когда процесс распространения поля в среде можно считать с оптической точки зрения стационарным, и случай, когда этот процесс нестационарен.

Предлагаемый обзор содержит результаты теории многократного рассеяния волн на статистическом ансамбле частиц, непосредственно относящиеся к проблеме обоснования фотометрической теории переноса излучения. Главное внимание уделяется случаю, когда среду можно считать постоянной во времени и падающее поле является чисто когерентным в пространстве и во времени. Приводимые результаты получены для скалярного волнового поля. Попутно отмечаются их известные обобщения на электромагнитное поле.

3. МОДЕЛЬ ДИСКРЕТНОЙ РАССЕИВАЮЩЕЙ СРЕДЫ

Дискретная рассеивающая среда представляет собой совокупность частиц. Каждую частицу по аналогии с квантовой механикой удобно характеризовать некоторым рассеивающим потенциалом. Потенциал $V(\mathbf{r})$ дискретной рассеивающей среды равен сумме потенциалов ее частиц:

$$V(\mathbf{r})=\sum_{j=1}^{N} V_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j), \tag{3.1}$$

где $V_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j)$ — потенциал j-й частицы, $j=1, \ldots, N$, с центром в точке $\mathbf{r}_j$, N — общее число частиц.

Уравнение Гельмгольца для скалярного волнового монохроматического поля $\psi(\mathbf{r})$ в рассеивающей среде с потенциалом $V(\mathbf{r})$ имеет вид

$$[\Delta+k_0^2-V(\mathbf{r})]\,\psi(\mathbf{r})=0, \tag{3.2}$$

где k_0 — волновое число свободного пространства. Если волновое поле и его нормальная производная непрерывны на поверхности частиц, то решение уравнения Гельмгольца с учетом условий излучения в бесконечности сводится к волновому интегральному уравнению

$$\psi(\mathbf{r})=\psi_0(\mathbf{r})+\int G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,V(\mathbf{r}')\,d^3\mathbf{r}'\,\psi(\mathbf{r}'); \tag{3.3}$$

здесь неоднородный член $\psi_0(\mathbf{r})$ представляет собой падающее поле, создаваемое заданным распределением источников, $G_0(r)=-\exp(ik_0r)/4\pi r$ — функция Грина свободного пространства. В случае, когда рассеивающая среда занимает ограниченный объем и источник расположен в бесконечности, падающее поле имеет вид плоской волны $\psi_0(\mathbf{r})=\exp(ik_0\mathbf{s}_0\mathbf{r})$, распространяющейся в направлении единичного вектора $\mathbf{s}_0$. Для точечного источника, сосредоточенного в точке $\mathbf{r}'$, падающее поле $\psi_0(\mathbf{r})$ равно $G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ и решение интегрального волнового уравнения (3.3) дает функцию Грина $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ рассеивающей среды.

а) Оператор рассеяния и оптическая теорема

При решении дифракционной задачи для некоторой частицы обычно ограничиваются вычислением амплитуды рассеяния, определяющей рассеянное поле в ее дальней зоне. Однако при исследовании многократного рассеяния волн необходимо знать рассеянное поле на любом расстоянии от частицы, поскольку в статистическом ансамбле частицы могут значительно сближаться между собой.

Полное решение дифракционной задачи удобно представить с помощью оператора рассеяния T [42]. Это понятие заимствовано из квантовой теории рассеяния. Решение интегрального волнового уравнения (3.3) для поля $\psi(\mathbf{r})$ выражается через ядро $T(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ оператора рассеяния соотношением

$$\psi(\mathbf{r})=\psi_0(\mathbf{r})+\int G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}'')\,d^3\mathbf{r}''\,T(\mathbf{r}'', \mathbf{r}')\,d^3\mathbf{r}'\,\psi(\mathbf{r}'). \tag{3.4}$$

Фурье-образ $\widetilde{T}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ ядра оператора рассеяния $T(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, вычисленный на сферической поверхности $k^2=k'^2=k_0^2$ волновых чисел (k_0^2 — поверхность), который обозначим через $\widetilde{T}(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0)$, где единичные векторы $\mathbf{s}$ и $\mathbf{s}_0$ направлены вдоль волновых векторов $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$, дает с точностью до постоянного множителя амплитуду рассеяния рассматриваемого рассеивателя; им может быть отдельная частица, некоторая совокупность частиц или весь объем рассеивающей среды. Это свойство оператора рассеяния поясняет его физический смысл.

При исследовании электромагнитных волн уравнение Гельмгольца в векторном виде записывается для напряженности электрического поля (см., например, [43, 44]). Функция Грина свободного пространства и рассеивающей среды, а также оператор рассеяния для электрического поля *имеют тензорную размерность.*

Из закона сохранения энергии при рассеянии волн следует оптическая теорема.

В случае непоглощающего рассеивателя с вещественным потенциалом оптическая теорема формулируется в виде соотношения для его оператора рассеяния:

$$T(\mathbf{r}_2', \mathbf{r}_1') - T^*(\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2') = \\ = \int [G_0(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) - G_0^*(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)]\, d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2 T(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1') T^*(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2'), \quad (3.5)$$

где звездочка указывает на переход к комплексно-сопряженной величине. В представлении Фурье оптическая теорема (3.5) принимает свой обычный вид [45]

$$-\frac{\operatorname{Im} \widetilde{T}(\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_0)}{k_0} = \frac{1}{(4\pi)^2} \int\limits_{4\pi} d^2\mathbf{s}\, |\widetilde{T}(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0)|^2. \quad (3.5\text{a})$$

Величины в левой и правой частях этого соотношения носят названия сечений ослабления и полного рассеяния [46]. Для непоглощающего рассеивателя эти сечения между собой равны.

Если рассеиватель может поглощать энергию падающей на него волны, *имея комплексный потенциал*, то формулировка оптической теоремы изменяется. При этом левая часть соотношения (3.5а) оказывается больше правой, т. е. сечение ослабления больше полного сечения рассеяния. Разность между сечениями ослабления и полного рассеяния называется *сечением поглощения* [46]. Оптическая теорема в случае поглощающего рассеивателя состоит в том, что сечение ослабления равно сумме сечений полного рассеяния и поглощения. Иначе говоря, изымаемая из падающей волны энергия идет на рассеяние и поглощение.

Для поглощающего рассеивателя электромагнитных волн содержание оптической теоремы исследовалось Розенбергом [1, 32].

б) Система уравнений многократного рассеяния волн

Если имеется объем дискретной рассеивающей среды с потенциалом $V(\mathbf{r})$, равным сумме (3.1), то наряду с оператором рассеяния T этого объема удобно рассматривать *также* операторы рассеяния t_j изолированных частиц с потенциалами $V_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)$. Соотношение между T и всеми $t_j\,(j = 1, \ldots, N)$ устанавливается системой уравнений многократного рассеяния волн:

$$T = \sum_{j=1}^{N} T_j, \quad (3.6)$$

$$T_j = t_j + t_j G_0 \sum_{j'=1\,(j' \neq j)}^{N} T_{j'};$$

здесь каждый оператор T_j описывает рассеяние на j-й частице в присутствии остальных $(N - 1)$-й частиц. Как видно, T_j равно оператору рассеяния t_j изолированной частицы с данным номером j плюс эффект остальных частиц. Физический смысл системы уравнений (3.6) полностью раскрывается, если записать ее решение в виде ряда последовательных приближений. Каждый член этого ряда описывает такой процесс рассеяния волны, когда она переходит от одной частицы к другой, причем к каждой частице волна может возвращаться, испытывая на ней повторные рассеяния.

Система уравнений многократного рассеяния волн в форме (3.6) выведена Ватсоном [42]. Ранее эта система была сформулирована Розенбергом [32] в представлении неоднородных плоских волн.

в) Функции распределения и корреляционные функции частиц

Фолди [47] ввел в теорию многократного рассеяния волн концепцию конфигурационного среднего значения по статистическому ансамблю частиц, случайно расположенных в пространстве. Эта концепция применяется для вычисления среднего значения таких величин, как волновое поле и его билинейная комбинация. В ее основе, подобно статистической теории газов и жидкостей, лежит плотность вероятностей конфигураций центров частиц в пространстве, нормированная на единицу и симметричная относительно перестановки своих аргументов *). Из плотности вероятностей частиц строятся их родовые функции распределения $f_n(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n)$ различного порядка $n = 1, 2, \ldots$ (см. [48], стр. 81). При этом родовая функция распределения n-го порядка определяет вероятность конфигураций каких-либо n частиц из их общего числа, равного N. Кроме функций распределения для описания ансамбля частиц применяются также их корреляционные функции $g_n(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ Они связаны с родовыми функциями распределения соотношениями вида [33, 49, 50]

$$\begin{aligned} &f_1(\mathbf{r}) = g_1(\mathbf{r}), \\ &f_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = g_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + g_1(\mathbf{r}_1)\, g_1(\mathbf{r}_2), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{3.7}$$

Родовая функция распределения и корреляционная функция первого порядка совпадают между собой и дают плотность частиц. Корреляционные функции порядка $n \geqslant 2$ обладают свойством ослабления корреляций, согласно которому они быстро (как правило экспоненциально) стремятся к нулю при разнесении точек хотя бы в одной паре их аргументов на расстояние, превышающее масштаб корреляций частиц. Особое важное значение имеет в статистической теории газов и жидкостей двухчастичная корреляционная функция $g_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$. Она применена Лаксом [51], Фюрзом и Вильямсом [52] (см. также [48]) к исследованию молекулярного рассеяния рентгеновских лучей в жидкостях и света в жидкостях около критической точки фазового перехода (явление критической опалесценции). Двухчастичная корреляционная функция используется при рассмотрении влияния электростатического взаимодействия на рассеяние электромагнитных волн атмосферными аэрозолями [53].

г) Дискретная и непрерывная рассеивающие среды

Система уравнений (3.6) многократного рассеяния волн и набор функций распределения или корреляционных функций частиц задают модель дискретной рассеивающей среды. Если на такую среду падает волна, то говорят, что она испытывает многократное рассеяние на ансамбле

*) Мы ограничиваемся рассмотрением одинаковых сферических частиц

частиц. Наряду с теорией многократного рассеяния волн в дискретной среде существует теория распространения волн в случайно-неоднородной среде, развивавшаяся Бурре [54], Фурутсу [55], Татарским [56], Фришем [35], Финкельбергом [50] и др. (см. обзор [21]).

Модель случайно-неоднородной среды, которую иногда также называют непрерывной случайной или рассеивающей средой, задается законом пространственных флуктуаций ее потенциала. Этот закон полностью определяется набором моментных или кумулянтных функций потенциала [35, 49, 50]. В простейшем случае гауссовых флуктуаций потенциала достаточно задать его два первых кумулянта. В общем случае необходимо знать всю совокупность кумулянтов потенциала среды различного порядка.

Вместо системы уравнений (3.6) многократного рассеяния волн, относящейся к модели дискретной рассеивающей среды, для модели непрерывной случайной среды записывается борновский ряд теории возмущений для поля, который получается в результате решения волнового интегрального уравнения (3.3) методом последовательных приближений по потенциалу среды. Члены этого ряда описывают многократное рассеяние волн на элементах объема непрерывной среды.

Соотношение между моделями дискретной и непрерывной случайных сред обсуждалось Фришем [33]. Зная функции распределения или корреляционные функции частиц дискретной среды, можно вычислить с помощью формул [49] моментные и кумулянтные функции ее потенциала, равного (3.1). Это говорит о том, что распространение волн в дискретной рассеивающей среде может быть исследовано тем же способом, что и в непрерывной.

Однако переход от дискретной модели среды к непрерывной предполагает, что акты рассеяния на элементах объема отдельных частиц и одной и той же частицы равноправны между собой. Это предположение оправдано, если частицы среды представляют собой *слабые или «мягкие» рассеиватели*. Для каждой из таких изолированных частиц оператор рассеяния t раскладывается в борновский ряд теории возмущений по степеням ее потенциала V_0, и в этом случае модель дискретной среды не имеет преимуществ перед моделью непрерывной среды.

Если же частицы обладают достаточно выраженными рассеивающими свойствами (сильные или «жесткие» рассеиватели), когда борновское приближение для оператора рассеяния изолированной частицы не применимо, *переход от модели дискретной среды к непрерывной не оправдывает себя как с физической, так и с практической точек зрения.*

Иногда бывает удобным использовать комбинированную модель дискретной и непрерывной рассеивающих сред. Такой подход применен Овчинниковым [57] при исследовании переноса излучения видимого диапазона в турбулентной атмосфере с аэрозолем.

4. ПОНЯТИЕ ЭФФЕКТИВНОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ

Для выяснения условий применимости теории переноса излучения в рамках теории многократного рассеяния достаточно ограничиться рассмотрением средних по ансамблю значений поля $\langle\psi(\mathbf{r})\rangle$ и билинейной комбинации поля $\langle\psi(\mathbf{r}_1)\,\psi^*(\mathbf{r}_2)\rangle$, называемой также ковариацией и представляющей собой функцию взаимной пространственной когерентности поля.

Существует несколько асимптотических методов вычисления среднего поля и ковариации поля. Из них наиболее наглядным с физической точки зрения и общим с точки зрения получения конкретных результатов является метод функций Грина и диаграммной техники Фейнмана, приводящий к уравнениям *) типа Дайсона (Д) и Бете-Солпитера (БС).

В случае дискретной рассеивающей среды **) уравнения Д и БС были сформулированы благодаря работам Фолди [47], Лакса [51], Гнедина и Долгинова [59], Фриша [33], Финкельберга [50]. Точные уравнения Д и БС получены Фришем [33]. В них входят неизвестные ядра, называемые массовым оператором M и оператором интенсивности K, равные суммам всех возможных сильно связанных однорядных и двухрядных диаграмм без внешних линий распространения. Для приложений больший интерес представляют приближенные уравнения Д и БС с заданными приближенными значениями ядер M и K. Наиболее общие такого рода уравнения получены Финкельбергом [50] методом корреляционных групп с ядрами M и K в одногрупповом приближении.

Уравнения Д и БС в символическом операторном виде записываются соответственно как (см. обзор [21])

$$\langle\psi\rangle = \psi_0 + G_0 M \langle\psi\rangle, \tag{4.1}$$

$$\langle\psi \times \psi^*\rangle = \langle\psi\rangle \times \langle\psi^*\rangle + \langle G\rangle \times \langle G^*\rangle K \langle\psi \times \psi^*\rangle;$$

здесь в уравнении БС через $\langle G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\rangle$ обозначено среднее значение функции Грина рассеивающей среды, знак умножения $\times$ обозначает билинейную комбинацию значений поля или ядер операторов (средней функции Грина). Эти уравнения имеют макроскопический характер в том смысле, что все сведения об оптических и статистических свойствах ансамбля частиц заключены в ядрах M и K.

Уравнения Д и БС являются интегральными и описывают когерентное и частично когерентное рассеяние волн. Физический смысл ядер M и K раскрывается путем представления решения уравнения Д в виде ряда последовательных приближений по степеням ядра M и решения уравнения БС — по степеням ядра K. Свяжем с ядрами M и K представление об эффективной неоднородности рассеивающей среды. Тогда члены рядов для уравнений Д и БС описывают последовательное когерентное и частично когерентное рассеяние волн на эффективных неоднородностях. Ядро $M(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ является двухточечным, что служит выражением пространственной дисперсии волн среднего поля. Оно задает оптические свойства неоднородности по отношению к когерентному рассеянию волн. Ядро $K(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1'; \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2')$ зависит от четырех точек и показывает, что неоднородность играет роль преобразователя типа четырехполюсника функции взаимной когерентности. Для нахождения средней интенсивности поля, рассеянного неоднородностью, необходимо знать, вообще говоря, функцию взаимной когерентности (а не только среднюю интенсивность) падающего поля. Это говорит о том, что неоднородности выступают в качестве частично когерентных (вместо некогерентных) рассеивателей и ядро K задает оптические свойства неоднородности по отношению к частично когерентному рассеянию волн.

а) Оптическая теорема для неоднородности и всего рассеивающего объема

В теории переноса коэффициенты экстинкции и рассеяния элементарного объема, а для электромагнитного излучения — матрицы экстинкции и рассеяния, связаны между собой соотношением [30], выражающим закон сохранения энергии. Аналогичное соотношение имеется и в теории

*) О выводе уравнений Д и БС без использования диаграммной техники см. обзор Апресяна [58].

**) Об уравнениях Д и БС для непрерывной среды см. обзор [21].

многократного рассеяния волн. Оно формулируется в виде оптической теоремы для ядер M и K и в случае среды без истинного поглощения записывается как [60]

$$M(\mathbf{r}_2', \mathbf{r}_1') - M^*(\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2') =$$
$$= \int [\langle G(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)\rangle - \langle G^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\rangle]\, d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2 K(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1'; \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2'). \quad (4.2)$$

Это соотношение устанавливает связь между мнимыми частями ядра M, средней функции Грина $\langle G\rangle$ и ядром K *).

Оптическая теорема (4.2) выражает закон сохранения энергии для эффективной неоднородности. В ее правую часть входит средняя функция Грина, а не функция Грина свободного пространства, как и в оптическую теорему для всего объема рассеивающей среды, которая получается усреднением по ансамблю соотношения (3.5). Такое отличие обусловлено тем, что каждая эффективная неоднородность находится внутри рассеивающей среды и окружена другими неоднородностями.

Рассеяние волн объемом среды принято характеризовать амплитудами и сечениями когерентного и частично когерентного рассеяния. Величины $(-1/4\pi)\langle\widetilde{T}(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0)\rangle$, $(-1/k_0)\,\mathrm{Im}\,\langle\widetilde{T}(\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_0)\rangle$ и $(4\pi)^{-2}\,|\langle\widetilde{T}(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0)\rangle|^2$ представляют собой амплитуду, сечение ослабления и дифференциальное сечение когерентного рассеяния. Разность

$$C = -\frac{1}{k_0}\,\mathrm{Im}\,\langle\widetilde{T}(\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_0)\rangle - \frac{1}{(4\pi)^2}\int_{4\pi} d^2\mathbf{s}\,|\langle\widetilde{T}(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0)\rangle|^2 \quad (4.3)$$

между сечением ослабления и полным сечением когерентного рассеяния называется сечением поглощения когерентного излучения [46]. Она служит мерой той части энергии когерентного излучения, которая идет на частично когерентное рассеяние, а также может претерпевать истинное поглощение.

Частично когерентное рассеяние характеризуется его дифференциальным сечением $(4\pi)^{-2}\,\widetilde{U}(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0)$, где обозначено

$$\widetilde{U}(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0) = \langle\,|\widetilde{T}(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0)|^2\rangle - |\langle\widetilde{T}(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0)\rangle|^2,$$

равным среднему квадрату флуктуаций амплитуды рассеяния объема среды. Согласно оптической теореме для всего объема среды без истинного поглощения, сечение поглощения когерентного излучения равно полному сечению частично когерентного рассеяния

$$C = \frac{1}{(4\pi)^2}\int_{4\pi} d^2\mathbf{s}\,\widetilde{U}(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0) \equiv H. \quad (4.4)$$

Это равенство означает, что изымаемая из падающей на объем волны энергия идет на когерентное и частично когерентное рассеяние.

Если в среде имеется истинное поглощение, то наряду с сечением поглощения C когерентного излучения вводится сечение $C_{\text{ист}}$ истинного поглощения полного поля. В этом случае оптическая теорема для всего объема среды записывается в виде равенства

$$C = H + C_{\text{ист}}, \quad (4.5)$$

согласно которому изымаемая из падающей волны энергия идет не только на когерентное и частично когерентное рассеяние, но и на истинное поглощение.

*) Попытка получить такое соотношение предпринималась также Розенбаумом [61] и для частного случая бесконечного плоского тонкого слоя Розенбергом [32].

б) Метод групповых разложений для массового оператора и оператора интенсивности. Одногрупповое приближение

Наглядность диаграммной техники Фейнмана состоит в том, что она изображает каждый элементарный процесс когерентного и частично когерентного рассеяния волн в среде с помощью диаграмм (см., например, [50]). Эти диаграммы получаются в результате разложения оператора рассеяния T ансамбля частиц и его билинейной комбинации $T \times T^*$ в ряды по кратности рассеяния, которые затем усредняются по ансамблю с помощью родовых функций распределения. Дальнейшим существенным шагом является переход от родовых функций распределения частиц к их корреляционным функциям *) по формулам вида (3.7), что позволяет классифицировать все диаграммы на сильно и слабо связные. Из них сильно связные диаграммы, входящие в состав ядер M и K, описывают рассеяние волн на отдельной эффективной неоднородности. Слабо же связные диаграммы изображают последовательное рассеяние волн на нескольких неоднородностях.

Все диаграммы, составляющие ядра M и K, распадаются на одногрупповые и многогрупповые. Одногрупповые диаграммы строятся из частиц, принадлежащих одной корреляционной группе и объединенных одной корреляционной функцией. Эти диаграммы линейно зависят от корреляционных функций частиц и дают такие вклады в ядра M и K, которые убывают при разнесении их аргументов как корреляционные функции частиц. Подобного рода диаграммы являются быстро убывающими [34]. В многогрупповые диаграммы входит несколько корреляционных групп частиц, причем эти группы взаимодействуют между собой лишь посредством взаимного волнового облучения. Поэтому вклады многогрупповых диаграмм в ядра M и K убывают при разнесении их аргументов как некоторая целая степень функции Грина свободного пространства. Такие диаграммы являются медленно убывающими. Поскольку ядра M и K задают оптические свойства эффективной неоднородности, которая сопоставляется элементарному объему теории переноса, то естественно в первую очередь удержать в ядрах M и K только одногрупповые быстро убывающие диаграммы и отбросить многогрупповые медленно убывающие диаграммы. При этом получается одногрупповое приближение, рассмотренное Финкельбергом [50].

В одногрупповом приближении ядра M и K имеют вид

$$\begin{aligned} M_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} T^{gr}_{1\ldots n} g_n (1 \ldots n), \\ K_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (T \times T^*)^{gr}_{1\ldots n} g_n (1 \ldots n); \end{aligned} \tag{4.6}$$

здесь $g_n (1 \ldots n)$ — корреляционные функции частиц с центрами в точках $1, \ldots, n$, по координатам которых производится интегрирование. Индексом gr отмечены групповые операторы рассеяния, определяемые согласно

$$T^{gr}_1 = t, \quad T^{gr}_{12} = T_{12} - t_1 - t_2, \ \ldots,$$
$$(T \times T^*)^{gr}_1 = t_1 \times t_1^*, \quad (T \times T^*)^{gr}_{12} = T_{12} \times T^*_{12} - t_1 \times t_1^* - t_2 \times t_2^*, \ \ldots$$

*) Гермогеновой [62] предложен метод групповых интегралов в задачах рассеяния электромагнитных волн, основанный на разложении распределения Гиббса для ансамбля взаимодействующих частиц по корреляционным функциям Юрсела (см. [48], стр. 125).

Через $T_{1\ldots n}$ ($T_1 = t_1$), $n = 1, 2, \ldots$, обозначен оператор рассеяния системы из n частиц.

Ядра M и K в одногрупповом приближении (4.6) удовлетворяют закону сохранения в форме оптической теоремы вида соотношения (4.2), но с функцией Грина G_0 свободного пространства в правой части этого соотношения вместо средней функции Грина $\langle G \rangle$. Это означает, что в одногрупповом приближении (4.6) при записи закона сохранения энергии для неоднородности пренебрегают эффектом, согласно которому она находится в окружении других неоднородностей.

Одногрупповое приближение (4.6) является весьма общим и объединяет многие другие известные подходы в теории многократного рассеяния волн. Если частицы некоррелированы, то одногрупповое приближение (4.6) приводит к модели независимых рассеивателей, согласно которой

$$M_1 = t_1 g_1(1), \quad K_1 = t_1 \times t_1^* g_1(1). \tag{4.7}$$

В случае скалярного поля эта модель рассматривалась Фолди [47] для точечных изотропных рассеивателей и применялась Гнединым и Долгиновым [59] для исследования квантовомеханического рассеяния потока частиц на независимых силовых центрах. В случае электромагнитного поля модель независимых рассеивателей (4.7) используется в молекулярной оптике разреженного газа, где рассеиватели принимаются за точечные диполи.

В модели независимых рассеивателей (4.7) не учитываются корреляции частиц. Более точной является модель коррелированных рассеивателей со слабым взаимным облучением. Если эффект взаимного облучения частиц в каждой корреляционной группе мал, то можно воспользоваться разложением операторов рассеяния групп по кратности рассеяния. При этом формулы одногруппового приближения (4.6) во втором порядке по кратности рассеяния принимают вид

$$\begin{aligned} M_1 &= t_1 g_1(1) + t_1 G_0 t_2 g_2(12), \\ K_1 &= t_1 \times t_1^* g_1(1) + (t_1 \times t_2^* + t_1 \times t_1^* G_0^* t_2^* + t_1 G_0 t_2 \times t_1^*)\, g_2(12), \end{aligned} \tag{4.8}$$

где в правой части равенства для K_1 выписаны дополнительные члены третьего порядка малости, благодаря которым выражения (4.8) точно удовлетворяют оптической теореме вида (4.2) с функцией Грина свободного пространства. Выражения (4.8) лежат в основе исследования молекулярного рассеяния рентгеновских лучей в жидкостях и света в жидкостях около критической точки фазового перехода [48, 51, 52 *]), а также используются при учете влияния электростатического взаимодействия на рассеяние электромагнитных волн атмосферными аэрозолями [53].

В одногрупповом приближении (4.6) ядра M и K убывают при разнесении их аргументов как корреляционные функции частиц, а в модели (4.7) независимых рассеивателей имеют масштаб нелокальности порядка размера частиц. Физически это означает, что эффективные неоднородности пространственно локализованы и их масштаб определяется размером частиц и масштабом корреляций частиц.

Если линейные размеры объема рассеивающей среды велики по сравнению с масштабом неоднородности, то ядро $M_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ массового оператора можно представить в виде $\mathcal{M}_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ вне узкой приграничной полоски объема шириной порядка масштаба неоднородности. Аналогично ядро $K_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1'; \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2')$ оператора интенсивности можно записать как

*) В работах [63–65] молекулярное рассеяние света жидкостью рассматривается с точки зрения флуктуаций диэлектрической проницаемости непрерывной рассеивающей среды.

$\mathscr{K}_1(\mathbf{R}-\mathbf{R}', \mathbf{r}, \mathbf{r}')$, где $\mathbf{R}=(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2)/2$ и $\mathbf{r}=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2$ — координаты центра тяжести и разностные координаты для точек $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$; $\mathbf{R}'$ и $\mathbf{r}'$ — для точек $\mathbf{r}_1'$, $\mathbf{r}_2'$.

Пусть линейные размеры рассматриваемого объема рассеивающей среды малы по сравнению с длиной экстинкции и на него падает плоская волна. Такой объем можно принять за элементарный объем теории переноса. В пренебрежении изменением падающей волны на протяжении выбранного объема, его сечения экстинкции и рассеяния имеют вид [34] Ω/d и $\Omega f(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0)$, где Ω — величина объема и через $1/d$ и $f(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0)$ обозначено

$$\frac{1}{d}=-\frac{\operatorname{Im}\tilde{\mathscr{M}}_1(k_0)}{k_0}, \quad f(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0)=\frac{1}{(4\pi)^2}\tilde{\mathscr{K}}_1(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0). \tag{4.9}$$

В этих равенствах $\tilde{\mathscr{M}}_1(k_0)$ — фурье-образ ядра $\mathscr{M}_1(r)$, вычисленный на k_0^2-поверхности; $\tilde{\mathscr{K}}_1(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0)$ — фурье-образ ядра $\mathscr{K}_1(\mathbf{R}, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ по разностным координатам $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$, вычисленный на k_0^2-поверхности и проинтегрированный по координатам $\mathbf{R}$ центра тяжести. Как и должно быть, сечения экстинкции и рассеяния элементарного объема пропорциональны его величине. Выражения $1/d$ и $f(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0)$ представляют собой коэффициенты экстинкции и рассеяния элементарного объема. Они удовлетворяют закону сохранения энергии в виде обычного для теории переноса соотношения.

Коэффициенты экстинкции и рассеяния (4.9) элементарного объема вычисляются, как это видно из формул одногруппового приближения (4.6), если известны амплитуды рассеяния плоской волны на системах из одной, двух и т. д. частиц и корреляционные функции частиц. При этом вклады корреляций частиц в коэффициенты экстинкции и рассеяния имеют нелинейную зависимость от плотности частиц, что приводит к нарушению закона аддитивности поперечных сечений [1] для монохроматического света и представляет собой одно из проявлений кооперативных эффектов. Для среды, состоящей из сферических частиц, при вычислении коэффициентов экстинкции и рассеяния (4.9) света элементарным объемом можно воспользоваться решением Ми [37] задачи рассеяния плоской электромагнитной волны на сферической частице, а также результатами Тринкса [66] и Гермогеновой [67] по исследованию рассеяния плоской электромагнитной волны на двух сферических частицах.

У одногруппового приближения (4.6) есть один недостаток по отношению к закону сохранения энергии, отмеченный Фришем [68] и Хове [69]. Он связан с тем, что ядра M и K в одногрупповом приближении удовлетворяют оптической теореме вида (4.2) с функцией Грина свободного пространства, а не со средней функцией Грина. Поэтому решения уравнений Д и БС с этими значениями ядер M и K удовлетворяют оптической теореме для всего объема рассеивающей среды не точно, а только приближенно. Причина такого недостатка одногруппового приближения (4.6) для ядер M и K вскрыта в работе [60] и заключается в том, что оно получается в первом порядке разложения точных значений ядер M и K по малому параметру группового разложения [50]. При этом оптическая теорема (4.2) для неоднородности тоже раскладывается по малому параметру группового разложения, что дает соотношения, играющие роль оптической теоремы первого, второго и т. д. порядков. Из них оптическая теорема первого порядка имеет вид (4.2), но с функцией Грина свободного пространства. Поэтому решения уравнений Д и БС с ядрами M и K в одногрупповом приближении удовлетворяют оптической теореме для всего объема среды с точностью до двухгрупповых членов.

То, что в одногрупповом приближении (4.6) оптическая теорема для всего объема рассеивающей среды удовлетворяется только приближенно, условно можно понимать как появление некоторого эффективного «истинного поглощения». Величина его сечения $C_{\text{эфф. ист}}$ получается с помощью соотношения [70], связывающего между собой оптические теоремы для неоднородности и всего объема среды, и равна

$$C_{\text{эфф. ист}} = \\ = \frac{1}{k_0} \int \operatorname{Im} [\mathcal{G}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) - G_0(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)] \, d^3\mathbf{r}_1 \, d^3\mathbf{r}_2 K_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1'; \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2') \, d^3\mathbf{r}_1' \, d^3\mathbf{r}_2' \Phi(\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2'); \tag{4.10}$$

здесь через $\mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ и $\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ обозначены средняя функция Грина и ковариация поля, удовлетворяющие уравнениям Д и БС с ядрами M и K в одногрупповом приближении (4.6). Одно из условий применимости одногруппового приближения должно состоять в том, чтобы величиной сечения эффективного «истинного поглощения» (4.10) можно было пренебречь.

Формулы (4.6) одногруппового приближения для ядер M и K относятся к модели дискретной рассеивающей среды. Аналогичные формулы одногруппового приближения могут быть получены [50] и в случае модели непрерывной рассеивающей среды. В правые части этих формул входят, в отличие от (4.6), кумулянты потенциала среды и произведения значений функции Грина свободного пространства. Если потенциал непрерывной среды флуктуирует по гауссовому закону с нулевым средним значением, то одногрупповое приближение для ядер M и K переходит в приближения Бурре [54] и лестничное [56].

В случае, когда частицы являются слабыми рассеивателями, между одногрупповыми приближениями для ядер M и K в моделях дискретной и непрерывной рассеивающей среды имеется простое соотношение. Оно устанавливается путем разложения операторов рассеяния частиц в формулах (4.6) в борновский ряд теории возмущений по степеням их потенциала и использования формул [49] для выражения кумулянтов потенциала дискретной среды через корреляционные функции частиц.

5. КОГЕРЕНТНОЕ И ЧАСТИЧНО КОГЕРЕНТНОЕ РАССЕЯНИЕ ВОЛН В ПРИБЛИЖЕНИИ ФРАУНГОФЕРА

Эффективные неоднородности с ядрами M и K в одногрупповом приближении (4.6) пространственно локализованы. Существует физически наглядный приближенный способ [71] рассмотрения когерентного и частично когерентного рассеяния волн в среде с такими неоднородностями. Этот способ основан на предположении, что главный вклад в рассеяние волн дают дальние конфигурации неоднородностей, когда они расположены друг к другу в зоне Фраунгофера. Для когерентного рассеяния приближение Фраунгофера равносильно пренебрежению пространственной дисперсией волн, а для частично когерентного — переходу к теории переноса *).

а) Пренебрежение пространственной дисперсией волн. Приближение Хюлста

Уравнение Д в приближении Фраунгофера сводится к уравнению Гельмгольца с эффективным комплексным волновым числом k_1, квадрат которого равен

$$k_1^2 = k_0^2 - \widetilde{\mathcal{M}}_1(k_0). \tag{5.1}$$

*) В работах [72, 73] предлагается вывод уравнения переноса из уравнений Д и БС, не использующий приближения Фраунгофера.

Если рассеивающая среда неограничена и в начале координат расположен точечный источник, то средняя функция Грина $\mathcal{G}(r)$ в приближении Фраунгофера равна

$$\mathcal{G}(r) = -\frac{e^{ik_1 r}}{4\pi r}. \tag{5.2}$$

При условии

$$\frac{|\tilde{\mathcal{M}}_1(k_0)|}{k_0^2} \ll 1 \tag{5.3}$$

эффективный комплексный показатель преломления среды мало отклоняется от единицы, что позволяет, вычисляя k_1, приближенно извлечь квадратный корень из правой части равенства (5.1). При этом удвоенная мнимая часть эффективного комплексного волнового числа совпадает с коэффициентом экстинкции $1/d$ элементарного объема, равным (4.9). Величина d носит название длины экстинкции. Средняя функция Грина (5.2) в приближении Фраунгофера приводит к экспоненциальному убыванию интенсивности среднего поля с дистанцией, отвечающему закону Бугера [2, 25] в теории переноса.

Вопрос об эффективном показателе преломления рассеивающей среды, эффективном действующем поле, эффективном тензоре диэлектрической проницаемости является одним из главных в теории многократного рассеяния волн и его решению посвящено большое число работ. В молекулярной оптике этот вопрос исследовался Эвальдом [74] и Озееном [75] (см. о их работах в книге Борна и Вольфа [76]). Ими установлена «теорема погашения», приводящая к формуле Лорентц-Лоренца. Шараповым [77] метод Эвальда применен к расчету интерференции света в тонких пластинках. Дебаем [78] введена эффективная диэлектрическая проницаемость раствора малой концентрации. Максвеллом Гарнеттом [79] (см. также [80]) формула Лорентц-Лоренца перенесена из молекулярной оптики в оптику коллоидных растворов. Оптические свойства двухмерного коллоидального покрытия, имеющего иную природу, чем подстилающая среда, исследованы Розенбергом [80, 81]. В перечисленных работах, начиная с Эвальда и Озеена, рассматриваются случаи среды с дипольно (релеевски) рассеивающими частицами. Розенбергом [32] показано, что эффективный комплексный показатель преломления рассеивающей среды может быть введен и в том случае, когда каждая частица среды характеризуется некоторой матрицей рассеяния. Финкельбергом [43] получен обобщенный вариант формулы Лорентц-Лоренца (точнее, Максвелла Гарнетта) для эффективной статической диэлектрической проницаемости эмульсии с учетом квадратичных по плотности капель членов в правой части формулы *).

Условия применимости приближения Фраунгофера к решению уравнения Д с ядром M в одногрупповом приближении накладывают ограничения на свойства рассеивающей среды (и на пройденную волной дистанцию или размер объема среды). Для выяснения этих условий рассмотрим отдельно два случая, когда рассеивающая среда неограничена и занимает полупространство или плоский слой.

В неограниченной рассеивающей среде точное решение [33, 50] уравнения Д для средней функции Грина приводит к дисперсионному уравнению

$$k^2 = k_0^2 - \tilde{\mathcal{M}}_1(k). \tag{5.4}$$

Это уравнение имеет, вообще говоря, несколько корней. Однако при условии малости производной фурье-образа ядра M по квадрату вол-

*) Об эффективной диэлектрической проницаемости непрерывной рассеивающей среды см. обзор Рыжова и Тамойкина [82].

нового числа,

$$\left|\frac{d\tilde{\mathcal{M}}_1(k)}{dk^2}\right|_{k^2=k_0^2} \ll 1, \tag{5.5}$$

основным является корень k_1, ближайший к волновому числу k_0 свободного пространства [50]. Квадрат этого корня k_1 приближенно равен при условии (5.5) его значению (5.1) в приближении Фраунгофера. Использование одного лишь корня k_1 дисперсионного уравнения (5.4), вычисленного в приближении Фраунгофера (5.1), означает пренебрежение пространственной дисперсией волн.

Согласно условию (5.5) пренебрежения пространственной дисперсией волн, фурье-образ ядра M в одногрупповом приближении должен быть достаточно гладкой функцией волнового вектора. Этому требованию можно удовлетворить в силу того, что ядро M одногруппового приближения быстро убывает при разнесении его аргументов. Конкретное значение условий пренебрежения пространственной дисперсией волн устанавливается на примере непрерывной рассеивающей среды с ядром M в приближении Бурре [54] и экспоненциальным кумулянтом потенциала. В этом случае из решения уравнения Д, найденного Татарским и Герценштейном [56, 83], следует, что дисперсионное уравнение (5.4) имеет два корня k_1 и k_2. Условие (5.5) малости производной фурье-образа ядра M принимает вид

$$\frac{l}{d} \ll 1, \tag{5.5a}$$

где l — масштаб эффективной неоднородности, для мелкомасштабных $k_0 l \ll 1$ и крупномасштабных $k_0 l \gg 1$ неоднородностей. Согласно неравенству (5.5а), масштаб l неоднородности мал по сравнению с длиной экстинкции d. При этом условии волна с волновым числом k_2 экспоненциально мала по интенсивности на расстоянии r от источника, превышающем масштаб l неоднородности, $r \gg l$.

В случае, когда у рассеивающей среды имеется граница раздела, переход от уравнения Д к уравнению Гельмгольца с эффективным комплексным показателем преломления сталкивается с проблемой граничных условий для среднего поля [84]. Эта проблема допускает простое решение, если эффективный комплексный показатель преломления среды мало отклоняется от единицы. Для непрерывной рассеивающей среды, занимающей полупространство, на границу которой падает плоская волна, согласно точному решению уравнения Д с ядром M в приближении Бурре, полученному с помощью работы [85] *), преломленное среднее поле в среде равно сумме двух волн, распространяющихся от границы раздела. Одна из этих преломленных волн при условии (5.5а) малости производной фурье-образа ядра M экспоненциально мала по интенсивности вне узкой приграничной полоски шириной порядка масштаба l неоднородности. Другая преломленная волна при дополнительном условии малости (5.3) отклонения эффективного комплексного показателя преломления от единицы имеет такой же вид, как и решение уравнения Гельмгольца с тем же эффективным показателем преломления в приближении геометрической оптики и в пренебрежении отражением и преломлением волн на границе раздела. При этом эффект среды сводится к дополнительному комплекс-

*) Вопрос о среднем поле в среде с границей раздела рассматривался многими авторами (см., например, [32, 59, 76]). Точные решения уравнения Д для непрерывной среды в виде плоского слоя или шара с ядром M в приближении Бурре найдены в работах [84, 86, 87]. В работе [85] уравнение Д для плоского слоя приведено к виду, в котором оно легко решается.

ному сдвигу фазы волны. Такой случай приближения геометрической оптики совместно с принципом Гюйгенса использовался Хюлстом [46] для исследования ослабления и аномальной дифракции света на больших сферических частицах с комплексным показателем преломления, близким к единице.

Приближение Хюлста позволяет получить простое решение задачи о когерентном рассеянии плоской волны на ограниченном объеме рассеивающей среды. Если объем имеет вид шара, радиус которого L велик по сравнению с длиной экстинкции d, $L \gg d$, то его сечение поглощения когерентного излучения стремится к геометрическому сечению πL^2. Это означает, что такой оптически глубокий шар ведет себя как черное тело [46]. В пределе черного тела сечение ослабления и полное сечение когерентного рассеяния шара равны $2\pi L^2$ и πL^2.

Если рассеивающая среда в среднем слабо неоднородна в масштабе длины волны и эффективной неоднородности, то для решения уравнения Д применим метод геометрической оптики для сред с пространственной дисперсией, разработанный Кравцовым [88].

б) Выделение эффектов расположения неоднородностей в ближней и дальней областях при частично когерентном рассеянии

Частично когерентное рассеяние волн в среде, эффективные неоднородности которой задаются ядрами M и K одногруппового приближения (4.6), описывается решением уравнения БС для ковариации поля $\Phi(\mathbf{R}, \mathbf{r})$ где $\mathbf{R}$ и $\mathbf{r}$ — координаты центра тяжести и разностные координаты точек наблюдения. Если рассеивающая среда занимает ограниченный объем, то это уравнение достаточно решить внутри среды, после чего ковариация поля вне среды находится квадратурами. Обозначим через $\Phi_0(\mathbf{R}, \mathbf{r})$ неоднородный член уравнения БС. Он представляет собой когерентную часть ковариации поля и выражается через среднее поле, которое в задаче о падении на рассеивающей объем плоской волны вычисляется в приближении Хюлста. В этом же приближении вычисляется средняя функция Грина $\mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ для распространяющегося в среде и выходящего из среды излучения.

В интегральный член уравнения БС для ковариации поля внутри среды входит билинейная комбинация средней функции Грина. Она описывает распространение взаимной когерентности поля между последовательными актами частично когерентного рассеяния на неоднородностях среды. Если неоднородности расположены друг к другу в дальней зоне, то билинейная комбинация средней функции Грина представляется разложением Фраунгофера в форме Айкена [89]

$$\mathcal{G}\left(\mathbf{R}+\frac{1}{2}\mathbf{r}\right)\mathcal{G}^*\left(\mathbf{R}-\frac{1}{2}\mathbf{r}\right)= \\ =\left[1+O\left(\frac{k_0r^3}{R^2}\right)+O\left(\frac{r^2}{Rd}\right)+O\left(\frac{r^2}{R^2}\right)\right]|\mathcal{G}(R)|^2 e^{ik_0\mathbf{sr}}, \qquad (5.6)$$

где единичный вектор $\mathbf{s}$ направлен вдоль вектора $\mathbf{R}$. Главный член этого разложения дает приближение Фраунгофера. Остальные члены представляют собой френелевские поправки. Переход в интегральном члене уравнения БС к приближению Фраунгофера для билинейной комбинации средней функции Грина при дополнительном пренебрежении изменением ковариации поля $\Phi(\mathbf{R}, \mathbf{r})$ в зависимости от координат центра тяжести $\mathbf{R}$ в масштабе эффективной неоднородности приводит к тому, что ковариация поля внутри среды допускает представление вида [71, 72]

$$\Phi(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = \Phi_0(\mathbf{R}, \mathbf{r}) + \int\limits_{4\pi} e^{ik_0\mathbf{s}\mathbf{r}} I_s(\mathbf{R}, \mathbf{s})\, d^2\mathbf{s}; \tag{5.7}$$

здесь через $I_s(\mathbf{R}, \mathbf{s})$ обозначена лучевая яркость рассеянного излучения. Она удовлетворяет уравнению переноса в интегральной форме с известным неоднородным членом, отвечающим однократному частично когерентному рассеянию ковариации $\Phi_0(\mathbf{R}, \mathbf{r})$ среднего поля, и с коэффициентами экстинкции $1/d$ и рассеяния $f(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0)$ элементарного объема, равными (4.9).

Равенство (5.7) показывает, что корреляционная функция поля внутри среды выражается через лучевую яркость рассеянного излучения соотношением типа найденного Долиным [90] *).

Вопрос об условиях применимости приближения Фраунгофера для многократного частично когерентного рассеяния волн, когда при каждом элементарном акте рассеяния на эффективной неоднородности взаимная когерентность рассеянного поля успевает принять свой асимптотический вид до следующего акта рассеяния, является не очевидным. Согласно Гнедину и Долгинову [59] и Боровому [91], эти условия для ансамбля некоррелированных частиц сводятся к требованию, что амплитуда рассеяния на изолированной частице мала по сравнению со средним расстоянием между частицами. Рязанов [92] для такого же ансамбля предполагает, что амплитуда рассеяния на изолированной частице мала по сравнению с длиной экстинкции. Согласно Ватсону [7], который рассматривает ансамбль коррелированных электронов плазмы, длина волны должна быть мала по сравнению с длиной экстинкции.

Выяснение условий применимости приближения Фраунгофера для рассмотрения частично когерентного рассеяния волн сводится к оценке вклада френелевских поправок разложения Айкена (5.6) в решение уравнения БС. Величина этого вклада определяет точность приближения Фраунгофера, которая может быть оценена, например, по погрешности вычисления в приближении Фраунгофера дифференциального сечения некогерентного рассеяния объема среды.

В каждой последовательности актов частично когерентного рассеяния на неоднородностях можно выделить эффекты расположения неоднородностей в ближней и дальней областях по отношению друг к другу с помощью некоторого параметра R_0 масштаба ближней области. Оценка показывает [93], что величина эффекта ближней области расположения неоднородностей пропорциональна отношению R_0/d масштаба R_0 этой области к длине экстинкции d. К вычислению величины эффекта дальней области расположения неоднородностей применяется приближение Фраунгофера для билинейной комбинации средней функции Грина. При этом отбрасываются френелевские поправки в разложении Айкена (5.6), относительный вклад которых порядка большей из трех величин: k_0r^3/R_0^2, r^2/R_0d, r^2/R_0^2.

Пренебрежение эффектом ближней области расположения неоднородностей и френелевскими поправками к эффекту дальней области превращает *частично когерентное рассеяние в некогерентное* и накладывает на масштаб R_0 ближней области ограничения сверху и снизу, что приводит в свою очередь к ограничениям на рассеивающую среду.

Окончательное решение вопроса о точности приближения Фраунгофера для частично когерентного рассеяния получается с помощью оценки резольвенты уравнения БС внутри рассеивающей среды. Такая оценка

*) Розенбергом [26] соотношение типа найденного Долиным получено для частично когерентного волнового поля путем пространственного усреднения функции взаимной когерентности поля по координатам центра тяжести точек наблюдения.

может быть произведена в случае оптически глубокого объема среды *) с помощью решения однородного уравнения БС в неограниченной среде [94] и теоремы Гурса о простом полюсе резольвенты [95]. В результате оказывается, что для оптически глубокого объема дискретной рассеивающей среды в виде шара радиуса L, частицы которой некоррелированы и являются слабыми рассеивателями, относительная погрешность применения приближения Фраунгофера к вычислению дифференциального сечения частично когерентного рассеяния объема среды стремится к нулю вместе с отношениями r_0/d **) и r_0/L_{Φ_0} радиуса r_0 частиц к длине экстинкции d и к масштабу L_{Φ_0} пространственной неоднородности когерентной части Φ_0 ($\mathbf{R}$, $\mathbf{r}$) ковариации поля в зависимости от координат $\mathbf{R}$ центра тяжести при ограниченных сверху отношениях k_0r_0 радиуса r_0 частиц к длине волны и L/d размера L объема среды к длине экстинкции d. При заданных отношениях r_0/d и r_0/L_{Φ_0} точность приближения Фраунгофера, согласно резольвентному методу [93] ее оценки, по мере роста величин k_0r_0 и L/d падает.

Представление (5.7) ковариации поля внутри рассеивающей среды через лучевую яркость устанавливает переход между теорией многократного рассеяния скалярных волн и классической теорией переноса. Вывод уравнения переноса поляризованного излучения из теории многократного рассеяния электромагнитных волн рассматривался частично Розенбергом [32] в случае дисперсной среды и более подробно Ватсоном [7] для плазмы с учетом корреляций электронов; Долгиновым, Гнединым и Силантьевым [96] для модели независимых рассеивателей; Апресяном [97] в непрерывной рассеивающей среде с учетом взаимной трансформации продольных и поперечных волн.

Особый интерес имеет неисследованный вопрос о применимости теории переноса для электромагнитного излучения в дискретной рассеивающей среде при плотной упаковке ее частиц [1], что реализуется, например, в порошках, минералах, биологических объектах, снеге, а также в условиях критической опалесценции. Особенностью этого случая является то, что частицы находятся в резко неоднородном поле (в неволновой зоне) и необходимо учитывать продольную составляющую поля рассеянной волны, а также весьма существенны эффекты взаимного экранирования частиц.

в) Оценка эффективного «истинного поглощения»

Величина сечения $C_{\text{эфф. ист}}$ эффективного «истинного поглощения», равного (4.10) и введенного в связи с недостатком одногруппового приближения (4.6) по отношению к закону сохранения энергии (см. раздел 4,б), выражается через резность мнимых частей средней функции Грина и функции Грина свободного пространства. Эта разность, деленная на волновое число свободного пространства, порядка отклонения эффективного показателя преломления рассеивающей среды от единицы. Более подробная оценка показывает, что для оптически глубокого объема дискретной среды в виде шара радиуса L, частицы которой некоррелированы и являются слабыми рассеивателями, отношение сечения $C_{\text{эфф. ист}}$ эффективного

*) Заметим, что полное сечение некогерентного рассеяния оптически глубокого объема среды в виде шара радиуса L ($L \gg d$), вычисленное в приближении Фраунгофера, стремится к геометрическому сечению πL^2 шара, согласно приближению Хюлста для когерентного рассеяния и оптической теореме (4.4) для рассеивающего объема.

**) Согласно Б. И. Степанову (см. [1]), условие $r_0/d \ll 1$ делает неприменимым уравнение переноса, например, к сильно поглощающим порошкам. Однако, по мнению Розенберга [1, 27], уравнение переноса может остаться верным и в этом случае, если подвергнуть входящие в него величины специальному усреднению.

«истинного поглощения» к полному сечению πL^2 некогерентного рассеяния объема стремится к нулю вместе с отклонением эффективного показателя преломления от единицы при ограниченных сверху отношениях $k_0 r_0$ радиуса r_0 частиц к длине волны и L/d размера L объема к длине экстинкции d. Отсюда следует, что условия пренебрежения эффективным «истинным поглощением» имеют такой же характер, как и условия применимости приближения Фраунгофера для частично когерентного рассеяния.

г) Рассеивающая среда с крупномасштабными неоднородностями

В случае, когда масштаб неоднородностей дискретной рассеивающей среды, определяемый размером ее частиц и масштабом их корреляций, велик по сравнению с длиной волны, при рассмотрении частично когерентного рассеяния волн можно исходить из параболического уравнения Леонтовича [98].

Параболическое уравнение приближенно заменяет уравнение Гельмгольца (3.2) и имеет вид нестационарного уравнения Шрёдингера (см. обзор [21])

$$i \frac{\partial}{\partial t} u(\rho, t) = [-\Delta + V(\rho, t)]\, u(\rho, t). \tag{5.8}$$

В нем $u(\rho, t)$ — комплексная амплитуда поля, переменная «времени» t равна $t = x/2k_0$ где x — продольная координата по отношению к первоначальному направлению распространения волны, ρ — поперечные координаты, Δ — лапласиан по поперечным координатам, $V(\rho, t)$ — потенциал рассеивающей среды, который оказывается случайной функцией поперечных координат ρ и «времени» t. Для параболического уравнения (5.8) ставится задача с «начальными» данными для комплексной амплитуды поля.

Параболическое уравнение впервые применено к исследованию распространения коротких волн в непрерывной рассеивающей среде Черновым и Долиным (см. обзор [21]). Исходя из этого уравнения и применяя асимптотическую теорию возмущений, они получили для функции взаимной поперечной когерентности комплексной амплитуды поля уравнение, совпадающее в спектральной представлении с уравнением переноса в малоугловом приближении [99, 100]. Теория переноса в малоугловом приближении просто связана с методом функций Грина и диаграммной техники Фейнмана.

Обозначим через $\gamma(\rho_1, \rho_2, t) = u(\rho_1, t)\, u^*(\rho_2, t)$ билинейную комбинацию комплексной амплитуды поля. Она удовлетворяет уравнению Лиувилля (см., например, [101]). Исходя из уравнения Лиувилля, можно записать уравнение типа Дайсона (тензорное уравнение Д) с массовым оператором (тензорное ядро M) в одногрупповом приближении типа (4.6) или [50] в случаях моделей дискретной или непрерывной рассеивающей среды для приближенного значения функции $\langle\gamma(\rho_1, \rho_2, t)\rangle$ взаимной поперечной когерентности комплексной амплитуды поля или, что то же самое, для матрицы плотности [101]; угловые скобки, как всегда, означают усреднение по ансамблю флуктуаций потенциала среды.

Допустим, что среда непрерывна и ее потенциал $V(\rho, t)$ флуктуирует по гауссову закону однородно в пространстве ρ и «времени» t и дельта-коррелирован по «времени» t. Тогда уравнение для матрицы плотности комплексной амплитуды поля, полученное Черновым и Долиным, принимает вид тензорного уравнения Д с тензорным ядром M в приближении типа Бурре [54]. Татарскому [22] удалось показать с помощью формулы Фурутсу — Новикова, что это уравнение является точным при сделанном предположении о дельта-коррелированности потенциала среды.

Результат Татарского стимулировал целый ряд исследований по распространению коротких волн в случайно-неоднородной среде, исходя из параболического уравнения. С одной стороны, приближение, использующее предположение о дельта-коррелированности потенциала среды, получило широкое развитие благодаря работам Кляцкина и Татарского (см. их обзоры [102–104]). С другой стороны, Папаниколаоу [23] на основании его совместных работ с Хершом [105, 106] методом усреднения по времени (см. также работу Папаниколаоу и Келлера [16] о двухвременном методе усреднения) и в [24, 107–109] методом мажорантного процесса снято предположение о дельта-коррелированности потенциала среды по «времени» и получены замкнутые приближенные уравнения для матрицы плотности комплексной амплитуды поля со строгой оценкой границ их применимости.

Согласно [107] такое приближенное уравнение для матрицы плотности в случае произвольного закона флуктуаций потенциала среды в пространстве и во «времени» имеет вид тензорного уравнения Д с тензорным ядром M в одногрупповом приближении типа [50] для модели непрерывной среды. С помощью этого уравнения, используя отмеченное в разделе 4,б) соотношение между одногрупповыми приближениями для массового оператора в моделях дискретной и непрерывной среды, можно исследовать условия применимости теории переноса в малоугловом приближении с точки зрения теории многократного рассеяния волн в дискретной среде, состоящей из больших по сравнению с длиной волны частиц.

Согласно работам [24, 108, 109], в случае непрерывной среды с гауссовыми крупномасштабными флуктуациями ее потенциала границы применимости теории переноса в малоугловом приближении с точки зрения параболического уравнения определяются тем, что отношение масштаба эффективной неоднородности к длине экстинкции должно быть достаточно мало при ограниченном сверху отношении пройденной волной дистанции к длине экстинкции.

С квантовомеханической точки зрения уравнение Лиувилля, следующее из уравнения Шрёдингера (5.8), описывает нестационарное частично когерентное рассеяние волнового пакета де Бройля в случайно-переменной среде [109, 110]. В этой задаче предположение о дельта-коррелированности потенциала среды по времени означает [109], что флуктуации потенциала являются быстрыми, т. е. $\omega_l t_0' \ll 1$, где ω_l — частота волны де Бройля в свободном пространстве с длиной волны порядка пространственного масштаба l флуктуаций потенциала, t_0' — временной масштаб флуктуаций потенциала *). В противоположном пределе медленных, или квазистатических в смысле Чернова [111] флуктуаций потенциала, когда выполняется условие [109] $\omega_l t_0' \gg 1$, для матрицы плотности волнового пакета в смешанном координатно-импульсном представлении Вигнера [112] получается кинетическое уравнение Больцмана, которое применялось Пайэрлсом [8] при исследовании рассеяния электронов на примесях кристаллической решетки.

6. О ПРИМЕНИМОСТИ ОДНОГРУППОВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Вопрос об условиях применимости одногруппового приближения (4.6) для ядер M и K является самым трудным при статистическом обосновании теории переноса и в настоящее время поддается исследованию только путем построения асимптотического разложения по малому параметру.

---

*) Переменная $t = (h/2m)\, t'$, где t' — время, h — постоянная Планка, m — масса рассеиваемой частицы.

Существует несколько подходов [33, 50, 56, 59, 70, 113, 114] к исследованию условий применимости одногруппового приближения для ядер M и K. Все они сводятся, в конечном итоге, к сравнению по величине отброшенных в одногрупповом приближении диаграмм Фейнмана с учтенными. Один из подходов [70] заключается в построении преобразованных рядов теории возмущений. Эти ряды, записанные для точных значений среднего поля $\langle\psi(\mathbf{r})\rangle$ и ковариации поля $\langle\psi(\mathbf{r}_1)\,\psi^*(\mathbf{r}_2)\rangle$, в символической форме имеют вид

$$\langle\psi\rangle=\varphi+\sum_n(\delta\varphi)_n\mu^n, \tag{6.1}$$

$$\langle\psi\times\psi^*\rangle=\Phi+\sum_n(\delta\Phi)_n\,\mu^n; \tag{6.2}$$

здесь главные члены $\varphi(\mathbf{r})$ и $\Phi(\mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2)$ получаются путем решения уравнений Д и БС с ядрами M и K в одногрупповом приближении, остальные члены являются поправочными, μ — малый параметр, по степеням которого расположены поправочные члены. В случае дискретной среды за μ удобно принять малый параметр разложения по кратности рассеяния на частицах среды.

Поправочные члены преобразованных рядов (6.1) и (6.2) выражаются через многогрупповые медленно убывающие диаграммы точных значений ядер M и K, которые не учитываются в одногрупповом приближении. Эти члены можно оценивать, задавшись некоторым квадратичным функционалом от среднего поля и линейным функционалом от ковариации поля. Иначе говоря, поправочные члены рядов (6.1) и (6.2) оцениваются с помощью некоторых квадратичных приемников [26, 27] когерентного и частично когерентного излучения. Если рассеивающая среда занимает ограниченный объем, на который падает плоская волна, то приемники можно расположить в дальней зоне объема. При этом для когерентного рассеяния удобно выбрать приемник, измеряющий сечение поглощения C когерентного излучения.

Для частично когерентного рассеяния существует два принципиально различных вида приемников: 1) производящих усреднение по направлениям рассеяния и 2) не производящих такого усреднения. К первому виду относится приемник, измеряющий полное сечение H частично когерентного рассеяния, и ко второму виду — измеряющий дифференциальное сечение $\widetilde{U}(\mathbf{s},\ \mathbf{s}_0)$ частично когерентного рассеяния. Принципиальное отличие двух названных видов приемников частично когерентного излучения обусловлено тем, что вклады поправочных членов ряда (6.2) в дифференциальное сечение частично когерентного рассеяния могут быстро изменяться в зависимости от направления рассеяния. Причем не исключено, что эти вклады для некоторых направлений рассеяния имеют настолько большую величину, что ими нельзя пренебречь.

а) Энергетическая эквивалентность условий применимости одногруппового приближения для когерентного и частично когерентного рассеяния

Согласно оптической теореме (4.4) для всего объема рассеивающей среды без истинного поглощения, точные значения сечения поглощения C когерентного излучения и полного сечения H частично когерентного рассеяния равны между собой. Аналогичные сечения, найденные с помощью решения уравнений Д и БС с ядрами M и K в одногрупповом приближении, которые обозначим через C_1 и H_1, связаны между собой равенством вида (4.5), где в правой части нужно заменить сечение $C_{ист}$ истинного поглощения на сечение $C_{эфф.\,ист}$ эффективного «истинного поглощения». Вычитание этих двух равенств дает

$$\delta C = \delta H, \tag{6.3}$$

где обозначено $\delta C = C - C_1 + C_{эфф.\,ист}$ и $\delta H = H - H_1$. Равенство (6.3) означает, что абсолютные погрешности δC и δH вычисления сечения поглощения когерентного излучения и полного сечения частично когерентного рассеяния с помощью уравнений Д и БС с ядрами M и K в одногрупповом приближении совпадают между собой, что выражает энергетическую эквивалентность [70] условий применимости этих уравнений *).

Для применимости уравнения БС с ядрами M и K в одногрупповом приближении следует наложить требование в соответствии с разделом 4,б) чтобы сечение $C_{эфф.\,ист}$ эффективного «истинного поглощения» было мало по сравнению с сечением поглощения C_1 когерентного излучения или с полным сечением H_1 некогерентного рассеяния, вычисленными в одногрупповом приближении. При этом требовании величины C_1 и H_1 практически совпадают между собой, что приводит к энергетической эквивалентности условий применимости уравнений Д и БС с ядрами M и K в одногрупповом приближении также и по относительным погрешностям вычисления сечения поглощения когерентного излучения и полного сечения частично когерентного рассеяния.

Сформулированная энергетическая эквивалентность говорит в пользу того соображения, что при использовании приемника частично когерентного излучения, производящего усреднение по достаточно широкому интервалу направлений рассеяния, условия применимости одногруппового приближения для частично когерентного рассеяния могут оказаться такими же, как и для когерентного рассеяния. Это соображение подтверждается работой Гнедина и Долгинова [59], согласно которой условия применимости уравнений Д и БС с ядрами M и K в модели (4.7) независимых рассеивателей одинаковы.

Приведем результат оценки относительной погрешности $\delta C/C_1$ вычисления сечения поглощения когерентного излучения в одногрупповом приближении для объема дискретной рассеивающей среды в виде шара радиуса L, состоящей из релеевских независимых рассеивателей. Одновременно приводим оценку для относительного значений $C_{эфф.\,ист}/C_1$ эффективного «истинного поглощения». При этом используется разложение величин δC и $C_{эфф.\,ист}$ в ряды по кратности рассеяния, и объем рассеивающей среды считается оптически глубоким, так что величина $C_1 \approx \approx \pi L^2$. Абсолютная погрешность δC имеет четвертый порядок малости по кратности рассеяния, и относительная погрешность $\delta C/C_1$ по порядку величины равна

$$\frac{\delta C}{C_1} \sim \frac{1}{k_0 d} \frac{L}{d}, \tag{6.4}$$

где d — длина экстинкции в модели независимых релеевских рассеивателей. Разложение сечения $C_{эфф.\,ист}$ эффективного «истинного поглощения» по кратности рассеяния начинается с членов третьего порядка малости, и с учетом еще членов четвертого порядка малости его относительное значение $C_{эфф.\,ист}/C_1$ по порядку величины равно

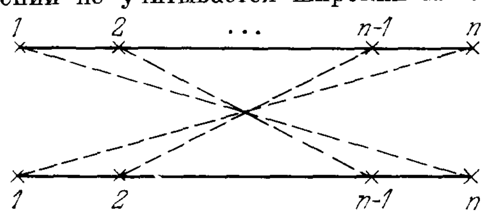
$$\frac{C_{эфф.\,ист}}{C_1} \sim \frac{|\mathscr{M}_1(k_0)|}{k_0^2} \max\left(1, \frac{L}{d}\right) \frac{L}{d}. \tag{6.5}$$

*) Здесь необходимо оговориться, что погрешность применения уравнения Д в одногрупповом приближении равна на самом деле разности $C - C_1$, а не δC.

Относительная погрешность (6.4) вычисления сечения поглощения когерентного излучения в одногрупповом приближении стремится к нулю вместе с отношением $1/k_0 d$ длины волны к длине экстинкции d при ограниченном сверху отношении L/d размера L объема среды к длине экстинкции d. Требование, согласно которому длина волны мала по сравнению с длиной экстинкции, приводится Гнединым и Долгиновым[59] *) как условие применимости уравнений Д и БС с ядрами M и K в модели (4.7) независимых рассеивателей. Относительное значение (6.5) эффективного «истинного поглощения» стремится к нулю вместе с отклонением эффективного показателя преломления рассеивающей среды от единицы при ограниченном сверху отношении размера объема среды к длине экстинкции. Это условие является более жестким, чем то, при котором мала относительная погрешность (6.4) вычисления сечения поглощения когерентного излучения.

б) Эффект циклических диаграмм при частично когерентном рассеянии в направлении «назад»

При оценке точности уравнения БС с ядрами M и K в одногрупповом приближении по погрешности вычисления дифференциального сечения частично когерентного рассеяния объема среды получается совсем иной результат, чем при оценке по погрешности вычисления полного сечения. Это связано с тем, что в выражении для ядра K в одногрупповом приближении не учитывается широкий класс циклических[115] многогрупповых



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Рис. 1.

медленно убывающих диаграмм, дающих существенный вклад в частично когерентное рассеяние в направлении «назад». Такая роль циклических диаграмм была замечена Гнединым и Долгиновым[59] в явлениях квантово-механического рассеяния потока частиц на независимых силовых центрах, Руффиным и де Вольфом[116] при рассеянии электромагнитных волн турбулентной плазмой, Ватсоном[7] при рассеянии электромагнитных волн попарно коррелированными электронами плазмы, де Вольфом[117] **) при рассеянии коротких электромагнитных волн турбулентной средой (рис. 1, 2).

Циклические диаграммы изображены на рис. 1. На этом рисунке два креста, соединенные штриховой линией, изображают оператор интенсивности K_1 одногруппового приближения, горизонтальные сплошные линии верхнего и нижнего рядов — среднюю функцию Грина $\mathcal{G}$, удовлетворяющую уравнению Д с массовым оператором M_1 одногруппового приближения, и ее комплексно-сопряженное значение $\mathcal{G}^*$. Соединение крестов верхнего и нижнего рядов производится согласно циклической подста-

*) В этой работе дана типологическая классификация широкого класса диаграмм для частично когерентного рассеяния и произведена их оценка по порядку величины.

**) В связи с этой работой де Вольфа см. статьи Виноградова, Кравцова, Татарского[118, 119].

новке, записанной справа от диаграммы. Придавая числу n значения $n = 2, 3, \ldots$, получаем всю совокупность циклических диаграмм.

Циклические диаграммы, как и все остальные, входящие в состав оператора интенсивности, являются сильно связными. Однако они обладают тем свойством, что в определенном смысле эквивалентны слабо связным диаграммам. Эта эквивалентность устанавливается путем присоединения к циклической диаграмме внешних горизонтальных линий $\mathcal{G}$ и $\mathcal{G}^*$, что дает диаграмму *а*) на рис. 2, где для простоты положено $n = 2$. С помощью свойств взаимности для средней функции Грина $\mathcal{G}$ и ядра K_1 можно произвести преобразование инверсии верхнего или нижнего рядов. При таком преобразовании, например, верхнего ряда нижний

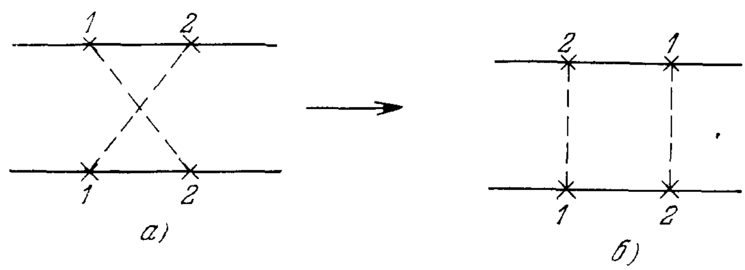


Рис. 2.

ряд остается неподвижным, а верхний поворачивается без разрыва штриховых линий на 180° в плоскости, перпендикулярной к плоскости чертежа. В результате диаграмма рис. 2, *а* переходит в диаграмму рис. 2, *б*.

Обозначим через $(4\pi)^{-2}\, \widetilde{U}_{\text{цикл}}(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0)$ вклад циклических диаграмм в дифференциальное сечение частично когерентного рассеяния объема среды. В приближении теории возмущений этот вклад для направления рассеяния «назад», $\mathbf{s} = -\mathbf{s}_0$, имеет простой вид [7, 115]

$$\widetilde{U}_{\text{цикл}}(-\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_0) = \widetilde{U}_1'(-\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_0), \tag{6.6}$$

где $U_1'(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0)$ — дифференциальное сечение частично когерентного рассеяния, вычисленное с помощью уравнения БС с ядрами M и K в одногрупповом приближении, за вычетом однократного частично когерентного рассеяния.

Равенство (6.6) означает, что уравнение БС с ядрами M и K в одногрупповом приближении дает заниженное значение для сечения частично когерентного рассеяния в направлении рассеяния «назад». Этот недостаток уравнения БС в одногрупповом приближении полностью вскрывается на одномерной модели рассеивающей среды, где при каждом элементарном акте рассеяния волна рассеивается только вперед или назад. Как показано Газаряном [15] и авторами [16–19], среднее значение квадрата модуля коэффициента отражения слоя одномерной рассеивающей среды стремится к единице согласно решению уравнения Гельмгольца экспоненциально с увеличением толщины слоя, а согласно решению уравнения БС с ядрами M и K к одногрупповом приближении и решению [14] уравнения переноса — степенным образом.

В трехмерной задаче рассеяния суммарный вклад всех циклических диаграмм в дифференциальное сечение частично когерентного рассеяния быстро изменяется в зависимости от направления рассеяния [115]. Пусть эффективные неоднородности рассеивающей среды с ядрами M и K в одногрупповом приближении являются мелкомасштабными. Тогда при отклонении от направления рассеяния «назад» на угол θ относительный вклад циклических диаграмм в дифференциальное сечение частично когерентного рассеяния объема среды, размер которого L мал по сравнению с длиной экстинкции d, $L \ll d$, убывает как $1/(\theta k_0 L)$, т. е. мал вне конуса направлений рассеяния «назад» шириной порядка отношения длины волны к размеру рассеивающего объема. Относительный вклад циклических диаграмм в полное сечение частично когерентного рассеяния объема малой оптической глубины оценивается величиной порядка отношения $1/k_0 L$ длины волны к размеру объема. Если рассеивающая среда занимает полупространство, на границу которого нормально падает плоская волна, то при отклонении от направления рассеяния «назад» на угол θ относительный вклад циклических диаграмм в плотность потока энергии рассеянного излучения убывает как $1/(\theta k_0 d)^2$, т. е. мал вне конуса направлений рассеяния «назад» шириной порядка отношения длины волны к длине экстинкции. Относительный вклад циклических диаграмм в полный поток энергии рассеянного полупространством излучения порядка величины $(k_0 d)^{-2} \ln (k_0 d)$ и стремится к нулю вместе с отношением длины волны к длине экстинкции.

Эти результаты оценок относительного вклада циклических диаграмм в дифференциальное и полное сечения частично когерентного рассеяния объема среды говорят в пользу того соображения, что в трехмерной задаче многократного рассеяния при использовании приемника частично когерентного излучения, производящего усреднение по достаточно широкому интервалу направлений рассеяния, эффект многогрупповых диаграмм ядер M и K в частично когерентном рассеянии будет иметь не столь существенное значение, как в случае одномерной задачи рассеяния.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложенный в данном обзоре метод групповых разложений оптических свойств эффективной неоднородности случайной среды при многократном рассеянии волн, приводящий к фотометрической теории переноса излучения, имеет весьма общий характер и позволяет единым образом рассматривать большое число явлений. Так, например, Бурре [54] этим методом рассмотрены распространение волн и молекулярная диффузия в турбулентной среде. Кубо [120], используя, по сути дела, приближение Бурре [54]. предложил подход к исследованию броуновского движения (в частичности, частицы, взаимодействующей с системой свободных рассеивателей термостата), исходя из стохастического уравнения Лиувилля. В работе [121] (см. также [16]) метод групповых разложений применен к исследованию параметрического резонанса в колебательной системе со случайными параметрами без использования предположения [103] о дельта-коррелированности этих параметров во времени. С помощью метода групповых разложений может быть рассмотрен также вопрос о соотношениях взаимности в теории переноса светового излучения в случайно-переменной среде, исследованный Розенбергом [122] другим способом.

Значительный интерес представляет рассмотрение [109, 110] нестационарного многократного частично когерентного рассеяния волновых пакетов в случайно-переменной среде в пределе квазистатических [111] флуктуаций ее потенциала. Результаты этих работ открывают, по-видимому, принципиальную возможность строгого обоснования метода групповых разложений в применении к стационарному многократному частично когерентному рассеянию волн в случайно-неоднородной среде.

Автор приносит глубокую благодарность Г. В. Розенбергу за обстоятельные беседы по основным вопросам теории переноса и существенные критические замечания по рукописи, а также С. М. Рытову, Л. А. Чернову, В. И. Татарскому, Ю. А. Кравцову за обсуждение некоторых вопросов, затронутых в обзоре.

ВНИИ метрологической службы

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Г. В. Розенберг, УФН 69, 57 (1959).
2. Г. В. Розенберг, УФН 91, 569 (1967).
3. В. А. Амбарцумян, Э. Р. Мустель, А. Б. Северный, В. В. Соболев, Теоретическая астрофизика, М., Гостехиздат, 1952.
4. В. В. Соболев, Курс теоретической астрофизики, М., «Наука», 1967.
5. В. П. Скрипов, Метастабильная жидкость, М., «Наука», 1972.
6. Физика простых жидкостей, ч. 2 — Экспериментальные исследования, М., «Мир», 1973.
7. K. M. Watson, J. Math. Phys. 10, 688 (1969).
8. Р. Пайэрлс, Квантовая теория твердых тел, М., ИЛ, 1956.
9. Б. Дэвисон, Теория переноса нейтронов, М., Атомиздат, 1960.
10. Н. Бор, Прохождение атомных частиц через вещество, М., ИЛ, 1950.
11. Э. Ферми, Ядерная физика, М., ИЛ, 1951.
12. Б. Росси, К. Грейзен, Взаимодействие космических лучей с веществом, М., ИЛ, 1948.
13. С. Чандрасекар, Перенос лучистой энергии, М., ИЛ, 1953.
14. В. В. Соболев, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, М., Гостехиздат, 1956.
15. Ю Л. Газарян, ЖЭТФ 56, 1856 (1969).
16. G. Papanicolaou, J. B. Keller, SIAM J. Appl. Math. 21, 287 (1971).
17. G. C. Papanicolaou, ibid., p. 13.
18. В. И. Гельфгат, Акуст. ж. 18, 31 (1972).
19. Ю. А. Рыжов, Изв. вузов, сер. «Радиофизика» 16, 1240 (1973).
20. W. Kohler, G. C. Papanicolaou, J. Math. Phys. 14, 1733 (1973).
21. Ю. Н. Барабаненков, Ю. А. Кравцов, С. М. Рытов, В. И. Татарский, УФН 102, 3 (1970).
22. В. И. Татарский, ЖЭТФ 56, 2106 (1969).
23. G. C. Papanicolaou, J. Math. Phys. 13, 1912 (1972).
24. Ю. Н. Барабаненков, Изв. вузов, сер. «Радиофизика» 16, 1071 (1973).
25. А. П. Иванов, Оптика рассеивающих сред, Минск, «Наука и техника», 1969.
26. Г. В. Розенберг, Опт. и спектр. 28, 392 (1970).
27. Г. В. Розенберг, в кн. Теоретические и прикладные проблемы рассеяния света, Минск, «Наука и техника», 1971, стр. 159.
28. G. V. Rosenberg, Appl. Opt. 12, 2855 (1973).
29. Г. В. Розенберг, Канд. диссертация (Институт теоретической геофизики, 1946).
30. Г. В. Розенберг, УФН 56, 77 (1955).
31. В. В. Соболев, Изв. АН СССР, сер. «География и геофизика» 8, 273 (1944).
32. Г. В. Розенберг, Докт. диссертация (ИФА АН СССР, 1954).
33. U. Frisch, Ann. d'Astrophys. 30, 565 (1967).
34. Ю. Н. Барабаненков, В. М. Финкельберг, цит. в [27] сборник, стр. 171.
35. U. Frisch, Ann. d'Astrophys. 29, 645 (1966).
36. Е. Я. Хруслов, Вестн. Харьковск. ун-та, сер. мех.-матем., № 34, 14 (1970).
37. К. С. Шифрин, Рассеяние света в мутной среде, М., Гостехиздат, 1951.
38. О. А. Гермогенова, Изв. АН СССР, сер. «Физика атмосферы и океана» 1, 227 (1965).
39. А. П. Иванов, А. Я. Хайруллина, Опт. и спектр. 23, 158 (1967).
40. А. П. Иванов, А. Я. Хайруллина, Т. Н. Харькова, ilid. 28, 380 (1970).
41. А. Я. Хайруллина, А. П. Иванов, ibid., стр. 513.
42. М. Гольдбергер, К. Ватсон, Теория столкновений, М., «Мир», 1967.
43. В. М. Финкельберг, ЖТФ 34, 509 (1964).
44. В. И. Татарский, ЖЭТФ 46, 1399 (1964).
45. Х. Хёнл, А. Мауэ, К. Вестпфаль, Теория дифракции, М., «Мир», 1964.
46. Г. ван де Хюлст, Рассеяние света малыми частицами, М., ИЛ, 1961.
47. L. L. Foldy, Phys. Rev. 67 (3/4), 107 (1945).
48. Д. Гиршфельдер, Ч. Кертисс, Р. Берд, Молекулярная теория газов и жидкостей, М., ИЛ, 1961.
49. Р. Л. Стратонович, Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике, М., «Сов. радио», 1961.

50. В. М. Финкельберг, ЖЭТФ 53, 401 (1967).
51. M. Lax, Rev. Mod. Phys. 23, 287 (1951).
52. R. Fürth, C. L. Williams, Proc. Roy. Soc. A224, 104 (1954).
53. О. А. Гермогенова, Изв. АН СССР, сер «Физика атмосферы и океана» 11, 290 (1966).
54. R. C. Bourret, Nuovo Cimento 26, 1 (1962).
55. K. Furutsu, J. Res. NBS D67, 303 (1963).
56. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, М., «Наука», 1967.
57. Г. И. Овчинников, Изв. АН СССР, сер. «Физика атмосферы и океана» 10, 88 (1974).
58. Л. А. Апресян, Изв. вузов, сер. «Радиофизика» 17, 165 (1974).
59. Ю. Н. Гнедин, А. З. Долгинов, ЖЭТФ 45, 1136 (1963).
60. Ю. Н. Барабаненков, В. М. Финкельберг, Изв. вузов, сер. «Радиофизика» 11, 719 (1968).
61. S. Rosenbaum, in: Proc. of the Symposium on Turbulence of Fluids and Plasmas, Brooklyn (N. Y.), Polytechnic Press, 1969.
62. О. А. Гермогенова, ДАН СССР 149, 76 (1963).
63. М. А. Леонтович, Статистическая физика, М.—Л., Гостехиздат, 1944.
64. И. Л. Фабелинский, Молекулярное рассеяние света, М., «Наука», 1965.
65. С. М. Рытов, ЖЭТФ 33, 514, 669 (1957).
66. W. Trinks, Ann. d. Phys. 22, 561 (1935).
67. О. А. Гермогенова, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 4, 648 (1963).
68. U. Frisch, in: Probabilitistic Methods in Applied Mathematics, v. 1, N. Y.—L., Academic Press, 1968.
69. M. S. Howe, Phil. Trans. Roy. Soc. 274, 39 (1973).
70. Ю. Н. Барабаненков, Изв. вузов, сер. «Радиофизика» 17, 113 (1974).
71. Ю. Н. Барабаненков, В. М. Финкельберг, ЖЭТФ 53, 978 (1967).
72. Ю. Н. Барабаненков, А. Г. Виноградов, Ю. А. Кравцов, В. И. Татарский, Изв. вузов, сер. «Радиофизика» 15, 1852 (1972).
73. Г. И. Овчинников, Радиотехн. и электрон. 18, 2044 (1973).
74. P. P. Ewald, Ann. d. Phys. 49 (1), 1 (1916).
75. C. W. Oseen, ibid. 48 (17), 1(1915).
76. М. Борн, Э. Вольф, Основы оптики, М., «Наука», 1970.
77. Н. М. Шарапов, Уч. зап. Свердловск. гос. ун-та, № 2, 97 (1937); № 3, 37 (1941).
78. P. Debye, J. Phys. Chem. 51, 18 (1947).
79. J. C. Maxwell Garnett, Phyl. Trans. Roy. Soc. A203, 385 (1904); A205, 237 (1906).
80. Г. В. Розенберг, Оптика тонкослойных покрытий, М., Физматгиз, 1958.
81. Г. В. Розенберг, в кн. Труды Московск. вечернего машиностроит. ин-та», вып. 2, М., «Сов. наука», 1955, стр. 290.
82. Ю. А. Рыжов, В. В. Тамоикин, Изв. вузов сер. «Радифизика» 13, 356 (1970).
83. В. И. Татарский, М. Е. Герценштейн, ЖЭТФ 44, 676 (1963).
84. J. B. Keller, P. Chow, I. Kupiec, L. B. Felsen, S. Rosenbaum, Radio Sci. 4, 1067 (1969).
85. Ю. Н. Барабаненков, Изв. вузов, сер. «Радиофизика» 11, 579 (1968).
86. Г. А. Пономарев, Н. А. Симакова, В. П. Якубов, ibid. 14, 72 (1971).
87. Г. А. Пономарев, В. П. Якубов, ibid. стр. 293.
88. Ю. А. Кравцов, ibid. 11, 1582 (1968).
89. R. T. Aiken, Bell Syst. Thech. J. 48, 1129 (1969).
90. Л. С. Долин, Изв. вузов, сер. «Радиофизика» 7, 559 (1964).
91. А. Г. Боровой, Изв. вузов, сер. «Физика», № 4, 97 (1967).
92. М. И. Рязанов, в кн. Прохождение излучения через вещество, М., Атомиздат, 1968, стр. 91.
93. Ю. Н. Барабаненков, Изв. вузов, сер. «Радиофизика» 18, 716 (1975).
94. Ю. Н. Барабаненков, ibid. 12, 894 (1969).
95. Э. Гурса. Курс математического анализа, т. III, ч. 2, М.—Л., Гостехиздат, 1934.
96. A. Z. Dolginov, Yu. N. Gnedin, N. A. Silant'ev, J. Quantit. Spectr. and Rad. Transfer 10, 707 (1970).
97. Л. А. Апресян, Изв. вузов, сер. «Радиофизика» 16, 461 (1973).
98. М. А. Леонтович, Изв. АН СССР, сер. физ., № 8, 16 (1944).
99. H. Bremmer, J. Res. NBS D68, 967 (1964).
100. Л. С. Долин, Изв. вузов, сер. «Радиофизика» 7, 380 (1964).
101. Д. И. Блохинцев, Основы квантовой механики, М., «Высшая школа», 1963.
102. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, Изв. вузов, сер. «Радиофизика» 15, 1433 (1972).

103. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, УФН **110**, 499(1973).
104. В. И. Кляцкин, Изв. вузов, сер. «Радиофизика» **16**, 1629 (1973).
105. G. C. Papanicolaou, R. Hersh, Indiana Univ. Math. J. **21**, 815 (1972).
106. R. Hersh, G. C. Papanicolaou, Comm. Pure and Appl. Math. **25**, 337 (1972).
107. Ю. Н. Барабаненков, Изв. вузов, сер. «Радиофизика» **16**, 1249 (1973).
108. Ю. Н. Барабаненков, в кн. VI Всесоюзный симпозиум по дифракции и распространению волн (Ереван, октябрь 1973 г.). Краткие тексты докладов, кн. 1, Ереван, Отдел научных изданий ВНИИРИ, 1973, стр. 298.
109. Ю. Н. Барабаненков, Изв. вузов, сер. «Радиофизика» 18, 253, (1975).
110. J. M. Besieris, F. D. Tappet, J. Math. Phys. **14**, 1829 (1973).
111. Л. А. Чернов, Распространение волн в среде со случайными неоднородностями, М., Изд-во АН СССР, 1958.
112. E. Wigner, Phys. Rev. **40**, 749 (1932).
113. И. В. Андреев, ЖЭТФ **48**, 1435 (1965).
114. Ю. Н. Барабаненков, Изв. вузов, сер. «Радиофизика» **15**, 66, 918, 1220 (1972).
115. Ю. Н. Барабаненков, ibid. **16**, 88 (1973).
116. R. S. Roffine, D.A. de Wolf, J. Geophys.Res. **70**, 4313 (1965).
117. D. A. de Wolf, IEEE Trans. Antennas and Propagation **AP-19**, 254 (1971).
118. А. Г. Виноградов, Ю. А. Кравцов, В. И. Татарский, Изв. вузов, сер. «Радиофизика» **16**, 1064 (1973).
119. А. Г. Виноградов, Ю. А. Кравцов, ibid., стр. 1055.
120. R. Kubo, J. Math. Phys. **4**, 174 (1963).
121. Ю. Н. Барабаненков, Изв. вузов, сер. «Радиофизика» **17**, 981 (1974).
122. Г. В. Розенберг, Изв. АН СССР, сер. «Физика атмосферы и океана» **10**, 1266 (1974).