536.76(049.3)

АКТУАЛЬНЫЙ ТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Ф. Дайсон, Э. Монтролл, М. Кац, М. Фишер. Устойчивость и фазовые переходы. М., «Мир», 1973, 373 с.

Последнее время в западной литературе наметилась тенденция издания по актуальным и нерешенным проблемам тематических подборок, разделы которых написаны ведущими специалистами, активно работающими по проблематике раздела. С одной стороны, это отражает факт специализации даже в рамках одной проблемы («специалист» по точным решениям может не заниматься аппроксимациями и приложениями, например), с другой — это позволяет добиться существенного выигрыша в оперативности информации по проблеме в целом. Мне представляется, что явление это положительное; надо приветствовать как перевод и издание такого рода сборников, так и составление, перевод и издание тематически однородных подборок. Рецензируемое издание принадлежит к последнему типу. Надо отдать должное составителям этого сборника: тематика его весьма актуальна и еще долго будет актуальна. Удачно найдено заглавие сборника, хотя необходимо со всей определенностью подчеркнуть, что проблема, вынесенная в заглавие сборника, еще далека от своего решения и материал сборника прекрасно иллюстрирует те трудности, с которыми приходится столкнуться при попытках последовательного ее анализа.

Лекции Дайсона посвящены проблеме столь же фундаментальной, сколь и сложной: проблеме построения строгого доказательства устойчивости системы, состоящей из положительных и отрицательных частиц («ядер и электронов»), взаимодействующих по закону Кулона, причем массы и заряды «электронов» ограничены и для них справедливы правила запрета. Такая система взаимодействующих частиц с полным правом моделирует реальное вещество. Нам представляется целесообразным проследить детально ход рассуждений Дайсона. Помимо того, что это поучительно, он хорошо иллюстрирует, как тяжело бывает иногда обосновать вроде бы очевидные вещи.

Определенной предпосылкой постановки проблемы явилось полуинтуитивное рассмотрение Фишера и Рюэля, однако строгое количественное обсуждение различных ее аспектов,— безусловно, заслуга Дайсона. Основное достижение Дайсона заключается в исследовании правил запрета. В первых двенадцати разделах детально разбирается ситуация, когда система кулоновских частиц не подчиняется правилам запрета. Теоремами 7 и 8 устанавливаются первые грубые оценки для энергии основного состояния ($E_7 > -A_2N^3$, $E_8 > -A_3N^2$), одна из основных оценок работы $E_3 > -A_3N^{5/3}$ получена в теореме 3, доказательство которой потребовало предварительного доказательства трех лемм: леммы Онсагера (леммы 1), дающей оценку энергии взаимодействия каждого из N зарядов с остальными $(N-1)$ через энергию взаимодействия ближайших соседей, леммы 5, в которой наинизшее собственное значение энергии в кулоновском потенциале оценивается суммой энергий в приближениях сильной и слабой связи и леммы 6, где получена оценка для полного числа точек r_j $(1 \leqslant j \leqslant N)$, 1-й, . . ., p-й, . . ., q-й ближайший сосед которых располагается в точке r_l. Эти леммы позволяют оценить потенциальную энергию системы W ($W > (-2/3)\, e^2 \times (3N)^{4/3} \sqrt{15T}$, где T — средняя кинетическая энергия на частицу). Последующая минимизация оценки для полной энергии $\langle \mathscr{H} \rangle$ снизу ($\langle \mathscr{H} \rangle \geqslant (\hbar^2 NT/2m) + w$) приводит к оценке E_3 по теореме 3. В качестве «бокового» ответвления проблемы устойчивости Дайсон разбирает в разделе 7 вопрос о получении наинизшей собственной энергии системы вариационным методом, базирующемся на модельном гамильтониане, «обрабатываемом» $u - v$ преобразованием Боголюбова. Введение «фона» компенсирующего заряда облегчает получение оценок, но требует в свою очередь более тщательного обсуждения роли корреляционных эффектов. В таком подходе, выводы его суммируются теоремами 5 и 6, удается избежать учета эффектов экранировки в грубых рамках леммы Онсагера и улучшить оценку E_3 ($E_3' \geqslant -A_3'N^{7/5}$). Нам представляется, что на пути построения оценок, полученных на базе модельных гамильтонианов, аппроксимирующих свойства реального вещества, возможно и удасться откликнуться на призыв Дайсона: разобрать «...всю проблему в целом с иной, новой точки зрения», что позволит улучшить доказательство устойчивости вещества, намеченное им в разделах 13—21 лекций. Свое доказательство здесь он строит, прямо обобщая подход, развитый применительно к доказательству теоремы 3. В том случае, когда все частицы системы подразделяются на q классов, в каждом из которых частицы подчиняются правилу запрета, довольно просто получить нужную оценку E_2 ($E_2 \geqslant -A_2(q)\, q^{2/3} N$ Ry), что составляет содержание теоремы 2 (разделы 13—17). Для случая $q > 2$ понадобилось «попутно» доказать еще три леммы (леммы 8—10), дающие возможность оценить потенциальную энергию через кинетическую. Для $q = 2$ дело обстоит несколько проще: среднее расстояние между ближайшими соседями допускает следующую оценку:

$(1/N)\sum_j R_j^{-1} \leqslant (5/2)\sqrt{15T}$ (лемма 11), что дает для $A_2(q=2) \approx 100$, $A_2(q>2) \approx$ ≈ 500. Естественно, и $A_2(q=2) \approx 100$, и $A_2(q>2) \sim 500$ на два порядка выше «реально ожидаемых» значений $A_2 \sim 1$. Заключительные пять разделов (17—21) содержат доказательство устойчивости системы частиц, в которой правила запрета действуют лишь для отрицательных зарядов. Основная трудность здесь в аккуратной оценке взаимодействия между квантованной системой «электронов» и «ядрами», которые можно рассматривать как точечные классические заряды, расположенные в точках. Путем весьма трудоемких и нетривиальных обобщений лемм 1, 5, 6, охарактеризованных выше, Дайсон приходит к их аналогам (леммы 18, 14—17), дающим возможность оценить потенциальную энергию и доказать основную теорему лекций — теорему 4: $E_4 \geqslant -A_4(q)\, q^{2/3} N$ Ry, $A_4(q) \sim 4\cdot 10^{14}$ (!). Естественно, и это подчеркнуто самим Дайсоном, численные оценки $A_i(q)$ в теоремах 2 и 4 свидетельствуют о том, что настоятельно необходимо отыскивать новые пути доказательства проблемы устойчивости; весьма загрубляет оценки и использование леммы Онсагера. Это, конечно, ни в коей мере не умаляет значимости и значения подхода, развитого в лекциях. Построены лекции с методической стороны поучительно: начиная разбирать конкретный вопрос, Дайсон не брезгует оценками «на пальцах», дающими в его руках, как правило, результаты нужного порядка величины. Далее, мастерски используя точные оценки, он обсуждает, что «остается» от таких правдоподобных рассуждений, формулируя «почти точные» выводы в виде предположений (это, так сказать, желаемые математические оценки, которые вроде бы диктуются «физикой дела»). Большинство физиков вполне было бы удовлетворено этим, однако Дайсон в заключение отмечает, что такие-то и такие-то предположения оказались неправильными; впечатляюще иллюстрируется им (в разделе II), что точное неравенство куда полезнее «почти всегда» справедливого равенства. Словом, изучая данные лекции, невольно проникаешься стилем этого выдающегося ученого, стилем который предъявляет повышенные требования к строгости исследования как по форме, так и по существу дела.

Дайсон редко излагает результаты своих исследований подробно, и нам представляется, что данные лекции будут с интересом и пользой изучены всеми без исключения физиками-теоретиками.

Э. Монтролл является выдающимся мастером «по прояснению» сложных методов получения точных результатов в модели Изинга. Специалистам хорошо известен его обзор 1953 г. (совместно с Д. Ньюэллом), являющийся до сих пор «ключом» к оригинальным исследованиям Онсагера и Янга. Обзор, вошедший в рецензируемое издание, дополняет несколько более абстрактный раздел по статистике решеток в сборнике «Прикладная комбинаторная математика» (М., «Мир», 1968), написанный также Монтроллом. В первых четырех разделах данных лекций автор кратко излагает известные устоявшиеся результаты: критические индексы, эквивалентность различных физических задач статистики с двумя состояниями модели Изинга, матричный и комбинаторный подходы к нахождению решения модели Изинга. Конец четвертого раздела и пятый раздел посвящены димерной формулировке модели Изинга. Сама задача о числе способов размещения двухатомных молекул на однородной поверхности, проводимого так, чтобы каждая молекула (димер) занимала два соседних узла, была поставлена в конце тридцатых годов Рашбруком и Фаулером. Окончательное решение проблемы нахождения производящей функции в задаче о димерах было дано Кастеляйном, воспользовавшимся техникой пфаффианов. В своих лекциях Монтролл в достаточной мере просто поясняет эти результаты. Воспользовавшись далее тем, что производящая функция димеров для декарированной квадратной решетки однозначно соотносится статистической сумме решетки Изинга, автор получает известный результат Онсагера. Помимо этого, подход, основанный на вычислении производящей функции димеров, позволяет, как кратко пояснено в лекциях, без затруднений получить результат Фишера, касающийся статистической суммы для плоской гексогональной решетки. В заключительном шестом разделе Монтролл описывает использование пфаффианов для вычисления некоторых корреляторов и спонтанной намагниченности для плоских решеток. Несмотря на большое педагогическое мастерство автора и блестящее владение материалом, изучение пятого и шестого разделов лекций довольно трудно. И это не удивительно. На русском языке практически нет хорошего подробного изложения методов расчета термодинамических величин и корреляторов плоских решеток (того материала, что содержится в учебниках Хилла, Хуанга, Ландау и Лифшица, а также отрывочных сведений из небольших монографий М. Фишера и Г. Стенкли, явно недостаточно). Нам представляется, что это большой пробел: помимо познавательного значения, владение этими строгими методами и результатами их применения в простейших нетривиальных моделях статистической механики становится совершенно необходимым для успешной работы над новейшими проблемами физики. Они находят и новые неожиданные применения (так, в частности, метод матрицы перехода Крамерса — Ванье в формулировке Онсагера был успешно применен недавно Вильсоном в решеточном подходе к полевым теориям).

Лекции М. Каца «Математические механизмы фазовых переходов» посвящены популяризации подхода к построению теории фазовых переходов, прокламируемому им примерно с 1959 г. (см., например, приложение к книге М. Каца «Вероятность и смежные вопросы физики» (М., «Мир», 1966)). В данных лекциях М. Кац добился исключительно ясного изложения, которое хорошо освещает как сильные, так и слабые стороны подхода. Основные этапы здесь всегда одинаковы: выбор определенного вида взаимодействия (большого, но конечного радиуса γ^{-1}) позволяет представить статистическую сумму Q_N в виде многократной свертки однотипных сомножителей, зависящих от «координат» двух точек, что отражает марковость процесса, явное суммирование по дискретным переменным и естественные ухищрения сводят задачу вычисления Q_N к задаче вычисления (N — 1) итерации некоторой симметричной положительно определенной функции, которая рассматривается затем как ядро однородного интегрального уравнения типа Фредгольма, асимптотическое поведение при $N \to \infty$ собственных значений которого и определяет поведение свободной энергии. Математической подосновой механизма фазовых переходов по М. Кацу является асимптотическое вырождение (при $T < T_c$) собственных значений некоего линейного оператора. То, что дело обстоит «почти» так, автор в рамках вышеочерченной схемы показывает, исследуя соответствующие интегральные уравнения при $\gamma \ll 1$ — именно в этом пункте и заключена приближенность предполагаемой схемы. Особняком стоит случай $\gamma \to 0$. Здесь всегда, при естественном ограничении на взаимодействие, мы приходим к ситуации «молекулярного поля» Кюри—Вейсса. Кац полагает, приводя, как нам кажется, достаточно убедительные количественные доводы, что случай конечных γ и результаты определенным образом сформулированного предельного перехода $\gamma \to \infty$, позволяющего перейти от его модели к плоской модели Изинга, качественно не слишком сильно отличаются друг от друга (во всяком случае меньше, нежели качественно отличный от них случай $\gamma \to 0$). То обстоятельство, подчеркиваемое автором, что вводимые им линейные операторы не имеют ясного физического смысла, не представляется нам столь существенным. В целом ясное и простое изложение математической подосновы фазовых переходов, данное М. Кацем, как нам кажется, должно быть по достоинству оценено всеми.

Завершают данный сборник лекции М. Фишера на 51-й школе «Э. Ферми» (август 1970, Варенна) *). Они посвящены в основном критическому анализу как фундаментальных вопросов, касающихся гипотезы подобия, так и возможных рабочих формул, получаемых в ее рамках. Материал этих лекций хорошо дополняет соответствующие разделы недавно переведенной книги Г. Стенли «Фазовые переходы и критические явления» (М., «Мир», 1973) **). В первых трех разделах лекций анализируется, насколько можно выйти за рамки чисто степенной зависимости; с ней тесно связаны аналитичность скейлинговой функции и эквивалентность различных формулировок скейлинга (относительно выбора «основных» переменных). В своей количественной формулировке гипотезы однородности Фишер решительно отдает предпочтение выбору в качестве основных переменных полей $\delta\mu, \delta\rho(1 - (T_c/T))$, если говорить о жидкости, мотивируя это тем, что соответствующий термодинамический потенциал является выпуклой функцией этих переменных, и тем, что в сосуществующих фазах они одинаковы. Особую ценность представляют на наш взгляд разделы, посвященные капельной модели и параметрическому скейлингу. Если в первом случае удается рассчитать критические индексы (это кратко поясняется здесь), то во втором случае параметрическое представление — серьезным обоснованием его является, на наш взгляд, уравнение состояния, предложенное А. А. Мигдалом (1972),— позволяет построить уравнение состояния, естественным образом приводящее к несимметрии амплитуд теплоемкости (последнее экспериментально наблюдено для ^{4}He и Ar). С формальной точки зрения параметрическое представление означает просто введение полярных координат на плоскости $\delta\mu$, τ, характерные линии в которых суть критическая изотерма, критическая изохора и кривая состояния. Такое, искусственное на первый взгляд распространение гипотезы подобия на термодинамические переменные имеет на самом деле четкую физическую подоснову, вскрытую в упомянутой работе А. А. Мигдала (ЖЭТФ 62 (1972)), и заслуживает самого пристального изучения. Обсуждены в лекциях М. Фишера и эффекты, осложняющие ситуацию при приближении к критической точке: неустановившееся равновесие, размеры образца, примеси, колебания решетки. Постановка вопросов здесь чисто качественная, что, к сожалению, вполне отвечает положению дела на современном этапе. А проблема эта, как нам представляется, одна из центральных: при $\tau \leqslant 10^{-4}$ эффективно начинают работать эти «маскирующие» эффекты (уместно отметить дополнительно гравитацию, количественный механизм действия которой также еще не прояснен), без выяснения количественного влияния которых всегда остается место сомнениям по поводу правомочности гипотезы скейлинга. Критический анализ, предпринятый М. Фишером полезен и с этой точки зрения.

*) В издательстве «Мир» подготавливается подборка переводов, достаточно полно освещающая тематику этой школы.

) См. рецензию на эту книгу: УФН **113, 189 (1974).

В заключение хотелось бы отметить хороший перевод и тщательное редактирование рецензируемой подборки. Она несомненно окажется полезной весьма широкому кругу лиц: от физиков-теоретиков до физиков-химиков, интересующихся современным состоянием теории критических явлений.

В. К. Федянин