1975 г. Июнь Том 116, вып. 2

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

538.566(018)

НЕКОТОРЫЕ «ПАРАДОКСЫ ДВИЖУЩИХСЯ ГРАНИЦ» В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Л. А. Островский

СОДЕРЖАНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ

Явления, возникающие при взаимодействии электромагнитных волн с движущейся границей раздела двух сред, занимают в физике важное место. Напомним, что задача об отражении волнового пакета от движущегося зеркала была рассмотрена Эйнштейном в его знаменитой работе [1] для иллюстрации эффектов специальной теории относительности. За последние двадцать лет эти вопросы неоднократно обсуждались, чаще всего с более утилитарной точки зрения: допплеровский сдвиг частоты, возникающий на границе, предлагалось использовать для преобразования спектра электромагнитных сигналов. В качестве движущегося зеркала может служить, например, резкая граница плазменного пучка [2]. Поскольку для сильного сдвига частоты необходимо, чтобы скорость границы была сравнима с фазовой скоростью волны, то целесообразно, чтобы пучок двигался в диэлектрике (или замедляющей системе); это избавляет от необходимости добиваться релятивистского движения среды [3]. Еще более радикальное решение заключается в том, что макроскопическое движение среды вообще отсутствует, а граница создается резким фронтом интенсивной бегущей волны (импульса), которая воздействует на нелинейную среду (феррит, полупроводник, плазму), создавая релятивистски движущийся перепад ее параметров [4, 5]. Заметим, что если граница движется быстрее фазовой скорости какой-либо из волн, то происходит рождение новых квантов поля [6]. С помощью распределенного воздействия можно даже создать «волну параметра», бегущую быстрее скорости света в вакууме (вопрос об излучении подобных сверхсветовых объектов недавно обсуждался специально [7]). Обзор конкретных результатов, относящихся к преобразованию волн на движущихся границах, дан в работе [8].

Здесь мы хотели бы обратить внимание читателя на некоторые, поучительные на наш взгляд, особенности этого явления, которые обычно остаются незамеченными. Взаимодействие поля с движущимися объектами вообще является одной из наиболее сложных и интересных проблем электродинамики, которой посвящено уже немало книг и обзоров. Движущаяся граница — весьма своеобразный объект такого рода. Например, падение плоской волны на плоскую же границу превращает последнюю в движущийся осциллятор, своего рода плоскую частицу, которая перемещается с релятивистской скоростью и излучает волны — прошедшую и отраженную — в различные среды. Свойства такой «частицы» определяются хорошо известными граничными условиями, связывающими значения электромагнитного поля и поляризации сред по разные стороны от движущейся границы. Эти условия имеют вид [9]

$$\{\mathbf{E} + [\boldsymbol{\beta}, \mathbf{B}]\} = \{\mathbf{H} - [\boldsymbol{\beta}, \mathbf{D}]\} = 0, \tag{1}$$

здесь $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{V}/c$, c — скорость света в вакууме, $\mathbf{V}$ — скорость движения границы; скобки означают разность значений по обе стороны от границы. Для простоты мы не учитываем поверхностных зарядов и токов и рассматриваем только касательные к границе компоненты поля.

Условия (1) имеют универсальную применимость и справедливы даже для нелинейной среды. Однако они, как и сами максвелловы уравнения, приобретают неформальный смысл только вместе с материальными уравнениями, связывающими индукции $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$ с напряженностями $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ (для определенности будем иметь в виду связь между $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$). Отсюда вытекают, вообще говоря, дополнительные, «материальные» граничные условия, число и вид которых зависят не только от параметров среды «вне» границы, но и, возможно, от более тонких свойств последней — структуры граничной области или скорости ее движения. Именно на этом этапе и возникают различные нетривиальные моменты, которые подчас кажутся неочевидными и даже парадоксальными. Конечно, мы нигде не выходим за рамки обычных уравнений макроскопической электродинамики, и говорить о «парадоксах» можно лишь по отношению к определенному уровню понимания явления (однако именно так понимал парадоксы Мандельштам, придавая им, в частности, большое учебное значение [10]). Вероятно, обсуждаемые ниже вопросы можно было бы облечь в более строгую математическую форму (а в некоторых случаях это не составляет труда), однако нашей целью является лишь показать, по возможности простейшими средствами, что к изучению даже весьма, на первый взгляд, простых и давно обсуждавшихся явлений следует иногда подходить с осторожностью, чтобы не прийти к противоречивым или просто ошибочным выводам.

2. ВОЗМОЖНЫ ЛИ РАЗРЫВЫ ПОЛЯ НА ГРАНИЦЕ?

Прежде всего выскажем следующее утверждение (назовем его правилом непрерывности): *на резкой движущейся границе раздела как поле, так и поляризация среды непрерывны*, т. е. непрерывны все четыре вектора $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$. Это утверждение может показаться парадоксальным уже потому, что оно противоречит известным результатам для неподвижной границы, где касательные компоненты $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ непрерывны, но $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ неизбежно терпит скачок, поскольку значения параметра ε по разные стороны границы различны. Более того, как видно из (1), на движущейся границе ($\beta \neq 0$) разрыв одной из величин сразу влечет за собой разрывы в остальных. Тем не менее подчеркнутое утверждение оказывается именно правилом (имеющим, правда, важные исключения), которое опирается на очевидный факт инерционности всякой среды. Действительно, никакая реальная среда не успевает мгновенно реагировать на скачкообразное (т. е. бесконечно быстрое) изменение поля во времени. Появление разрыва поля, движущегося вместе с границей, означает появление в спектре волн бесконечно высоких частот. Но, как хорошо известно [9], в пределе высоких частот диэлектрическая проницаемость любой среды описывается асимптотическим выражением $\varepsilon = 1 - (A/\omega^2)$, где A — постоянные, возможно, различные по разные стороны границы. Мы видим, что на очень высоких частотах эти диэлектрические постоянные близки к единице и мало отличаются друг от друга. Другими словами, резкий скачок поля «не замечает» ни среды, ни границы раздела, и должен распространяться как в вакууме, со скоростью c (это обстоятельство было еще в начале века отмечено А. Зоммерфельдом). Если же $V \neq c$, то никакого скачка поля или индукции, движущегося вместе с границей, быть не может, и поле должно остаться непрерывным, независимо от величины V, что и утверждалось выше.

Необходимо сразу же оговориться: непрерывность мгновенных значений всех величин отнюдь не означает, что волна, падающая на границу, не будет отражаться или преломляться. Поскольку для волн конечной частоты параметры среды по сторонам границы различны, то выполнить условия непрерывности можно, только добавляя к полю падающей волны еще поля вторичных (прошедших и отраженных) волн *). При этом правило непрерывности может принести и определенную практическую пользу. Например, при решении задач об отражении электромагнитной волны от движущегося плазменного полупространства [2, 3], где использовались релятивистские преобразования полей в сопровождающую систему координат и обратно, достаточно было бы, с тем же результатом, положить суммарные значения E и H непрерывными на границе. Другая задача такого рода обсуждается ниже.

Особым является, конечно, случай $V = c$. Такая граница может нести разрыв поля, который «не замечает» среды и распространяется так же, как в вакууме. Поэтому скачки всех функций E, H, D и B должны быть одинаковы (в системе единиц CGSE), величина же скачка произвольна и зависит от начальных условий задачи (решение одной конкретной задачи такого рода — о резком фронте ионизации, движущемся в среде со скоростью c, можно найти в работе [11]).

Сказанное выше относится к общему случаю, когда граница движется относительно среды. Чтобы разобраться в кажущемся противоречии со случаем неподвижной границы, рассмотрим следующую ситуацию. Пусть среда с резкой границей движется как целое, т. е. существует такая система координат, где и среда, и граница неподвижны. Очевидно, что в этом случае фиксированный элемент вещества не испытывает резких изменений во времени, хотя параметры соседних элементов, разделенных границей, различаются между собой. При этом возможен скачок электромагнитных величин, «вмороженный» в среду и поэтому не затрагивающий ее инерционных свойств. Это относится также к случаю, когда среды движутся параллельно границе (тангенциальный разрыв) **). Отсюда, конечно, понятен и частный случай неподвижной границы раздела двух неподвижных сред. Однако правило непрерывности снова приобретает силу, если учитывается пространственная дисперсия, т. е. нелокальность материальных уравнений. Поэтому, говоря о «вмороженных» разрывах, мы имеем дело скорее с псевдоисключением — идеальный разрыв поля всегда движется со скоростью c.

*) Если скорость границы близка к фазовой скорости отраженной волны, то, благодаря эффекту Допплера, частота этой волны неограниченно растет. В результате (как отметил Б. М. Болотовский) уже *вся* волна с ограниченным спектром (волновой пакет) может пройти границу, не отражаясь. Так, если неподвижная плазма полностью отражает все волны с частотами ниже некоторой конечной, плазменной частоты, то волна, падающая на границу плазмы, движущуюся со скоростью, близкой к c, практически всегда проникает через границу [3].

**) В этом последнем случае существует возможность усиления волн, не связанная с эффектом Допплера, если одна из сред является диссипативной [12].

3. ЧТО ТАКОЕ РЕЗКАЯ ГРАНИЦА РАЗДЕЛА?

Выше мы все время говорили о *резкой* границе, подразумевая, в сущности, скачок свойств среды и, соответственно, скачок поля. Однако в реальных случаях дело обстоит сложнее. Для того, чтобы в этом убедиться, рассмотрим внимательнее те идеализации, которые связаны с представлением о границе (гипотеза скачка). Ясно, что в действительности всегда имеется некоторая переходная область конечной, хотя и малой, толщины d. При выводе основных граничных условий (1) предполагается только, что d мало по сравнению с характерными масштабами самого поля (длиной волны в пространстве и периодом во времени), так что поле можно считать постоянным на интервалах, значительно бо́льших d. Однако для вывода о непрерывности поля этого требования недостаточно. Нужно, чтобы изменение параметров среды на протяжении границы было быстрым также в сравнении со всеми временами собственных колебаний или релаксации частиц среды — только тогда последние не успевают «сдвинуться с места», и поляризация не изменяется. В противном случае правило непрерывности, вообще говоря, не работает и, хотя соотношения (1) остаются в силе, полная система граничных условий изменяется. В частности, граничный слой может быть достаточно толстым для того, чтобы инерционность среды (диэлектрика) вообще не сказывалась. Если при этом волна, падающая на границу, такова, что для нее можно пренебречь дисперсией (инерционностью) среды, то последняя оказывается недиспергирующей всюду, включая сам переходный слой. Чтобы получить искомое преобразование поля в этом случае, достаточно подставить в (1) связь $\mathbf{D}_{1,2} = \varepsilon_{1,2}\mathbf{E}_{1,2}$, где индексы 1 и 2 относятся к значениям по разные стороны границы, а $\varepsilon_{1,2}$ заданы заранее. Теперь уже, конечно, $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ не могут быть одновременно непрерывными.

Таким образом, в общем случае *сами граничные условия не вполне определяются внешними по отношению к границе параметрами среды, а зависят еще от внутренних параметров граничного слоя*, в данном случае от соотношения между его длительностью и собственными временами движения частиц среды. Из сказанного выше ясно, что, рассматривая преобразование поля на идеально резкой границе, принципиально нельзя считать среду недиспергирующей. Если же дисперсия не учитывается, а граница не «скреплена» жестко со средой, то следует допустить, что толщина граничного слоя не слишком мала. Весьма важным в физике примером подобных границ является ударная волна — интенсивный перепад поля, движущийся относительно среды и изменяющий ее параметры. Ударные волны — классический объект изучения в механике сплошной среды; сравнительно недавно стали известны электромагнитные ударные волны, создаваемые мощными импульсами в нелинейном диэлектрике или магнетике (например феррите) [13]. Граничные условия (1) остаются справедливыми на таком ударном перепаде. При этом дисперсией можно пренебречь (правда, вместо $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ приходится брать нелинейную связь $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E})$, поскольку сама волна меняет значение ε), а толщина ударного фронта оказывается как раз такой, чтобы поляризация среды успела «перестроиться» от одного постоянного значения до другого. К этому случаю мы еще вернемся позже.

Решение вопроса о том, какая граница является достаточно резкой, а какая нет в указанном смысле, зависит не только от ее толщины d, но и от скорости движения. В среде без пространственной дисперсии (слово «без» означает, конечно, малость масштаба дисперсии в сравнении с толщиной границы) поляризация терпит скачок на неподвижной границе, поскольку последняя бесконечно протяженна во времени; при небольших V возможен и скачок напряженности поля. Лишь при достаточно большой скорости границы, когда время d/V станет меньше собственных временных масштабов среды, начинает работать правило непрерывности.

Вопрос о «толстых» и «тонких» границах существен уже потому, что на практике создать резкую движущуюся границу в веществе не всегда просто. Так, никакая «собственная» волна поля, распространяющаяся в среде и меняющая ее свойства, не может иметь бесконечно короткого фронта — он расплывается до длительности порядка времени релаксации среды (и превратиться в уже упомянутую ударную волну). Для того, чтобы создать границу более короткую, чем собственное время среды, нужны внешние источники — например, ионизирующее излучение, превращающее диэлектрик в плазму, или волна, распространяющаяся в другой, вспомогательной системе (как это делается в радиофизике с помощью линий передачи электромагнитных волн). В этих случаях можно получить достаточно тонкую границу, удовлетворяющую правилу непрерывности.

Пример. В качестве примера рассмотрим простую, но до сих пор весьма употребительную лоренцеву модель диэлектрической среды как совокупности идентичных упругих осцилляторов (диполей). Поляризация такой среды удовлетворяет колебательному уравнению

$$\ddot{P} + \omega_0^2 P = \frac{\omega_p^2}{4\pi} E, \tag{2}$$

где ω_0 — собственная частота осцилляторов, ω_p — плазменная частота, пропорциональная их плотности. Магнитную проницаемость считаем равной единице ($B = H$).

Пусть некоторый внешний фактор создает в диэлектрике движущуюся границу, на которой изменяется какой-либо параметр осцилляторов. Для простоты будем считать, что среда остается макроскопически неподвижной, но на нее воздействует сильное внешнее поле в виде волны с резким фронтом. Это поле изменяет упругость (потенциальную энергию) осцилляторов, т. е. величину ω_0, от ω_{01} до ω_{02} *).

Рассмотрим плоские волны, распространяющиеся по нормали x к границе ($E = E_y$, $H = H_z$). Тогда из (1) имеем

$$\{E - \beta H\} = \{H - \beta D\} = 0. \tag{3}$$

Теперь необходимо добавить соотношения между скачками величин D и E. Для этого проинтегрируем материальное уравнение (2) дважды по t за время τ прохождения границей данной точки. Поскольку E и P конечны, то при $\tau \to 0$ интегралы от них исчезают, остаются только интегралы от $\ddot{P}$, поэтому

$$\{\dot{P}\} = \{P\} = 0, \tag{4}$$

При $\{P\} = 0$, очевидно, $\{D\} = \{E\}$ и условия (3) сразу дают

$$\{E\} = \{H\} = \{D\} = 0, \tag{5}$$

т. е. поле и индукция на границе непрерывны, в полном соответствии со сказанным выше.

Условий непрерывности (4) и (5) достаточно для решения конкретных задач. Обычная постановка задачи заключается в следующем (рис. 1, *а*). Пусть на границу, для определенности навстречу ей ($V < 0$), из области *I*

*) Предельный случай, когда $\omega_{01} \to \infty$, $\omega_{02} \to 0$ отвечает, в сущности, фронту ионизации, превращающему недиспергирующий диэлектрик в плазму.

падает плоская монохроматическая волна с частотой ω_i. Тогда и все вторичные волны (отраженные и прошедшие) будут монохроматическими, а частота и волновое число каждой из них связаны между собой дисперсионным уравнением

$$ck = \pm\,\omega\sqrt{1 + [\omega_p^2/(\omega_0^2 - \omega^2)]} = \pm\,\omega\sqrt{\varepsilon(\omega)}, \quad (6)$$

причем значения ω_0 различны в областях I и II.

Какие волны, отраженные и прошедшие, могут появиться из-за взаимодействия с границей? Об этом позволяет судить дисперсионное уравнение (6). Из непрерывности мгновенных значений поля следует, в частности, равенство фаз всех волн на границе (при $x = Vt$), т. е. для всех волн значения $\omega - kV$ одинаковы. Пользуясь (6), можно определить, какие частоты удовлетворяют этому условию в каждой области; из них, как обычно,

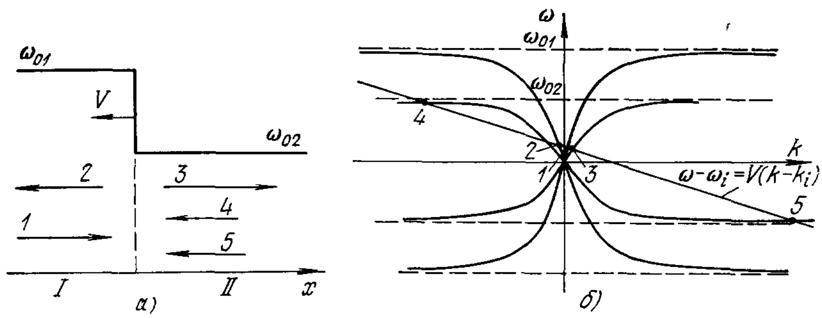

Рис. 1.

следует выбрать лишь те, для которых выполняется условие излучения: групповые скорости вторичных волн должны быть таковы, чтобы энергия удалялась от границы *). Это удобно проделать графически: находятся все точки пересечения дисперсионных кривых $\omega(k)$ в обеих областях с прямой $\omega - \omega_i = V(k - k_i)$. Такое построение показано на рис. 1, *б*, где точка 1 отвечает падающей волне **). Из рисунка видно, что при достаточно малом $|V|$ условиям излучения удовлетворяют значения ω, помеченные цифрами 2, 3, 4 и 5 (групповая скорость $d\omega/dk$, очевидно, определяется наклоном дисперсионной кривой). Если $\omega_i \ll \omega_c$, то для падающей волны из (6) следует $ck = \omega\sqrt{\varepsilon_1}$, где $\varepsilon = \sqrt{1 + (\omega_p^2/\omega_0^2)}$ отвечает нулевой частоте, и дисперсией можно пренебречь. Если еще $|V| \ll c/\sqrt{\varepsilon_{1,2}}$, то частоты всех волн нетрудно определить аналитически. В области I имеется одна отраженная волна с частотой

$$\omega_2 \approx \omega_i\left(1 + 2\beta\sqrt{\varepsilon_1}\right), \quad (7а)$$

а в области II — три волны с частотами

$$\omega_3 \approx \omega_i\left[1 + \beta\left(\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}\right)\right], \quad (7б)$$

$$\omega_4 \approx \omega_5 \approx \omega_{02}\left(1 - \frac{1}{2}\beta^2\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}\right). \quad (7в)$$

*) Это требование (для неподвижной границы двух диспергирующих сред) впервые сформулировал, вероятно, Мандельштам [14].

**) Здесь не показана плазменная область прозрачности ($\omega > \sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2}$), поскольку в данном случае все волны лежат на низкочастотной ветви ($\omega < \omega_0$).

Таким образом, кроме волн с частотами ω_2 и ω_3, для которых дисперсией можно пренебречь, появляются две резонансных существенно диспергирующих волны с частотами, близкими к ω_{02}. Эти волны распространяются в ту же сторону, что и скачок, но отстают от него по групповым скоростям и поэтому удовлетворяют условию излучения *). Поле в области I является суперпозицией полей волн 1 и 2, а в области II — волн 3, 4 и 5. Амплитуды всех четырех неизвестных волн 2, 3, 4 и 5 теперь легко находятся по известной падающей волне 1 из условий непрерывности четырех величин E, H, P и $\dot{P}$, если учесть, что в каждой волне $H = \pm E\sqrt{\varepsilon}$, а $4\pi P = (\varepsilon - 1)E$. Не приводя здесь соответствующих решений, заметим только, что амплитуды «резонансных» волн 4 и 5 оказываются малыми порядка β^2.

Переходя к пределу $\beta = 0$, мы формально получим для E и H в волнах 2 и 3 обычные формулы Френеля на неподвижной границе, а в резонансных волнах $E = H = 0$. Однако этот естественный на первый взгляд переход неправомерен. Это видно уже из того, что *поляризация* резонансных волн остается конечной, ($E_{4,5} \sim \beta^2$, но $\chi_{4,5} \sim \varepsilon - 1 \sim \beta^{-2}$). Можно показать, что плотность энергии этих волн тоже конечна. Следовательно, сколь бы медленным ни было движение границы, оно оставляет конечный след в виде колебаний частиц диэлектрика с собственной чатотой ω_{02}. Это и понятно: при сколь угодно малом β движение бесконечно тонкой границы меняет скачком свойства каждого осциллятора, что, при наличии поля падающей волны, приводит к «ударному» возбуждению собственных колебаний среды. Вместе с тем, если с самого начала считать границу неподвижной, то ничего подобного не происходит.

Причина этого кажущегося противоречия была указана в предыдущем разделе. Поскольку граничная область всегда обладает некоторой конечной толщиной d, то, очевидно, временные изменения всех величин на границе имеют конечную длительность $\tau \approx d/V$. Но тогда P и $\dot{P}$ непрерывны только при не слишком малой скорости границы. Действительно, член $\ddot{P}$ в уравнении (2) имеет порядок P/τ^2 и преобладает над членом $\omega_0^2 P$ при условии $V^2 \gg (\omega_0 d)^2$ (т. е. путь, проходимый границей за период собственных колебаний среды $2\pi/\omega_0$, должен превышать толщину границы). При выполнении обратного неравенства (вместе с $\omega_i \ll \omega_0$) членом $\ddot{P}$ вообще можно пренебречь, тогда на протяжении всей переходной области $P = \bar{\varepsilon} E$, и при изменении $\bar{\varepsilon}$ на границе поляризация успевает «следить» за полем. Ясно, что в этом случае диэлектрик можно считать недиспергирующим. Подставляя $D_{1,2} = \varepsilon_{1,2} E_{1,2}$ и $B_{1,2} = H_{1,2}$ в исходные соотношения (1) мы легко получаем

$$E_2 - E_1 = E_1 \frac{\beta^2 (\bar{\varepsilon}_1 - \bar{\varepsilon}_2)}{1 + \beta^2 \bar{\varepsilon}_2}, \qquad H_2 - H_1 = E_1 \beta \frac{(\bar{\varepsilon}_2 - \bar{\varepsilon}_1)}{1 + \beta^2 \bar{\varepsilon}_1}, \tag{8}$$

где индексы 1 и 2 относятся к значениям по разные стороны границы. Таким образом, как и говорилось выше, на достаточно толстом и медленно движущемся граничном слое поле испытывает скачок. При $\beta \to 0$ остается лишь скачок индукции D, и в результате получаются формулы Френеля без каких-либо особенностей.

*) Заметим, что частоты ω_4 и ω_5 различаются в порядке $\beta^2 (\omega_i/\omega_{02})$. При этом оказывается, что фазовая скорость волны 4 больше, а волны 5 — меньше, чем $|V|$, т. е. последняя волна лежит в области аномального доплер-эффекта (именно поэтому в ней ω изменяет знак; см. рис. 1, *б*). Как уже говорилось, это означает, что на границе рождаются кванты поля.

То же самое справедливо, если граница (тут уже сколь угодно резкая) создается на стыке *одинаково движущихся* диэлектриков с различными параметрами ω_0 или ω_p. В сопровождающей системе координат материальное уравнение (2) является локальным соотношением, в котором $\ddot{P}$ остается конечным и которое при одинаковых E определяет различные значения P в областях I и II. В исходной же системе координат, где среда движется как целое, на границе изменяются скачком также E и H. Все это, конечно, согласуется с приведенными выше соображениями.

4. О ДОСВЕТОВЫХ И СВЕРХСВЕТОВЫХ ГРАНИЦАХ

В тех случаях, когда граница является достаточно «толстой» и дисперсией можно пренебречь, задача выглядит вполне очевидной — соотношения (8) должны приводить к элементарному обобщению формул Френеля, поскольку никаких «непредвиденных» резонансных волн появиться не может. Оказывается, однако, что и в этом случае могут возникнуть затруднения, заставляющие либо привлекать дополнительные данные для однозначного решения задачи, либо даже вообще отказаться от простых граничных условий в виде (8). На этот раз проблема связана с быстро движущимися границами. Как уже отмечалось, в принципе, да и практически, граница может иметь любую скорость, как меньшую, так и большую скорости взаимодействующих с нею волн, а это, в свою очередь, существенно отражается на решении задачи.

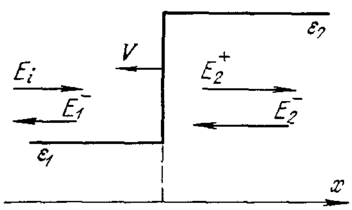

Рис. 2.

Проиллюстрируем это, используя снова пример неподвижного диэлектрика, в котором движется граница, изменяющая его параметры ε и μ. Будем считать заданной волну, падающую нормально навстречу скачку. Поскольку ε и μ не зависят от частоты, то поле по каждую сторону от границы (области I и II) удовлетворяет одномерному волновому уравнению и дается в общем случае суперпозицией двух волн, бегущих навстречу друг другу со скоростями $v_{1,\,2} = c\sqrt{\varepsilon_{1,\,2}\mu_{1,\,2}}$ (рис. 2). Каждая из этих волн характеризуется одной неизвестной функцией, например, $E\,(x,\ t)$, поскольку $H = \pm\ E/Z$, где $Z_{1,\,2} = \sqrt{\mu_{1,\,2}/\varepsilon_{1,\,2}}$ — также известная величина (волновое сопротивление среды). Поле одной волны, $E_1^+ = E_i$, задано, а для определения E в остальных трех вторичных волнах имеются два граничных условия (8) (или их обобщение на случай $\mu_1 \neq \mu_2$). Поэтому задача будет вполне корректной только в тех случаях, когда существование одной из вторичных волн невозможно в силу условия излучения. Именно так обстоит дело в случае неподвижной границы раздела, когда в области II имеется лишь одна прошедшая волна E_2^+, а волна E_2^-, очевидно исключается. Возможность существования данной волны зависит от соотношения между ее скоростью и скоростью границы (ввиду отсутствия дисперсии изменение частоты не имеет значения). В общем случае возможны четыре варианта:

$$\text{а) } |V| < v_1,\ v_2,\ ||\ \text{б) } |V| > v_1,\ v_2,\quad \text{в) } |v_2 < |V| < v_1,\quad \text{г) } v_1 < |V| < v_2. \qquad (9)$$

Особенности этих случаев могут быть наглядно проиллюстрированы, если на плоскости переменных x и t построить характеристики, т. е. траектории волн, движущихся со скоростями $\pm\ v_1$ и $\pm\ v_2$, а также траекторию самой границы $dx = V\,dt$ (рис. 3). Очевидно, что вне пограничной области эти характеристики — прямые (V постоянно), но с разными наклонами по разные стороны границы. Реально возникающими вторичными волнами являются те, у которых характеристики отходят от границы (независимо от их направления относительно неподвижной системы координат).

Простейшим является случай *а*) (досветовое движение), который включает и неподвижную границу. Здесь исключается волна E_2^-, а поля E_1^- и E_2^+ легко находятся из (8) по известному E_i, если положить $E_1 = E_1^- + E_i$, $E_2 = E_2^+$ *). В сверхсветовом случае *б*) отсутствует отраженная волна E_1^-, но в области II остаются обе прошедшие волны E_2^+, E_2^-, и задача

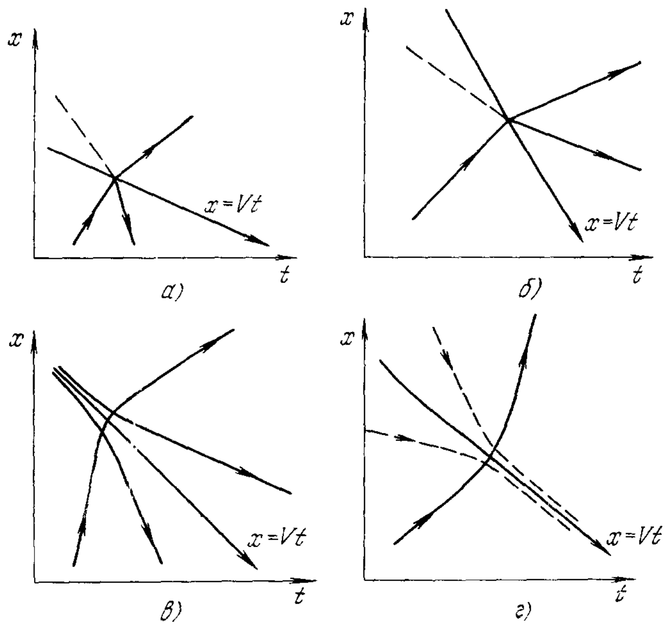

Рис. 3.

вновь решается элементарно. Появление волны E_2^-, отстающей от границы, означает, что на скачке рождаются кванты поля. Заметим, что при $|V| \to \infty$ отсюда получается случай одновременного скачка параметров однородной среды (возможного, конечно, лишь при наличии распределенного воздействия).

В обоих указанных случаях на плоскости xt существуют два семейства характеристик, пересекающих границу. Не столь просты, однако, случаи *b*) и *г*), когда скорость скачка является досветовой по одну его сторону и сверхсветовой по другую. Из рис. 3 видно, что в этих случаях одно из семейств характеристик остается разделенным границей, которая, таким образом, сама является характеристикой, точнее, движется синхронно с волной при одном из промежуточных между v_1 и v_2 значений скорости волны. Следовательно, граничные условия (8) задаются в окрестности характеристики, а такие случаи всегда являются особыми в математической физике **). Вместе с тем, эти особенности оказываются совершенно различными для случаев *в*) и *г*).

*) Мы не приводим здесь элементарных решений этой и последующих задач; эти решения можно найти в работах [4, 15] и обзоре [8].

**) Впрочем, данная постановка задачи и связанные с нею особенности не совсем обычны для теории гиперболических уравнений в математической физике.

В случае *в*) нет оснований исключать ни одну из трех волн, и тогда двух граничных условий (8) недостаточно для их определения — нужна какая-то добавочная информация. В данном случае можно выйти из затруднения следующим образом (рис. 4). Рассмотрим вместо одного скачка два (*1* и *2*), разделенных сравнительно плавной областью ширины d, в которой величина скорости $v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ меняется от $|V| + \delta V$ до $|V| - \delta V$, а δV — достаточно малая положительная величина. Тогда скачок *1* является полностью досветовым, а *2* — сверхсветовым, причем добавляется четвертая неизвестная величина — поле E' в области d. Используя граничные условия (8) последовательно для обоих скачков, мы найдем все четыре неизвестных волны. Затем устремляя d и δV к нулю, получим однозначное решение для исходного скачка (подробнее см.[15]). Это решение содержит дополнительный внутренний параметр $Z' = \sqrt{\mu'/\varepsilon'}$ — волновое сопротивление в точке синхронизма, где $v = |V|$. Правда, если меняется лишь одна величина, например, ε, а μ постоянно, то Z' известно заранее, поскольку ε' очевидно равно $c^2/\mu V^2$. В этом случае решение принимает чрезвычайно простой вид:

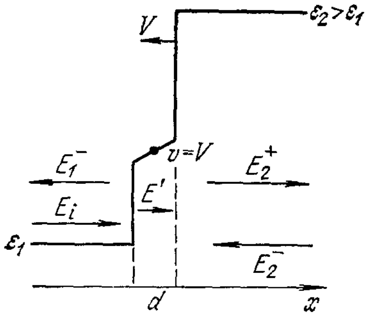

Рис. 4.

$$E_1^- = -E_i, \qquad E_2^+ = -E_2^- = \frac{v_2}{v_1} E_i. \tag{10}$$

Любопытно, что сюда вообще не входит скорость границы. Если же изменяются как ε, так и μ, то Z' является независимым параметром.

Таким образом, приходится отказаться от вполне «разрывного» описания задачи (хотя бы в пользу двух разрывов) и конкретизировать внутренний параметр граничной области Z' (напомним, что, пренебрегая дисперсией, нельзя считать границу бесконечно узкой). Причину этого можно усмотреть из картины траекторий на рис. 3, *в*. В данном случае характеристики расходятся от границы, которая служит для них как бы «водоразделом». В результате частично теряется связь между процессами в областях 1 и 2, именно поэтому и понадобились дополнительные данные в задаче.

Еще хуже обстоит дело в случае г), когда падающая волна E_i порождает только одну, прошедшую волну E_2^+, а волны E_1^- и E_2^- невозможны. Теперь задача оказывается переопределенной — два граничных условия (8) для одной неизвестной E_2^+. Разделение скачка на два здесь ничего не дает. Для получения однозначного результата приходиться как-то исправлять сами граничные условия (8). Чтобы понять в чем дело, обратимся к рис. 3, *г*, отвечающему этому случаю. Одно из семейств характеристик *сходится* к границе таким образом, что волны, движущиеся в одну с ней сторону, группируются на границе. Следовательно, создаваемые ею возмущения накапливаются и должны неограниченно расти. Поэтому задача с равномерным, полностью автономным движением границы, в сущности, вообще не имеет в данном случае ограниченного решения.

Итак, мы снова приходим к противоречию, для разрешения которого приходится вернуться к вопросу о том, каким образом создается движущаяся граница. Поскольку речь идет о «толстой» границе в неподвижной среде, то естественная возможность состоит в том, что в нелинейной среде создается мощный импульс поля с резким фронтом, бегущим в ней как собственная волна и изменяющим ее параметры. Чтобы описать движение такого фронта, необходимо, в сущности, решить нелинейную задачу, поскольку перепад параметров среды сам влияет на волну. Однако исходные граничные условия (1) или, в одномерном случае, (3) по-прежнему справедливы, нельзя только использовать линейные материальные уравнения типа $D = \varepsilon E$. Но такой нелинейный перепад поля и есть электромагнитная ударная волна, о которой упоминалось выше. Интересующая нас линейная задача теперь сводится к взаимодействию малых возмущений поля с ударной волной. Такие задачи в физике не новы — они изучались в связи с проблемой устойчивости ударных волн. При этом, чтобы получить однозначное решение, нужно учесть, что падающая волна возмущает движение ударного фронта, так что $\beta = \beta_0 + \delta\beta$ (именно здесь и сказывается влияние «накопления» поля на границе — оно приводит к колебаниям последней). Тогда, учитывая, что (3) описывает сумму полей слабых волн и сильного ударного поля и что последнее также удовлетворяет (1), для возмущений получим

$$\{E - \beta_0\mu H - B_0\delta\beta\} = \{H - \beta_0\varepsilon E - D_0\delta\beta\} = 0, \tag{11}$$

где D_0, B_0 — невозмущенные значения, различные в областях I и II, а ε и μ теперь означают производные dD/dE и dB/dH, взятые также для невозмущенных значений, отвечающих ударной волне.

Теперь наша задача в случае г) решается элементарно. Недостающей неизвестной является $\delta\beta$, а поле E_2^+ в единственной, прошедшей волне конечно и легко определяется вместе с $\delta\beta$ из двух уравнений (11) (соответствующее решение приведено в [4]).

Интересно отметить, что именно в случае г), и только в нем, ударная волна оказывается устойчивой, поскольку конечное E_i порождает конечные возмущения. В остальных случаях $\delta\beta$ может быть произвольным (в том числе сколь угодно большим), что говорит о неустойчивости ударной волны (этот вопрос подробно изучен в механике сплошной среды). Следовательно, если граница создается «собственной» волной в данной нелинейной среде, то мы, в сущности, всегда имеем случай г), в остальных же случаях для создания границы требуется нечто искусственное: независимая система, формирующая накачку, внешний источник другой природы и т. д. (теперь это относится и к «толстым» границам).

Итак, при взаимодействии слабой волны с сильной (ударной) волной первая нарастала бы неограниченно, если бы не ее обратное влияние на движение ударного фронта. Здесь имеется некоторая аналогия с явлением параметрического резонанса в колебательном контуре с периодически изменяющейся емкостью, когда амплитуда собственных колебаний неограниченно растет до тех пор, пока не скажется влияние этих колебаний на закон изменения емкости, т. е. нелинейный эффект.

Для более резких скачков параметра, создаваемых извне, такие особенности не возникают, поскольку скорость вторичных волн изменяется из-за дисперсии, с учетом которой уравнения электродинамики имеют одну и ту же характеристическую скорость c, одинаковую для областей I и II, и при $V \neq c$ задача об отражении и прохождении волны должна быть всегда корректной в этом смысле. Если же $V = c$, то и здесь, как указывалось, требуются дополнительные условия для однозначного решения задачи.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Идеализация — необходимый шаг при теоретическом описании любого явления, позволяющий оставить в стороне малосущественные детали. Вместе с тем, при более глубоком изучении того же явления отброшенные факторы рано или поздно «мстят за себя», приводя к различного рода противоречиям и парадоксам, разрешение которых требует хотя бы частичного отказа от принятых идеализаций. Эта ситуация, обычная в физике, возникает и для разобранных здесь вопросов. Резкая граница раздела двух сред — одна из самых фундаментальных идеализаций в электродинамике сплошной среды. Общепринято, что если толщина граничной переходной области мала в сравнении с длиной волны, то граница полностью описывается универсальными граничными условиями, содержащими лишь параметры поля и среды вне этой области. Из сказанного выше следует, что это, вообще говоря, не так, особенно для движущихся границ. Чтобы получить однозначное решение, приходится «заглянуть внутрь» границы, привлекая дополнительные данные о ее толщине, скорости, структуре и т. д. Тем самым мы, по существу, отказываемся от исходной идеализации, заменяя ее другими, более сложными. Таким образом, выясняется, что даже такая привычная идеализация, какой является понятие резкой границы раздела, заключает в себя довольно сложное физическое содержание.

Пользуюсь случаем выразить искреннюю признательность Б. М. Болотовскому, А. В. Гапонову, Я. Б. Зельдовичу, М. А. Миллеру и Е. И. Якубовичу за ценные замечания.

Научно-исследовательский радиофизический институт
(НИРФИ), Горький

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. А. Эйнштейн, Собрание научных трудов, т. I, М., «Наука», 1965, стр. 7.
2. K. Landecker, Phys. Rev. **86**, 852 (1952).
3. M. A. Lampert, *ibid.* **102**, 299 (1956).
4. Л. А. Островский, Изв. вузов (Радиофизика), 2, 833 (1959).
5. Г. И. Фрейдман, ЖЭТФ **41**, 226 (1961).
6. Л. А. Островский, ЖЭТФ **61**, 551 (1971).
7. П. Парадоксов, УФН 88, 585 (1966); Б. М. Болотовский, В. Л. Гинзбург, УФН **106**, 577 (1972).
8. Л. А. Островский, Н. С. Степанов, Изв. вузов (Радиофизика) **14**, 489 (1971).
9. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, М., Физматгиз, 1959.
10. Л. И. Мандельштам, Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике, М., «Наука», 1972.
11. В. В. Борисов, Изв. вузов (Радиофизика) **17**, 284 (1974).
12. Я. Б. Зельдович, ЖЭТФ **62**, 2076 (1972).
13. И. Г. Катаев, Ударные электромагнитные волны, М., «Сов. радио», 1963; А. В. Гапонов, Л. А. Островский, Г. И. Фрейдман, Изв. вузов (Радиофизика) **10**, 1376 (1967).
14. Л. И. Мандельштам, ЖЭТФ **15**, 475 (1945).
15. Л. А. Островский, Б. А. Соломин, Изв. вузов (Радиофизика), **10** 1183 (1967).