

**КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ПОЛЯ ИСТОЧНИКОВ
В РАЗРЕЖЕННОЙ ПЛАЗМЕ****А. А. Андронов, Ю. В. Чугунов****СОДЕРЖАНИЕ**

1. Введение	79
2. «Большие» источники. «Холодная» однородная плазма	81
3. «Большие» источники. «Холодная» неоднородная плазма	87
а) Изотропная плазма (87). 1) Сферический зонд (87). 2) «Разрезанная» сфера (88). 3) Произвольные источники в неоднородной изотропной плазме (88). — б) Магнитоактивная плазма (89). 1) Точечный заряд вблизи плоской резкой границы плазма — вакуум (89). 2) Точечный заряд в «линейном» слое с бесконечным магнитным полем, направленным вдоль градиента диэлектрической проницаемости (91). 3) О потенциале в плоскостой плазме (91). 4) О потенциале при произвольной форме параболической границы (93).	
4. Источники в однородной плазме. Учет «слабой» пространственной дисперсии а) Изотропная плазма (96). б) Магнитоактивная плазма (98).	96
5. О влиянии оседания частиц на параметры «больших» источников в плазме	99
6. Источники в однородной плазме. «Сильная» пространственная дисперсия . . а) Импеданс источников в равновесной плазме (102). б) Параметры источников в движущейся плазме (104).	102
7. О шумах источников в плазме	107
8. Заключение	110
Цитированная литература	112

1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая статья посвящена обзору представлений, успехов и проблем в теории квазистационарных (квазистатических) электрических полей источников (антенны, зонды) в плазме, в которой столкновения заряженных частиц несут незначительный интерес. Интерес к этой области связан прежде всего с тем, что в настоящее время источник в плазме — типичное явление в разнообразных плазменных экспериментах на Земле и в космосе. Кроме того, здесь проявляются своеобразные электродинамические свойства плазмоподобных сред, представляющие интерес для ряда разделов физики плазмы, электродинамики и др. *).

Бесстолкновительная плазма как диэлектрическая среда отличается от обычных диэлектриков и вакуума наличием в ней (и в квазистационарном случае) собственных электростатических колебаний (резонансов плазмы) и пространственной дисперсии. Резонансы плазмы оказывают существенное влияние на структуру электрических полей источников и другие их характеристики. В обычном диэлектрике с диэлектрической проницаемостью ϵ структура квазиелектростатического поля определяется

*) Похожие квазиелектростатические задачи возникают в теории взаимодействия волн в неоднородной плазме (см., например, ⁹), в теории взаимодействия волн с ограниченной плазмой (см., например, ^{6-8, 55}), в теории электронных приборов СВЧ и др.

уравнением Лапласа для потенциала $\varphi \sim e^{-i\omega t}$, решение которого дает $\varphi \sim 1/\varepsilon r$, $E \sim 1/\varepsilon r^2$ (монополю) или $\varphi \sim 1/\varepsilon r^2$, $E \sim 1/\varepsilon r^3$ (диполь) на больших расстояниях r от источника и приводит к достаточно гладкому распределению заряда на источнике (например, для тонкого диполя распределение заряда близко к равномерному, как показано на рис. 1, а¹⁰). В плазме в простейшей модели $\varepsilon = 1 - (\omega_p^2/\omega^2)$ (ω_p , ω — соответственно лэнгмюровская частота и частота поля) и на плазменном резонансе ($\omega \rightarrow \omega_p$) $\varepsilon \rightarrow 0$, т. е. φ , $E \rightarrow \infty$, и ясно, что здесь необходимо более точное описание свойств плазмы. В этом случае и возникает своеобразное пространственное поведение потенциала и электрического поля. Продемонстрируем это сразу для следующего идеализированного распределения плазмы: вне бесконечного цилиндра радиуса b $\varepsilon = 0$, внутри цилиндра — вакуум. Легко понять, что в силу граничного условия $\partial\varphi/\partial n = 0$ на внутренней поверхности цилиндра в этом примере поле заряда, находящегося

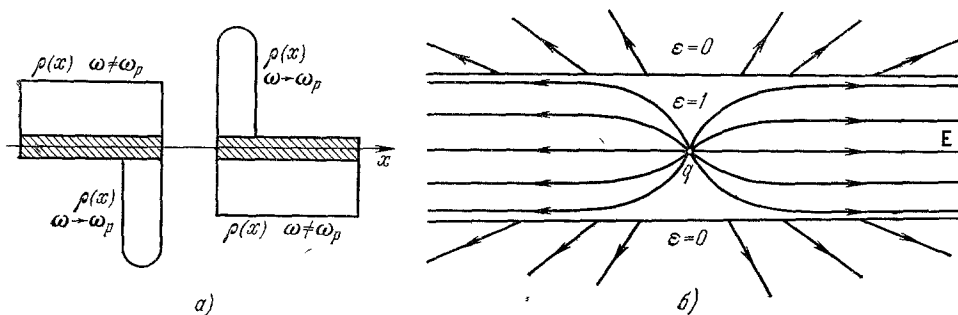


Рис. 1.

внутри цилиндра, будет иметь вид, показанный на рис. 1, б; т. е. оно не убывает вдоль оси цилиндра. Это приводит к ряду интересных особенностей: например, заряд диполя концентрируется к его зазору (рис. 1, а), импеданс определяется главным образом зазором, а не длиной диполя и др.²⁹ Мы увидим, что слабое (по сравнению с вакуумом) убывание поля при удалении от источника является типичным в резонансных условиях в плазме и может рассматриваться как основное резонансное свойство. Обсуждению подобных особенностей в поведении полей в резонансных условиях и влияния пространственной дисперсии на характеристики источников и посвящен настоящий обзор.

Ниже мы будем иметь дело с линейной квазиэлектростатикой источников (т. е. с источниками, у которых достаточно малы размеры *) и величина электрического поля). Мы ограничимся также анализом квазиэлектростатического поля в условиях, когда основные его параметры связаны с глобальными распределениями плазмы у источников **).

В силу разнообразия и сложности процессов, возникающих при помещении источника в плазму, в настоящее время, конечно, невозможно рассчитать электрические параметры (поля, импеданс, шумы) источника в плазме в сколько-нибудь общем случае. Для такого расчета необходимо

*) Условие применимости квазиэлектростатического описания источников в плазме — это $L_0/\lambda_D \rightarrow 0$; L_0 — максимальный размер источника, λ_D — длина электромагнитной волны в вакууме. Более точные условия см., например, в¹.

**) Таким образом, мы не рассматриваем случаи, когда наличие квазинейтральной (дебаевской) области у поверхности источника существенным образом влияет на его параметры (ср.²). Следует, впрочем, отметить, что обсуждаемые нами решения часто могут быть дополнены эффектами, связанными с этим слоем (см., например, ^{2,3}).

было бы сначала определить статические характеристики плазмы в окрестностях источника, что пока сделано лишь в некоторых простейших случаях (см., например, ⁴). Тем не менее уже сейчас оказывается возможным выделить главные эффекты, определяющие электромагнитные свойства источников в квазистационарных условиях, если обсудить достаточно большой набор элементарных, но, так сказать, «ключевых» примеров источников простой геометрии, последовательно вводя в теорию усложняющие факторы (неоднородность плазмы, тепловое движение, оседание частиц на поверхности источника и т. п.). Подобный подход позволяет выработать общие представления теории и понять морфологию квазистационарных электромагнитных явлений, возникающих при помещении источника в плазму. Он помогает также выяснить, какие из параметров статического состояния (и когда) необходимы для вычисления характеристик источника в плазме, и получить формулы, заслуживающие сравнения с экспериментом. Впрочем, мы стремились продемонстрировать идеи и представления теории; прикладные вопросы практически не затрагиваются *).

План изложения следующий. Сначала (гл. 2, 3) рассматриваются свойства квазистационарных полей в плазме, в пренебрежении пространственной дисперсией («холодная» плазма). Это можно делать, если источник «большой» — размеры его велики по сравнению с параметром пространственной дисперсии. Здесь можно получить полное описание импедансных свойств источников, если учесть неоднородность плазмы и (или) ее анизотропию. В рамках «холодного» описания в электрическом поле остаются еще особенности на поверхностях, линиях или в отдельных точках. Структура поля в окрестности этих особенностей определяется «слабой» пространственной дисперсией (гл. 4, 5). В гл. 4 обсуждается известное решение Ландау ²³ о структуре плоского электрического поля в однородной изотропной плазме при $\epsilon \rightarrow 0$ и его обобщения на трехмерный изотропный и анизотропный случаи. В гл. 5 обсуждается слабая пространственная дисперсия, обусловленная оседанием частиц на источнике. Связь электрической индукции D с электрическим полем E в этом случае содержит первую производную по координате, что часто позволяет легко найти структуру поля и импеданс. При сильной пространственной дисперсии, что имеет место для «малых» источников или для «больших» источников в дебаевском слое на их поверхности, важную роль начинают играть эффекты затухания Ландау. Эти эффекты могут быть связаны как с инфинитными (пролетными) частицами, так и с финитными частицами, т. е. частицами, захваченными статическим потенциалом источника. Для малых или сеточных источников вклад пролетных частиц в импеданс в ряде случаев может быть найден с помощью известных выражений для тензора диэлектрической проницаемости однородной плазмы. Это сделано в гл. 6. Наконец, в гл. 7 обсуждаются поля (шумы), наводимые на источниках в плазме в разных случаях.

2. «БОЛЬШИЕ» ИСТОЧНИКИ. «ХОЛОДНАЯ» ОДНОРОДНАЯ ПЛАЗМА

В квазиэлектростатике все характеристики электрического поля E можно описать с помощью потенциала $\varphi(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}$ ($E = -\nabla\varphi$). В пренебрежении тепловым движением заряженных частиц среды («холодная» плазма) он удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{r}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = -4\pi\rho, \quad (2.1)$$

*) Обсуждение сравнения излагаемой ниже теории с экспериментом можно найти, например, в ⁵.

где ρ — плотность заряда источника, $\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{r})$ — тензор диэлектрической проницаемости «холодной» плазмы. В бесстолкновительной плазме, с которой мы будем иметь дело, тензор ϵ_{ij} эрмитов. Однако для эрмитова тензора в условиях, когда возможно возбуждение собственных колебаний плазмы, решение уравнения (2.1) не является однозначным. Теорема единственности, как нетрудно убедиться, справедлива, вообще говоря, лишь при учете антиэрмитовой части ϵ_{ij}^a тензора ϵ_{ij} ($\epsilon_{ij}^a \sim \nu/\omega$, ν — частота столкновений). Поэтому бесстолкновительные решения уравнения (2.1) — это, по существу, предельные решения при стремлении частоты столкновений ν к нулю. Это обстоятельство необходимо всегда иметь в виду в дальнейшем.

В однородной плазме уравнение (2.1) принимает вид

$$\epsilon_1 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + \epsilon_3 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -4\pi\rho; \quad (2.2)$$

здесь ϵ_1 и ϵ_3 — диагональные компоненты тензора диэлектрической проницаемости плазмы, ось z направлена вдоль внешнего магнитного поля \mathbf{H}_0 .

В однородной изотропной плазме $\epsilon_1 = \epsilon_3 = \epsilon$ и уравнение (2.2) вырождается в уравнение Лапласа. Здесь в резонансных условиях $\epsilon \rightarrow 0$ ($\nu \rightarrow 0$) все параметры источников оказываются сингулярными, например импеданс $Z = Z_0/\epsilon \rightarrow \infty$, если $\epsilon \rightarrow 0$ (Z_0 — импеданс источника в вакууме). Ясно, что это означает неадекватность подобной идеализации для описания плазменного резонанса в изотропной плазме. Здесь для адекватного описания необходимо учесть или неоднородность плазмы, или пространственную дисперсию (см. ниже).

Обратимся поэтому сейчас к рассмотрению однородной замагниченной плазмы. Вне резонансных условий, когда $\epsilon_1\epsilon_3 > 0$, замена $z' = z\sqrt{\epsilon_1/\epsilon_3}$ переводит уравнение (2.2) в уравнение Лапласа¹⁰⁻¹². Это обстоятельство позволяет представить себе параметры источников в этих условиях в общем случае. Здесь никаких специфических особенностей не возникает, за исключением случаев, близких к резонансным ($\epsilon_1 \rightarrow 0$ или $\epsilon_3 \rightarrow 0$); их мы обсудим ниже отдельно.

Иная ситуация при $\epsilon_1\epsilon_3 < 0$, когда возможно возбуждение собственных колебаний плазмы. Здесь уравнение (2.2) гиперболического типа, и переход к переменной z' ничего хорошего не обещает. Правда, при наличии аналитических решений в эллиптической области ($\epsilon_1\epsilon_3 > 0$) мы можем продолжать их по параметру $\sqrt{\epsilon_1/\epsilon_3}$ в гиперболическую область ($\epsilon_1\epsilon_3 < 0$) с учетом малой антиэрмитовой части ϵ_1 и ϵ_3 . Однако таким путем может быть проанализировано лишь считанное число примеров (см. ниже). Поэтому для получения общей картины полезно рассмотреть потенциал точечного заряда при $\epsilon_1\epsilon_3 < 0$, т. е. функцию Грина $G_c(\mathbf{r})$ уравнения (2.2). Как уже указывалось, в резонансных условиях для нахождения решения уравнения (2.2) необходимо рассматривать предел $\nu \rightarrow 0$. Для функции Грина такой предел это¹⁴ (см. ^{10,13})

$$\begin{aligned} G_c &= \text{sign } \epsilon_1 \frac{1}{r \sqrt{|\epsilon_1\epsilon_3|} \sqrt{\mu^2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta}} & (\mu^2 \text{ctg}^2 \theta > 1), \\ G_c &= \frac{-i}{r \sqrt{|\epsilon_1\epsilon_3|} \sqrt{\sin^2 \theta - \mu^2 \cos^2 \theta}} & (\mu^2 \text{ctg}^2 \theta < 1); \end{aligned} \quad (2.3)$$

r — расстояние до точки наблюдения, θ — угол между \mathbf{r} и \mathbf{H}_0 , $\mu^2 = \epsilon_1/\epsilon_3$.

Функция Грина (2.3) имеет две важные особенности: она комплексна и уходит в бесконечность на характеристиках $\text{tg } \theta = \pm \mu$ уравнения (2.2), проходящих через точечный заряд. Ниже мы убедимся, что и в других случаях, в том числе и в неоднородной плазме, и для распределенных

(неточечных) источников предельные (в смысле $\nu \rightarrow 0$) решения уравнений (2.1), (2.2) в резонансной области параметров являются комплексными и могут иметь особенности на поверхностях, линиях или в отдельных точках. Для уравнения (2.2) ряд общих свойств решений для $\varphi(\mathbf{r})$ и $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ можно установить с помощью функции Грина $G_c(\mathbf{r})$. Нетрудно убедиться, например, что для гладкого объемного распределения заряда $\rho(\mathbf{r})$ потенциал $\varphi(\mathbf{r}) = \int G_c(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'$ и соответствующее электрическое поле конечны во всех точках пространства; в то же время для гладкого поверхностного распределения заряда потенциал, вообще говоря, конечен, а электрическое поле имеет особенность на характеристиках уравнения (2.2), касающихся поверхности, где $\rho \neq 0$ (если $z - z_0 = \mu r_\perp$ — уравнение одной из таких характеристик, то $|\mathbf{E}| \sim 1/\sqrt{z - z_0 - \mu r_\perp}$ вблизи нее); ясно также, что эти характеристики являются границами, на которых происходит переход от действительных или чисто мнимых значений потенциала к комплексным. Эти особенности будут обсуждаться еще при описании поля заряженного шара. Функция Грина позволяет также выяснить асимптотическое поведение потенциала источника при $r \rightarrow \infty$. Именно, для распределения заряда $\rho(\mathbf{r})$, сконцентрированного вблизи начала координат и достаточно быстро убывающего при $r \rightarrow \infty$, нетрудно убедиться, что при $\mu^2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \rightarrow 0$ $\varphi \sim 1/\sqrt{Lr}$, $r \rightarrow \infty$, L — характерный размер области, где $\rho(r) \neq 0$; в то же время при $\mu^2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \neq 0$ $\varphi \sim 1/r \sqrt{\mu^2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta}$ при $r \rightarrow \infty$ (если, конечно, $\int \rho d\mathbf{r} \neq 0$). Таким образом, вне характеристик, проходящих через область, занятую зарядами, на больших расстояниях потенциал совпадает с потенциалом точечного заряда; вблизи же этих характеристик потенциал конечен, но убывает при $r \rightarrow \infty$ медленнее $1/r$. Последнее обстоятельство важно для интерпретации резонансных потерь источников в «холодной» плазме.

Резонансные потери W — это потери энергии источника в резонансной области частот на возбуждение собственных электростатических колебаний при $\nu \rightarrow 0$: $W = \frac{1}{2} \text{Re} \int \mathbf{j} \mathbf{E}^* \cdot d\mathbf{r}$, $\mathbf{j} = \hat{\sigma} \mathbf{E}$, $\hat{\sigma}$ — тензор проводимости. Величину этих потерь в бесстолкновительном пределе проще всего определить, если воспользоваться фурье-представлением. Тогда при $\nu \rightarrow 0$ имеем

$$W = 16\pi^5 \omega \int d\mathbf{k} \delta(k_\perp^2 \varepsilon_1 + k_z^2 \varepsilon_3) |\rho_k|^2; \quad (2.4)$$

здесь ρ_k — фурье-компонента плотности заряда, k_\perp и k_z — компоненты волнового вектора \mathbf{k} . Из (2.4) следует, что $W \neq 0$ практически во всех случаях, когда $\varepsilon_1 \varepsilon_3 < 0$. В то же время, так как при $\nu \rightarrow 0$ $\hat{\sigma} \rightarrow 0$, конечное значение $W \sim \int \hat{\sigma} |\mathbf{E}|^2 d\mathbf{r}$ может быть связано лишь с тем, что в поле

имеются какие-либо особенности: $\int |\mathbf{E}|^2 d\mathbf{r} \rightarrow \infty$ при $\nu \rightarrow 0$, например если есть поверхности, где электрическое поле достаточно быстро уходит в бесконечность при $\nu \rightarrow 0$. Такая ситуация имеет место в неоднородной изотропной плазме^{6,7,9} (см. также гл. 3). Поскольку в рассматриваемом нами случае, как следует из (2.4), конечная величина потерь на возбуждение плазменного резонанса при $\nu \rightarrow 0$ имеет место для произвольного распределения заряда и учитывая сказанное выше относительно характера поля произвольного распределения заряда, можно заключить, что конечность потерь — это результат медленного убывания φ и \mathbf{E} при $r \rightarrow \infty$ вдоль

характеристик, проходящих через область пространства, где $\rho \neq 0$. Перенос энергии от источника на бесконечность осуществляется либо за счет потока, создаваемого (в «холодной» плазме) квазиэлектростатическим (т. е. не зависящим от скорости света c) вектором Пойнтинга $S = (1/8\pi) [\mathbf{E}, c\mathbf{H}]$, $\text{rot } c\mathbf{H} = -i\omega\mathbf{E}$, $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$, либо (в плазме с пространственной дисперсией) за счет потока энергии возбуждаемых источником плазменных волн (см. гл. 4).

Все рассмотренные свойства электрического поля источников в резонансной области частот могут быть подробно исследованы в задаче о поле заряженного металлического эллипсоида¹⁴. Дело в том, что и при комплексных ε_1 и ε_3 эллипсоидальная поверхность оказывается подходящей к переменным, в которых уравнение (2.2) разделяется так, что можно записать аналитическое решение при любых ε_1 и ε_3 . Мы приведем здесь выражения для потенциала и поля заряженной сферы радиуса a при $\nu \rightarrow 0$:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{a \sqrt{|\varepsilon_1 \varepsilon_3| (\mu^2 + 1)}} \left(\text{sign } \varepsilon_1 \text{Arth} \sqrt{\frac{\mu^2 a^2 - \xi^2}{\mu^2 a^2 + a^2}} + i \frac{\pi}{2} \right). \quad (2.5)$$

$$\frac{r_{\perp}^2}{\xi + a^2} - \frac{\mu^2 z^2}{\xi - \mu^2 a^2} = 1,$$

$$E_z = \frac{q\mu}{2a \sqrt{|\varepsilon_1 \varepsilon_3| (\mu^2 + 1)}} \left[\frac{1}{\sqrt{(\mu z + a \sqrt{\mu^2 + 1})^2 - r_{\perp}^2}} - \frac{1}{\sqrt{(\mu z - a \sqrt{\mu^2 + 1})^2 - r_{\perp}^2}} \right], \quad (2.6)$$

$$E_{\perp} = \frac{q}{2ar_{\perp} \sqrt{|\varepsilon_1 \varepsilon_3| (\mu^2 + 1)}} \left[\frac{\mu z + a \sqrt{\mu^2 + 1}}{\sqrt{(\mu z + a \sqrt{\mu^2 + 1})^2 - r_{\perp}^2}} - \frac{\mu z - a \sqrt{\mu^2 + 1}}{\sqrt{(\mu z - a \sqrt{\mu^2 + 1})^2 - r_{\perp}^2}} \right];$$

здесь $r_{\perp} = r \sin \theta$, $z = r \cos \theta$. Ветви Arth и подкоренных выражений в (2.6) определяются величиной ξ при $\nu \rightarrow 0$ и асимптотическим поведением поля (близости (2.5) и (2.6) к потенциалу и полю точечного заряда) при $r \rightarrow \infty$. Области пространства, соответствующие разным значениям ξ и разным ветвям Arth , показаны на рис. 2. В соответствии со сказанным выше, границами этих областей служат особые (касательные к сфере) характеристики, уравнения которых есть $\text{Im } \xi = 0$ или $r_{\perp}^2 = (\mu z \pm a \sqrt{\mu^2 + 1})^2$; на этих характеристиках согласно (2.6) электрическое поле сингулярно. Из (2.5), (2.6) также следует, что в областях III, где $r_{\perp}^2 \approx \mu^2 z^2$, φ , $E \sim 1/\sqrt{r}$ при $r \rightarrow \infty$. С помощью (2.6) можно убедиться, что распределение поверхностного заряда по сфере равномерное, т. е. совпадает с распределением заряда в вакууме*). Импеданс сферы

$$Z = \frac{\varphi(\xi=0)}{i\omega q} = \frac{1}{\omega a \sqrt{|\varepsilon_1 \varepsilon_3| (\mu^2 + 1)}} \left[\frac{\pi}{2} + i \text{sign } \varepsilon_1 \ln (\mu + \sqrt{\mu^2 + 1}) \right]. \quad (2.7)$$

Как и следовало ожидать, импеданс имеет положительную действительную часть, связанную с возбуждением источником плазменного резонанса. Таким образом, в этой задаче проявляются все обсуждаемые выше особенности потенциала и поля в резонансной области частот: комплексность поля, наличие особенностей, слабое убывание при $r \rightarrow \infty$, наличие конечных потерь на возбуждение плазменных колебаний и др.

Краевая задача на металлическом эллипсоиде единственная в замагниченной плазме, для которой известно точное решение при $\varepsilon_1 \varepsilon_3 < 0$. В то же время для источников более сложной формы, например, состоя-

*) Последнее свойство — совпадение распределения заряда с вакуумным, как можно показать, является общим свойством эллиптических поверхностей. По этой причине расчеты (см., например,¹⁵) характеристик источников в резонансной области частот, основанные на вакуумном распределении заряда, могут быть в ряде случаев близки к истинным.

щих из двух проводников, находящихся под разными потенциалами, структура поля может быть весьма своеобразной. Ясно, например, что «особые» характеристики (плазменные колебания) будут отражаться от металлической поверхности. Такое отражение может обуславливать своеобразные резонансные свойства замагниченной плазмы, полностью или частично ограниченной металлической поверхностью. В настоящее время влияние подобных особенностей на параметры источников в замагниченной плазме недостаточно ясно.

Если при произвольных ε_1 и ε_3 рассмотреть структуру поля сложных источников не удастся, то при $|\varepsilon_1| \ll |\varepsilon_3|$ ($\varepsilon_1 \rightarrow 0$) или $|\varepsilon_1| \gg |\varepsilon_3|$ ($\varepsilon_3 \rightarrow 0$) ситуация может быть иной¹⁶. В этих условиях часто можно найти импеданс и потенциал для ряда сложных — в некоторых случаях для произвольных — источников. Такое упрощение связано с тем, что при $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ или $\varepsilon_3 \rightarrow 0$ уравнение (2.2) вырождается соответственно в квазиодномерное уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi(r_{\perp}, z)}{\partial z^2} = 0 \quad (2.8)$$

или в квазидвумерное уравнение

$$\Delta_{\perp} \varphi(r_{\perp}, z) = 0. \quad (2.9)$$

Исследование этих уравнений, конечно, значительно проще, чем уравнения (2.2).

Рассмотрим, например, квазиодномерный случай¹⁶. Для однозначного отбора решений в уравнении (2.8) мы должны рассматривать предельный переход $\varepsilon_1 \rightarrow 0$. Будем сейчас считать, что при $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ $\varepsilon_1 \varepsilon_3 > 0$.

В координатах r_{\perp} , $z' = z \sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_3}$ уравнение (2.2) — это уравнение Лапласа; источник в этих переменных оказывается сжатым вдоль магнитного поля в $\sqrt{\varepsilon_3/\varepsilon_1}$ раз. Поэтому в пределе $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ в переменных r_{\perp} , z' потенциал источника — это потенциал системы дисков, лежащих в одной плоскости; форма дисков совпадает с поперечным (по отношению к магнитному полю \mathbf{H}_0) сечением источника. Диски могут лежать друг на друге, если имеется силовая линия магнитного поля \mathbf{H}_0 , «протыкающая» разные части источника (рис. 3). Если «протыкаемые» части имеют разные потенциалы, то естественно, что при $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ основное падение потенциала будет в области между теми частями дисков, которые лежат друг на друге (они образуют плоский конденсатор). Учитывая далее, что при $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ любому конечному значению z соответствует $z' = 0$ (т. е. плоскость дисков), мы легко можем представить себе структуру потенциала источника (см. рис. 3): в «протыкаемой» области потенциал $\varphi = \varphi_I(r_{\perp}, z)$ удовлетворяет уравнению (2.8) и равен

$$\varphi_I(r_{\perp}, z) = \frac{2\pi q}{\varepsilon_3} A \left[\frac{2z - z_1(r_{\perp}) - z_2(r_{\perp})}{z_1(r_{\perp}) - z_2(r_{\perp})} \right], \quad z_2(r_{\perp}) \leq z \leq z_1(r_{\perp}), \quad (2.10)$$

$$\frac{1}{A} = \int_{z_0} \frac{dr_{\perp}}{z_1(r_{\perp}) - z_2(r_{\perp})},$$

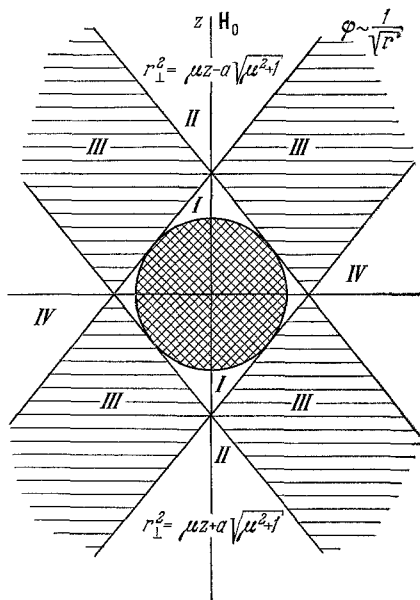


Рис. 2.

S_0 — площадь «протыкания»; вне ее он совпадает с потенциалом дисков $\varphi(r_\perp, z')$ в их плоскости, т. е.

$$\varphi_{II} = -\varphi_0 = \text{const}, \quad \varphi_{III} = \varphi_0 = \text{const}, \quad \varphi_V = \varphi(r_\perp) *).$$

Таким образом, потенциал φ_I может быть найден при произвольной форме поверхности; с ним связана величина импеданса источника:

$$Z = \frac{\varphi_I(z_1) - \varphi_I(z_2)}{i\omega q} = i \frac{4\pi A}{\omega \varepsilon_3}. \quad (2.11)$$

Импеданс определяется лишь величиной зазора между частями источников и не зависит от формы остальной части их.

Распределение потенциала $\varphi_V(r_\perp)$ (которое, впрочем, не влияет на величину импеданса) может быть найдено в общем виде лишь для двумерных полей.

Выражение (2.11) — это первый член разложения импеданса по параметру ε_1 . Нахождение следующего члена имеет смысл в резонансной области частот $\varepsilon_1 \varepsilon_3 < 0$, где он приводит к появлению сопротивления источника. Соответствующие расчеты — они вполне аналогичны расчету вклада краевого эффекта в емкость (ср. ¹⁰) плоского конденсатора — дают $R \sim |\varepsilon_1| \ln |\varepsilon_1|$.

Если источник одинарный или отсутствует «протыкание» его частей магнитным полем, то при $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ потенциал и импеданс источников имеют особенность (ср., например, (2.7)) (так как в силу уравнения (2.9) продольная компонента электрического поля не убывает при удалении от источника). Характер этих особенностей, как ясно из предыдущего рассмотрения, можно найти, зная параметры в вакууме металлических дисков с формой поперечного сечения источников.

Если источник одинарный или отсутствует «протыкание» его частей магнитным полем, то при $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ потенциал и импеданс источников имеют особенность (ср., например, (2.7)) (так как в силу уравнения (2.9) продольная компонента электрического поля не убывает при удалении от источника). Характер этих особенностей, как ясно из предыдущего рассмотрения, можно найти, зная параметры в вакууме металлических дисков с формой поперечного сечения источников.

Таким образом, мы видим, что модель однородной замагниченной плазмы дает разумные значения для полей и импеданса источников, в том числе и в условиях, когда возможно возбуждение ее собственных колебаний ($\varepsilon_1 \varepsilon_3 < 0$). Это является одним из аргументов в пользу возможности использования этой модели для анализа реальных ситуаций. Соответствующие распределения потенциала в резонансной плазме, как мы убедились, зачастую не имеют ничего общего с тем, что имеет место для источника такой же геометрии в вакууме, благодаря чему иногда оказывается возможным исследовать характеристики источников произвольной формы, что, конечно, нельзя сделать в вакууме. Основной особенностью в распределении поля в однородной замагниченной плазме в резонансных условиях является слабое убывание поля при $r \rightarrow \infty$ в некоторых областях пространства (вблизи особых характеристик). Это одно из основных проявлений резонанса, и с ним мы неоднократно будем встречаться в дальнейшем.

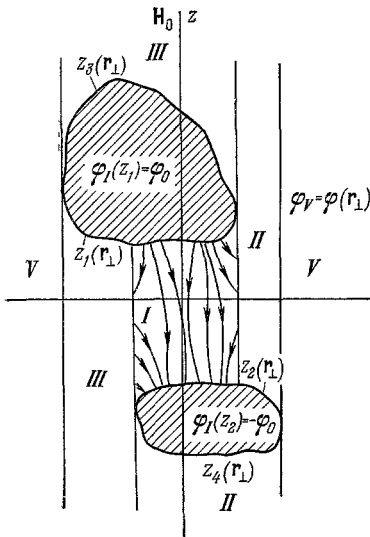


Рис. 3.

Это является одним из аргументов в пользу возможности использования этой модели для анализа реальных ситуаций. Соответствующие распределения потенциала в резонансной плазме, как мы убедились, зачастую не имеют ничего общего с тем, что имеет место для источника такой же геометрии в вакууме, благодаря чему иногда оказывается возможным исследовать характеристики источников произвольной формы, что, конечно, нельзя сделать в вакууме. Основной особенностью в распределении поля в однородной замагниченной плазме в резонансных условиях является слабое убывание поля при $r \rightarrow \infty$ в некоторых областях пространства (вблизи особых характеристик). Это одно из основных проявлений резонанса, и с ним мы неоднократно будем встречаться в дальнейшем.

*) В работе ¹⁶ необоснованно положено $\varphi_V = \text{const}$.

3. «БОЛЬШИЕ» ИСТОЧНИКИ. «ХОЛОДНАЯ» НЕОДНОРОДНАЯ ПЛАЗМА

а) И з о т р о п н а я п л а з м а. Предположение об однородности плазмы, как указывалось, становится бессмысленным в резонансных условиях ($\varepsilon_s = \varepsilon \rightarrow 0$) в однородной изотропной плазме. Посмотрим, что дает здесь учет неоднородности.

1) *Сферический зонд*. Начнем с рассмотрения простейшего примера — сферического зонда в радиально-неоднородной «холодной» плазме.

В силу сферической симметрии электрическое поле

$$E = E_r = \frac{q}{\varepsilon(r)r^2}; \quad (3.1)$$

q — полный заряд зонда, $\tilde{\varepsilon} = 1 - \omega_p^2(r)/\omega(\omega + iv)$ — диэлектрическая проницаемость, ω_p — ленгмюровская частота неоднородной плазмы. Из (3.1) получаем, что при $v \rightarrow 0$ импеданс зонда

$$Z = \frac{\pi}{\omega r_0^2} \int_0^\infty \delta(\varepsilon) dr - \frac{1}{i\omega} \int_a^\infty \frac{dr}{r^2 \varepsilon}; \quad (3.2)$$

здесь a — радиус зонда, $\varepsilon(r_0) = 0$, \int означает интеграл в смысле главного значения. Из (3.2) следует, что если диэлектрическая проницаемость плазмы проходит через нуль, то импеданс имеет конечную действительную часть и при $v \rightarrow 0$, причем на поверхности $\varepsilon = 0$ электрическое поле имеет особенность $E \sim 1/\varepsilon$ *). Таким образом, в неоднородной плазме в силу локализации плазменного резонанса на поверхности вклад резонанса в импеданс оказывается конечным, хотя электрическое поле и оказывается сингулярным **). Нетрудно усмотреть в этом аналогию с резонансными свойствами однородной замагниченной плазмы. Действительно, в последнем случае собственные колебания плазмы (плоские продольные колебания) возможны лишь под определенным углом по отношению к внешнему магнитному полю. Ограниченный же источник возбуждает электрическое поле всех направлений. В силу этого резонансные свойства плазмы размываются. И хотя в поле и остается ряд особенностей (сингулярности, медленное убывание на бесконечности), импеданс оказывается конечным, но имеет отличную от нуля действительную часть. В изотропной же плазме «размывание» резонанса, приводящее к тем же эффектам, связано с ее неоднородностью.

В разреженной (бесстолкновительной) плазме статическое распределение концентрации вокруг металлической сферы, поглощающей заряженные частицы при $r \rightarrow \infty$, имеет вид (см., например, ⁴)

$$N(r) = N_\infty \left(1 - \frac{a_0^2}{r^2}\right), \quad (3.3)$$

где N_∞ — концентрация однородной плазмы, $a_0^2 = a_0^2(\varphi_0) \approx a^2/4$, φ_0 — статический потенциал сферы. Примем, что формула (3.3) для концентрации плазмы справедлива вплоть до $r = a$, что заведомо дает правильную

*) Конечность действительной части импеданса связана с тем, что при $v \rightarrow 0$ джоулева диссипация

$$W \sim v \int_a^\infty |E|^2 r^2 dr \sim v \int_a^\infty \frac{dr}{r^2 |\varepsilon|^2} = \int_a^\infty \frac{\delta(\varepsilon)}{r^2} dr.$$

**) Подобные резонансные свойства неоднородной изотропной плазмы были обнаружены при исследовании рассеяния электромагнитных волн ограниченной плазмой ⁶.

качественную зависимость импеданса Z от частоты. Тогда $\varepsilon(r) = \varepsilon_\infty + (A^2/r^2)$, $A^2 = (\omega_{p\infty}^2 / \omega^2) a_0^2$, а

$$Z = \frac{1}{i\omega} \times \begin{cases} -\frac{1}{A\sqrt{\varepsilon_\infty}} \left(\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{\sqrt{\varepsilon_\infty}}{A} a \right) & (\varepsilon_\infty > 0), \\ \frac{1}{A\sqrt{\varepsilon_\infty}} \left[i \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 - (\sqrt{|\varepsilon_\infty|}/A) a}{1 + (\sqrt{|\varepsilon_\infty|}/A) a} \right] & (\varepsilon_\infty < 0). \end{cases} \quad (3.4)$$

Выражение (3.4) имеет особенности при $\varepsilon(a) = 0$ и при $\varepsilon_\infty = 0$. Особенность при $\varepsilon(a) = 0$ является слабой (логарифмической) и легко может быть устранена учетом пространственной дисперсии (см. гл. 4). Сингулярность импеданса при $\varepsilon_\infty \rightarrow 0$ не может быть устранена учетом пространственной дисперсии. Она возникает из-за того, что при $\varepsilon_\infty = 0$ $E = q/A^2$, т. е. электрическое поле не зависит от r . Для заряда (монополя) это свойство сохраняется и при учете пространственной дисперсии (см. гл. 4). Как уже отмечалось, такой характер полей источников является обычным для резонансных условий в плазме (см. гл. 4 и ниже).

Являются ли сингулярности импеданса при $\varepsilon_\infty \rightarrow 0$, $\varepsilon(s) = 0$ (s_i — поверхность источника) общим свойством полей источников в «холодной» неоднородной изотропной плазме? Особенность при $\varepsilon(s) = 0$ есть следствие совпадения поверхности $\varepsilon(r) = 0$ с поверхностью источника. Ясно, что эта особенность не может быть существенна практически, так как для источников меньшей симметрии нет оснований считать, что поверхность $\varepsilon(r) = 0$ совпадает с поверхностью источника. Что же касается сингулярности в импедансе при $\varepsilon_\infty = 0$, то, как сейчас будет продемонстрировано, она исчезает для дипольного (двойного) источника — в полном соответствии с тем, что имеет место в резонансных условиях в других случаях («холодная» замагниченная плазма, «теплая» однородная изотропная плазма и др.; см. ниже).

2) «Разрезанная» сфера. Рассмотрим дипольный источник в виде разрезанной пополам металлической сферы¹⁷. Будем опять считать, что концентрация дается формулой (3.3) при всех r . При $\varepsilon_\infty = 0$ уравнение для радиальной части n -й сферической гармоники¹⁸ потенциала имеет вид

$$\frac{d^2 \varphi_n}{dr^2} - \frac{n(n+1)}{r^2} \varphi_n = 0, \quad (3.5)$$

решение которого, ограниченное при $r \rightarrow \infty$, есть $\varphi_n \sim r^{-n}$. Таким образом, никаких особенностей в потенциале при $\varepsilon_\infty = 0$ нет и, следовательно, импеданс разрезанной сферы конечен при $\varepsilon_\infty = 0$. Ясно, что это связано с тем, что поле двойного источника «успевает» замыкаться при $\varepsilon > 0$, не доходя до области резонанса (до бесконечности). Для первой (дипольной) гармоники решение для потенциала можно построить и при $\varepsilon_\infty \neq 0$. Используя это решение, нетрудно показать, что при $\varepsilon_\infty \neq 0$ добавка к импедансу при $\varepsilon_\infty \rightarrow 0$ $\Delta Z \sim \varepsilon_\infty^{3/2}$. Таким образом, для двойных (дипольных) источников не должно быть особенностей в потенциале, поле и импедансе при удалении поверхности $\varepsilon(r) = 0$ в бесконечность.

3) Произвольные источники в неоднородной изотропной плазме. Как в общем случае влияет геометрия поверхностей $\varepsilon(r) = 0$ на параметры источников? Мы уже убедились, что само наличие поверхности $\varepsilon(r) = 0$ не приводит к особенностям в импедансе; оно обуславливает лишь бесстолкновительные потери и особенность в электрическом поле и потенциале при $\varepsilon(r) = 0$. По-видимому, то же самое имеет место и в показан-

ных схематически на рис. 4 случаях возможного расположения поверхностей $\varepsilon(r) = 0$, включая случай локального касания и «утыкания». Дело в том, что электрическое поле «стремится» пересечь поверхность $\varepsilon(r) = 0$ под прямым углом, что обуславливает его сингулярность при $\varepsilon(r) = 0$, конечную величину бесстолкновительной диссипации и отсутствие особенностей в импедансе. Этот принцип может быть продемонстрирован на целом ряде примеров (дипольный потенциал в среде с $\varepsilon = \varepsilon(r)$, точечный заряд в среде с $\varepsilon = \alpha z$, потенциал над металлической плоскостью, где ε есть функция лишь угла, и др.). Известным исключением из этого принципа является случай, когда линии $\varepsilon(r) = \text{const}$ совпадают с силовыми линиями электрического поля источника в вакууме. В этом случае, согласно известному принципу «заполнения», электрическое поле при наличии $\varepsilon(r)$ не изменяется. Оно, таким образом, оказывается параллельным линии $\varepsilon(r) = 0$, бесстолкновительные потери отсутствуют и при $\oint_s \varepsilon |E| ds = 0$, s — поверх-

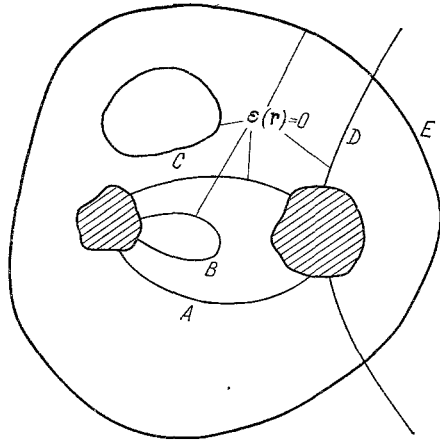


Рис. 4.

ность источника, источник возбуждает в плазме незатухающие собственные колебания, вследствие чего импеданс имеет особенность.

Было бы интересно провести общий анализ границ применимости сформулированного выше принципа. Создается впечатление, что приведенное выше исключение является единственным. Если это так, то практически для всех «больших» источников в изотропной плазме импеданс может быть найден в приближении «холодной» неоднородной плазмы; области частот, где вне источника $\varepsilon(r)$ проходит через нуль, — это те частоты, где отлично от нуля бесстолкновительное сопротивление источника.

б) Магнитоактивная плазма. Итак, уже в изотропной плазме есть серьезные основания считать, что при учете неоднородности приближение «холодной» плазмы достаточно для расчета импеданса «больших» источников практически во всех случаях. Ясно, что это должно быть так и в магнитоактивной плазме, где имеется дополнительная «размазка» резонансных свойств анизотропией (так что уже однородное приближение часто годится для расчета импеданса). В то же время особенности, связанные с неоднородностью, в магнитоактивной плазме должны быть более разнообразны, поскольку в магнитоактивной плазме неоднородность может приводить к смене типа уравнения для потенциала, отражению «особых» характеристик источников от границы области гиперболичности и др.

Рассмотрим ряд примеров, которые позволят нам получить общие представления о поведении электрического поля и импеданса источников в неоднородной магнитоактивной плазме, и высказать принцип, аналогичный приведенному выше для изотропной плазмы.

1) *Точечный заряд вблизи плоской резкой границы плазма — вакуум.* Распределение потенциала в этом случае можно найти модификацией метода отражения. Если магнитное поле нормально к границе ($z = 0$), в плаз-

ме $\varepsilon_3 < 0$, $\varepsilon_1 > 0$ и заряд q находится в плазме ($z > 0$) в точке ($x = 0$, $y = 0$, $z = z_0$), то, как легко убедиться, его потенциал в плазме Φ_p складывается из исходного («падающего») потенциала (2.3) Φ_q и «отраженного» потенциала Φ_r заряда $q_r = q(\varepsilon_3 - 1)/(\varepsilon_3 + 1)$, находящегося в зеркальной относительно границы точке в однородной плазме. Потенциал же заряда в вакууме является потенциалом заряда $q = 2q/i\mu(\varepsilon_3 + 1)$, находящегося в мнимой точке $z = i\mu z_0$, так что

$$\Phi_v = \frac{q}{\sqrt{(z - i\mu z_0)^2 + r_\perp^2}}. \quad (3.6)$$

В плазме особенности в поле имеются не только на характеристиках, проходящих через заряд, но и на отраженных характеристиках (рис. 5, а),

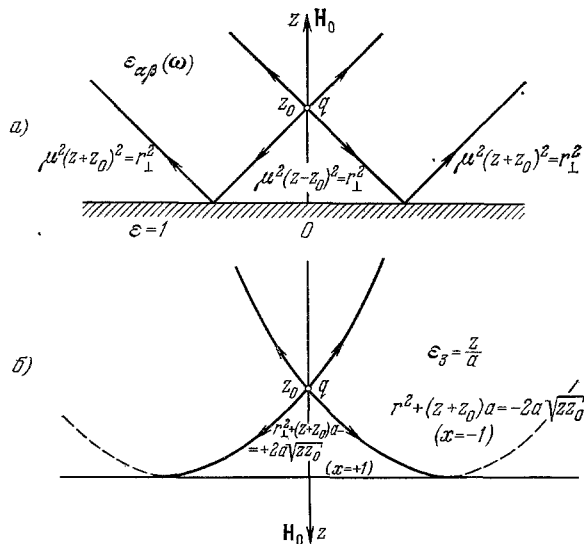


Рис. 5.

в то же время в вакууме (т. е. в области эллиптичности уравнения для потенциала) особенностей в потенциале нет.

Если же заряд находится в вакууме при $z = -z_0$, то аналогично

$$\Phi_v = q \left[\frac{1}{\sqrt{(z + z_0)^2 + r_\perp^2}} + \frac{(1 - i \sqrt{|\varepsilon_1 \varepsilon_3|}) / (1 + i \sqrt{|\varepsilon_1 \varepsilon_3|})}{\sqrt{(z - z_0)^2 + r_\perp^2}} \right], \quad (3.7)$$

$$\Phi_p = \frac{2q}{(1 + i \sqrt{|\varepsilon_1 \varepsilon_3|}) \sqrt{(i\mu z + z_0)^2 + r_\perp^2}}. \quad (3.8)$$

Здесь особенности в потенциале вне заряда отсутствуют. В то же время, как следует из (3.8) при $z \rightarrow \infty$ и $\mu z = r_\perp$, $\Phi \sim 1/\sqrt{z}$, т. е. спадает медленнее, чем $1/r$. Ясно (ср. гл. 2), что такое поведение потенциала (связанное с возбуждением плазменных колебаний) должно приводить к конечным потерям энергии электрического поля при $\nu \rightarrow 0$ и к появлению сопротивления у источников, полностью находящихся в вакууме.

Таким образом, мы видим, что граница области эллиптичности и гиперболичности уравнения (2.1) — это то место, где происходит перестройка поля источника, отражение характеристик в гиперболическую

область и возбуждение плазменных колебаний источниками, находящимися в эллиптической области. Рассмотрим эти особенности в поведении поля и потенциала на примере, где переход от гиперболичности к эллиптичности уравнения (2.1) плавный.

2) *Точечный заряд в «линейном» слое с бесконечным магнитным полем, направленным вдоль градиента диэлектрической проницаемости.* В этом случае уравнение для потенциала $\varphi = G_q^\infty$ точечного заряда q , находящегося в точке $\mathbf{r}_\perp = 0$, $z = z_0$, имеет вид

$$\Delta_\perp G_q^\infty + \frac{\partial}{\partial z} \left(\varepsilon_3 \frac{\partial G_q^\infty}{\partial z} \right) = -4\pi q \frac{\delta(r_\perp)}{2\pi r_\perp} \delta(z - z_0); \quad (3.9)$$

здесь $\varepsilon_3 = z/a$, а Δ_\perp — оператор Лапласа по поперечным координатам \mathbf{r}_\perp . Уравнение (3.9) может быть решено с помощью преобразования Фурье по поперечным координатам. Решение при $\nu \rightarrow 0$ имеет следующий вид:

$$G_q^\infty = \frac{iq}{2\pi \sqrt{z z_0} (x^2 - 1)^{1/2}} [\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) - i\pi], \quad (3.10)$$

$$x = \frac{r_\perp^2 + (z + z_0)a}{2a \sqrt{z z_0}}, \quad \varepsilon_3 = \frac{z}{a}.$$

Из этих выражений следует: а) потенциал является комплексным как при $\varepsilon_3 > 0$, так и при $\varepsilon_3 < 0$ (ср. п. 1)); б) при $\varepsilon_3 \rightarrow 0$ $G_q^\infty \rightarrow \infty$ (логарифмически) вне зависимости от знака z_0 ; можно показать, что в этом случае, как и в изотропной плазме, особенность потенциала при $\varepsilon_3 = 0$ всегда приводит к конечным потерям энергии электрического поля при $\nu \rightarrow 0$ (мы не будем приводить здесь соответствующие выражения); в) если заряд находится в эллиптической области ($\varepsilon_3 > 0$, $z_0 > 0$), то вне точки нахождения заряда эта особенность в потенциале G_q^∞ единственная, кроме того, в этом случае в гиперболической области при $r_\perp^2 + 4a^2(\sqrt{\varepsilon_3} + \sqrt{\varepsilon_3^0})^2 = 0$, $\varepsilon_3 < 0$ G_q^∞ медленно убывает при $z \rightarrow \infty$ ($G_q^\infty \sim 1/\sqrt{z}$, $z \rightarrow \infty$), что должно приводить (ср. п. 1)) к потерям энергии за счет возбуждения плазменных колебаний при $z \rightarrow \infty$; г) если заряд находится в гиперболической области ($z_0 < 0$), то имеется также сингулярность в электрическом поле, на падающих ($x = 1$) (на плоскость $\varepsilon_3 = 0$) характеристиках уравнения (3.6), как показано на рис. 5, б; д) особенности поля на отраженных от плоскости $\varepsilon_3 = 0$ характеристиках ($x = -1$ — пунктир) отсутствуют, т. е. плазменные колебания не отражаются от параболической границы уравнения (3.9).

3) *О потенциале в плоскостистой плазме.* В общем случае смена типа уравнения (2.1) может происходить при проходе ε_1 или ε_3 через нуль (гибридный и плазменный резонансы) или при проходе ε_1 через бесконечность (циклотронный резонанс *). В плоскостистой плазме двумерные эталонные уравнения и их частные решения при проходе всех возможных резонансов (плазменного, гибридного и циклотронного) могут быть представлены в следующем виде (Z_ν — функция Бесселя, k — волновое число; ср. ^{18,19}):

$$\frac{1}{z} \varphi_{xx} - \varphi_{zz} = 0, \quad \varphi_k = \sqrt{z} Z_1(2k \sqrt{z}) e^{ikh}, \quad (3.11a)$$

$$z \varphi_{xx} - \varphi_{zz} = 0, \quad \varphi_k = \sqrt{z} Z_{1/3} \left(\frac{2}{3} k z^{3/2} \right) e^{ikh}, \quad (3.11b)$$

*) Следует отметить, что прохождение ε_1 через бесконечность возможно и в плазме с постоянным магнитным полем, поскольку в неоднородной плазме с неоднородным электрическим полем собственная частота электронов зависит и от степени неоднородности электрического поля.

$$\varphi_{xx} - (z\varphi_z)_z = 0, \quad \varphi_h = Z_0 (2k\sqrt{z}) e^{ikh}, \quad (3.11в)$$

$$\left(\frac{1}{x}\varphi_x\right)_x - \varphi_{zz} = 0, \quad \varphi_h = xZ_{2/3} \left(\frac{2}{3}kx^{3/2}\right) e^{ikh}, \quad (3.11г)$$

$$\varphi_{xx} - [(z + \alpha x)\varphi_z]_z = 0, \quad \varphi_h =$$

$$= (u - \alpha^2)^{i\alpha k} Z_{2i\alpha k} (2k\sqrt{u - \alpha^2}) e^{ikh} \quad (u = z + \alpha x), \quad (3.11д)$$

$$\left(\frac{1}{z + \alpha x}\varphi_x\right)_x - \varphi_{zz} = 0, \quad \varphi_h = \begin{cases} (u - \alpha^2)^{i\alpha k} Z_{2i\alpha k} (2\alpha k\sqrt{u - \alpha^2}) e^{ikh} & (u \rightarrow \alpha^2), \\ uZ_{2/3} \left(\frac{2k}{3\alpha}u^{3/2}\right) e^{ikh} & (u \rightarrow 0). \end{cases} \quad (3.11е)$$

Уравнения (3.11а)–(3.11г) являются, по существу, частными случаями уравнений (3.11д), (3.11е) при $\alpha \rightarrow 0$ или $\alpha \rightarrow \infty$; их выделение обус-

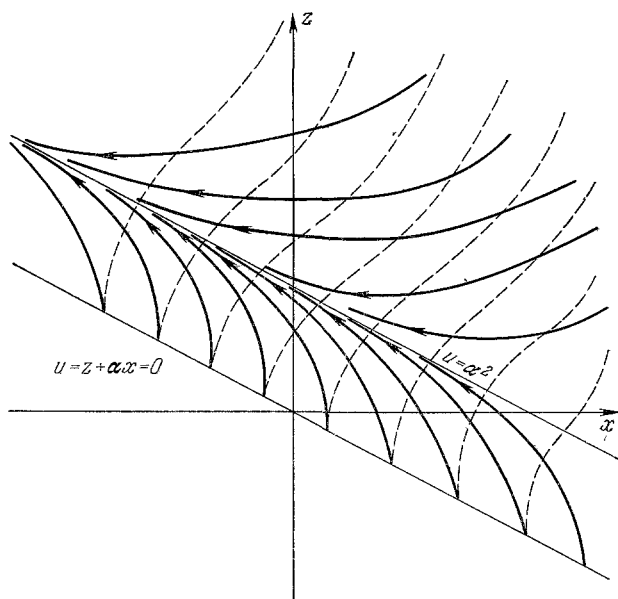


Рис. 6.

ловлено тем, что в случае, когда линии $\varepsilon_1 = \text{const}$ или $\varepsilon_3 = \text{const}$ параллельны или перпендикулярны магнитному полю \mathbf{H}_0 , поведение потенциала вблизи параболической границы оказывается иным, чем при $0 < |\alpha| < \infty$.

Характеристики уравнений (3.11) таковы:

$$\left. \begin{aligned} 4z &= (x + c)^2 & \text{в } (3.11а), (3.11в), \\ \frac{4}{9}z^3 &= (x + c)^2 & \text{в } (3.11б), \\ \frac{4}{9}x^3 &= (z + c)^2 & \text{в } (3.11г), \\ \pm \sqrt{z + \alpha x} - \alpha \ln|\alpha \pm \sqrt{z + \alpha x}| &= \frac{x + c}{2} & \text{в } (3.11д), (3.11е). \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

В (3.11а)–(3.11г) характеристики имеют простой параболический вид; в то же время в случаях (3.11д), (3.11е) одно из семейств характеристик имеет асимптоту (ср. ¹⁹) $z + \alpha x = u = \alpha^2$, к которой стремятся (при $x \rightarrow +\infty$ или $x \rightarrow -\infty$) все характеристики этого семейства (рис. 6).

Из анализа приведенных уравнений, их частных решений и вида характеристик можно сделать следующие выводы, важные для получения представления о поведении потенциала в плазме с произвольной неоднородностью.

а) В общем случае на параболической границе потенциал и электрическое поле при $\nu \rightarrow 0$ — достаточно гладкие функции координат, потери энергии W при $\nu \rightarrow 0$ отсутствуют и плазменные колебания (бегущие волны потенциала), падающие на параболическую линию, полностью отражаются. Исключение составляют лишь случаи (3.11а), (3.11в), когда параболическая граница сама является характеристикой уравнения (2.4); здесь в окрестности этой границы происходит диссипация энергии из-за особенности в электрическом поле при $\nu \rightarrow 0$, если проходится плазменный или гибридный резонансы (уравнения (3.11е)), и из-за особенности в ϵ_1 при прохождении гирорезонанса (уравнения (3.11а)), а плазменные колебания не отражаются от параболической границы.

б) В общем случае (3.11д), (3.11е) отличная от нуля при $\nu \rightarrow 0$ диссипация энергии W возникает внутри гиперболической области в окрестности асимптот характеристик $u \rightarrow \alpha^2$ (см. (3.11д), (3.11е)). Здесь электрическое поле при $\nu \rightarrow 0$ имеет на асимптоте особенность типа $1/x$, $x \rightarrow 0$. Отметим, что фактической областью пространства, где при $x = 0$ происходит диссипация, является не область $u = \alpha^2$, x любое, а $u = \alpha^2$, $x \rightarrow \infty$ — область, куда группируются характеристики. В последнем можно убедиться, рассматривая решение уравнений (3.11д), (3.11е) в виде (непрерывного) набора плоских волн.

в) Отличная от нуля диссипация W при $\nu \rightarrow 0$ возникает так же, как и в однородной плазме, и из-за ухода на бесконечность плазменных колебаний, возбуждаемых источниками, находящимися как в гиперболической, так и в эллиптической области. Это приводит к медленному убыванию потенциала при удалении в бесконечность вдоль характеристик (ср. гл. 2, (2.5), (2.6)).

4) *О потенциале при произвольной форме параболической границы.* Мы не будем останавливаться на ограниченном числе известных здесь частных точных решений (см., например, ¹⁹), а рассмотрим поведение характеристик уравнения для потенциала, ограничиваясь опять, для простоты, двумерной геометрией. Вид характеристик, как мы видели в предыдущем пункте, хотя и не определяет поведение потенциала полностью (ср. ²⁰), позволяет сделать важные выводы о его структуре, наличии диссипации энергии электрического поля при $\nu \rightarrow 0$ и т. д. Причем, как мы увидим, качественная картина поведения характеристик может быть дана в общем случае, без конкретизации явной зависимости ϵ_1 и ϵ_3 от координат. В отличие от плоскостной плазмы, где важную роль в возникновении при $\nu \rightarrow 0$ особенностей поля и $W \neq 0$ играли особые характеристики — асимптоты характеристик или сама параболическая граница, в плазме с произвольной неоднородностью определяющую роль в поведении потенциала, возникновении особенностей поля и диссипации при $\nu \rightarrow 0$ играют особые точки уравнений характеристик — обстоятельство, обнаруженное и рассмотренное впервые Пилия и Федоровым ¹⁹.

Итак, пусть теперь ϵ_1 и ϵ_3 — произвольные функции x и z , $z \parallel H_0$. Двумерное уравнение для потенциала в этом случае — это

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\epsilon_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\epsilon_3 \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = 0, \quad (3.13)$$

а уравнение характеристик ($\epsilon_1 \epsilon_3 < 0$)

$$\frac{dz}{dx} = \pm \sqrt{-\frac{\epsilon_3}{\epsilon_1}}. \quad (3.14)$$

Уравнение (3.14) мы запишем в виде

$$F\left(\frac{dz}{dx}, x, z\right) = \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} = 0. \quad (3.15)$$

Уравнения такого вида, как известно ²¹, можно рассматривать как описывающее движение изображающей точки x, z, ξ по поверхности $F(\xi, x, z) = 0$ с уравнениями движения

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial \xi}, \quad \frac{dz}{dt} = -\xi \frac{\partial F}{\partial \xi}, \\ \frac{d\xi}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial x} + \xi \frac{\partial F}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

В нашем случае $F = \xi^2 + \varepsilon_3/\varepsilon_1 = \xi^2 - f(x, y)$ и (3.16) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -2\xi, \quad \frac{dz}{dt} = -2\xi^2, \\ \frac{d\xi}{dt} &= -\frac{\partial f}{\partial x} - \xi \frac{\partial f}{\partial z}; \end{aligned} \quad (3.17)$$

t — некоторый параметр вдоль характеристики.

В соответствии с проведенной интерпретацией уравнения (3.17) описывают движение по поверхности $\xi^2 - f = 0$, причем движение по одной стороне ($\xi > 0$) — это одно из семейств характеристик (3.15), а движение по другой ($\xi < 0$) — другое. Эта интерпретация естественно дает отражение характеристик от границы области гиперболичности — переход характеристик одного семейства в характеристики другого. С указанной точки зрения такой переход есть просто непрерывное движение изображающей точки по поверхности $F(\xi, x, z) = 0$. Из уравнений следует, прежде всего, что z является монотонной функцией t . Это означает, что характеристики или уходят на бесконечность, или «утыкаются» в состояние равновесия характеристик $\xi = 0$ $\partial f/\partial x = 0$.

В рамках уравнений (3.17) исследование поведения характеристик вблизи состояния равновесия производится элементарно. Действительно, так как $\xi = 0$ в особой точке, то фактически можно считать, что вблизи особой точки движение происходит по поверхности $z = \text{const} = z_0$. Тогда система уравнений для определения типа особой точки — обыкновенная плоская система уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -2\xi, \\ \frac{d\xi}{dt} &= -\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \xi \frac{\partial f}{\partial z}\right)_{z=z_0}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Отсюда видно, что для исследования типа особой точки $z = z_0, x = 0$ достаточно ограничиться следующим представлением: $f(x, z) = \alpha(z - z_0) + \beta x^2$. В результате будем иметь, что особая точка будет узлом при $\beta < 0, \alpha^2 > 16|\beta|$; фокусом при $\beta < 0, \alpha^2 < 16|\beta|$; седлом при $\beta > 0$ ¹⁹. Значение типа особой точки позволяет сразу в рассматриваемом случае представить себе поведение характеристик. На рис. 7 дан качественный ход характеристик и показаны «особые» характеристики точечного заряда, находящегося в гиперболической области (стрелки на «особых» характеристиках показывают направление потока энергии плазменных колебаний). Из этого рисунка напрашивается следующий общий вывод: возбуждаемые источниками плазменные колебания или уходят на бесконечность, или диссипируются в узлах или фокусах (являющихся местом стока характеристик)*). В то же время седло, как таковое,

*) Фокус, как сток плазменных колебаний, был рассмотрен недавно Пилия и Федоровым ²².

не должно приводить к конечной диссипации W при $\nu \rightarrow 0$, поскольку через него проходят всего две характеристики. Седло может приводить к $W \neq 0$ при $\nu \rightarrow 0$ лишь из-за наличия группировки характеристик к его сепаратрисам (ср. ¹⁹ и п.6) на стр. 93. Однако при произвольной

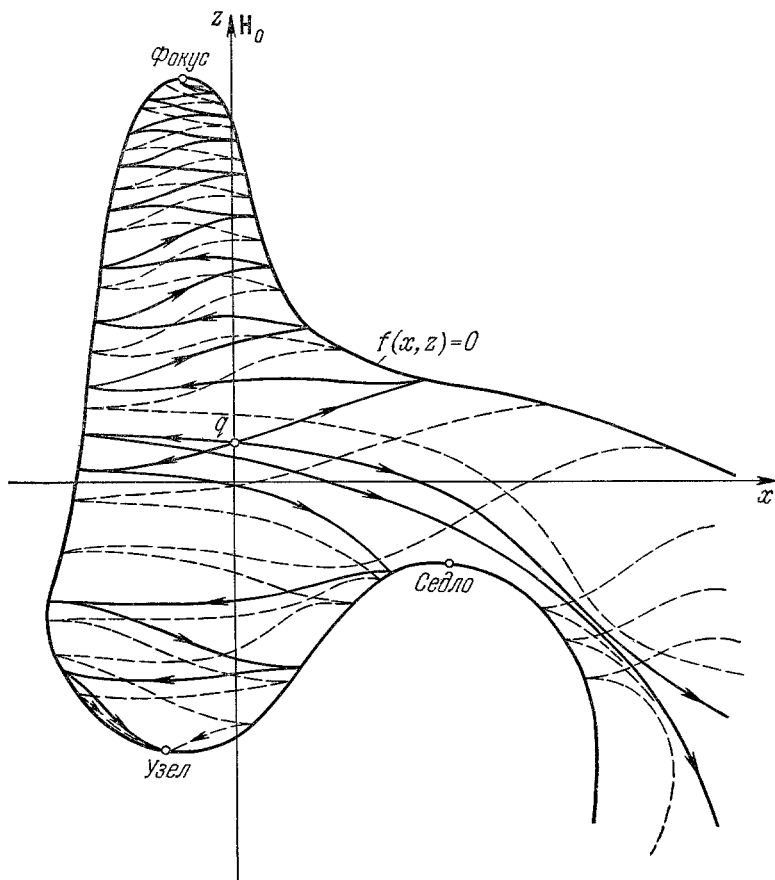


Рис. 7.

зависимости ε_1 и ε_3 от координат сепаратрисы седел не являются асимптотами характеристик и асимптоты вообще должны отсутствовать. Поэтому в общем случае вклад в потери при $\nu \rightarrow 0$ дают только особые точки типа фокус и узел.

Таким образом, проведенный анализ структуры характеристик и частные решения уравнения (2.1) дают основания сформулировать «теорему» (подобную соответствующей теореме в неоднородной изотропной плазме): наличие области гиперболичности уравнения (2.1) в плазме, окружающей источник, всегда приводит к возникновению потерь источника (действительной части его импеданса), обусловленных возбуждением плазменных колебаний, их уносом на бесконечность или их поглощением в узлах и фокусах. Было бы интересно доказать эту теорему или продемонстрировать ее на точно решаемых или численных примерах, найти исключения из нее (что, впрочем, представляется маловероятным). Следует подчеркнуть, что в обсуждаемой «теореме», так же как и в соответствующей «теореме» в изотропной плазме, речь идет о плазме с плавной неоднородностью.

родностью, а не о плазме с резкой неоднородностью (например, кусочно-однородной). В последнем случае, как известно (см., например, ^{6,7}) спектр частот, на которых при $\nu \rightarrow 0$ имеются потери, оказывается дискретным.

Итак, в неоднородной «холодной» плазме наличие областей или линий, где возможно возбуждение плазменных колебаний, должно приводить к появлению у источников действительной части импеданса и, во многих случаях, к появлению особенностей в электрическом поле при $\nu \rightarrow 0$.

4 ИСТОЧНИКИ В ОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ. УЧЕТ «СЛАБОЙ» ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДИСПЕРСИИ

«Холодное» приближение не описывает поведение электрического поля вблизи «холодных» особенностей, может не приводить к ограничению особенностей в частотной зависимости импеданса и т. п. Для нахождения этих величин и определения тех параметров источников, которые вообще не связаны с приближением «холодной» плазмы (например, сопротивление источников в нерезонансной области частот), необходим учет пространственной дисперсии — нелокальной связи между током и электрическим полем в плазме, обусловленной движением ее частиц. В настоящей главе учет пространственной дисперсии будет произведен в рамках приближения однородной плазмы в условиях, когда пространственную дисперсию можно считать слабой (т. е. можно считать, что размер неоднородности электрического поля велик по сравнению с параметром пространственной дисперсии; ср. ниже). Учет слабой пространственной дисперсии, связанной с оседанием частиц на поверхности «больших» источников в неоднородной плазме, и влияние сильной пространственной дисперсии на параметры источников в неоднородной плазме обсуждается в последующих разделах.

Приближение однородной плазмы привлекательно тем, что для него диэлектрическая проницаемость с учетом пространственной дисперсии хорошо известна и нет необходимости для каждого источника вычислять ее заново (что, вообще говоря, необходимо делать при учете неоднородности плазмы). В этом случае уравнение для потенциала ϕ переменного поля имеет вид модифицированного уравнения Пуассона

$$\hat{\epsilon}_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = -4\pi\rho_s; \quad (4.1)$$

здесь $\hat{\epsilon}_{\alpha\beta}$ — оператор диэлектрической проницаемости однородной плазмы с учетом пространственной дисперсии, ρ_s — плотность заряда источника. Величина ρ_s , вообще говоря, неизвестна и должна быть найдена из условия $\phi = \text{const}$ на поверхности источника *). В настоящем разделе мы ограничимся исследованием уравнения (4.1) в резонансных условиях, когда основное влияние теплового движения частиц плазмы на структуру поля может быть учтено в рамках слабой пространственной дисперсии.

а) И з о т р о п н а я п л а з м а. Проникновение внешнего однородного поля в изотропную плазму в резонансных условиях (т. е. при $\omega \sim \omega_p$) впервые исследовано Ландау ²³. Поле в плазме в этих условиях равно

$$E \approx E_0 \frac{1 - e^{ikp^x}}{\varepsilon}, \quad (4.2)$$

*) Запись уравнения для потенциала в виде (4.1) подразумевает, что на движение частиц плазмы влияет лишь переменное поле источника, но не его металлическая поверхность или статический потенциал. Такая ситуация может соответствовать (несколько искусственному) случаю сеточных источников, состоящих из малых металлических сеток со статическим потенциалом, равным нулю.

где E_0 — внешнее поле, $k_p^2 = \varepsilon/\delta^2 = [1 - (\omega_p^2/\omega^2)]/\delta^2$, $\delta^2 = (3/2)v_T^2/\omega_p^2$, v_T — тепловая скорость частиц плазмы, $x > 0$ — область, занятая плазмой, $x \ll x_d$ — длины затухания Ландау²³ плазменных волн. Как видно из (4.2), при $\varepsilon \rightarrow 0$ $E \sim 1/\sqrt{|\varepsilon|}$. Такой характер одномерного электрического поля в плазме при $\varepsilon \rightarrow 0$ приводит к сингулярности в импедансе «одномерных» систем, например, плоского сеточного конденсатора при $\omega \rightarrow \omega_p$ (ср. ниже и^{1,28}). Мы сейчас покажем, что в более общем (неодномерном) случае ситуация иная, а именно поле источника конечно при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Рассмотрим прежде всего функцию Грина $G(r)$ уравнения (4.1), т. е. потенциал источника $\rho_s = q\delta(r)$:

$$G(r) = \frac{2q}{\pi r} \int_0^\infty \frac{\sin kr}{k\varepsilon_l(\omega, k)} dk, \quad (4.3)$$

$\varepsilon_l(\omega, k)$ — продольная диэлектрическая проницаемость однородной изотропной плазмы. Из (4.3) следует, что вид $G(k)$ при $r \rightarrow \infty$ определяется нулями $\varepsilon_l(\omega, k)$ и поведением $\varepsilon_l(\omega, k)$ при $k \rightarrow 0$. При $\omega \sim \omega_p$, взяв $\varepsilon_l(\omega, k) = \varepsilon - \delta^2 k^2$, получим²⁴

$$G \approx G_0 = \frac{q}{\varepsilon r} (1 - e^{i\sqrt{\varepsilon}r/\delta}) \quad (\delta \ll r \ll x_d). \quad (4.4)$$

Следует особо подчеркнуть, что до тех пор, пока затуханием Ландау можно пренебречь, функция Грина G_0 при $\varepsilon > 0$ не переходит в холодное выражение $G = q/\varepsilon r$, а содержит осциллирующий член, соответствующий плазменной волне.

Аналитическое выражение для функции Грина при всех r может быть получено для плазм с немаксвелловской функцией распределения²⁵. В частности, для плазмы с $\varepsilon_l = 1 - [\omega_p^2/(\omega^2 - k^2 v_T^2)]$ ^{25,26}

$$G = G_0 + \frac{q}{r} e^{ik_p r}. \quad (4.5)$$

Как и следовало ожидать, $G \approx q/r$, при $r \rightarrow 0$, а $G \approx G_0$, при $r \rightarrow \infty$, $|\varepsilon| \ll 1$.

Для нас сейчас важно следующее свойство функции Грина: при $r \gg \delta$, $|\varepsilon| \rightarrow 0$

$$G = G_0 \approx q \left(-\frac{ik_p}{\varepsilon} + \frac{r}{2\delta^2} \right) \quad (4.6)$$

и, следовательно, электрическое поле в этих условиях конечно и равно

$$E = E_r = -\frac{q}{2\delta^2}. \quad (4.7)$$

Таким образом, здесь мы опять встречаемся с уже обсуждавшейся особенностью электрических полей в плазме в резонансных условиях: электрическое поле источника не убывает при удалении от него. Как и в рассматриваемых выше примерах, такое поведение поля должно приводить к ряду особенностей в свойствах источника. Из формул (4.6), (4.7) мы сразу получаем, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ импеданс одиночного зонда $Z_m = k_p/\omega\varepsilon$ ^{27,28}, тогда как импеданс двойного (дипольного) источника $Z_d = d/i\omega\delta^2$ ($d \gg \delta$, d — расстояние между разноименно заряженными частями источника^{28,29}). В последнем случае, если источник представляет собой дипольную антенну с длиной «усов» L и расстоянием между ними d ($d \gg \delta$), импеданс при $\varepsilon \rightarrow 0$ зависит лишь от зазора между усами, но не от их длины, а заряд диполя сосредоточен вблизи зазора²⁹. Функция Грина G_0 позволяет вычислить энергию плазменных волн W , излучаемых элементарным

диполем ^{24,28-32}, и определить соответствующее сопротивление излучения

$$R_p = \frac{L^2 \sqrt{\varepsilon}}{6\omega_p \delta^3} \quad (k_p L \ll 1); \quad (4.8)$$

здесь L — эффективный размер диполя. Отношение сопротивления излучения в плазменные волны к сопротивлению излучения в электромагнитную волну R_E равно $R_p/R_E \approx 0,25 (c/v_T)^3 \gg 1$.

Таким образом, учет пространственной дисперсии в однородной плазме в условиях, близких к резонансным ($\omega \sim \omega_p$), дает конечное значение полей и импеданса источников.

б) Магнитоактивная плазма. Как и в случае изотропной плазмы, начнем здесь с анализа функции Грина (потенциала точечного заряда q) в однородной плазме, ограничиваясь исследованием поведения функции Грина G_0^H при $r \rightarrow \infty$. Для такого анализа, как и в случае изотропной плазмы, достаточно приближения слабой пространственной дисперсии.

Потенциал точечного заряда q в замагниченной плазме можно представить в виде

$$G_0^H = \frac{q}{2\pi^2} \int \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k}}{k_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) k_\beta}, \quad (4.9)$$

$\varepsilon_{\alpha\beta}$ — тензор диэлектрической проницаемости однородной замагниченной плазмы с учетом пространственной дисперсии (см., например, ^{33,34}). При слабой пространственной дисперсии

$$k_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta} k_\beta = \varepsilon_1 k_\perp^2 + \varepsilon_3 k_z^2 + A \delta^2 k_\perp^4 + B \delta^2 k_\perp^2 k_z^2 + C \delta^2 k_z^4, \quad (4.10)$$

$$A = 3 \frac{\omega_p^2 \omega^2}{(\omega^2 - \omega_H^2)(\omega^2 - 4\omega_H^2)}, \quad B = \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_H^2} \left[1 - \frac{\omega^2(5\omega^2 - \omega_H^2)}{\omega^2 - \omega_H^2} \right],$$

$$C = 3 \frac{\omega_p^2}{\omega^2}.$$

Поэтому при $\varepsilon_1 \neq 0, \varepsilon_3 \neq 0$ мы можем написать *)

$$G_0^H = \frac{q}{\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_3}} \int_0^\infty J_0(k_\perp r_\perp) \exp \left[-\tilde{\mu} k_\perp \left(1 + \frac{\Gamma}{2} \delta^2 k_\perp^2 \right) z \right] dk_\perp, \quad (4.11)$$

где $\tilde{\mu} = \sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_3}$, $\Gamma = [(\varepsilon_1 B/\varepsilon_3) - (\varepsilon_1^2 C/\varepsilon_3^2) - A]/\varepsilon_1$.

Если $\varepsilon_1 \varepsilon_3 > 0$, то учет пространственной дисперсии несуществен **) и функция Грина дается «холодным» выражением (2.3). В случае $\varepsilon_1 \varepsilon_3 < 0$ (т. е. в резонансной области частот) пространственная дисперсия определяет вид потенциала вблизи особых направлений $r_\perp = \pm \mu z$, на которых функция Грина «холодной» плазмы (2.3) имеет особенность. Для нахождения вида функции G_0^H вблизи этих направлений при $r \gg \delta$ можно воспользоваться в (4.11) методом перевала. В результате получим ³⁵⁻³⁷

$$G_0^H = qi \sqrt{\frac{2}{\pi |\varepsilon_1 \varepsilon_3| r_\perp}} \frac{1}{\sqrt{\mu \Gamma z/2}} \int_0^\infty e^{ipt^2 - it^6} dt, \quad (4.12)$$

*) При получении выражения (4.11) интегрирование в комплексной плоскости k_z произведено с учетом лишь малых корней уравнения $k_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) k_\beta = 0$, поскольку другие корни выходят за рамки приближения слабой пространственной дисперсии. Они имеют отношение лишь к полям, убывающим на расстоянии порядка параметра пространственной дисперсии.

**) Исключением может являться случай, когда возможно возбуждение мод Бернштейна.

где $p = \Delta/\sqrt{\mu\Gamma\delta^2z/2}$, $\Delta = r_\perp - \mu z$. При $|p| \gg 1$

$$G_0^H = \frac{q^i}{\sqrt{2|\varepsilon_1\varepsilon_3|r_\perp\Delta}} \left\{ 1 - \exp \left[-i \frac{(2p/3)^{3/2}}{\delta\sqrt{2}} \right] \right\}, p > 0, \quad (4.13)$$

$$G_0^H = \frac{q}{\sqrt{2|\varepsilon_1\varepsilon_3|r_\perp|\Delta|}} \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{(2|p|/3)^{3/2}}{\delta\sqrt{2}} \right] \right\}, p < 0.$$

Таким образом, учет слабой пространственной дисперсии приводит к тому, что вблизи особых направлений $\Delta \rightarrow 0$ появляется сферическая плазменная волна, бегущая от источника. Как и в случае изотропной плазмы, функция Грина G_0^H при удалении от резонансного направления переходит в свое холодное значение $G_0^H|_{\delta \rightarrow 0} \sim q/\sqrt{\mu^2\cos^2\theta - \sin^2\theta}$ лишь при $\Delta < 0$; при $\Delta > 0$ G_0^H содержит осциллирующий член, соответствующий возбуждаемой продольной волне. Переход к холодному значению происходит на таких значениях $\Delta > 0$, при которых становится существенным затухание Ландау или циклотронное поглощение продольной волны, что и было обнаружено при численном определении G_0^H с учетом полного выражения для диэлектрической проницаемости плазмы в бесконечном магнитном поле^{35,37,38}. По этой причине для вычисления полных потерь энергии точечным зарядом в резонансных условиях необходим учет затухания Ландау, т. е. необходим учет сильной пространственной дисперсии.

Для источника конечных размеров функция Грина G_0^H позволяет снять особенности в «холодных» поле и потенциале. Так, например, для шара при учете пространственной дисперсии значение поля на особых характеристиках (см. рис. 1) оказывается равным $E_z \sim Q/ar\sqrt[3]{r/\delta}$. Это значение (как и значение потенциала ϕ на линии C; см. рис. 4) можно получить, если для нахождения потенциала или поля по «холодному» распределению заряда использовать «теплую» функцию Грина G_0^H .

Пространственная дисперсия дает также возможность выяснить особенности функции Грина, связанные с возможностью возбуждения мод Бернштейна — плазменных колебаний, распространяющихся поперек магнитного поля на частотах, близких к гармоникам гирочастоты электронов. Наличие этих мод можно обнаружить, лишь учтя пространственную дисперсию, причем, вообще говоря, нельзя ограничиться только приближением слабой дисперсии. Тем не менее и в этом случае можно получить приближенное представление потенциала точечного заряда на больших расстояниях. Мы не будем приводить здесь соответствующие формулы.

Выше мы учли влияние слабой пространственной дисперсии на вид функции Грина при $\varepsilon_1\varepsilon_3 < 0$, $\varepsilon_1\varepsilon_3 \neq 0$. Аналогичное рассмотрение можно провести и при $\varepsilon_1\varepsilon_3 = 0$ ³⁶.

Итак, слабая пространственная дисперсия устраняет практически все особенности в импедансе и полях источников, имеющие место для модели однородной «холодной» плазмы.

5. О ВЛИЯНИИ ОСЕДАНИЯ ЧАСТИЦ НА ПАРАМЕТРЫ «БОЛЬШИХ» ИСТОЧНИКОВ В ПЛАЗМЕ

До сих пор при обсуждении параметров источников в плазме мы не касались влияния оседания заряженных частиц плазмы на их поверхности. В то же время оседание может определять структуру электрического поля источника и вносить вклад в его импеданс. В настоящем разделе мы рассмотрим случай «большого» источника, для которого влияние оседания частиц и связанной с ним неоднородности плазмы на структуру поля

могут быть прослежены до конца. Именно, мы рассмотрим задачу о характеристиках «большого» сферического зонда в изотропной плазме при $\omega \gg \omega_p$ ^{17,39}. Хотя эта задача является достаточно частной, она позволяет выявить способ описания оседания в случае «больших» источников, указывает существенные параметры в таком описании, а также показывает, как нужно «навесить» оседание (и когда) на холодное приближение в более сложных случаях.

Итак, рассмотрим в изотропной плазме сферический зонд, полностью поглощающий падающие на него частицы — предположение, обычно используемое в статической теории зондов. В силу сферической симметрии индукция

$$D_r = D = \frac{q}{r^2}, \quad (5.1)$$

q — полный заряд зонда, r — расстояние от центра сферы до точки наблюдения. При слабой пространственной дисперсии мы можем ограничиться низшими членами в связи индукции D с полем E и его производными. В случае поглощающего зонда, в силу наличия потока частиц на него, в этой связи присутствуют и члены с нечетными производными от поля по координатам. Представление связи D с E в виде ряда по производным от поля по координатам легко может быть получено разложением кинетического уравнения по $1/\omega$:

$$D = \varepsilon_0(r) E - i \frac{v_T}{\omega} \frac{\omega_\phi^2}{\sqrt{\pi} \omega^2} \frac{a^2}{r^2} \frac{\partial E}{\partial r}; \quad (5.2)$$

здесь $\varepsilon_0(r)$ — диэлектрическая проницаемость «холодной» плазмы, $\omega_\phi^2 = \omega_p^2 \exp(-e\varphi_0/T)$, $\varphi_0 < 0$ — статический потенциал зонда. Условием применимости выражения (5.2) является $v_T/\omega a \ll 1$ («большой» зонд) и, вообще говоря, $\omega \gg \omega_p$. Последнее условие связано с тем, что при $\varphi_0 \neq 0$ характерный масштаб неоднородности электрического поля (а он должен быть велик по сравнению с параметром пространственной дисперсии v_T/ω) может определяться размером неквазинейтрального (дебаевского) слоя на поверхности зонда. Помимо этих условий, необходимо также, чтобы область, где пространственная дисперсия важна (например, область $\varepsilon \approx 0$; см. ниже), была не слишком удалена от поверхности шара: на больших расстояниях член с первой производной убывает, и становятся определяющими члены второго порядка по $v_T/\omega a$.

Комбинируя (5.1) и (5.2), находим уравнение для определения электрического поля E :

$$\frac{\partial E}{\partial r} + iA(r)E = iB, \quad (5.3)$$

решение которого при условии $E = 0$, $r \rightarrow \infty$ элементарно:

$$E = (iB) \exp\left(-i \int_{+\infty}^r A dr'\right) \int_{+\infty}^r \exp\left(i \int_{+\infty}^{r'} A dr''\right) dr', \quad (5.4)$$

где

$$A(r) = r^2 \varepsilon_0(r) \frac{\sqrt{\pi} \omega^3}{a^2 v_T \omega_\phi^2}, \quad B = \frac{q \sqrt{\pi} \omega^3}{v_T \omega_\phi^2 a^2}.$$

При $v_T \rightarrow 0$ интеграл (5.4) легко вычисляется. При $A(r) \neq 0$ ($\varepsilon_0 \neq 0$)

$$E = -iB \left[\frac{1}{-iA} - \frac{1}{2} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{A} \right)^2 \right], \quad (5.5)$$

т. е. в этом случае электрическое поле в первом приближении по $v_T/\omega a$ — это «холодное» поле

$$E = \frac{B}{A} = \frac{q}{\varepsilon_0 r^2}.$$

Если же ε_0 обращается в нуль, то при $r < r_0$, $\varepsilon_0(r_0) = 0$ $E = E_0 + (B/A)$,

$$E_0 = iB \exp \left[-i \int_{r_0}^r A(r') dr' \right] \sqrt{\frac{2\pi}{|dA/dr|_{r=r_0}}} e^{i\pi/4}. \quad (5.6)$$

Поле E_0 имеет постоянную амплитуду и зависящую от r фазу. Это поле плазменной волны постоянной амплитуды, которая бежит от области $r \approx r_0$ к зонду и поглощается на нем вместе с электронами. При $r \approx r_0$ (где формулы (5.5) и (5.6) не работают)

$$E = \frac{iB}{\sqrt{\alpha/2}} e^{iu_0^2} \int_{u_0}^{\infty} e^{iu^2} du, \quad (5.7)$$

$$u_0 = (r - r_0) \sqrt{\frac{\alpha}{2}}, \quad A = \alpha (r - r_0).$$

При $|u_0| \gg 1$ из (5.7) получаются формулы (5.4), (5.6).

Найдем теперь потенциал сферы $\varphi = \int_{\infty}^a E dr$ и его импеданс $Z = -\varphi/i\omega q = R + iX$. Если $\varepsilon_0(r) \neq 0$, то

$$X = -\frac{1}{i\omega} \int_a^{\infty} \frac{dr}{\varepsilon_0(r) r^2}, \quad R = \frac{1}{2} \frac{v_T}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\omega a} \frac{1}{\omega a [\varepsilon_0(a)]^2} \frac{\omega_{\varphi}^2}{\omega^2}. \quad (5.8)$$

Таким образом, в этом случае реактанс дается обычным выражением, а сопротивление зонда пропорционально малому параметру $v_T/\omega a$ и связано с поглощением на поверхности сферы осцилляторной энергии электронов $W = mv^2/2$, $v_{\infty} = eE/m\omega$.

В случае, когда $\varepsilon_0(r)$ проходит через нуль, используя (5.5)–(5.7), нетрудно получить, что в нулевом порядке по параметру $v_T/\omega a$

$$Z = -\frac{1}{i\omega} \int_a^{\infty} \frac{dr}{\varepsilon_0 r^2} + \frac{1}{\omega} \frac{1}{|\partial \varepsilon_0 r^2 / \partial r|_{r=r_0}}. \quad (5.9)$$

Это выражение не зависит от параметра $v_T/\omega a$ и в точности совпадает с тем, которое мы получили в гл. 3 при $v \rightarrow 0$. Независимость импедансноподобных свойств неоднородной плазмы от типа и величины потерь (если они не слишком велики) хорошо известна^{6,7}, поэтому мы можем считать, что «холодное» выражение для импеданса сферы (5.2), (5.9) должно быть справедливо и вне рамок применимости связи (5.2) (например, в случае, когда структура поля при $\varepsilon = 0$ определяется пространственной дисперсией второго порядка⁶), т. е. просто в условиях, когда пространственную дисперсию можно считать слабой. В то же время, как мы убедились, связь (5.2) позволяет определить структуру электрического поля при $\varepsilon \approx 0$ и найти величину потерь в нерезонансных условиях. Последнее поддается обобщению и на более сложные случаи, включая случай источников в неоднородной замагниченной плазме.

Действительно, при учете связи типа (5.2) уравнение для потенциала будет содержать дополнительные члены, пропорциональные v_T и содержащие третьи производные от потенциала по координатам. В нерезонансных условиях, о которых только и идет сейчас речь, потенциал «холодного» приближения не имеет особенностей. Поэтому мы можем действовать методом возмущений, подставляя в дополнительный член уравнения потенциал нулевого, «холодного» приближения, а нахождение поправки к «холодному» значению потенциала источника за счет этих дополнительных членов в уравнении для потенциала может быть сведено по теореме взаимности к квадратурам. В результате мы получим значение сопротивления зонда, обусловленного оседанием. Таким образом, знание холодного решения и выражения для пространственной дисперсии первого порядка позволяет в общем случае в нерезонансных условиях представить в виде квадратур сопротивление источника, связанное с оседанием. Мы не будем рассматривать здесь какие-либо примеры.

6. ИСТОЧНИКИ В ОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ. «СИЛЬНАЯ» ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ДИСПЕРСИЯ

В настоящем разделе мы рассмотрим случай «сильной» пространственной дисперсии, когда размеры источника не велики по сравнению с параметрами пространственной дисперсии v_T/ω , v_T/ω_H и v_T/ω_p и необходимо учитывать нерезонансные бесстолкновительные механизмы поглощения (затухание Ландау, гирорезонансное поглощение). Эти потери энергии мы в дальнейшем будем называть (заимствуя терминологию из теории электронных приборов) дробовыми или пролетными потерями, поскольку потери эти связаны с тем, что заряженные частицы, пролетая через переменное неоднородное поле источника, отбирают у поля энергию *).

В приближении однородной плазмы уравнение для потенциала электрического поля — это уравнение (4.1). Хотя плотность заряда источника ρ_s , вообще говоря, неизвестна — она должна быть найдена из условия $\Phi = \text{const}$ на металлической поверхности источника, — часто по тем или иным причинам ее можно считать заданной. Например, если максимальный размер источника меньше параметров пространственной дисперсии, то в ряде случаев можно считать распределение ρ_s вакуумным; то же самое справедливо в случае разреженной плазмы, когда $\omega_p^2/\omega^2 \ll 1$. Используя фурье-представление и комплексную теорему Пойнтинга, легко записать в виде квадратур выражение для потенциала и импеданса $Z = R + iX$ источника ^{28,39,40}

$$\Phi = 4\pi \int \frac{\rho_k e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k}}{k_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta} k_\beta}; \quad (6.1)$$

$$Z = -\frac{32\pi^4}{i\omega |q|^2} \int [\text{Re } \varepsilon_l(\omega, \mathbf{k}) - i \text{Im } \varepsilon_l(\omega, \mathbf{k})] \frac{|\rho_k|^2 d\mathbf{k}}{k^2 |\varepsilon_l(\omega, \mathbf{k})|^2}, \quad (6.2)$$

где $\varepsilon_l(\omega, \mathbf{k}) = k_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta} k_\beta / k^2$ — продольная диэлектрическая проницаемость плазмы, q — амплитуда заряда источника.

Приведем выражение для Z в частных предельных случаях, используя (где это возможно) точечную аппроксимацию для источников (более детальные расчеты можно найти в ^{39,40}). В замагниченной плазме в большинстве примеров выражения для импеданса приводятся для одномерных траекторий заряженных частиц ($H_0 \rightarrow \infty$) ³⁶.

*) Влияние пролетных эффектов на характеристики антенн в плазме впервые, по-видимому, обсуждалось Кайзером ¹¹.

а) Импеданс источников в равновесной плазме. 1) Точечный заряд ($\rho_s = q\delta(\mathbf{r})$) в изотропной разреженной плазме ($\omega_p^2/\omega^2 \ll 1$), $Z = R + i(X_B + \Delta X)$. X_B — вакуумное значение реактанса

$$R = \frac{2}{\sqrt{\pi} v_T} \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad \Delta X = 0. \quad (6.3)$$

В замагниченной плазме при $H_0 \rightarrow \infty$, $\omega_p^2/\omega^2 \ll 1$,

$$R = \frac{1}{2\sqrt{\pi} v_T} \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \quad (6.4)$$

2) Тонкий провод ($\rho_s = (q/L)\delta(\mathbf{r}_\perp)$, L — длина провода). $L \gg v_T/\omega$, v_T/ω_p , \mathbf{r}_\perp — радиус-вектор в плоскости, перпендикулярной оси провода, $\omega_p^2/\omega^2 \ll 1$. В изотропной плазме

$$R = \frac{\pi}{\omega L} \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad \Delta X = \frac{2 \ln(\omega L/v_T)}{\omega L} \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \quad (6.5)$$

Значение X получено обрезанием соответствующего интегрального представления для реактанса на $k \approx 1/L$.

В замагниченной плазме величина импеданса зависит от угла провода по отношению к внешнему магнитному полю \mathbf{H}_0 . При $\alpha = \pi/2$ и $\omega_H \gg \omega$, ω_p (одномерные траектории)

$$R = \frac{\pi}{8\omega L} \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad \Delta X = \frac{2}{\omega L} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \ln \frac{\omega L}{v_T}. \quad (6.6)$$

3) Диполь ($\rho_s = q\delta(\mathbf{r}'_\perp) (1/L) \text{sign } z' \Pi(z'/L)$; $\Pi(x) = 1$ при $|x| < 1$, $\Pi(x) = 0$ при $|x| > 1$; ось z' совпадает с направлением диполя). Здесь наиболее интересным является случай малого диполя $\omega L/v_T \ll 1$, так как в случае $\omega L/v_T \gg 1$ мы просто получим удвоенное значение для импеданса провода.

Для диполя в изотропной плазме ($L \ll v_T/\omega$, v_T/ω_p)

$$R = \frac{2\sqrt{\pi}}{3} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{1}{\omega L} \left(\frac{\omega L}{v_T}\right)^3 \ln \frac{v_T}{\omega L},$$

$$\Delta X = -\frac{8}{3} \frac{1}{\omega L} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left(\frac{\omega L}{v_T}\right)^2. \quad (6.7)$$

Для диполя в замагниченной плазме ($L \ll v_T/\omega$, v_T/ω_p , $\omega_H \rightarrow \infty$)

$$R = \frac{1}{\sqrt{\pi} \omega L} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left(\frac{L\omega}{v_T}\right)^3 \ln \frac{v_T}{\omega L} \quad (\mathbf{z}' \parallel \mathbf{H}_0),$$

$$R = \frac{1}{\sqrt{\pi} \omega L} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left(\frac{L\omega}{v_T}\right)^3 \ln^2 \frac{v_T}{\omega L}, \quad (\mathbf{z}' \perp \mathbf{H}_0), \quad (6.8)$$

Заметим, что для диполя (в отличие от заряда и провода) условие применимости полученных формул $\ln(L^2\omega/av_T) \gg (\omega_p^2/\omega^2)(L\omega/v_T)^3$, т. е. формулы (6.7), (6.8) могут быть справедливы и в плотной плазме $\omega_p^2/\omega^2 \gg 1$, если диполь малый — $\omega L/v_T \ll 1$. Это связано с быстрым убыванием поля по мере удаления от диполя.

4) Плоский конденсатор ($\rho_s = (q/S)[\delta(z) - \delta(z-L)]$, S — площадь пластин, ось z перпендикулярна пластинам).

Используя метод Фурье для такого распределения заряда, легко получить ^{41*)}

$$Z = -\frac{8}{i\omega S} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(kL/2)}{k^2 \varepsilon_l(\omega, k)} dk. \quad (6.9)$$

Формула (6.9) при $|\varepsilon_l - 1| \ll 1$ для случая равновесной изотропной плазмы или равновесной плазмы в магнитном поле \mathbf{H}_0 при $\mathbf{z} \parallel \mathbf{H}_0$ позволяет получить простые выражения для поправок R и ΔX к импедансу $Z_0 = 4\pi L/i\omega S$ конденсатора в вакууме ^{28,39}

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{4\pi L}{\omega S} \frac{\omega L}{v_T}, \quad \Delta X = 0 & \text{при } \frac{\omega L}{v_T} \ll 1, \\ R &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{4\pi L}{\omega S} \frac{v_T}{\omega L}, \quad \Delta X = \frac{4\pi L}{\omega S} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} & \text{при } \frac{\omega L}{v_T} \gg 1. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Зависимость R ($\omega L/v_T$) при произвольных $\omega L/v_T$ можно найти в работе ²⁸.

5) Учет «сильной» пространственной дисперсии необходим также для расчета потерь на гармониках гирочастоты электронов (или ионов), когда $\omega = n\omega_H$. Мы приведем здесь выражения для потерь дипольной антенны длиной $2L$ ($L \gg v_T/\omega_H$), ориентированной вдоль внешнего магнитного поля \mathbf{H}_0 , так как в этом случае частицы плазмы эффективнее всего взаимодействуют с резонансным полем источника при $\omega \approx n\omega_H$ ³⁶:

$$R = \frac{\pi}{n\omega_H |\varepsilon_1| L} \beta \frac{2\Gamma(3/2)(n-2)!}{\sqrt{\pi}(n+1)!}, \quad (6.11a)$$

$\beta \ll 1$ (разреженная плазма),

$$R \approx \frac{\pi}{3} \frac{1}{n\omega_H |\varepsilon_1| L} \quad (\beta \gg 1); \quad (6.11b)$$

$$\text{здесь } \beta = \frac{2\sqrt{\pi}n}{|\varepsilon_1|} \frac{L\omega_H}{v_T} \frac{\omega_p^2}{\omega_H^2}.$$

6) Параметры источников в движущейся плазме. Источник в движущейся плазме является уже неравновесной системой, и здесь можно ожидать отрицательного значения сопротивления. На обсуждении и интерпретации условий, при которых это возможно, мы и сосредоточим внимание. Сопротивление R в движущейся плазме дается опять формулой (6.2). Необходимо лишь знать значение $\varepsilon_l(\omega, \mathbf{k})$ в движущейся плазме. Оно может быть выражено через значение $\varepsilon_l^0(\omega, \mathbf{k})$ неподвижной плазмы. В нерелятивистском случае эта связь имеет вид (см. например, ⁴²)

$$\varepsilon_l(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_l^0(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}, \mathbf{k}), \quad (6.12)$$

где $\varepsilon_l^0(\omega, \mathbf{k})$ — продольная диэлектрическая проницаемость неподвижной плазмы, \mathbf{v} — скорость движения плазмы по отношению к источнику.

Рассмотрение примеров начнем со случая движущейся «холодной» изотропной плазмы. В этом случае пространственная дисперсия связана с движением среды, как целого, и легко убедиться, что при $v \rightarrow 0$

$$\text{Im } \varepsilon_l^0 = -\omega_p^2 \pi \frac{\partial}{\partial \omega} \delta(\omega).$$

*) Это выражение справедливо до тех пор, пока оправдано предположение об одномомерном характере поля в конденсаторе; оно несправедливо, например, в изотропной плазме при $\omega \rightarrow \omega_p$ (см. гл. 4).

Следовательно, для движущейся плазмы

$$\operatorname{Im} \varepsilon_l = -\pi \omega_p^2 \frac{\partial}{\partial \omega} \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}).$$

Отсюда сразу получаем для сопротивления источника в разреженной плазме (когда можно считать $\varepsilon_l \approx 1$)

$$R = -\frac{2\pi^3 \omega_p^2}{\omega q^2 v} \int d\mathbf{k}_\perp \frac{\partial}{\partial k_z} |E_k|_{k_z=\omega/v}^2; \quad (6.13)$$

здесь $k_z = \mathbf{k}\mathbf{v}/v$, \mathbf{k}_\perp — компоненты вектора \mathbf{k} , перпендикулярные \mathbf{v} . Таким образом, в случае движущейся разреженной «холодной» изотропной плазмы сопротивление источника определяется производной по k_z от квадрата пространственного спектра его электрического поля. Зависимость обмена энергии между электронами и электромагнитным полем от вида спектра поля (временного или пространственно-временного) обсуждалась в ^{33, 43}. Влияние производной от спектра поля на поглощение энергии электрического поля здесь аналогично роли производной функции распределения в затухании (нарастании) Ландау монохроматических волн в плазме: если с ростом фазовой скорости ω/k_z спектр возрастает, то в поле происходит больше переходов электронов с увеличением энергии и электрическое поле совершает положительную работу ($R > 0$), если же спектр убывает с ростом ω/k_z , то работа поля отрицательна ($R < 0$).

В замагниченной холодной плазме при наличии упорядоченной скорости \mathbf{v} при $v \rightarrow 0$

$$\operatorname{Im} \varepsilon_l = \frac{\pi \omega_p^2}{k^2} \left\{ -k_z^2 \frac{\partial}{\partial \omega} \delta(\omega - k_z v_z) + + k_\perp^2 \left[\frac{\delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} - \omega_H)}{2(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})} + \frac{\delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + \omega_H)}{2(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})} \right] \right\}. \quad (6.14)$$

Следовательно, в такой системе в выражение для потерь источника в разреженной плазме ($\omega_p^2 \ll \omega^2$), помимо производной от квадрата спектра электрического поля, войдут еще члены, пропорциональные $\mp |E_k|_{k_z=\omega \pm \omega_H}^2$, т. е. квадрату спектра поля, на нормальных и аномальных доплеровских собственных частотах электронов плазмы. При этом движущиеся невозбужденные осцилляторы (электроны «холодной» магнитоактивной плазмы) поглощают, как известно (ср. ⁴⁴⁻⁴⁶), энергию на нормальных доплеровских частотах и отдают ее на аномальных. Поэтому при $\mathbf{v} \perp \mathbf{H}_0$, когда черенковский механизм диссипации, описываемый первым членом в (6.14), отсутствует, подбором геометрии источника можно сделать равной нулю или малой величину спектра электрического поля в области нормального доплер-эффекта. Так что диссипация будет определяться взаимодействием с электронами в области аномального доплер-эффекта, т. е. сопротивление источника будет отрицательным.

Если плазма плотная, т. е. ω не слишком превышает плазменную частоту, то для выяснения характера электрического поля и других характеристик источников можно исходить прямо из функции Грина уравнения (4.1).

Мы приведем здесь соответствующие выражения в движущейся холодной изотропной плазме для одномерной и трехмерной функций Грина.

Для поля плоскости ($\sigma = q/S$ — поверхностная плотность заряда)

$$E_z = \frac{2\pi\sigma}{1 - (\omega_p^2/\omega^2)} \quad (z < 0),$$

$$E_z = -\frac{2\pi\sigma}{1 - (\omega_p^2/\omega^2)} - \pi\sigma\omega_p \left(\frac{e^{ik_z z}}{\omega + \omega_p} - \frac{e^{ik_z z}}{\omega - \omega_p} \right) \quad (z > 0). \quad (6.15)$$

Для поля заряда на больших расстояниях от него ($k_{\pm}r \gg 1$) *)

$$\varphi(r) = \frac{q}{[1 - (\omega_p^2/\omega^2)]r} - \frac{\omega_p q}{v} [K_0(k_{+}r_{\perp}) e^{ik_{+}z} - K_0(k_{-}r_{\perp}) e^{ik_{-}z}] \quad (z > 0),$$

$$\varphi(r) = \frac{q}{(1 - \omega_p^2/\omega^2)r} \quad (z < 0); \quad (6.16)$$

$k_{\pm} = (\omega \pm \omega_p)/v$, $K_0(x)$ — функция Макдональда, $r = \sqrt{r_{\perp}^2 + z^2}$, $\mathbf{v} \parallel \mathbf{z}$.

Из выражений (6.16) следует, что потенциал и поля движущихся в плазме источников состоят из квазистатической части, совпадающей с полем источника в неподвижной плазме или переходящей в него при $r \rightarrow \infty$, и плазменно-волновой части — «дорожки» плазменных колебаний. При $\omega = 0$ возбуждение «дорожки» представляет собой поляризационные потери. При $\omega \neq 0$ существенным является то, что «дорожка» состоит из двух волн: быстрой с $\omega/k = v + (\omega_p/k) > v$ и медленной с $\omega/k = v - (\omega_p/k) < v$. Другими словами, источник в движущейся плазме возбуждает плазменные волны как в области аномального доплер-эффекта (см., например, ^{44,46,49}) ($\omega = \omega_p + kv$), так и в области нормального доплер-эффекта ($\omega = \omega_p - kv$), и, как и в обсуждавшемся выше примере магнитоактивной плазмы, медленные гармоники (аномальный доплер-эффект) дают отрицательный вклад в диссипацию энергии **, а быстрые (нормальный доплер-эффект) — положительный. При исследовании излучения электромагнитных ^{44,46,47} или плазменных волн ⁴⁸ движущимися «элементарными» (точечными) осцилляторами выполнение условий, при которых возможно преобладание излучения в области аномального доплер-эффекта и, следовательно, отрицательное сопротивление излучения (раскачка) осциллятора, может быть достигнуто лишь в специальных случаях. В то же время, приведенные выше выражения для функций Грина показывают, что при рассмотрении не «элементарных», а распределенных источников, подбирая их геометрию, легко создать условия для преобладания медленных гармоник. Проведем этот эксперимент на давно и хорошо известном в теории электронных приборов СВЧ примере плоского конденсатора, пронизываемом движущимся электронным пучком или плазмой (см., например, ⁴⁹). Этот пример позволяет также легко проследить переход от случая источника в плотной плазме ($\omega \lesssim \omega_p$), когда естественной является интерпретация потерь как баланса излучения аномальных и нормальных доплеровских частот к случаю разреженной плазмы ($\omega \gg \omega_p$), когда более естественна обсуждавшаяся выше интерпретация потерь как обратного черенков-эффекта электронов плазмы в переменном неоднородном поле источника.

Итак, рассмотрим импеданс плоского конденсатора в движущейся плазме. Импеданс конденсатора легко получить из (6.9):

$$Z = -\frac{4\pi L}{i\omega S} \left\{ \frac{1}{1 - \omega_p^2/\omega^2} + i \frac{\omega_p v}{2L} \left[\frac{1 - e^{ik_{+}L}}{(\omega + \omega_p)^2} - \frac{1 - e^{ik_{-}L}}{(\omega - \omega_p)^2} \right] \right\}. \quad (6.17)$$

Из этой формулы следует, что действительная часть импеданса состоит из разности вклада нормального и аномального доплер-эффекта, так что, например, при $k_{\pm}L = 2\pi n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) вклад нормального доплер-эффекта обращается в нуль и сопротивление конденсатора становится отрицательным. Далее, при $\omega_p \rightarrow 0$ из (6.17) в полном согласии с (6.13)

*) На малых расстояниях имеется только квазистатическая часть функции Грина (6.16), например при $|(\omega \pm \omega_p)/v| r \ll 1$ $\varphi = q/r$, если $z < 0$.

**) Отрицательный вклад медленных гармоник в диссипацию следует и из закона преобразования продольной диэлектрической проницаемости в движущуюся систему координат.

легко получить

$$R = \frac{8\pi\omega_p^2}{\omega Sv^2} \frac{\partial}{\partial k} \left(\frac{\sin^2(kL/2)}{k^2} \right) \Big|_{k=\omega/v}, \quad (6.18)$$

т. е. здесь $R < 0$ при $2\pi [n + (1/2)] < \omega L/v < 2\pi (n + 1)$. Как и следовало ожидать в этом случае ($\omega_p \rightarrow 0$), сопротивление конденсатора пропорционально производной от квадрата модуля пространственного спектра электрического поля источника $|E_k|^2 \sim \sin^2(kL/2)/k^2$.

Приведем также приближенное выражение для сопротивления диполя в движущейся разреженной ($\omega \gg \omega_p$) плазме, скорость которой параллельна оси диполя:

$$R = \frac{8 \ln(v/\omega a)}{\pi \omega L} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left(1 - \cos \frac{\omega L}{v} \right) \sin \frac{\omega L}{v}, \quad (6.19)$$

где L — длина «уса» диполя, a — его радиус.

Итак, сопротивление источников в движущейся «холодной» плазме может быть отрицательным. Какую роль играет тепловое движение в плазме, т. е. при какой температуре (средней тепловой скорости) отрицательное сопротивление исчезнет? Мы не будем подробно обсуждать здесь эти вопросы^{28,39,50,51}. Укажем лишь следующее. В пренебрежении вкладом ионов, если $\omega_p \ll \omega$, $R < 0$ для конденсатора возможно лишь при $v/v_{te} > 2,5$. В то же время при учете ионов отрицательные значения сопротивления возможны и при $v_{ti} < v < v_{te}$ для источников, геометрия которых такова, что в спектре электрического поля отсутствует нулевая пространственная гармоника. Отметим также, что условия (в том числе на v/v_{te}) для возникновения $R < 0$ облегчаются при движении источников в магнитоактивной плазме поперек магнитного поля^{50,51}.

7. О ШУМАХ ИСТОЧНИКОВ В ПЛАЗМЕ

Шумы источников в плазме в широком плане — это дробовые шумы частиц плазмы,двигающихся в статическом потенциале источника и и «одетых» поляризационными облачками электронов и ионов, в соответствии с распределением плазмы у источника и его геометрией.

В общем случае выражение для интенсивности шумов источника с помощью теоремы взаимности может быть сведено к квадратурам, если известны распределение электрического поля источника во взаимной транспонированной плазме (см. ниже) и траектории зарядов плазмы. Дело в том, что величина тока, наводимого на источнике отдельным «голым» электроном, может быть найдена, как и в вакууме, с помощью теоремы Шокли — Рамо, в которой в качестве электрического поля фигурирует поле в транспонированной плазме. Полная же интенсивность шумов источника выражается через интеграл от произведения корреляционной функции микротокков не взаимодействующих частиц (которая, как известно³³, может быть найдена из закона движения частиц) и электрических полей источника в транспонированной плазме. Ниже приведен ряд примеров, которые демонстрируют этот путь расчета шумов и которые интересны и с прикладной точки зрения.

а) Если ситуация такова, что основной вклад в сопротивление источника и его шумы дают частицы, имеющие равновесное больцмановское распределение, то дробовые шумы оказываются тепловыми в том смысле, что их интенсивность может быть найдена по теореме Найквиста:

$$\mathcal{E}_\omega^2 = \frac{2}{\pi} RT; \quad (7.1)$$

здесь \mathcal{E}_ω^2 — спектральная плотность шумовой ЭДС, R — сопротивление источника, обусловленное плазмой, T — температура плазмы. Следует отметить, что формула (7.1) может быть применима и в тех случаях, когда плазма не является полностью равновесной, а состоит, скажем, из плотной холодной компоненты и разреженной горячей. Простейшим примером такой ситуации является область параметров, когда R — это сопротивление излучения плазменных волн, интенсивность которых определяется температурой горячей компоненты.

б) Если же плазма не является равновесной, но ее тем не менее можно считать однородной, то шумы источника могут быть найдены по корреляционной функции невзаимодействующих микрочарядов однородной плазмы³³. Для нахождения шумов источника (спектральной ЭДС) в этом случае необходимо прежде всего найти потенциал (или разность потенциалов), наводимых на источнике флуктуацией невзаимодействующих зарядов в среде, описываемой диэлектрической проницаемостью с пространственной дисперсией, а затем усреднить по соответствующей функции распределения флуктуаций. Решение первой задачи может быть получено с помощью теоремы взаимности электростатического типа, справедливой и для сред с пространственной дисперсией⁵², в которой в качестве взаимной среды следует взять подходящим образом транспонированную среду^{28,52} (скажем, с измененным на противоположное направлением статического магнитного поля или вектора скорости движения среды). В результате после усреднения по флуктуациям спектральная ЭДС оказывается выраженной через фурье-компоненту потенциала источника в прямой (нетранспонированной) плазме $\varphi(\omega, \mathbf{k})$ и фурье-компоненту корреляционной функции микротоков $\Gamma_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k})$:

$$\mathcal{E}_\omega^2 = \frac{2(2\pi)^6}{q^2} \int |\varphi(\omega, \mathbf{k})|^2 k_\alpha \Gamma_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) k_\beta d\mathbf{k}; \quad (7.2)$$

здесь q — заряд источника, создающий в плазме потенциал $\varphi(\omega, \mathbf{k})$. Последний можно выразить через распределение заряда на источнике ρ_k и диэлектрическую проницаемость среды. Тогда *)

$$\mathcal{E}_\omega^2 = \frac{8(2\pi)^8}{q^2} \int |\rho_k|^2 \frac{k_\alpha \Gamma_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) k_\beta}{|k_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) k_\beta|^2} d\mathbf{k}. \quad (7.3)$$

В равновесной плазме, в которой

$$k_\alpha \Gamma_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) k_\beta = \frac{T}{(2\pi)^5} \frac{k_\alpha \operatorname{Im} \varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) k_\beta}{\omega}, \quad (7.4)$$

формула (7.3) есть не что иное, как формула Найквиста (7.1).

В качестве примера рассмотрим шумы плоского (сеточного) конденсатора, пронизываемого движущейся изотропной плазмой²⁸. Этот пример интересен еще и тем, что на нем может быть легко продемонстрирована хорошо известная в электронике так называемая депрессия шума — уменьшение роста шумов диода при увеличении тока в нем. Подобная

*) Заметим, что выражение (7.3) не совпадает, вообще говоря, с выражением которое, казалось бы, естественно написать⁵³:

$$\mathcal{E}_\omega^2 = \frac{2(2\pi)^6}{q^2} \int |\varphi^{\text{вак}}|^2 k_\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^{\text{tot}} k_\beta d\mathbf{k}; \quad (7.2a)$$

здесь $\varphi^{\text{вак}}$ — вакуумное значение потенциала источника, а $\Gamma_{\alpha\beta}^{\text{tot}} = \Gamma_{\alpha\beta} k^4 / |k_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta} k_\beta|^2$ — полная корреляционная функция микротоков плазмы с учетом поляризационной «одежды» электронов и ионов. Несовпадение (7.2) с (7.2a) связано с отличием распределения заряда на источнике от вакуумного или, другими словами, с тем, что поляризационная «одежда» частиц при наличии источника (на котором должно выполняться условие $\varphi = \text{const}$) отличается, вообще говоря, от «одежды» частиц в свободной плазме.

депрессия связана с подавлением шумовых импульсов «голых» электронов когерентными с ними импульсами поляризационного облака. В пределе, когда размер поляризационного облака мал по сравнению с размером конденсатора, шумы подавляются.

Пусть скорость плазмы $v \gg v_T$ (v_T — тепловая скорость). Если $\Gamma_{\alpha\beta}^0(\omega, \mathbf{k})$ — корреляционная функция неподвижной плазмы, то для движущейся плазмы, как легко показать, $\Gamma_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) = \Gamma_{\alpha\beta}^0(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}, \mathbf{k})$. Поэтому из (7.3) и (7.4) можно написать

$$\mathcal{E}_\omega^2 = \frac{16T}{\pi S} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Im } \varepsilon_l(\omega - kv, k) \sin^2(kL/2)}{k^2(\omega - kv) |\varepsilon_l(\omega - kv, k)|^2} dk, \quad (7.5)$$

где $\varepsilon_l(\omega, \mathbf{k}) = k_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) k_\beta / k^2$.

При $v \gg v_T$ $\text{Im } \varepsilon_l \neq 0$ лишь в окрестности точки $\omega/k \approx v$ и важным параметром оказывается величина $p = \omega_p^2 v^2 / \omega^2 v_T^2$. Если $p \gg 1$ ($v \gg v_T$), то при $\omega \approx kv$ отличие ε_l от единицы несущественно, и мы получим

$$\mathcal{E}_\omega^2 = 32 \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{v}{\omega^2 S} m v^2 \sin^2 \frac{\omega L}{2v}. \quad (7.6)$$

Таким образом, в пределе малой плотности плазмы ($p \ll 1$) шумы не зависят от температуры плазмы и пропорциональны ее концентрации.

В обратном предельном случае $p \gg 1$, как можно убедиться, основной вклад в интеграл (7.5) дает область $\text{Im } \varepsilon_l \rightarrow 0$, $\text{Re } \varepsilon_l \rightarrow 0$. Учитывая, что вблизи этой точки $\text{Im } \varepsilon_l / |\varepsilon_l|^2 \sim \delta(\text{Re } \varepsilon_l)$, интегрирование в (7.5) легко выполняется и в результате имеем

$$\mathcal{E}_\omega^2 = \frac{8T}{S} v \left\{ \frac{\sin^2[(\omega + \omega_p)/2vL]}{(\omega + \omega_p)^2} + \frac{\sin^2[(\omega - \omega_p)/2vL]}{(\omega - \omega_p)^2} \right\}. \quad (7.7)$$

Следовательно, в плотной плазме ($p \gg 1$) шумы конденсатора пропорциональны температуре и уменьшаются с увеличением плотности при $\omega \ll \omega_p$. Это означает, что при $T \rightarrow 0$ или $\omega_p \rightarrow \infty$ наличие движущейся плазмы в конденсаторе не приводит к шумам. Как уже отмечалось, это обстоятельство связано с тем, что в плотной плазме ($T \rightarrow 0$ или $\omega_p \rightarrow \infty$) размер поляризационного облака частиц стремится к нулю, вследствие чего потенциал, наводимый «одеждой», компенсирует потенциал, наводимый отдельными зарядами, т. е. происходит депрессия шумов «голых» зарядов «одеждой».

в) Если оседание частиц на поверхности источника является существенным, то (так как процесс неравновесный) использовать теорему Найквиста нельзя и шумы необходимо вычислять непосредственно. Такой расчет достаточно прост в случае высоких частот и, вообще говоря, «малых» источников, когда можно считать, что шумы оседающих частиц — это шумы отдельных «голых» невзаимодействующих некоррелированных частиц. Вычисляя потенциал (или ток), наводимый на источнике отдельным зарядом, и суммируя затем по всем зарядам с разными скоростями и направлениями движения, легко получить выражения для интенсивности шумов. Мы приведем здесь соответствующее выражение для шумов оседающих частиц при $\omega \rightarrow 0$ и $\omega \rightarrow \infty$ в случае, когда можно считать, что статический потенциал равен нулю и траектории электронов прямые. При $\omega \rightarrow 0$ интенсивность шумов «голых» частиц, как хорошо известно, легко получить из стандартного выражения для тока заземляемого источника при оседании электрона: $I(t) = e\delta(t)$. Отсюда сразу получаем следующую формулу для спектральной ЭДС шумов при $\omega \rightarrow 0$:

$$\mathcal{E}_\omega^2 = 2 \left(\frac{1}{\omega C_0} \right)^2 \frac{eI_0}{2\pi}, \quad (7.8)$$

где I_0 — постоянный ток на источнике, C_0 — его емкость в вакууме. Если сравнить выражение (7.8) с вытекающими из теоремы Найквиста выражениями для шумов «малых» источников, обусловленных пролетными частицами, то легко убедиться, что для провода и диполя (конечно, при $\omega b/v_T \ll \ll 1$, b — диаметр провода или «усов» диполя) шумы пролетных частиц преобладают (т. е. оседанием частиц можно пренебречь), а для шара шумы пролетных и оседающих частиц оказываются одного порядка.

В обратном предельном случае $\omega \rightarrow \infty$ ($\omega \gg \omega_p$, $\omega a/v_T \gg 1$ или $\omega b/v_T \gg 1$) для нахождения интенсивности шумов необходимо найти асимптотику при $\omega \rightarrow \infty$ фурье-компоненты импульса потенциала или тока отдельного «голого» электрона, пролетающего мимо источника или оседающего на нем. Как известно, подобная асимптотика определяется областями, где не являются гладкими функция или ее производные. Из сказанного следует, что пролетные частицы не дают вклада в шумы в этом случае. Все шумы здесь полностью определяются оседающими частицами. Негладкость в импульсе оседающей частицы возникает в момент ее встречи с поверхностью, поэтому асимптотика ($\omega \rightarrow \infty$) фурье-компоненты импульса отдельного оседающего электрона легко может быть найдена. Суммируя затем шумы от всех электронов, нетрудно получить выражение для спектральной плотности шумовой ЭДС³⁹. Мы приведем здесь соответствующие формулы для плазмы с максвелловским распределением электронов. Для шара

$$\mathcal{E}_\omega^2 = \frac{T}{\pi^{3/2}} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{v_T}{\omega a} \frac{1}{\omega a}, \quad (7.9)$$

для тонкого провода

$$\mathcal{E}_\omega^2 = \frac{2}{\pi^{3/2}} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{v_T}{\omega b} \frac{T}{\omega L}. \quad (7.10)$$

Скажем еще несколько слов о шумах «больших» источников при $\omega \lesssim \omega_p$, когда также важную роль играет оседание частиц. Как ясно из вышеизложенного, в этом случае существенной является корреляционная «одежда» частиц. Влияние этой корреляции, как показывают измерения шумов⁵⁴, может быть весьма своеобразным: на низких частотах в области электронного тока насыщения шумы определяются обычной формулой дробового шума (7.8), тогда как в области ионного тока насыщения они оказываются меньше дробовых (т. е. имеет место депрессия шума). Подробные расчеты шумов в этих условиях в настоящее время отсутствуют (см., впрочем, ⁵⁴).

8 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы обсудили квазиэлектростатические характеристики источников, находящихся в плазме, для ряда идеализированных описаний плазмы. Коснемся кратко условий, при которых подобные расчеты могут быть использованы для определения параметров источников в реальных условиях, а также главных, на наш взгляд, задач будущих исследований.

Мы видели, что импедансные характеристики «больших» источников в большинстве случаев могут быть найдены в приближении «холодной» плазмы^{*}). Выше было продемонстрировано, что и в резонансных условиях (когда возможно возбуждение собственных колебаний плазмы) уточнение описания (переход от «холодного» описания при $\nu \rightarrow 0$ к описанию

^{*}) Напомним, что здесь речь идет о плазме вне дебаевского слоя на поверхности источника (рассматриваются случаи, когда вклад этого слоя в импеданс источника мал).

с пространственной дисперсией) как в однородной, так и в неоднородной плазме не приводит к изменению импеданса источника, а дает лишь уточнение электрического поля в окрестности его «холодных» особенностей. Вне резонансных условий такое уточнение приводит к появлению малой (по параметру пространственной дисперсии) действительной части импеданса, обусловленной оседанием частиц, пролетными эффектами в дебаевском слое или (для «сеточных» источников со статическим потенциалом $\phi_0 = 0$) влетом частиц в область, где отсутствует электрическое поле. Хотя влияние двух последних эффектов на характеристики источников мы не обсуждали, нетрудно понять, что, как и в случае оседания, для их учета необходимо знать структуру холодного электрического поля и решение соответствующих одномерных задач (ср. ³). Таким образом, основой для описания характеристик «больших» источников в плазме является приближение «холодной» плазмы — плазмы без учета пространственной дисперсии. Причем учет неоднородности плазмы, как было аргументировано в гл. 3, практически во всех случаях должен снимать сингулярности в частотной зависимости импеданса источников. Уравнение «холодного» приближения — в общем случае уравнение смешанного типа, являющееся предельным (при $\nu \rightarrow 0$) от полного комплексного уравнения. Представляющие физический интерес решения уравнения (2.1), как мы убедились, оказываются комплексными, существенным образом зависят от геометрии поверхности $\varepsilon(\mathbf{r}) = 0$, параболической границы и характеристик в гиперболической области и могут иметь (при $\nu \rightarrow 0$) особенности на поверхностях, линиях или в отдельных точках. Было бы интересно и важно для развития теории исследовать общие свойства подобных предельных комплексных краевых задач, расширить число рассмотренных частных случаев, развить численные методы решения подобных задач и т. п.

Другой случай, поддающийся сравнительно общему анализу, — это случай «сеточных» или «малых» источников. Для них мала площадь, поглощающая частицы. Вследствие этого на больших расстояниях от источника влияние пространственной дисперсии оказывается более существенным по сравнению с влиянием неоднородности. Действительно, мы видели, что для шара в изотропной плазме при $\varepsilon_\infty = 0$ учет неоднородности в «холодном» приближении дает электрическое поле $E \sim 1/a$, тогда как в однородной плазме при учете пространственной дисперсии $E \sim 1/\delta$. Следовательно, для «малого» шара ($a \ll \delta$) влиянием неоднородности можно пренебречь. Поэтому практически во всех случаях свойства «малых» или «сеточных» источников со статическим потенциалом ϕ_0 , близким к нулю (когда неоднородностью плазмы можно пренебречь), можно определять в приближении однородной плазмы. Иная ситуация при $\phi_0 \neq 0$. В этом случае статическое поле приводит к неоднородности плазмы в дебаевском слое у источника. Поэтому приближение однородной плазмы здесь годится лишь для нахождения поля на больших расстояниях от «малых» или «сеточных» источников и для определения импеданса «больших» «сеточных» источников в резонансных условиях. Что же касается импеданса и шумов «малых» источников, то для их расчета приближение неоднородной плазмы не годится, а необходимо знать распределение концентрации плазмы и траектории ее частиц в статическом потенциале источника (ср. ⁴). При этом следует подчеркнуть, что на характеристики «малых» или «сеточных» источников могут оказать существенное влияние финитные частицы, т. е. частицы, захваченные статическим потенциалом и совершающие периодическое (или почти периодическое) движение. При подходящей функции распределения эти частицы — нелинейные (неизохронные) осцилляторы — могут приводить, как известно ⁴³, к отрицательной диссипации электрического поля. Более того, как отметил А. В. Гапонов, финитные частицы

могли бы оказать влияние и на устойчивость возмущенной области плазмы у источника. Нам не известны работы, обсуждавшие вклад финитных и прелетных частиц в импеданс и шумы «малых» источников при $\varphi_0 \neq 0$.

Таким образом, развитие методов исследования и расчета граничных комплексных задач уравнений смешанного и гиперболического типов и выяснение роли финитных частиц — главные с нашей точки зрения идейные проблемы теории квазиэлектростатических источников в плазме.

В заключение с удовольствием пользуемся возможностью отметить, что первая работа одного из авторов (совместно с Г. В. Городинским) в обсуждаемой области²⁴ была выполнена по предложению В. Л. Гинзбурга. Нам хотелось бы также отметить влияние, оказанное на вышеизложенное, обсуждениями с В. Б. Гильденбургом и его работами^{7, 8}. Пользуемся также случаем поблагодарить В. В. Железнякова за поддержку настоящей работы.

Научно-исследовательский радиофизический
институт (НИРФИ), Горький

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. В. Чугунов, Изв. вузов (Радиофизика) **12**, 830 (1969); Н. С. Беллюстин, В. П. Докучаев, *ibid.* **18**, 17 (1975).
2. R. S. Naip, Appl. Phys. Lett. **4**, 186 (1964); F. W. Crawford, R. S. Naip, J. Appl. Phys. **35**, 3436 (1964).
3. R. W. Gould, Phys. Lett. **11**, 236 (1964), J. Pavkovich, C. S. Kino, in: Proc. of 6th Intern. Conference on Phenomena in Ionized Gases, v. 3, P., 1964, p. 39.
4. Я. Л. Альперт, А. В. Гуревич, Л. П. Питаевский, Искусственные спутники в разреженной плазме, М., «Наука», 1964.
5. M. P. Bachynski, RCA Rev. **28**, 111 (1967); T. R. Kaiser, J. K. E. Tunaley, Space Sci. Rev. **8**, 32 (1968); in: Plasma Waves in Space and in the Laboratory, Ed. J. G. Thomas and B. J. Landmark, N. Y., Elsevier, v. 1, 1969, v. 2, 1970; K. G. Balmain, Radio Sci. **7**, 771 (1972).
6. N. Herlofson, Ark. Fys. **3**, 247 (1951); T. R. Kaiser, R. L. Closs, Phil. Mag. **43**, 1 (1952).
7. В. Б. Гильденбург, ЖЭТФ **45**, 1978 (1963).
8. В. Б. Гильденбург, ЖЭТФ **43**, 1394 (1962).
9. В. Е. Голянт, А. Д. Пилия, УФН **104**, 413 (1971).
10. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, М., Физматгиз, 1959.
11. T. R. Kaiser, Planet. and Space Sci. **9**, 639 (1962).
12. Ю. В. Чугунов, Изв. вузов (Радиофизика) **11**, 50 (1968).
13. Б. П. Кононов, А. А. Рухадзе, Г. В. Солодухов, ЖТФ **31**, 565 (1964); E. Arbel, L. Felsen, in: Electromagnetic Theory and Antennas (Proc. of Symposium, Copenhagen, 1962), N. Y., Pergamon Press, 1963, p. 421.
14. Ю. В. Чугунов, Изв. вузов (Радиофизика), **11**, 1829 (1968).
15. K. G. Balmain, Trans. IEEE Antennas and Propagation AP-12, 605 (1964).
16. Ю. В. Чугунов, Радиотехн. и электрон. **16**, 366 (1971).
17. А. А. Андронов, in: Proc. of 10th Intern. Conference on Phenomena in Ionized Cases, Oxford, 1971.
18. В. Б. Долгополов, ЖТФ **36**, 273 (1966).
19. А. Д. Пилия, В. И. Федоров, ЖЭТФ **60**, 389 (1971).
20. В. М. Бабичи др., Линейные уравнения математической физики, М., «Наука», 1964.
21. А. Пуанкаре, О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, М., Гостехиздат, 1947; Э. Гурса, Курс математического анализа, М.-Л., ОНТИ, 1936.
22. А. Д. Пилия, В. И. Федоров, в: II Международная конференция по теории плазмы. Аннотации, Киев, 1974, стр. 195.
23. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ **16**, 574 (1946).
24. А. А. Андронов, Г. В. Городинский, Изв. вузов (Радиофизика) **5**, 234 (1963).
25. B. Rooy, M. Feix, L. R. O. Storey, Plasma Phys. **14**, 275 (1972).
26. М. Л. Левин, Изв. вузов (Радиофизика) **7**, 180 (1964).
27. J. A. Fejer, Radio Sci. **68**, 1171 (1964).

28. А. А. Андронов, Косм. исслед. 4, 558 (1966).
29. А. А. Андронов, В. Я. Эйрман, ЖТФ 39, 365 (1969).
30. М. Е. Герценштейн, ЖЭТФ 23, 678 (1952).
31. A. Hessel, J. Shmouy, in: Proc. of Symposium on Electromagnetic and Fluid Dynamics of Gaseous Plasma, Brooklyn, N. Y., Polytechnic Press, 1962.
32. M. Cohen, Phys. Rev. 126, 389 (1962).
33. В. Д. Шафранов, сборник «Вопросы теории плазмы», т. 3, М., Атомиздат, 1963.
34. А. Г. Ситенко, Электромагнитные флуктуации в плазме, Харьков, Изд-во. ХГУ, 1965.
35. R. K. Fisher, R. W. Gould, Phys. Lett. A31, 235 (1970).
36. Ю. В. Чугунов, Изв. вузов (Радиофизика) 14, 44 (1971).
37. R. K. Fisher, R. W. Gould, Phys. Fluids 14, 857 (1971).
38. Н. Н. Khuel, ibid. 16, 1311 (1973).
39. А. А. Андронов, Канд. диссертация (ГГУ, Горький, 1969).
40. Н. Н. Khuel, Radio Sci. 1, 971 (1966); 2, 73 (1967).
41. M. Feix, Phys. Lett. 12, 316 (1964).
42. В. П. Силин, А. А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред, М., Атомиздат, 1961.
43. А. В. Гапонов, М. И. Петелин, В. К. Юлпатов, Изв. вузов (Радиофизика) 10, 1414 (1967).
44. В. Л. Гинзбург, И. М. Франк, ДАН СССР 56, 583 (1947).
45. В. В. Железняков, Изв. вузов (Радиофизика) 2, 14 (1959).
46. В. Л. Гинзбург, УФН 69, 537 (1959).
47. В. Л. Гинзбург, В. Я. Эйрман, ЖЭТФ 36, 1823 (1959).
48. Л. Г. Нарышкина, ЖЭТФ 43, 737 (1962).
49. В. М. Лопухин, Возбуждение электромагнитных колебаний и волн электромагнитными потоками, М., Гостехиздат, 1953.
50. А. А. Андронов, ЖЭТФ 55, 496 (1968).
51. V. Fiala, Trans. IEEE Antennas and Propagation AP-18, 834 (1970).
52. В. М. Агранович, В. Л. Гинзбург, Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов, М., «Наука», 1965.
53. O. de Passis, Radio Sci. 4, 91 (1969).
54. H. Ikezi, M. Fujiwara, K. Takayama, Research Report of Institute of Plasma Physics of Nagoya University IPPJ-71 (1968).
55. В. Б. Гильденбург, Ю. М. Жидко, И. Г. Кондратьев, М. А. Миллер, Изв. вузов (Радиофизика) 10, 1358 (1967).