1975 г. Февраль Том 115, вып. 2

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

537.311.33

ЭЛЕКТРОНЫ И ДЫРКИ В ПОЛЕ СИЛ ИНЕРЦИИ

И. М. Цидильковский

1. ВВЕДЕНИЕ

Постановка вопроса о том, каково поведение носителей заряда твердого тела в полях инерционных или гравитационных сил *), может показаться надуманной. Действительно, общеизвестно, сколь велики успехи теории твердого тела, и трудно представить себе, что в таких, казалось бы, устоявшихся вопросах, как динамика носителей заряда и, в частности, движение их в поле сил инерции, осталось еще что-либо невыясненное. Ведь первые электронно-инерционные опыты Толмена и Стюарта [1] были выполнены в 1916 г. (!).

И все же, несмотря на то, что правильная интерпретация опытов Толмена с сотрудниками [1, 2] была дана давно (Дарвин [3], Гинзбург [4]), в ряде статей и монографий встречаются нечеткие объяснения их, приводящие часто к недоразумениям. Так, например, можно встретить утверждение, что в условиях электронно-инерционных опытов действие кристаллического потенциала не эквивалентно замене массы свободного электрона m_0 на эффективную массу m (т. е. несправедливо приближение эффективной массы); что под действием сил инерции дырки не ведут себя как квазичастицы с положительным зарядом и положительной эффективной массой. Электронно-инерционные опыты Толмена и Барнетта (обращенный опыт Толмена) часто классифицируются по признаку замкнутости или разомкнутости электрической цепи, что не соответствует реальным постановкам экспериментов Толмена и Барнетта, в которых всегда измерялся ток в замкнутой цепи, а не электрическое поле в отсутствие тока.

Если правильное объяснение опытов Толмена существует с 1936 г.[3] и речь идет лишь о погрешностях анализа и неточных формулировках более поздних работ, приводивших, правда, часто к неверному пониманию существа явления, то в отношении обращенного опыта Толмена, выполненного впервые Барнеттом в 1931 г.[5], дело обстоит иначе. Этот эффект до сих пор вообще не имел корректного объяснения. Известна даже попытка Брауна и Барнетта [6], предпринятая в 1952 г. в связи с результатами обращенного опыта Толмена, поставить под сомнение основные представления зонной теории. Исходя из того, что найденное отношение массы к заряду носителей тока m/e у металлов с положительным эффектом Холла Mo, Zn [6] и Cd [7] по знаку и по величине (с точностью порядка процента) оказалось равным m_0/e для свободных электронов, они утверждали: «Предположение

*) Ниже мы для краткости будем говорить только о поле сил инерции, поскольку как хорошо известно, силы инерции и силы тяжести эквивалентны.

о том, что положительный эффект Холла можно объяснить, принимая положительное значение m/e, опровергнуто, поскольку на опыте это отношение отрицательно и для металлов с положительным коэффициентом Холла». Это утверждение было подвергнуто критике в статьях Ростокера [8], Шокли [9], Гинзбурга [4]. Однако ни в этих статьях, ни в других известных нам работах мы не встретили удовлетворительного объяснения опытов Барнетта.

Итак, несмотря на то, что электронно-инерционным эффектам, открытым около 60 лет назад, посвящено немало работ и что они описаны в учебниках и монографиях (см.[10–14]), вопрос об их корректной интерпретации нуждается, на наш взгляд, в дополнительном рассмотрении. Необходимо четко рассмотреть поведение электронов и дырок твердого тела в поле сил инерции. В частности, необходимо ответить на вопрос, можно ли для таких сил неэлектромагнитной природы описать движение носителей заряда квазиклассически (уравнением Ньютона). Следует также объяснить, почему в выражение для электронно-инерционных эффектов Толмена и Барнетта входит масса свободного электрона m_0, тогда как динамические свойства электронов и дырок в твердом теле могут быть описаны квазиклассическим уравнением, куда входит эффективная масса m. Ниже мы попытаемся внести ясность в эти вопросы и дать простое объяснение опытов Барнетта.

Идея опытов Толмена, высказанная еще Максвеллом в трактате об электричестве и магнетизме, сводится к следующему. Представим себе кольцо из металлической проволоки, равномерно вращающееся вокруг своей оси. Если кольцо затормозить, то электроны в течение некоторого времени будут двигаться по инерции относительно ионов кристаллической решетки, в результате чего возникнет ток I, и некоторое количество электричества Q будет перенесено вдоль окружности кольца. Ясно, что если бы электроны были жестко связаны с ионами, т. е. двигались бы с той же скоростью, что и ионы, ток в цепи не возник бы. Наоборот если бы между электронами и решеткой не было никакого взаимодействия, средняя скорость электронов v относительно решетки в каждый момент времени была бы равна и противоположна по знаку линейной скорости точек кольца u *), и плотность тока, обусловленного движением ионов относительно электронов, $j(t) = enu(t) = -env(t)$, где $-e$ — заряд электрона, n — концентрация электронов. В реальных проводниках имеет место промежуточный случай: вследствие взаимодействия электронов с решеткой они частично увлекаются неравномерным движением последней. В этом случае возникает такой же ток $-env(t)$, как и в случае отсутствия взаимодействия; связанность электронов сказывается на значении средней скорости v.

Исходя из представлений об электронах проводимости как о газе свободных частиц, Толмен следующим образом вычислил количество электричества, прошедшее по цепи. Пусть линейная скорость точек кольца до начала торможения есть u_0, а ускорение при торможении w ($w < 0$) **). Под действием силы инерции электроны приобретут относительно решетки ускорение $-w$. Движение электронов будет таким, как если бы на них действовало электрическое поле напряженности E_{TS}, определяемое соотношением

$$-eE_{TS} = -mw, \qquad (1)$$

где m — масса электрона.

---

*) Относительно лабораторной системы координат средняя скорость электронов равна нулю, так как они не увлекаются решеткой. Предполагается, что проволока достаточно тонка, так что можно пренебречь зависимостью скорости u от расстояния данной точки кольца до его оси.

**) Здесь w — тангенциальная составляющая ускорения точек кольца.

В результате смещения электронов относительно ионов в кольце возникает ток I, который определяется уравнением

$$\frac{L}{c^2}\frac{dI}{dt}+RI=\oint E_{TS}\,ds, \tag{2}$$

где L — коэффициент самоиндукции, R — сопротивление кольца, s — длина окружности кольца. Интегрируя это уравнение по времени от начала торможения t_1 до остановки кольца t_2, получаем

$$R\int_{t_1}^{t_2} I\,dt=-\frac{m}{e}su_0, \tag{3}$$

так как в моменты времени t_1 и t_2 ток обращается в нуль, и э. д. с. самоиндукции не дает вклада в эффект; $u(t_1)=u_0$, $u(t_2)=0$.

Выражением (3) Толмен воспользовался для определения отношения m/e. По известным значениям сопротивления кольца R скорости его вращения до начала торможения u_0 и измеренному количеству электричества Q, прошедшему по цепи за время торможения t_2-t_1, было найдено отношение m/e, а по знаку возникшей разности потенциалов был определен знак зарядов, образующих ток. Опыты Толмена показали, что знак носителей заряда отрицательный, а отношение m/e численно близко к $m_0/(-e)$.

Этот результат может показаться противоречащим основным выводам теории твердого тела, как и полагали Браун и Барнетт [3]. Согласно теории электропроводность и другие кинетические характеристики металлов и полупроводников определяются динамическими свойствами электронов и дырок, их законом дисперсии, который обычно значительно сложнее дисперсионного соотношения для свободных электронов $\varepsilon=\hbar^2k^2/2m_0$. Но и в том случае, когда закон дисперсии изотропный и квадратичный, зависимость $\varepsilon(k)=\hbar^2k^2/2m$ содержит эффективную массу m, а не массу m_0. Попытаемся разобраться в этом кажущемся противоречии, но прежде опишем кратко, как практически осуществлялись электронно-инерционные опыты. Опыты эти проводились в двух различных постановках.

1. В опытах Толмена — Стюарта [1] катушка из металлической проволоки приводилась в быстрое вращение вокруг своей оси, затем в течение долей секунды она останавливалась. Баллистическим гальванометром, присоединенным гибкими проводами к концам катушки, измерялось количество электричества Q, прошедшее по катушке за время торможения. В другой постановке опытов того же типа, выполненных Толменом, Каррером и Гернси [2], пустотелый цилиндр из исследуемого материала совершал крутильные колебания. Вследствие ускорения цилиндра при колебаниях в нем возникали периодические токи, которые измерялись вибрационным гальванометром. По известным частоте и амплитуде колебаний и измеренному значению силы тока определялась величина m/e.

2. В опытах другого типа, осуществленных Барнеттом и др. [5,6], измерялся механический импульс, возникающий в катушке при измерении силы протекающего через нее тока (обращенный опыт Толмена). Схема опыта такова. Через вертикально подвешенную на нити катушку пропускался переменный ток. Этот ток вызывал колебания катушки вокруг своей оси. Для повышения точности измерений было применено компенсирующее устройство (переменное магнитное поле компенсационной катушки действовало на магнитики, укрепленные на оси исследуемой катушки), позволявшее удерживать катушку в покое. Зная величину момента пары сил, удерживающей катушку в покое, Fr (r — радиус катушки) и скорость изменения тока в ней dI/dt, Барнетт вычислил отношение m/e. Подробное описание методики электронно-инерционных экспериментов содержится в обзоре Барнетта 1935 г. [15].

2. ОПЫТЫ ТОЛМЕНА

Посмотрим теперь, какую информацию о носителях заряда в проводнике можно извлечь из электронно-инерционных опытов Толмена и Барнетта. Приведем сначала объяснение опытов Толмена, данное Дарвином [3]. Для некоторого упрощения анализа примем, что металлический стержень движется поступательно с постоянной скоростью u_0 вдоль своей длины (скажем, вдоль оси x) и в момент времени t_1 тормозится с постоянным ускорением w ($w < 0$) до полной остановки в момент времени t_2.

Изменение состояния электрона в неподвижном или равномерно движущемся проводнике описывается уравнением Шрёдингера с временем

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_0}\nabla^2 - eU(x, y, z)\right]\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}, \tag{4}$$

где $U(x, y, z)$ — периодический потенциал кристаллической решетки.

Если выбрать момент t_1 за начало отсчета времени, то уравнение Шрёдингера для электрона в ускоренно движущемся проводнике примет вид

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_0}\nabla^2 - eU\left(x - \frac{1}{2}wt^2, y, z\right)\right]\psi = ih\frac{\partial\psi}{\partial t}. \tag{5}$$

Удобно перейти к неинерциальной системе координат, т. е. ввести новые переменные

$$x' = x - \frac{1}{2}wt^2, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t.$$

Тогда можно показать, что функция

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi'(\mathbf{r}', t)\exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(m_0wt'x' + \frac{1}{6}m_0w^2t'^3\right)\right] \tag{6}$$

приводит уравнение (5) к виду

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_0}\nabla'^2 - eU(x', y', z') + m_0wx'\right]\psi' = i\hbar\frac{\partial\psi'}{\partial t'}. \tag{7}$$

В. Л. Гинзбург [4] получил уравнение (7) (точнее, слагаемое m_0wx), не делая преобразования к ускоренной системе координат, а воспользовавшись принципом эквивалентности силы тяжести и силы инерции. Согласно этому принципу движение электрона в системе отсчета, обладающей ускорением $\mathbf{w}$, будет таким же, как и в покоящейся системе при наличии однородного гравитационного поля с напряженностью $-\mathbf{w}$ и потенциалом wx (полагаем, что ускорение $\mathbf{w}$ направлено вдоль оси x). Тогда потенциальная энергия электрона в гравитационном поле равна m_0wx, и эту величину нужно добавить к потенциальной энергии $-eU$ в уравнении Шрёдингера (4), в котором не учтено влияние поля тяготения.

Сравнивая (7) с уравнением Шрёдингера для электрона, движущегося под воздействием однородного электрического поля с напряженностью $\mathbf{E} = (E, 0, 0)$ в неподвижном проводнике,

$$\left[-\frac{\hbar}{2m_0}\nabla^2 - eU(x, y, z) + eEx\right]\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}, \tag{8}$$

замечаем, что действие силы $-m_0w$ эквивалентно действию силы $-eE$. Таким образом, инерционная сила $-m_0w$ ускоряет электрон точно так же, как электрическое поле

$$E_{TS} = \frac{m_0}{e}w. \tag{9}$$

Такой же результат получается, разумеется, для реальных постановок опытов Толмена, в которых использовалась неравномерно вращающаяся катушка, а не поступательно движущийся стержень. Следует, однако, различать две возможные ситуации: 1) электрическая цепь, частью которой является ускоряемый проводник, или цепь, состоящая только из ускоряемого проводника (например, вращающаяся катушка), замкнута; 2) электрическая цепь разомкнута. В первом случае действие силы инерции вызывает поток электронов в цепи, т. е. создает ток, который можно измерить, скажем, гальванометром. Если же цепь разомкнута, то при смещении электронов под действием инерционной силы — $m_0 w$ в проводнике возникнет электрическое поле E_{TS}, которое уравновесит действие силы $-m_0 w$. Поле E_{TS} можно, в принципе, измерить каким-либо бесконтактным способом, скажем, конденсаторным методом. Однако практически удобнее измерять ток, обусловленный электрическим полем. С этой целью можно проводник резко затормозить и замкнуть цепь через неподвижную часть. После остановки проводника поле E_{TS}, более не уравновешиваемое силой $-m_0 w$, обусловит ток.

При наличии стороннего электрического поля $\mathbf{E}_{TS}$ кинетическое уравнение для электронов может быть записано в виде

$$-\left(\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}\right) e\mathbf{v}\mathbf{E}_{TS} + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{ст}} = 0, \tag{10}$$

а плотность тока

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}_{TS}, \tag{11}$$

где f_0 — равновесная (фермиевская) функция распределения, $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{ст}}$ — интеграл столкновений, σ — проводимость.

Измеряя количество электричества Q, прошедшее по цепи за время торможения $t_2 - t_1$, можно по известным значениям σ и u_0 согласно (9) и (11) определить $m_0/(-e)$:

$$Q = \frac{m_0}{(-e)} \sigma u_0. \tag{12}$$

Итак, мы убедились в том, что стороннее поле Толмена — Стюарта E_{TS}, возникающее в ускоренно движущемся проводнике, зависит от массы свободного электрона, а не от эффективной массы.

Для определения из опытов Толмена величины $m_0/(-e)$ нужно, по существу, кроме σ знать плотность тока j и ускорение проводника w.

При всех практически достижимых ускорениях w поле E_{TS} достаточно мало́ и не может вызвать межзонные переходы. В таком поле блоховская волновая функция $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{kr})$, как впервые показал Хаустон [16], через промежуток времени dt принимает вид $u_{\mathbf{k}-\frac{e}{\hbar}\mathbf{E}_{TS}dt} \times \exp\left[i\left(\mathbf{k} - \frac{e}{\hbar}\mathbf{E}_{TS}\,dt,\ \mathbf{r}\right)\right]$, т. е. волновая функция изменяется в соответствии с соотношением

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} \equiv \dot{\mathbf{p}} = -e\mathbf{E}_{TS} \qquad (\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}). \tag{13}$$

В случае изотропного квадратичного закона дисперсии это уравнение принимает вид

$$m\dot{\mathbf{v}} = -e\mathbf{E}_{TS}. \tag{13a}$$

Таким образом, движение электрона проводимости в поле Толмена — Стюарта может быть описано квазиклассическим уравнением.

Аналогичные результаты для поля E_{TS} (9) и тока j (11) получаются и в случае дырочной проводимости. Это следует из того факта, что поле сил инерции действует на каждый электрон в отдельности (энергия его изменяется на m_0wx), независимо от степени заполнения энергетической зоны. Следовательно, результаты справедливы и в случае дырочной проводимости. В этом можно убедиться, непосредственно рассматривая дырки.

С этой целью вспомним, как вводится понятие дырки. Пусть в энергетической зоне имеется n состояний, из которых p не заняты электронами. Впервые Гейзенберг в 1931 г. показал [17], что p воображаемых положительно заряженных частиц, дырок, создают точно такой же ток, как и $n-p$ электронов, частично заполняющих энергетическую зону. Чтобы пояснить эквивалентность частично заполненной зоны и газа дырок, сравним две совокупности частиц: 1) $n-p$ электронов, оставляющих p состояний из n возможных состояний зоны незанятыми; 2) n электронов, целиком заполняющих зону, и p воображаемых положительно заряженных дырок.

Токи, образуемые этими двумя совокупностями частиц, будут одинаковыми, если под воздействием внешнего электрического поля $\mathbf{E}$ и поля кристаллической решетки $\mathbf{E}_i$ (поле, создаваемое всеми зарядами кристалла, кроме рассматриваемого) p дырок будут двигаться таким же образом, как те p электронов заполненной зоны (2-я совокупность), которые занимают p состояний, свободных в реальной зоне (1-я совокупность) *). Такое одинаковое движение p электронов и p дырок может быть достигнуто, если последним приписать массу $-m_0$. Действительно, квазиклассическое уравнение движения электрона $m\dot{\mathbf{v}} = -e\mathbf{E}$ можно переписать в виде **)

$$m_0\dot{\mathbf{v}} = -e\mathbf{E} - e\mathbf{E}_i. \tag{14}$$

Для того чтобы дырка с зарядом $+e$ двигалась с тем же ускорением, что и электрон, уравнение движения должно, очевидно, иметь вид

$$-m_0\dot{\mathbf{v}} = e\mathbf{E} + e\mathbf{E}_i. \tag{15}$$

Это и означает, что дырке следует приписать массу $-m_0$. Таким образом, поскольку знаки заряда и массы дырок и электронов противоположны, они одинаково ускоряются. Мы видим, что если вместо p вакантных состояний зоны ввести в рассмотрение p электронов $(m_0, -e)$ и p дырок $(-m_0, +e)$ ***), можно движение $n-p$ электронов свести к движению p дырок. Гейзенберг [17] получил этот результат на основе квантово-механического рассмотрения. Было показано, что уравнение Шрёдингера со временем для дырки, в отличие от уравнения для электрона (4), имеет вид

$$\left[\frac{\hbar^2}{2m_0}\nabla^2 + eU(x, y, z)\right]\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}. \tag{16}$$

Волновые функции электрона ψ_e и дырки ψ_h комплексно сопряжены, поэтому распределения вероятностей в пространстве и во времени электронов и дырок $\psi_e\psi_e^*$ и $\psi_h\psi_h^*$ равны. А это значит, что дырка непрерывно сопровождает электрон.

*) Напомним, что электроны целиком заполненной энергетической зоны не вносят вклада в ток.

**) Заметим, что квазиклассическое приближение для периодического поля $\mathbf{E}_i$ кристаллической решетки, вообще говоря, несправедливо, так как длина волны электрона $\lambda \gg a$, где a — период решетки. Однако этим приближением часто пользуются, поскольку оно, хоть и в ущерб строгости, позволяет достичь большой наглядности. В данном случае использование квазиклассического приближения можно оправдать тем, что результаты такого рассмотрения совпадают с решением точной квантовомеханической задачи [17].

***) Электронейтральность при этом, разумеется, сохраняется.

От введенных выше дырок в кристалле ($-m_0$, $+e$), подверженных действию кристаллического потенциала, можно перейти к привычным дыркам — квазичастицам с эффективной массой $m > 0$ и $e > 0$, аналогично тому, как это делается для электронов. Для этого следует, при условии достаточной плавности примесного потенциала $V(\mathbf{r})$, устранить из уравнения Шрёдингера периодический потенциал $U(\mathbf{r})$ и заменить массу $-m_0$ эффективной массой m, учитывая, таким образом, действие сил решетки.

Теперь вернемся к условиям опыта Толмена, т. е. рассмотрим ускоренно движущийся проводник с дырочной проводимостью. Если совершить ту же процедуру, что и для электрона, т. е. перейти от уравнения Шрёдингера в покоящейся системе координат (16) к уравнению в ускоренной системе координат, то получим

$$\left[\frac{\hbar^2}{2m_0}\nabla'^2+eU(x',\ y',\ z')-m_0wx'\right]\psi'=i\hbar\frac{\partial\psi'}{\partial t'}. \tag{17}$$

Отсюда следует, что на положительно заряженную дырку с массой $-m_0$ действует сила инерции $+m_0w$, противоположная по знаку силе инерции, действующей на электрон *). Сила инерции зависит от массы свободного электрона m_0 (или дырки $-m_0$), а не от эффективной массы m, потому, что кристаллический потенциал, как мы убедились, не влияет на силу инерции.

Сопоставляя (17) с уравнением Шрёдингера для дырки в электрическом поле E, т. е. с уравнением (8), в котором заряд электрона $-e$ следует заменить зарядом дырки $+e$, а массу m_0 массой $-m_0$, находим

$$E_{TS}=\frac{m_0}{e}w. \tag{9a}$$

Из (9a) видно, что в случае дырочной проводимости ($-m_0$, $+e$) поле Толмена — Стюарта (и ток $j=\sigma E_{TS}$) имеет тот же знак, что и в случае электронной проводимости ($+m_0$, $-e$), так как E_{TS} определяется отношением массы к заряду частицы.

Чтобы определить ускорение дырки, необходимо, очевидно, как и в случае электрона, кроме силы инерции учесть силы решетки, т. е. воспользоваться уравнением (15). Для квадратичного изотропного закона дисперсии уравнение (15) сводится к квазиклассическому уравнению движения дырки в кристалле с эффективной массой $m > 0$:

$$m\dot{\mathbf{v}} = e\mathbf{E}_{TS}.$$

3. ОПЫТЫ БАРНЕТТА

Во внешнем электрическом поле электроны и ионы проводника ускоряются. Если электрический ток постоянный, то средние скорости электронов и ионов тоже постоянны и, следовательно, импульсы систем электронов и ионов остаются неизменными. При протекании по проводнику переменного тока, в частности, при замыкании или размыкании электрической цепи, импульс системы электронов, как и системы ионов, изменяется. Если проводник не закреплен, например, подвешен на упругой

*) В частности, в поле силы тяжести Земли в покоящемся проводнике на электроны действует сила m_0g, на дырки — сила $-m_0g$, где g — ускорение силы тяжести. При смещении электронов вниз или дырок вверх возникает поле Толмена — Стюарта $E_{TS} = (m_0/e)\,g$, уравновешивающее действие силы тяжести. Это поле, имеющееся во всех проводниках, которые находятся в сфере тяготения Земли, весьма мало́: $E_{TS} \approx 5{,}5\cdot10^{-13}$ *в/см*.

нити, то при изменении силы тока изменится импульс $\mathbf{P}$ (см. (22)) проводника в целом (в условиях опыта Барнетта изменится момент импульса). Разумеется, если исследуемый проводник закреплен, то изменения импульсов электронов и ионов передаются через границы проводника фиксирующему телу (связи).

Для того чтобы выяснить, какой импульс в единицу времени приобретает проводник вследствие ускорения электронов и ионов внешним электрическим полем $\mathbf{E}$, мы вместо уравнения Шрёдингера (8) рассмотрим квазиклассическое уравнение движения (13) (справедливое для квантовомеханических средних величин)

$$\dot{\mathbf{p}} = -e\mathbf{E},$$

которое для квадратичного изотропного закона дисперсии принимает вид (13а). Уравнение (13а) можно представить в иной форме, если явно записать все взаимодействия электронов, скрытые в эффективной массе m:

$$m_0\dot{\mathbf{v}}_s = -e\mathbf{E} - e\mathbf{E}_s^{ie} - e\mathbf{E}_s^{ee} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{18}$$

где $\mathbf{E}_s^{ie}$ — действующее на электрон эффективное электрическое поле, созданное всеми ионами, $\mathbf{E}_s^{ee}$ — эффективное поле, характеризующее усредненное действие на s-й электрон всех остальных электронов.

Движение t-го иона описывается уравнением

$$M\dot{\mathbf{V}}_t = e\mathbf{E} + e\mathbf{E}_t^{ie} + e\mathbf{E}_t^{ii} \qquad (t = 1, 2, \ldots, n), \tag{19}$$

где $\mathbf{E}_t^{ii}$ — эффективное электрическое поле, характеризующее усредненное действие на t-й ион всех других, M — масса иона (массы всех ионов считаем одинаковыми).

В сумме сил, действующих на все n электронов, члены $e\mathbf{E}_s^{ee}$ выпадут, так как за счет электрон-электронных взаимодействий общий импульс системы электронов не может измениться *). Аналогично в сумме сил, действующих на n ионов, выпадут все члены $e\mathbf{E}_t^{ii}$. Таким образом, сумма сил, действующих на электроны и ионы, равна

$$\sum_{s=1}^{n} m_0\dot{\mathbf{v}}_s + \sum_{t=1}^{n} M\dot{\mathbf{V}}_t = 0. \tag{20}$$

Это означает, что сумма сил, действующих на электроны, равна и противоположна по знаку сумме сил, действующих на ионы, или, что то же, полный импульс системы электронов и ионов остается неизменным: $\sum_{s=1}^{n} m_0\mathbf{v}_s + \sum_{t=1}^{n} M\mathbf{V}_t = \text{const}$.

Из (20) следует, что

$$m_0\Bigl(\sum_{s=1}^{n}\dot{\mathbf{v}}_s - \sum_{t=1}^{n}\dot{\mathbf{V}}_t\Bigr) = -\sum_{t=1}^{n}(M + m_0)\dot{\mathbf{V}}_t, \tag{21}$$

где

$$\sum_{t=1}^{n}(M + m_0)\dot{\mathbf{V}}_t = \dot{\mathbf{P}} \tag{22}$$

---

*) Этот результат получается автоматически, если просуммировать по s все члены

$$e\mathbf{E}_s^{ee} = \sum_{u \neq s} \frac{e^2(\mathbf{r}_u - \mathbf{r}_s)}{|\mathbf{r}_u - \mathbf{r}_s|^3}$$

от 1 до n.

есть изменение импульса проводника в целом из-за ускоренного движения электронов и ионов в нем. Плотность тока, которая создается электронами, движущимися относительно ионов, равна

$$\mathbf{j} = -e\left(\sum_{s=1}^{n} \mathbf{v}_s - \sum_{t=1}^{n} \mathbf{V}_t\right). \tag{23}$$

Из (21) и (23) следует искомое соотношение

$$\frac{\dot{\mathbf{P}}}{\dot{\mathbf{j}}} = \frac{m_0}{e}. \tag{24}$$

Приведенное рассмотрение опыта Барнетта показывает, что изменение импульса проводника $\dot{\mathbf{P}}$ возникает лишь при протекании переменного тока, т. е. когда $\dot{\mathbf{j}} \neq 0$. В это изменение импульса $\dot{\mathbf{P}}$ определенный вклад, как нетрудно убедиться, вносит сила инерции, действующая на электроны. Пусть в лабораторной системе координат ускорение электрона во внешнем электрическом поле есть $\dot{\mathbf{v}}$, а иона $\dot{\mathbf{V}}$. Будем считать, что ускорение всех ионов одинаково. В системе координат, связанной с ионами, относительное ускорение электрона равно $\dot{\mathbf{v}}_r = \dot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{V}}$. Уравнение движения электронов в лабораторной системе координат есть $m_0\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}$ ($\mathbf{F}$ — равнодействующая всех сил), а в системе координат, связанной с проводником, в уравнении движения появляется переносная сила инерции $-m_0\dot{\mathbf{V}}$: $m_0\dot{\mathbf{v}}_r = \mathbf{F} - m_0\dot{\mathbf{V}}$. Таким образом, изменение импульса проводника $\dot{\mathbf{P}} = -m_0\sum_{s=1}^{n} (\dot{\mathbf{v}}_r)_s$ вызвано действием не только силы $n\mathbf{F}$, но и силы инерции $\mathbf{F}_{\text{и}} = -nm_0\dot{\mathbf{V}}$.

Итак, измерив в опыте Барнетта изменения плотностей тока и импульса *), можно согласно (24) определить отношение m_0/e. Что же касается проводимости σ, то она, разумеется, зависит от эффективной массы m, а не от m_0.

Нетрудно видеть, что для дырок ($-m_0$, $+e$) будет тот же результат (24), что и для электронов ($+m_0$, $-e$), так как отношение $\dot{P}/\dot{j}$ определяется отношением массы к заряду частицы.

Как уже отмечалось во введении, опыты Барнетта интерпретировались иногда (вслед за Ростокером [8]) некорректно. Хотя критика Ростокером цитированного выше заключения Брауна и Барнетта [6] об ошибочности выводов теории твердого тела в общем верна, конкретный анализ опытов Барнетта вызывает возражения. Объяснение Ростокера сводится к тому, что поскольку плотность тока $\mathbf{j} = -e\sum_{\mathbf{k}} \mathbf{v}(\mathbf{k})$, а импульс совокупности электронов $\mathbf{P}' = m_0\sum_{\mathbf{k}} \mathbf{v}(\mathbf{k})$, то

$$\frac{P'}{j} = -\frac{m_0}{e}. \tag{25}$$

Аналогичная интерпретация опытов Барнетта приводится в других работах [4, 12, 14].

Прежде всего необходимо подчеркнуть, что такое объяснение не имеет отношения к опыту Барнетта, в котором измеряется *изменение импульса проводника* $\Delta P/\Delta t$, т. е. изменение импульса совокупности электронов и ионов, возникающее при изменении тока в проводнике, а не импульс

*) Плотностью импульса мы называем импульс, отнесенный к единице объема.

P' одних электронов (кстати, вообще непонятно, как можно экспериментально определить P').

Что же касается формулы (25), то она всего лишь выражает факт пропорциональности между импульсом совокупности электронов и электрическим током, который они переносят. Но для объяснения опытов Барнетта важно выяснить, *какой импульс передается проводнику* вследствие ускорения электронов проводимости. И здесь в рассуждениях Ростокера есть еще одно слабое место. Он принимает, что при протекании тока $\mathbf{j} = -e\sum_{\mathbf{k}} \mathbf{v}(\mathbf{k})$ проводник получает от электронов импульс $\mathbf{P}' = m_0 \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{v}(\mathbf{k})$. Между тем априори вовсе не ясно, почему *электроны проводимости* передают кристаллической решетке импульс $\mathbf{P}'$, а не квазиимпульс $\mathbf{P}'' = m \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{v}(\mathbf{k})$, — это как раз следовало бы показать.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теперь можно дать ответы на вопросы, поставленные в начале этих заметок. Мы выяснили, что измеряемые в опытах Толмена и Барнетта величины (заряд Q, связанный с полем E_{TS}, и отношение $\dot{P}/\dot{j}$) зависят от отношения $m_0/(-e)$ для *свободного электрона*. Что же касается поведения носителей заряда в кристалле при наличии сил инерции в условиях опытов Толмена, то динамика их может быть описана квазиклассическим уравнением движения:

$$\dot{\mathbf{p}} = e\left(\mathbf{E} + \frac{1}{e}[\mathbf{v}, \mathbf{H}] + \mathbf{E}_{TS}\right) \qquad (e > 0 \text{ или } e < 0), \tag{26}$$

а кинетические коэффициенты (постоянная Холла, магнитосопротивление, термо-э. д. с. и др.) могут быть обычным образом найдены из кинетического уравнения, которое содержит наряду с другими полями поле $\mathbf{E}_{TS}$.

В приближении эффективной массы все динамические и кинетические характеристики электронов и дырок при наличии сил инерции, описываемых полем $\mathbf{E}_{TS}$, выражаются через эффективную массу m, тогда как само поле $\mathbf{E}_{TS}$ определяется массой m_0. Таким образом, тот факт, что действие сил инерции сводится к действию стороннего поля $\mathbf{E}_{TS}$, позволяет описать движение носителей заряда в проводнике точно так же, как и в случае электрического поля $\mathbf{E}$.

Рассуждения, аналогичные приведенным выше в отношении электронно-инерционных эффектов, можно применить и к гиромагнитным явлениям. Это приведет нас к заключению, что, например, в опытах Эйнштейна — де Гааза определяется g-фактор электронов без учета их взаимодействия с кристаллической решеткой, т. е. $1 \leqslant g \leqslant 2$, а не эффективный g-фактор g^*, получаемый в пара- или ферромагнитном резонансе. Причина различия между значениями g и g^* та же, что и причина различия между значением m_0, получаемым в электронно-инерционных опытах, и значением m из циклотронного резонанса: внутренние взаимодействия электронов с решеткой не могут изменить момент импульса проводника в целом.

* * *

Длительное время считалось, что электронно-инерционные опыты дают прямое доказательство того факта, что носителями заряда в проводниках являются электроны с массой m_0 и отрицательным элементарным зарядом $-e$. Теория твердого тела, однако, строго показывает, как мы знаем, что носителями динамических и кинетических свойств являются квазичастицы — электроны и дырки, которые могут отличаться как величиной массы, так и знаком заряда от соответствующих значений для свободных электронов. Положительное значение электронно-инерционных опытов можно видеть в том, что в тех условиях, когда коллективные свойства квазичастиц не проявляются, можно непосредственно определить характеристики (массу и заряд) структурных единиц твердого тела — электронов и таким образом лишний раз убедиться в правильности наших представлений о твердом теле.

Институт физики металлов
АН СССР, Свердловск

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. R. Tolman, T. Stewart, Phys. Rev. 8, 97 (1916); 9, 164 (1917).
2. R. Tolman et al., ibid. 21, 525 (1923); R. Tolman, Mott-Smith, ibid. 28, 794 (1926).
3. C. Darwin, Proc. Roy. Soc. A154, 61 (1936).
4. В. Л. Гинзбург, сборник «Памяти А. А. Андронова», М., Изд-во АН СССР, 1955, стр. 622.
5. S. Barnett, Phil. Mag. 42, 349 (1931).
6. S. Brown, S. Barnett, Phys. Rev. 87, 601 (1952).
7. G. Scott, ibid., p. 83, 656 (1951).
8. N. Rostoker, ibid., p. 88, 952 (1952).
9. W. Shockley, ibid., p. 953.
10. И. Е. Тамм, Основы теории электричества, М., Гостехиздат, 1954, стр. 199—202.
11. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, М., Гостехиздат, 1957, стр. 266—268.
12. А. И. Ансельм, Введение в теорию полупроводников, М., Физматгиз, 1962, стр. 138.
13. В. Б. Фикс, Ионная проводимость в металлах и полупроводниках, М., «Наука», 1969, стр. 260—262.
14. И. М. Лифшиц, М. Я. Азбель, М. И. Каганов, Электронная теория металлов, М., «Наука», 1971, стр. 47 и 211.
15. S. Barnett, Rev. Mod. Phys. 7, 129 (1935).
16. W. Houston, Phys. Rev. 57, 184 (1940).
17. W. Heisenberg, Ann d. Phys. 10, 888 (1931).