

## СТАТИСТИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ В ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ\*)

Ю. А. Кравцов, С. М. Рытов, В. И. Татарский

## СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение . . . . .	239
2. Типы статистических дифракционных задач . . . . .	240
а) Возбуждение полей случайными источниками (241). б) Дифракция случайных (частично когерентных) полей (241). в) Дифракция на телах, форма и (или) положение которых случайны (241). г) Дифракция и распространение волн в случайно-неоднородной среде (241).	
3. Возбуждение полей случайными источниками . . . . .	242
4. Дифракция частично когерентных полей . . . . .	245
а) Оптическая интерферометрия (246). б) Интерферометр интенсивности (247). в) Формирование оптического изображения (248). г) Формирование голографического изображения (249).	
5. Дифракция на телах, имеющих случайную форму или занимающих случайное положение . . . . .	252
6. Распространение и дифракция волн в случайно-неоднородных средах . .	256
7. Смешанные задачи . . . . .	260
Цитированная литература . . . . .	261

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В теории дифракции, как и в других областях физики, часто встречаются задачи, принципиально требующие статистического подхода. В этих задачах интерес представляют те или иные *усредненные* величины, а не отдельные реализации. Как и в статистической физике, даже если бы мы и умели предсказывать все реализации («микросостояния») дифракционного поля, мы все равно прибегли бы к усредненному описанию, хотя бы потому, что отдельные реализации рассеянного поля практически не повторяются и сами по себе интереса не представляют. Статистические же моменты и вероятностные распределения являются устойчивыми характеристиками случайного поля; именно с их помощью и обеспечивается естественное и адекватное описание стохастических процессов.

Статистические задачи теории дифракции очень разнообразны. Они охватывают множество физических объектов и часто носят подчеркнуто прикладной характер. При первоначальном ознакомлении с ними может создаться впечатление, что это множество *различных* задач. Это впечатление усиливается еще и тем, что в теории дифракции при решении как динамических, так и статистических задач используется много разных методов и приближений. Однако в действительности, если классифицировать статистические дифракционные проблемы по их физической постановке, а не по математическим методам и не по их принадлежности к традиционным «разделам» физики (оптика, акустика, радиофизика и т. д.),

\*) Обзор написан по материалам доклада на VI Всесоюзном симпозиуме по дифракции и распространению волн (Ереван, октябрь 1974 г.).

то картина оказывается не такой уже пестрой. В данном обзоре мы попытаемся систематизировать дифракционные статистические явления, ограничиваясь рассмотрением *линейных* и *неквантовых* задач статистической теории волн.

## 2. ТИПЫ СТАТИСТИЧЕСКИХ ДИФРАКЦИОННЫХ ЗАДАЧ

Классификацию статистических явлений естественно связать с постановкой динамических задач теории дифракции. Довольно широкий класс последних формулируется следующим образом.

Пусть тело (или система тел), ограниченное поверхностью  $S$ , помещено в среду (однородную или неоднородную), в которой могут распространяться волны той или иной физической природы (электромагнитные,

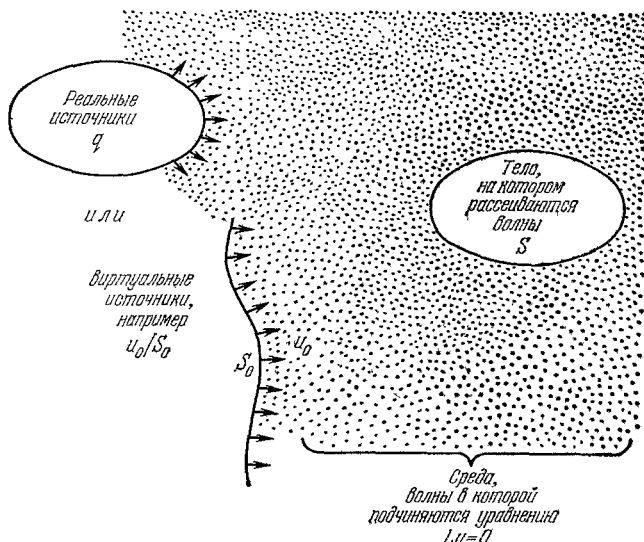


Рис. 1. Типичная постановка задачи в теории дифракции.

звуковые, упругие, спиновые и т. д.). Соответствующий линейный волновой оператор (обычно это дифференциальный, реже — интегро-дифференциальный оператор) мы обозначим через  $L$ , так что в области, свободной от источников, волновое уравнение имеет вид

$$Lu = 0, \quad (1)$$

где  $u$  — волновое поле, которое может быть как скалярным, так и векторным; в последнем случае  $L$  — тензорный оператор.

Первичная волна, которая облучает тело  $S$ , создается (рис. 1) либо заданным и *реальными* источниками  $q$ , либо возбуждается *виртуальными* источниками, когда заданным считается, например, поле первичной волны  $u_0$  (большая часть это плоская волна). Искомым является рассеянное дифракционное поле. Разумеется, кроме источников, волнового уравнения и формы тела  $S$  должны быть заданы еще определенные однородные граничные условия на  $S$ , а также условия на бесконечности (условия излучения).

Таким же уравнением (1) и такими же граничными условиями ставится и статистическая задача, но теперь это уравнение *стохастическое*, т. е. уравнение, которому удовлетворяют отдельные реализации. Иными

словами, фигурирующие в задаче параметры, функции и операторы теперь будут *случайными* (все или их часть), т. е. они заданы своими *вероятностными распределениями*. Например, если в детерминированной задаче задается первичное поле  $u_0$  на поверхности  $S_0$  (виртуальные источники), то в соответствующей статистической задаче задается *статистика* этого поля. В частности, может быть задан только второй момент этого поля

$$\Gamma_u^0(1, 2) = \langle u_0(1) u_0^*(2) \rangle, \quad (2)$$

который в оптике принято называть функцией когерентности второго порядка или просто *функцией когерентности* (для векторных полей под  $u_0(1)$   $u_0^*(2)$  следует понимать прямое произведение, и тогда  $\Gamma_u^0(1, 2)$  будет матрицей когерентности). Могут быть заданы и высшие моменты (высшие функции когерентности) первичного поля  $u_0$ . Разумеется, полное статистическое описание поля  $u_0$  дается совокупностью  $n$ -мерных ( $n=1, 2, \dots$ ) плотностей вероятности. Если исходить из указанной выше постановки динамической задачи, то случайными могут быть:

- а) реальные источники  $q$ ,
- б) виртуальные источники (скажем,  $u_0/S_0$ ),
- в) форма и положение границы тела  $S$ ,
- г) свойства среды, т. е. сам оператор  $L$ .

Соответственно этому можно ввести четыре основные статистические схемы, которые мы условно назовем *первичными статистическими схемами*. Обрисуем кратко математическое «оформление» этих первичных схем.

- а) Возбуждение полей случайными источниками. Задачи этого класса описываются *неоднородным* уравнением

$$\tilde{L}u = \tilde{q}.$$

Тильдой мы временно будем отмечать случайные величины. В данном случае — это источники  $q$  и само поле  $\tilde{u}$ . О необходимых однородных граничных условиях на  $S$  и условиях на бесконечности мы для краткости говорить не будем — эти условия обязательны как в детерминированных, так и в статистических задачах.

- б) Дифракция случайных (частично когерентных) \*) полей. Этот класс задач описывается *однородным* волновым уравнением

$$\tilde{L}u = 0,$$

но с неоднородными случайными граничными условиями типа  $\tilde{u}_0|_{S_0}$  которые отражают случайность первичной волны  $\tilde{u}_0$ .

- в) Дифракция на телах, форма и (или) положение которых случайны. Здесь граничные условия ставятся на *случайной поверхности*  $\tilde{S}$ . Что же касается волнового уравнения, то оно может быть неоднородным ( $\tilde{L}u = q$ ) в случае детерминированных реальных источников, или однородным ( $\tilde{L}u = 0$ ), но с неоднородными граничными условиями на  $S_0$  в случае детерминированных виртуальных источников.

- г) Дифракция и распространение волн в случайно-неоднородной среде. Здесь мы имеем дело со *случайным оператором*  $\tilde{L}$ , описывающим распространение волн в среде. Случайными могут быть коэффициенты при производных, если  $\tilde{L}$  — линейный диффе-

\*) Применительно к случайным волновым полям термин «случайный» и «частично когерентный» равнозначны.

ренциальный оператор, или ядра, входящие в  $\tilde{L}$ , если  $\tilde{L}$  — интегро-дифференциальный оператор. Таким образом, при возбуждении поля, например, реальными детерминированными источниками задача описывается уравнением  $\tilde{L}\tilde{u} = q$ .

К этим четырем первичным схемам, как фактически оказывается, сводится постановка подавляющего большинства статистических задач линейной теории дифракции. Возможны, конечно, и задачи смешанного типа, но таких задач пока рассмотрено еще очень немного. На них мы кратко остановимся в гл. 7.

Разумеется, постановка задачи еще не предопределяет методов ее решения (как правило это приближенные методы). В самом деле, флуктуации тех или иных параметров и функций, входящих в условия задачи, могут быть (в каком-то характерном масштабе) большими или малыми, плавными, медленными или, наоборот, резкими, быстрыми, корреляция может быть сильной и слабой и т. д. Эти различия физических условий влекут за собой и разные приближенные подходы к проблеме. Отсюда возникают многочисленные *вторичные статистические схемы*, связанные уже не с постановкой задачи, а с теми или иными приближенными методами их решения. Многочисленность вторичных статистических схем как раз и затрудняет ориентировку в вопросах волновой статистики.

Последующее изложение направлено прежде всего к тому, чтобы размежевать первичные вторичные статистические схемы. С этой целью мы рассмотрим некоторые важные и интересные группы статистических задач, придерживаясь принятой выше классификации по их постановке. Попутно мы коснемся наиболее распространенных методов их решения. Почти по всем затронутым ниже вопросам имеется обширная литература. Поэтому мы ссылаемся здесь на суммирующие монографии и обзоры и лишь в отдельных случаях на оригинальные статьи.

### 3. ВОЗБУЖДЕНИЕ ПОЛЕЙ СЛУЧАЙНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ

Пусть  $G = L^{-1}$  — обратный  $L$  оператор динамической задачи, т. е. функция Грина, через которую решение уравнения (1) записывается в виде \*)  $u = Gq$ . Это выражение дает линейную (операторную) связь между случайными источниками  $q$  и случайным волновым полем  $u$ . В результате моменты поля  $u$  тоже линейно выражаются через соответствующие моменты  $q$ . Например,

$$\langle u \rangle = G \langle q \rangle, \quad \langle u_1 u_2^* \rangle = G_1 G_2 \langle q_1 q_2^* \rangle, \text{ и т. д.}$$

(угловые скобки означают статистическое усреднение, т. е. усреднение по ансамблю реализаций).

Если нам известна *точная* функция Грина, то мы получаем точные выражения для моментов. Используя же для  $G$  различные приближения, недостатка в которых теория дифракции не испытывает, мы получаем, очевидно, приближенные значения моментов. Таким образом, для схемы а) гл. 2 мы имеем, по существу, единый метод решения. Разнообразие задач здесь обусловлено прежде всего обилием конкретных физических и технических проблем, сводимых к схеме а).

Наиболее известная группа прикладных задач типа а) относится к *статистике антенн*, а именно к тем вопросам, в которых идет речь о флуктуациях *реальных* токов. Интерес здесь представляют главным

---

\*) Значок «тильда» над случайными величинами мы далее снимаем.

образом статистические характеристики диаграммы направленности  $g(\theta, \varphi)$ , так что для функции Грина можно воспользоваться френгофевым приближением. В этом приближении  $u \sim ge^{ikR}/R$ , причем угловая диаграмма  $g$  связана с флуктуирующими токами в антенне преобразованием Фурье. Основные результаты здесь хорошо изучены и описаны, например, в книге Шифрина<sup>1</sup>. Искажения диаграммы наиболее ощутимы для больших (по сравнению с длиной волны) антенн, которые имеют узкую диаграмму (рис. 2). С ростом флуктуаций токов в антенне излучение в направлении главного лепестка уменьшается, а сам главный лепесток уширяется. Вместе с тем «замываются» нули (или минимумы) диаграммы и растет уровень бокового излучения, т. е. излучение в направлениях, не совпадающих с направлением центрального лепестка.

Основная трудность при исследовании статистики антенн заключается, по-видимому, не в вычислении тех или иных интегралов (хотя и здесь преодолеваются далеко не все препятствия), а в физически обоснованном задании флуктуирующих по раскрытию антенны токов. Ведущая роль здесь должна принадлежать эксперименту, так как флуктуации токов обусловлены в первую очередь технологическими погрешностями при изготовлении антенн (разброс параметров или неэквидистантность излучающих вибраторов), а также случайными вариациями в «запитке» вибраторов.

Из физических проблем, относящихся к схеме а) гл. 2, прежде всего укажем на задачу об электромагнитном излучении нагретых тел. Статистика токов, возбуждающих тепловое излучение, здесь известна: она определяется флуктуационно-диссипационной теоремой, обобщенной на распределенные электродинамические системы (см. монографию<sup>2</sup>). Поэтому, в отличие от предыдущей группы, основная трудность решения проблемы падает здесь на нахождение функции Грина. Укажем здесь на три вопроса, решение которых сопряжено с необходимостью расчета дифракции теплового излучения.

а) Расчет собственного теплового излучения в антеннах, волноводах и других устройствах сверхвысокочастотной радиотехники. Особенность этой задачи по сравнению с задачами статистики антенн состоит в том, что здесь надо знать и ближние поля, а это, естественно, усложняет расчеты<sup>2</sup>.

б) Измерение параметров больших антенн (в частности, зеркал радиотелескопов) по характеристикам излучения, принятого от нагретых тел. В качестве эталонного тела, по которому калибруют антенную систему, обычно берут черный диск.

в) Дистанционное определение свойств лунных и марсианских пород, а также параметров поверхности Земли (океан, арктические льды, пустыни и т. д.) по интенсивности теплового излучения. Расчеты теплового излучения для такого рода обратных задач сравнительно просты, если в качестве модели излучающей среды используется однородное полупростран-

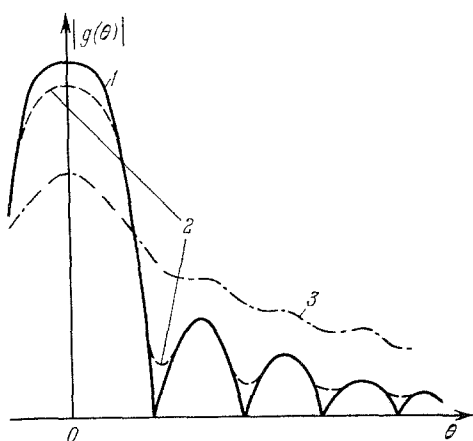


Рис. 2. Искажения диаграммы излучения при наличии флуктуаций токов в антенне. Кривая 1 — флуктуации тока отсутствуют, 2 — слабые флуктуации, 3 — сильные флуктуации токов.

ство с плоской границей, но они резко усложняются, если границы раздела неровные или если излучающая среда неоднородна.

Другая задача, представляющая общезначительный интерес, — это статистика поля, излученного системой большого числа *некоррелированных источников*. При определенных допущениях (а иногда и совершенно строго) к ней сводится оптическое излучение атомов в нагретом газе, радиоизлучение электрических разрядов при снегопадах, звуковой шум от колеблющихся листьев на деревьях или от пузырьков воздуха, лопающихся на поверхности моря и многие другие задачи. В силу независимости источников излучаемые ими поля складываются *по интенсивности*. Казалось бы,

при этих условиях ни о каких дифракционных явлениях не может быть и речи, так как поля независимых источников друг с другом не интерферируют. В действительности, однако, интерференция все же происходит, но проявляется она не в пространственном распределении интенсивности, а в поведении функции когерентности излученного поля.

Пусть источники (для определенности — атомы самосвещающегося объекта, например, звезды) занимают какой-то конечный объем с поперечником  $a$ . Распределение интенсивности в облаке источников, приведенное к центральной плоскости  $z = 0$ , обозначим через  $J(\rho')$ , где  $\rho' = (x'y')$  — вектор в плоскости  $z = 0$  (рис. 3). Тогда пространственная функция когерентности излученного поля на плоскости  $z = \text{const}$  выражается через  $J(\rho')$  дифракционным интегралом

$$\Gamma_u(\rho) \sim \int J(\rho') e^{ik\rho\rho'/z} d^2\rho', \quad (3)$$

где  $\rho(xy)$  — вектор в плоскости  $z = \text{const}$ . Иными словами, функция когерентности  $\Gamma_u(\rho)$  представляет собой преобразование Фурье от  $J(\rho')$ , т. е. ведет себя как поле волны, пропущенной через экран с переменной прозрачностью (коэффициентом пропускания), пропорциональной  $J(\rho')$ .

Соотношение (3), выражающее так называемую теорему Ван-Циттерта — Цернике<sup>3</sup>, широко используется в оптике и радиоастрономии, о чем еще будет сказано ниже. Но специалисты по теории дифракции, привыкшие оперировать когерентными полями, знают о ней мало. Между тем эта теорема может найти интересные применения и в дифракционных задачах.

Теорема справедлива при  $z \gg a$ , где  $a$  — поперечный размер облака излучателей. Следовательно, при больших размерах области  $a$ , занятой источниками ( $ka \gg 1$ ), она справедлива как в дальней зоне ( $z \gg ka^2$ ), так и в ближней ( $z \ll ka^2$ , но  $z \gg a$ ). Этим можно воспользоваться для нахождения диаграммы направленности в *дальней* зоне по измерениям функции когерентности поля теплового излучения соответствующим образом нагретой антенны в *ближней* зоне ( $a \ll z \ll ka^2$ ), ибо функция когерентности и диаграмма направленности выражаются одним и тем же преобразованием Фурье.

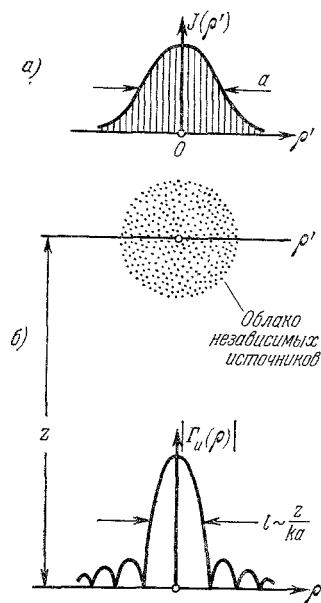


Рис. 3. Функция когерентности поля, возбужденного облаком независимых источников.

Функция когерентности  $\Gamma_u(\rho)$  (б) связана с приведенной интенсивностью  $J(\rho')$  (а) преобразованием Фурье (3).

Другой пример относится к акустике открытых концертных залов (в закрытых помещениях пришлось бы принимать во внимание отражения от стен и потолка). Оркестр, скажем, ансамбль скрипачей, можно рассматривать как совокупность некоррелированных излучателей (несмотря на то, что музыканты играют в унисон, фазы, с которыми колеблются скрипичные струны, независимы.) Зададимся вопросом: на каком расстоянии  $z$  от сцены пропадает эффект объемного звучания? Можно полагать (это гипотеза В. А. Зверева <sup>4</sup>), что эффект объемности наблюдается тогда, когда радиус корреляции акустического поля  $l$  меньше расстояния  $y$  между ушами слушателя ( $l \ll y$ ), т. е. когда оба уха воспринимают *некоррелированные колебания*. Из теоремы Ван-Циттерта — Цернике (3) для радиуса корреляции (когерентности)  $l$  следует оценка  $l \sim z/ka$ . Стало быть, эффект объемного звучания пропадает при  $l \lesssim y$ , т. е. при  $z > kay$ . Это не столь уж большое расстояние: для частоты 3 кГц оно составляет  $\sim 30$ — $60$  м. При желании эту оценку можно рассматривать как «дифракционное объяснение» более низкой цены билетов на места в задних рядах.

Теорему Ван-Циттерта — Цернике можно обобщить и на тот случай, когда источники частично коррелированы. Очевидно, функция когерентности  $\Gamma_u(\rho)$  «почувствует» эту корреляцию только при том условии, что радиус корреляции источников превышает длину волны  $\lambda$ .

#### 4. ДИФРАКЦИЯ ЧАСТИЧНО КОГЕРЕНТНЫХ ПОЛЕЙ

Типичная постановка задачи типа б) состоит в следующем. В плоскости  $z = 0$  задана статистика первичного поля  $u_0$ , т. е. заданы его моменты (функции когерентности). Требуется выяснить, как изменяются эти функции по мере удаления от плоскости  $z = 0$ , если на пути поле подвергается тем или иным преобразованиям (волна проходит через диафрагмы, линзы и т. п.).

Формально эта задача решается просто: если известно, как преобразуется детерминированная (полностью когерентная) волна, то достаточно усреднить детерминированное решение по ансамблю реализаций «входного» поля  $u_0$ . Однако этот естественный путь обычно приводит к трудно вычисляемым интегралам. Например, расчет относительных флуктуаций интенсивности («индекса мерцаний»)  $\beta = \langle (I - \langle I \rangle)^2 \rangle / \langle I \rangle^2$  требует вычисления восьмикратного интеграла. Его не удается вычислить строго даже для предельно упрощенной модельной задачи о флуктуациях интенсивности за хаотическим фазовым экраном <sup>\*</sup>) (рис. 4).

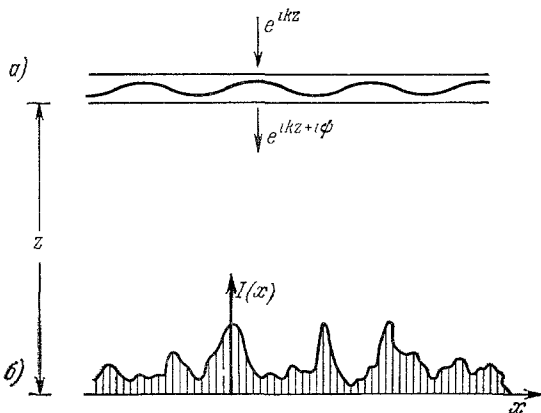


Рис. 4. Флуктуации интенсивности  $I(x)$  (б) волны, прошедшей через фазовый экран (а).

<sup>\*</sup>) Так называют слой, который модулирует только фазу волны: если на слой падает плоская волна  $e^{ikz}$ , то непосредственно за экраном  $u_0 = e^{ikz+i\psi}$ , где  $\psi(x, y)$  — случайная фаза. Задание статистики фазы на экране определяет, очевидно, и статистику поля в плоскости  $z = 0$ . «Система», которая «преобразует» выпавшее из экрана поле в данном случае — просто свободное пространство. Вследствие дифракции волна, прошедшая через хаотический фазовый экран, испытывает флуктуации (рис. 4, б), хотя на самом фазовом экране (рис. 4, а) интенсивность постоянна.

К счастью, качественные физические соображения часто подсказывают способы приближенного вычисления сложных многократных интегралов. В частном случае фазового экрана расчеты «индекса мерцаний»  $\beta$  доводятся до конца при слабых флуктуациях фазы ( $\langle \psi^2 \rangle \ll 1$ ). Для сильных же и средних флуктуаций фазы ( $\langle \psi^2 \rangle \gtrsim 1$ ) при вычислениях  $\beta$  на малых дистанциях  $z$  можно воспользоваться методом возмущений (флуктуации интенсивности непосредственно за экраном малы), а на больших — нормализацией поля. Нормальный закон распределения вероятности устанавливается потому, что при больших  $z$  в точку наблюдения приходит много некоррелированных волн от разных участков экрана. В промежуточной же области *фокусировки* можно найти асимптотику поля при больших флуктуациях фазы ( $\langle \psi^2 \rangle \gg 1$ ). В результате получается кривая  $\beta(z)$ , качественный ход которой

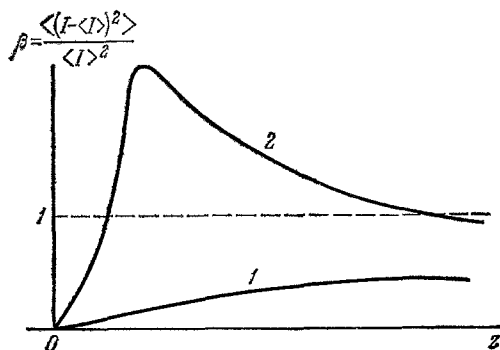


Рис. 5. Качественный ход поведения индекса мерцаний за хаотическим фазовым экраном.

Кривая 1 отвечает слабым ( $\langle \psi^2 \rangle \ll 1$ ), а 2 — сильным ( $\langle \psi^2 \rangle \gg 1$ ) флуктуациям фазы.

показан на рис. 5 (см. <sup>5,6</sup> и литературу, цитированную в обзоре <sup>7</sup>).

Такого рода вычисления используются в радиоастрономии. Хаотический фазовый экран — это модель (хотя и не вполне удовлетворительная) ионосферы или межпланетной плазмы со случайными неоднородностями. Проходя через случайно-неоднородную ионосферную плазму или солнечную корону, волна приобретает случайную фазовую модуляцию, а это приводит к флуктуациям амплитуды на Земле. Анализируя эти флуктуации, можно судить о параметрах неоднородностей в ионосфере или солнечной короне.

Но главным «потребителем» теории дифракции частично когерентных полей, конечно, является оптика, в которой и возникло около ста лет назад понятие когерентности. Долгое время оно оставалось качественным, типа «да — нет», и лишь в последние 15—20 лет была осознана необходимость *количественной меры* когерентности и была построена соответствующая теория (включающая и теорию частичной поляризации). Эта теория сводится, в сущности, к нахождению статистических моментов волнового поля, т. е. функций когерентности различного порядка, и в первую очередь — функции когерентности второго порядка. Эти функции когерентности описывают статистическую связь (корреляцию) значений поля в различных точках пространства и в разные моменты времени. Приведем некоторые типичные задачи из числа тех, которые приходится решать в статистической оптике.

а) **О п т и ч е с к а я   и н т е р ф е р о м е т р и я.** Интерферометры позволяют не только измерять, но в ряде случаев и непосредственно *видеть* функцию когерентности (пространственную или временную) оптического поля. Временная функция когерентности связана со спектром излучения преобразованием Фурье, и это позволяет измерять форму линий излучения. Такая возможность реализуется в интерферометрах, предназначенных для спектрального анализа. Что касается пространственной функции когерентности, то для самосветящихся объектов она связана преобразованием Фурье с распределением светимости  $J(\rho')$  по поверхности тела (теорема Ван-Циттерта — Цернике). Поэтому, изме-



рая пространственную функцию когерентности, можно (в принципе) восстановить распределение  $J(\rho')$ , т. е. восстановить форму или, по крайней мере, определить угловые размеры светящегося объекта. Эта возможность реализуется в звездном интерферометре Майкельсона. В этом интерферометре (рис. 6) наблюдается интерференция двух пучков света, «вырезанных» двумя зеркалами, 1 и 2, из светового поля частично когерентной волны (а), излученной звездой. Видность интерференционной картины (в) определяется степенью некогерентности поля в точках, разнесенных на расстояние  $d$ , где  $d$  — величина базы интерферометра (б). Если расстояние  $d$  между зеркалами меньше радиуса когерентности  $l$  падающей волны, то пучки света когерентны и при их сведении в центре наблюдается контрастная интерференционная картина. Если же  $d \geq l$ , то интерференционная картина «смазывается». В соответствии с (3),  $l \sim 1/k\theta$ , где  $\theta = a/z$  — угловой размер звезды. Поэтому, фиксируя ту длину базы  $d_0$ , при которой исчезает интерференционная картина, можно оценить угловой размер звезды:  $\theta \sim 1/kd_0 \sim \sim 1/kd_2$ . Анализ же зависимости видности интерференционной картины от базы  $d$  позволяет (в принципе) измерить функцию когерентности  $\Gamma_u(\rho)$ , а по ней — и распределение яркости  $J(\rho')$  на изучаемом объекте.

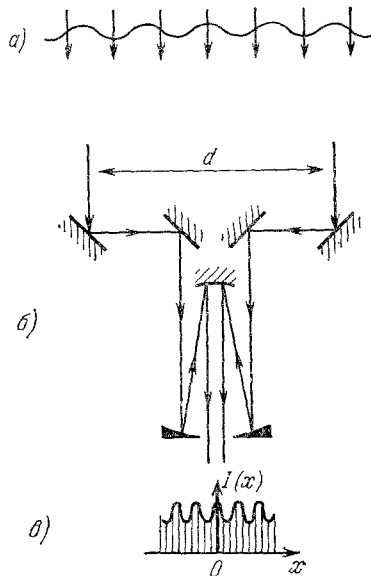


Рис. 6. Схема звездного интерферометра Майкельсона.

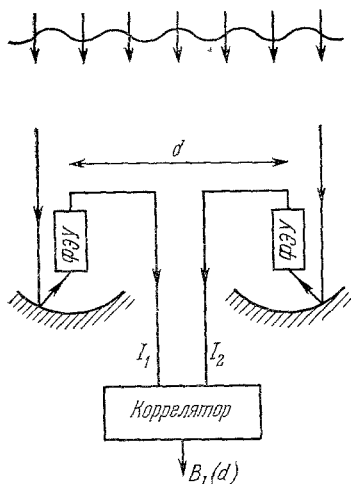


Рис. 7. Схема интерферометра интенсивности Брауна и Твисса.

б) Интерферометр интенсивности. Измерения пространственной функции когерентности поля при помощи звездного интерферометра Майкельсона сопряжены с большими трудностями, связанными с высокой чувствительностью прибора к фазам интерферирующих волн. Уже малые атмосферные флуктуации этих фаз и направлений фронта волны на обоих зеркалах интерферометра (равно как и вибрации сильно разнесенных зеркал) смазывают картину полос и тем самым затрудняют измерения  $d_0$ . Эти трудности устраняются при работе с интерферометром интенсивности, предложенным Брауном и Твиссом<sup>8</sup> (рис. 7). В этом приборе измеряется пространственная функция корреляции не самого волнового поля  $u$ , а флуктуаций его интенсивности:

$$B_I(\rho) = \langle I_1 I_2 \rangle - \langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle.$$

Эта величина измеряется уже не оптическими (интерференционными), а электрическими методами — при помощи коррелятора, на который подаются электрические сигналы, пропорциональные интенсивностям

$I_1$  и  $I_2$ , измеренным в точках, отстоящих друг от друга на расстоянии  $d$ . С этой точки зрения название «интерферометр интенсивности», может быть, не совсем удачно — по существу это *коррелятор* интенсивности, т. е. прибор, измеряющий корреляцию флуктуаций интенсивности светового поля.

Световое поле звезды представляет собой суперпозицию полей от большого числа независимых источников и поэтому подчиняется гауссову закону. Для гауссова же поля  $u$  с нулевым средним значением функция корреляции интенсивности связана с  $\Gamma_u(\rho)$  простым соотношением  $B_I(\rho) = |\Gamma_u(\rho)|^2$ . Поэтому измеренные значения позволяют сделать практически те же выводы о распределении яркости по сечению звезды, что и значения  $\Gamma_u(\rho)$ . Таким образом, оказывается, что не только функция когерентности самого поля, но и *функция корреляции интенсивности* тоже несет дифракционную информацию о световом поле звезды. Вместе с тем, здесь измеряется модуль  $\Gamma_u(\rho)$ , т. е. нет высокой чувствительности к флуктуациям.

в) **Формирование оптического изображения.** Представляется очевидным, что степень временной и пространственной когерентности поля, облучающего

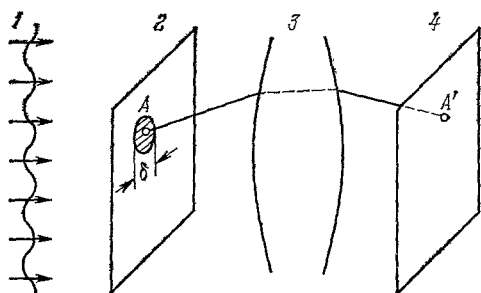


Рис. 8. Схема формирования оптического изображения при частично когерентном облучении

1 — частично когерентное освещение, 2 — плоскость предмета, 3 — оптическая система, 4 — плоскость изображения.

предмет, должна сказываться на характере изображения в фотоаппаратах, микроскопах и других оптических приборах, поскольку поле в каждой точке плоскости изображения представляет собой суперпозицию волн, излученных (или переизлученных) объектом. В действительности, однако, изображение в большинстве случаев слабо зависит от характера освещения предмета. Объясняется это тем, что поле в точке  $A'$  плоскости изображения (рис. 8) формируется лишь малой  $\delta$ -окрестностью оптически сопряженной точки  $A$  предметной плоскости (для хороших

оптических приборов размер «области формирования»  $\delta$  порядка рэлеевского предела разрешения). Разность хода волн от периферии этой области по отношению к ее центру составляет примерно половину длины волны, что меньше длины когерентного пути  $\Delta$  при любом освещении, поскольку даже для дневного освещения  $\Delta \sim 3\lambda_0$ , где  $\lambda_0$  — средняя длина волны видимого света. Именно поэтому фотоизображение в дневном освещении почти не отличается от изображения в строго монохроматическом освещении.

Подобным же образом решается и вопрос о влиянии на изображение пространственной когерентности освещения. Ясно, что пространственная некогерентность может сказаться лишь при условии, что радиус когерентности  $l$  будет меньше радиуса формирующей области  $\delta$ , но так как детали меньше  $\delta$  прибор не разрешает, характер изображения при  $l \ll \delta$  практически не изменится по сравнению со случаем когерентного освещения  $l \gg \delta$  (изменится лишь освещенность в  $A'$ ). Тем не менее определенные различия между когерентным и некогерентным освещением имеются. Они проявляются, например, в величине предела разрешения, а также в том, что при некогерентном освещении степень когерентности поля,

прошедшего через оптическую систему, не зависит от aberrаций. Отсюда следует, например, тот практический вывод, что для освещения поля зрения в микроскопе вовсе не обязательно использовать хороший конденсор без aberrаций.

При фотографической регистрации качество оптического изображения определяется не только освещением, но и неоднородной (зернистой) структурой фотоматериала. Флуктуации, обусловленные зернистостью, также описываются статистическими методами. Для этого предложены различные модели зернистой структуры, которые позволяют оценивать предельную информативность фотографического изображения<sup>9</sup>.

г) Формирование голографического изображения. Голограмма, как известно, представляет собой интерференционную картину, которая получается при сведении в одну плоскость опорного пучка света от лазера, и пучка от того же источника, испытавшего дифракцию на объекте (упрощенная схема получения голограммы

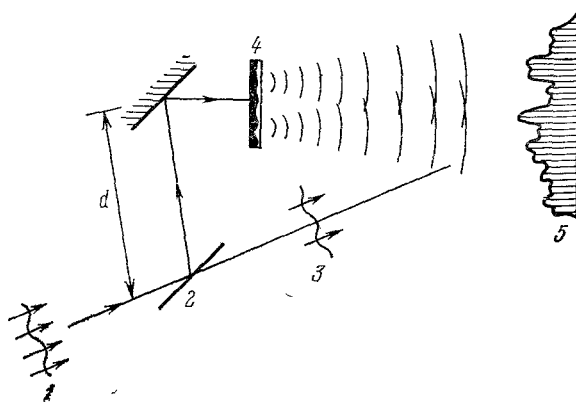


Рис. 9. Упрощенная схема получения голограммы.

1 — частично когерентное освещение, 2 — полупрозрачное зеркало, 3 — опорный пучок света, 4 — полупрозрачный объект, 5 — интерференционная картина — голограмма.

показана на рис. 9). Контрастность интерференционной картины определяется степенью когерентности опорного и дифрагированного света. Теория дифракции частично когерентных полей помогла здесь установить требование к степени монохроматичности света, необходимой для формирования и восстановления голограмм. При этом выяснилось, что при определенных условиях голограммы можно получать и в некогерентном освещении, т. е. при использовании «обычных» (не лазерных) источников света, обладающих, тем не менее, достаточно высокой монохроматичностью, чтобы сформировать контрастную голограмму. Качество голографического изображения, как и качество обычного фотоснимка, зависит еще и от зернистости фотопленки, на которой записывается голограмма. Статистическая дифракционная теория и здесь помогает оценить предельно достижимые характеристики голограммы. Сказанное в равной мере относится и к дифракционным оценкам случайных погрешностей, которые вносятся неоднородностями коэффициента преломления и другими дефектами линз, фотопленок и других элементов оптических систем<sup>10</sup>.

Результаты теории дифракции частично когерентных полей широко используются не только в оптике, но и в других «разделах» физики.

1) Как известно, потенциальные возможности *рентгеноструктурного анализа* ограничены в первую очередь невысокой степенью когерентности (монохроматичности) рентгеновского излучения. Малая длина когерентности рентгеновских лучей позволяет наблюдать интерференцию только волн, рассеянных от близко расположенных атомов в кристаллической решетке, но не от больших кристаллов. Это снижает точность определения межатомных расстояний и других характеристик кристалла. Получение достаточно монохроматических рентгеновских пучков, очевидно, позволило бы резко повысить эффективность рентгеноструктурного анализа. В связи с этим уместно напомнить, что Габор предложил голографию, преследуя именно эту цель — повышение информативности рентгенограмм. Главная трудность при создании источников достаточно когерентного рентгеновского излучения («разера») лежит, разумеется, не в теоретической, а в экспериментальной стороне дела — это отыскание веществ с подходящими свойствами и обеспечение достаточно мощной и в то же время достаточно монохроматической накачки.

2) Использование теории дифракции частично когерентных полей в *радиоастрономии* не ограничивается расчетами флуктуаций за фазовым

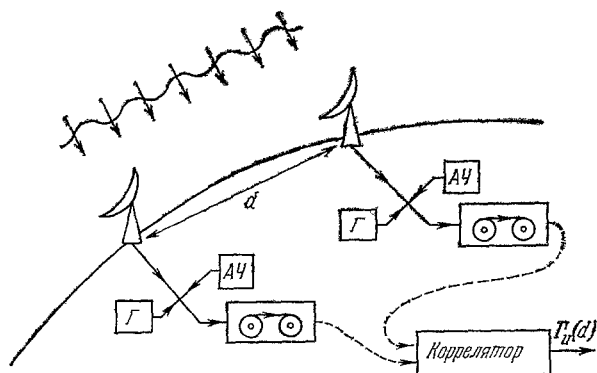


Рис. 10. Схема измерения пространственной функции когерентности радиоизлучения от внеземных радиоисточников при помощи радиоинтерферометра с большой базой.  
Г — гетеродины, АЧ — атомные часы

экраном, о которых говорилось выше. Значительно более важные применения эта теория находит при разработке радиоинтерферометров, при помощи которых измеряют, в частности, угловые размеры внеземных радиоисточников. Принцип действия радиоинтерферометра тот же, что и звездного интерферометра Майкельсона, однако реализуется этот принцип на совершенно иной технической основе. Прежде всего, вместо разнесенных зеркал используются большие радиоантенны (рис. 10). Далее, база  $d$ , на которой проводятся измерения, составляет не несколько метров, а может достигать нескольких тысяч километров. Это позволяет, несмотря на гораздо большие длины волн, даже превзойти угловое разрешение оптических интерферометров. Радиосигналы на выходах антенн записывают на магнитофонную пленку, причем записи синхронизируются при помощи атомных стандартов частоты. Затем записи подвергаются совместной обработке — с их помощью определяется степень когерентности обоих сигналов, по которой и судят об угловых размерах радиоисточников  $\theta$ <sup>11</sup>. Технические отличия не должны, конечно, заслонять суть интерференционного метода измерений угловых размеров, который в конечном счете опирается на теорему Ван-Циттерта — Цернике.

Радиоастрономы, построившие интерферометры с базами, сравнимыми с радиусом Земли  $R_z$ , обсуждают еще более впечатляющий проект — объединение всех крупных радиотелескопов Земли в единую систему. Речь идет, по существу, о создании своеобразного радиозеркала с размерами порядка  $R_z$ , состоящего из отдельных «осколков» — радиотелескопов. Главная трудность в создании такого зеркала — это «фазирование» отдельных «осколков». Если в оптике этот вопрос решается путем подбора положений и ориентаций зеркал, то здесь это может быть достигнуто введением надлежащих временных задержек в магнитофонных записях, при этом неизбежные погрешности при синхронизации записей будут играть роль, подобную случайным абберациям в оптических системах.

3) В *радиофизике* принцип голографии реализуется в так называемом методе синтезированных апертур<sup>12,13</sup>. В этом случае производится когерентная обработка, т. е. записывается не только амплитуда, но и фаза радиолокационных сигналов, излученных с борта самолета или искусственного спутника Земли и отраженных от поверхности Земли. Движение приемника заменяет длинную и, вообще, широкоапертурную антенну. Когерентная запись (радиоголограмма) представляет собой аналог интерференционной картины в оптической голографии, причем роль опорного оптического пучка здесь играет излучаемый сигнал. «Восстановление» радиоголограммы приводит к тому, что удается разрешать на местности детали с угловым размером порядка  $\lambda/vT$  вместо обычного предела разрешения  $\lambda/a$  ( $a$  — размер радиоантенны,  $v$  — скорость самолета,  $T$  — время когерентной обработки; произведение  $vT$  представляет собой эффективный размер синтезированной апертуры).

Не останавливаясь на деталях радиоголографического метода, отметим, что предельная точность картографирования местности определяется прежде всего фазовыми погрешностями в передающем и приемном каналах (время, в течение которого случайные фазовые уходы малы по сравнению с  $\pi$ , служит верхней границей допустимого времени когерентной обработки  $T$ ). И здесь флуктуации фазы являются аналогом случайных аббераций в оптике. Трудности, связанные с сохранением фазы, лимитируют возможности и другой — радиолокационно-астрономической — разновидности радиоголографирования, при которой картографирование поверхности Луны и планет осуществляется методом синтеза апертуры за счет движения Земли<sup>14</sup>.

Теория когерентности дает также адекватное статистическое описание частичной поляризации волн. Основной статистической характеристикой здесь является уже не функция когерентности, как в скалярной теории, а матрица когерентности (матрица поляризации)  $\Gamma_{ik}(1, 2) = \langle E_i(1) E_k^*(2) \rangle$ , где  $E_i$  и  $E_k$  — компоненты вектора электрической напряженности. Эта матрица дает полное описание векторного поля в рамках корреляционной теории. Удобнее, однако, иметь дело с отдельными плоскими волнами, на которые можно разложить случайное волновое поле. Для плоской волны могут быть введены такие количественные характеристики частично поляризованного поля, как степень поляризации и параметры Стокса, однозначно связанные с элементами матрицы поляризации.

Теория частичной поляризации, как и скалярная теория когерентности, находит чрезвычайно широкие применения: в астрофизике на ее основе производится выбор между различными механизмами оптического, радио- или рентгеновского излучения (тепловое, синхротронное и др.), которые могли бы объяснить экспериментальные данные о поляризации; в атмосферной оптике степень поляризации позволяет судить о характере рассеяния и т. д. Вообще полное решение *векторных* задач любого типа а), б), в) или г) требует определения элементов *матрицы* когерентности.

### 5. ДИФРАКЦИЯ НА ТЕЛАХ, ИМЕЮЩИХ СЛУЧАЙНУЮ ФОРМУ ИЛИ ЗАНИМАЮЩИХ СЛУЧАЙНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ

Задачи этого типа распадаются на две подгруппы: дифракция на телах случайной *формы* и на телах, занимающих случайное *положение* в пространстве. Рассмотрим их порознь.

Если на поверхности имеется много случайных неровностей, то говорят о *шероховатых* или о *статистически неровных* поверхностях. Все реальные поверхности шероховаты — одни в большей, другие в меньшей степени. С точки зрения дифракции волн шероховатой является даже «идеально ровная» поверхность покоящейся жидкости, которая в действительности флуктуирует из-за теплового движения молекул. Случайные

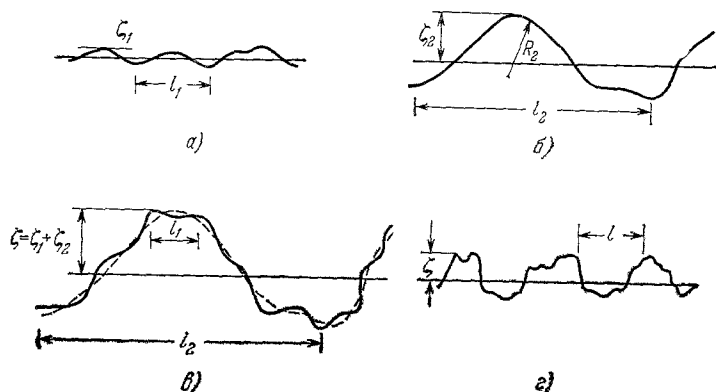


Рис. 11. Типы шероховатых поверхностей, допускающих приближенный расчет рассеянного поля:

а) по методу возмущений ( $\zeta_1 \ll \lambda$ ,  $\zeta_1 \ll l_1$ ); б) по методу Кирхгофа ( $\zeta_2 \ll l_2$ ,  $R_2 \gg \lambda$ ); в) при помощи комбинированного метода (поверхность типа «мелкой ряби на крупной волне»; к неравенствам, относящимся к рис. а) и б), добавляется еще условие  $l_1 \ll l_2$ ); г) при помощи метода функций Грина ( $\zeta \ll \lambda$ ,  $l \ll \lambda$ ).

неровности присущи также идеально отполированным зеркалам и линзам телескопов, зеркалам радиотелескопов, не говоря уже о таких явно неровных поверхностях, как взволнованное море, лунный ландшафт, асфальт или бумага. Главный критерий степени шероховатости — это соотношение между длиной волны  $\lambda$  и высотой неровностей  $\zeta$ . Очевидно, одна и та же поверхность может быть сильно шероховатой для коротких волн (скажем, рябь на воде — для света) и практически ровной — для длинных волн (например, та же рябь для длинных радиоволн).

Задачи рассеяния волн на шероховатых поверхностях удается решать *только приближенными* методами. Наибольшее распространение получили два метода, развитые первоначально для динамических задач — *метод возмущений* и *метод Кирхгофа*. Метод возмущений пригоден для неровностей, высота которых  $\zeta$  мала по сравнению с длиной волны  $\lambda$  (рис. 11, а). Метод же Кирхгофа применим не только к низким, но и к высоким ( $\zeta \gg \lambda$ ) неровностям, но обязательно с большим радиусом кривизны  $R \gg \lambda$  (рис. 11, б). В обоих методах нужно, как оказывается, требовать выполнения еще одного условия: пологости неровностей, т. е. малости наклонов поверхности (если  $l$  — характерная длина неровностей, то должно быть  $\zeta \ll l$ ). При нарушении этого условия статистическое усреднение формул динамической теории оказывается практически не осуществимым.

Подавляющее большинство результатов, опубликованных к настоящему времени, получено именно двумя указанными методами. Единого

образное изложение теории рассеяния, включая и новые подходы к проблеме, дано в книге Басса и Фукса<sup>15</sup>, а также в кратком, но емком обзоре<sup>16</sup>. Основным объектом приложения теории является рассеяние радиоволн, света и звука на статистически неровной поверхности моря. Рассеянное на взволнованной морской поверхности излучение несет полезную информацию о спектре и высоте волн, о вертикальной и горизонтальной скорости колебательного движения частиц волны, о направлении ветров и т. д. Удельный вес других приложений невелик, хотя недостатка в объектах исследования теория не испытывает.

Один из таких объектов — большие зеркальные антенны радиотелескопов. Неровности этих зеркал становятся особенно заметными на коротких волнах. Они приводят, по существу, к тем же эффектам, что и флуктуации токов в реальных антеннах. В открытых резонаторах неровности зеркал приводят к уменьшению добротности (из-за того, что часть излучения «вышескивается» из резонатора при рассеянии на неровностях), а также к смещению собственных частот колебаний (из-за эффективного изменения расстояния между зеркалами<sup>17</sup>). В оптических системах неровности поверхности линз, как и объемные неоднородности коэффициента преломления стекла, приводят к некоторым дефектам оптического изображения, в частности, к уширению дифракционного пятна. В волноводах СВЧ диапазона радиоволн неровности стенок ответственны за трансформацию одних типов волн в другие<sup>18</sup>. Сходные по своим результатам явления возникают также в квазиоптических линиях передачи микроволнового излучения из-за дефектов линз и зеркал. Отметим еще, что при распространении света в тонких пленках неровности границ раздела вызывают сильное затухание волн вследствие потерь на излучение.

Статистическая теория рассеяния на шероховатых поверхностях применялась к анализу отражения радиоволн от Луны и планет. Основная трудность здесь состояла в подборе модельной функции корреляции неровностей. Более утешительными были попытки введения эффективного импеданса Земли для описания распространения поверхностных волн, а также распространения сверхдлинных радиоволн в волноводе Земля — ионосфера. Теория применялась и к описанию ряда явлений в физике твердого тела (взаимодействие фононов со стенками) и сейсмологии (литература по этим вопросам просуммирована в<sup>15</sup>).

Кроме двух указанных выше основных методов, используется также комбинированный подход (метод возмущения + метод Кирхгофа), который пригоден для анализа рассеяния в случае двухкомпонентной шероховатости типа «мелкая рябь на крупной волне» (см. рис. 11, в). При таком подходе удается объяснить, в частности, некоторые особенности рассеяния радиоволн на взволнованной поверхности моря на большие углы. Эти особенности не согласуются с теорией, учитывающей наличие только мелких или только крупных неровностей морского волнения.

В методе возмущений и в методе Кирхгофа, как и в комбинированном методе, многократное рассеяние (или многократное переотражение) волн, сильно усложняющее задачу, не учитывается. В последнее время были сделаны попытки преодолеть эту трудность в рамках метода интегрального уравнения и метода функций Грина. В первом из них, предложенном Ю. П. Лысановым, интегральная формула Грина рассматривается как интегральное уравнение для поля на неровной поверхности. Это уравнение удается решить в предположении, что поверхность *еще более полого*, чем это требуется для метода возмущений или метода Кирхгофа. Зато результаты обоих этих методов получаются из интегрального уравнения как частные случаи<sup>16</sup>.

Другой подход — *метод функций Грина*, заимствован из квантовой электродинамики и основан на приближенном селективном суммировании бесконечных рядов теории возмущений. Здесь удастся отказаться от требования *пологости* неровностей, но этот прогресс достигается ценой введения нового ограничения — неровности должны быть мелкомасштабными ( $l \ll \lambda$ ; рис. 11, г).

Метод функций Грина оказался весьма эффективным для анализа трансформации волн разных типов в волноводах с шероховатыми стенками, а также для описания распространения длинных радиоволн над неровной земной поверхностью<sup>15</sup>.

Узким местом теории по-прежнему является дифракция на *не малых* и *не пологих* неровностях. Корреляционная теория, которая связывает статистику рассеянного поля со статистикой неровностей, заданной лишь корреляционной функцией неровностей, оказывается здесь бессильной.

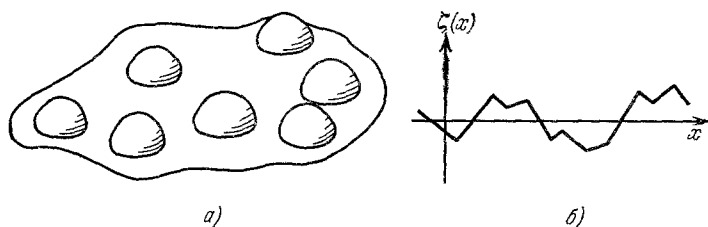


Рис. 12. Модели существенно неровной поверхности, используемые для расчетов рассеяния волн: полусферы, хаотически разбросанные на полуплоскости (а) и набор плоских площадок со случайными наклонами (б).

В этом направлении пока что не удается выйти за пределы модельных представлений<sup>19</sup> (например, полусферы, полуцилиндры или полуэллипсоиды, хаотически разбросанные на плоскости (рис. 12, а) или набор плоских площадок со случайными размерами и наклонами (рис. 12, б)). Для приближенных расчетов рассеяния на сильно изрезанной поверхности часто используют также модельный закон Ламберта (закон косинусов), описывающий так называемое диффузное рассеяние, но до сих пор не ясно (ни с теоретической, ни с экспериментальной точек зрения), при каких именно условиях рассеянное излучение могло бы строго подчиняться закону Ламберта.

Обратимся к другой подгруппе задач схемы в) гл. 2 — рассеяние на телах, занимающих случайное *положение* в пространстве. Если речь идет об *одном* теле, то, очевидно, никаких принципиально новых проблем не возникает. Но рассеяние на совокупности *многих* тел — это чрезвычайно общая и важная задача, имеющая широкие приложения и связанная с учетом *многократного* рассеяния. В *радиометеорологии* речь идет о рассеянии радиоволн на каплях дождя, снежинках, граде, на облаках и туманах, в *атмосферной оптике* — о рассеянии на аэрозолях, в *радиолокации* — об отражении радиоволн от облаков металлических иглол, в *гидролокации* — о рассеянии звука на пузырьках воздуха и на планктоне, в *астрофизике* — о рассеянии на межпланетных и межзвездных облаках пыли и т. п.

Сходные проблемы возникают и при рассмотрении молекулярного рассеяния в жидкостях и газах, при анализе некогерентного рассеяния электромагнитных волн на свободных электронах в лабораторной и ионосферной плазме и т. д. В этих условиях собственно дифракционная (гранич-



ная) задача резко упрощается, так как речь идет о дифракции волн на *точечных* рассеивателях.

Чаще всего (или, точнее, «почти всегда») задачу дифракции на системе большого числа рассеивателей решают в *приближении однократного рассеяния* <sup>20</sup>. В этом приближении принимается, что каждый объект рассеивает падающую волну так, как если бы других объектов не было. Случайность поля, переизлученного отдельным телом, обусловлена его случайным положением (а иногда и ориентацией), которое может быть коррелировано с положением (и ориентацией) ближайших соседей. Формально приближение однократного рассеяния укладывается в схему а), поскольку речь идет об излучении совокупности большого числа дискретных случайных источников, статистика которых задана свойствами первичного поля и статистикой положений (ориентаций) рассеивателей.

Во многих случаях приближение однократного рассеяния оказывается вполне удовлетворительным. Однако с ростом числа рассеивателей теория однократного рассеяния становится несправедливой, и оказывается необходимым учет *многократного* рассеяния. Простейший способ состоит во введении *экстинкции* первичной волны, т. е. в учете ослабления среднего поля из-за рассеяния. Однако ни этот способ, ни последовательный учет двух- или трехкратного рассеяния не могут быть достаточно эффективными: если двухкратное рассеяние дает заметный вклад, то, как правило, нельзя пренебрегать вкладом рассеяния более высокой кратности. В этих условиях единственное, что можно предпринять, это — описывать многократное рассеяние при помощи *уравнения переноса излучения*, которое обычно выводит феноменологически (из соображений баланса энергии), и которое получило в последние годы статистическо-волновое обоснование (на этом вопросе мы остановимся ниже).

Хотя и несколько условно, к схеме в) можно отнести еще задачу дифракции коротких волн на телах сложной формы (ТСФ), например, на самолетах. Хотя поверхность ТСФ детерминирована, диаграмма рассеяния  $g(\theta)$ , рассматриваемая как функция угла  $\theta$ , настолько сложна и нерегулярна, что ее целесообразно описывать вероятностными характеристиками (рис. 13).

Случайный характер поведения диаграммы  $g(\theta)$  объясняется тем, что при облучении ТСФ на его поверхности образуются многочисленные «блики» («блестящие» точки), отражения от которых и формируют изрезанную интерференционную картину.

Различные вероятностные модели «бликов» рассмотрены, например, в работе <sup>21</sup>.

Упомянем еще одну нестандартную задачу типа в), стоящую несколько в стороне от традиционных направлений: дифракция волн на плоских экранах со статистически неровным *краем*. Такой экран может служить моделью горного хребта при расчете дифракции УКВ радиоволн <sup>22</sup> или моделью края лунного диска, на котором дифрагируют световые волны от звезд и радиоволны от внеземных радиоисточников.

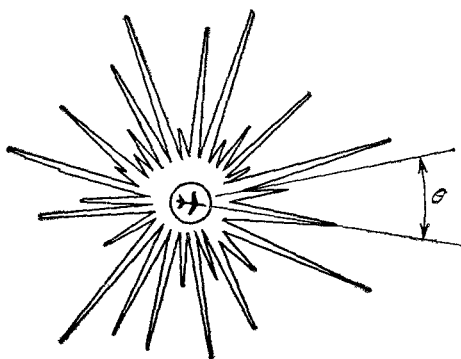


Рис. 13. Пример нерегулярной дифракционной картины, наблюдаемой при рассеянии коротких волн на телах сложной, хотя и детерминированной формы.

## 6. РАСПРОСТРАНЕНИЕ И ДИФРАКЦИЯ ВОЛН В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

Вопрос о флуктуациях волн в случайно неоднородных средах (схема г) гл. 2) всесторонне рассмотрен в монографиях <sup>23-25</sup> и ряде обзоров (см., например, <sup>7, 26</sup>). Поэтому мы ограничимся лишь напоминанием используемых здесь подходов и описанием круга прикладных проблем.

Как правило, оператор  $\tilde{L}$ , описывающий распространение волн в случайно-неоднородной среде, содержит «большую» регулярную часть  $L$  и малое возмущение  $V$ , так что поле подчиняется уравнению

$$\tilde{L}u = (L + V)u = 0. \quad (4)$$

Самое простое, что можно сделать с этим уравнением — это решать его методом возмущений по  $V$ . В первом приближении мы приходим тогда к приближению однократного рассеяния. Однократно рассеянное поле  $u_1$  удовлетворяет уравнению

$$Lu_1 = -Vu_0,$$

где  $u_0$  — первичное поле. Очевидно, это снова вариант схемы а) гл. 2 — возбуждение полей распределенными случайными источниками.

Обычно приближение однократного рассеяния называют первым борновским или просто борновским, поскольку Борн успешно применил его для решения квантовомеханической задачи о рассеянии электрона на неоднородном потенциале \*). Борновское приближение вполне адекватно описывает широкий круг явлений, связанных прежде всего с рассеянием света. Спектральный анализ света, рассеянного в жидкостях или прозрачных твердых телах, позволяет получить информацию о таких параметрах вещества, которые трудно или вообще невозможно измерить другими методами. Примерами могут служить изучение рассеяния на тепловых флуктуациях диэлектрической проницаемости (рэлеевское рассеяние света), исследование критической опалесценции и др. Борновское приближение хорошо описывает рассеяние УКВ радиоволн в ионосфере и многие существенные особенности дальнего тропосферного распространения радиоволн этого диапазона. В последнее время рассеяние микроволнового радиоизлучения стало использоваться для исследования характеристик лабораторной плазмы.

С ростом дистанции или с увеличением флуктуаций  $V$  первое борновское приближение теории возмущений становится недостаточным и нужно учитывать многократное рассеяние. В случае *крупных и плавных неоднородностей* с размером  $l \gg \lambda$  учет многократного рассеяния достигается в методе геометрической оптики (МГО), в методе плавных возмущений Рытова (МПВ) и методе параболического уравнения (МПУ). В отличие от МГО, два последних метода (МПВ и МПУ) описывают дифракционные явления и оперируют с так называемым параболическим уравнением, т. е. с волновым уравнением для комплексной амплитуды  $U$  ( $u = Ue^{ikz}$ , где  $z$  — направление распространения волны), в котором отброшена вторая производная  $\partial^2 U / \partial z^2$  и оставлена только первая производная  $\partial U / \partial z$ . Такое приближение справедливо именно в случае крупных неоднородностей. Различие между МПВ и МПУ заключается в том, что в МПВ параболическое уравнение записывается для комплексной фазы (т. е., по

---

\*) С исторической точки зрения его можно было бы именовать рэлеевским, поскольку Рэлей первым рассчитал по методу возмущений рассеяние света на малых частицах; в оптике и теперь говорят о «рэлеевском», а не о «борновском» рассеянии.

существо, для логарифма амплитуды  $U$ ), а в МПУ — для самой комплексной амплитуды  $U$ .

Несмотря на то, что исходные (не усредненные) уравнения МГО и МПВ описывают многократное рассеяние, фактически их приходится решать методом возмущений по малым отклонениям диэлектрической проницаемости среды от среднего значения. Правда, в отличие от борновского приближения, ряд теории возмущений строится здесь не для самого поля, а для фазы (в МГО) или для комплексной фазы (в МПВ). Хотя при этом и приходится ограничиваться первым приближением, МГО и МПВ все же достаточно эффективно учитывают многократное рассеяние на не очень больших дистанциях, когда относительные флуктуации интенсивности невелики. При помощи этих методов к настоящему времени решено очень много конкретных задач атмосферной оптики, гидроакустики, радиолокации и радиоастрономии<sup>7</sup>.

Исследование флуктуаций интенсивности света на приземных трассах в настоящее время стало эффективным методом изучения микроструктуры турбулентных потоков в атмосфере. Подобный же метод, но только при помощи СВЧ радиоволн, приобретает права гражданства в исследованиях турбулентности плазмы.

Источником ценной информации о тропосферной турбулентности могут служить также флуктуации интенсивности (мерцания) света от звезд. Подобную же информацию о флуктуациях электронной концентрации в ионосферной и межпланетной плазме можно извлечь из радиоастрономических наблюдений за радиоволнами от внеземных радиоисточников. С открытием квазаров и пульсаров становятся возможными аналогичные исследования флуктуаций в межзвездной плазме.

Исследования флуктуаций света в атмосфере в значительной мере были стимулированы в последнее время лазерной техникой. Уширение лазерных пучков, флуктуации фазы, направления распространения и интенсивности поля в пучке представляют интерес для лазерных систем связи и лазерной локации. Сходные проблемы возникают также в радио- и гидролокации.

В отличие от МГО и МПВ, в рамках метода параболического уравнения (МПУ) удастся выйти за пределы теории возмущений и получить уравнения для функций когерентности произвольного порядка, справедливые не только в области малых, но и в области сильных флуктуаций интенсивности. Уравнение для функции когерентности второго порядка решаются при этом точно.

Основные усилия исследователей, работающих в этой области, направлены сейчас на решение уравнения для функции когерентности четвертого порядка, которая как раз и описывает флуктуации интенсивности (см., например, <sup>26-28</sup>).

Общая теория многократного рассеяния (ТМР) имеет дело не с параболическим, а с полным волновым уравнением, и охватывает, следовательно, случаи не только крупных, но и мелких объемных неоднородностей \*). В рамках ТМР в настоящее время получены приближенные замкнутые уравнения для моментов поля. Их вывод основан фактически на селективном суммировании рядов теории возмущений, т. е. на методе функций Грина, развитом в квантовой электродинамике, причем приемы суммирования весьма разнообразны (диаграммная техника, теория возмущений для статистических операторов и т. д. — см. <sup>25, 26, 29</sup>).

---

\*) О многократном рассеянии на совокупности большого числа дискретных вкраплений см. ниже.

Конкретные успехи ТМР пока не очень велики. Существенно новые результаты получены, пожалуй, только в задаче о распространении и рассеянии волн в среде с *сильными* флуктуациями параметров (оператор возмущений  $V$  в уравнении (4) «не мал»). Правда, здесь, как и в задаче о рассеянии на неровной поверхности, неоднородности должны быть *мелкомасштабными* ( $l \ll \lambda$ ). Тем не менее, ТМР принесла ряд результатов, важных в теоретическом плане.

Во-первых, в рамках общей ТМР удастся вывести *все* уравнения, полученные приближенными методами, и, что еще важнее, указать границы применимости этих методов. Иными словами, ТМР позволяет указать место, которое занимает тот или иной приближенный метод в общей картине.

Во-вторых, при помощи ТМР удастся дать «статистико-волновое» обоснование уравнения переноса излучения (УПИ) и установить «дифракционное» содержание этого уравнения.

Как уже было сказано, УПИ до сих пор выводилось феноменологически на основе представления о лучевых трубках (т. е. в рамках геометрической оптики) и условия энергетического баланса. В простейшем случае (скалярная стационарная задача) УПИ имеет вид

$$\mathbf{n} \frac{\partial I(\mathbf{n}, \mathbf{R})}{\partial \mathbf{R}} = -\alpha I(\mathbf{n}, \mathbf{R}) + \oint \sigma(\mathbf{n}, \mathbf{n}') I(\mathbf{n}', \mathbf{R}) d^2 \mathbf{n}'. \quad (5)$$

Левая часть — это изменение «лучевой интенсивности»  $I(\mathbf{n}, \mathbf{R})$  в направлении  $\mathbf{n}$ , первый член в правой части описывает экстинкцию и затухание, т. е. убывание энергии в результате рассеяния и поглощения ( $\alpha$  — суммарный коэффициент экстинкции и поглощения), а второй член — прирост энергии в направлении  $\mathbf{n}$  из-за рассеяния с направлений  $\mathbf{n}'$  ( $\sigma(\mathbf{n}, \mathbf{n}')$  — сечение рассеяния единицы объема). При феноменологическом выводе «лучевая интенсивность»  $I(\mathbf{n}, \mathbf{R})$  рассматривается как фотометрическая величина, при этом микроскопический смысл величин  $\alpha$  и  $\sigma$  не рассматривается.

Новый взгляд на УПИ был достигнут в последние годы, когда разными способами было показано, что при определенных предположениях УПИ можно вывести из уравнения для функции когерентности, т. е., по существу, непосредственно из стохастического волнового уравнения (см. статью <sup>30</sup>, в которой приведена соответствующая библиография). При таком выводе феноменологические параметры  $\alpha$  и  $\sigma$  удастся связать со статистическими характеристиками среды, а именно, со спектральной плотностью флуктуаций параметров среды, а лучевую интенсивность  $I(\mathbf{n}, \mathbf{R})$ , т. е. энергетическую характеристику поля, — с функцией когерентности второго порядка  $\Gamma_u(\mathbf{r}, \mathbf{R})$  (здесь  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  — расстояние между точками наблюдения  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$ , а  $\mathbf{R} = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}$  — координаты «центра тяжести»).

Связь между  $I(\mathbf{n}, \mathbf{R})$  и  $\Gamma_u(\mathbf{r}, \mathbf{R})$  имеет простой вид:

$$\Gamma_u(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = \oint I(\mathbf{n}', \mathbf{R}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{n}'\mathbf{r}} d^2 \mathbf{n}' \quad (6)$$

(интегрирование здесь, как и в (5), проводится по единичной сфере). Впервые эта связь была отмечена Долиным <sup>31</sup> в малоугловом приближении, т. е. в случае, когда волна рассеивается на малые углы, а лучевая интенсивность  $I(\mathbf{n}, \mathbf{R})$  заметно отличается от нуля лишь в узком конусе в направлении распространения первичной волны.

Поскольку функция когерентности  $\Gamma_u(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = \langle u(1) u^*(2) \rangle$  удовлетворяет системе двух волновых уравнений, соответствующих уравнениям

для  $u$  (1) и  $u$  (2). и стало быть, описывает дифракцию волн, то из (6) следует, что и лучевая интенсивность  $I(\mathbf{n}, \mathbf{R})$  также несет дифракционную информацию. В частности, в малоугловом приближении УПИ эквивалентно параболическому уравнению для функции когерентности. Иными словами, решить УПИ в приближении малых углов — это то же самое, что и решить дифракционное (параболическое) уравнение для функции когерентности. Еще один пример, иллюстрирующий дифракционное содержание УПИ, был указан Ватсоном<sup>32</sup>, который показал, что если решать УПИ методом возмущений (это возможно при достаточно малых  $\alpha$  и  $\sigma$  или при малых размерах рассеивающего объема), то в первом приближении для функции когерентности, вычисленной при помощи (6), получается результат теории однократного рассеяния, т. е. результат чисто дифракционной теории. Некоторые более тонкие вопросы о связи между УПИ и теорией когерентности (условия однозначного соответствия между этими теориями, различия в постановке граничных условий для  $I$  и  $\Gamma_u$  и др.) рассмотрены в работе<sup>33</sup>.

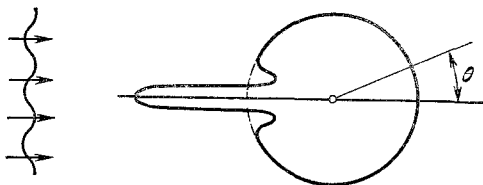


Рис. 14 Форма индикатрисы рассеяния малого тела, погруженного в среду с крупными случайными неоднородностями. В направлении назад ( $\theta \sim \pi$ ) происходит усиление рассеяния

При статистико-волновом выводе УПИ получаются и другие важные и полезные результаты. Во-первых, удастся вывести УПИ с учетом трансформации когерентной составляющей поля  $\langle u \rangle$  в некогерентную (соответствующие уравнения получены не только для скалярной<sup>30</sup>, но и для электромагнитной<sup>34</sup> задачи). При вычислении когерентного поля одновременно решается и задача об определении эффективного показателя преломления случайной среды<sup>35</sup>. Ослабление (экстинкция) когерентного поля объясняется как раз тем, что оно «подпитывает» некогерентную составляющую. Такое усовершенствование УПИ имеет смысл для задач когерентной оптики и радиофизики, но не для традиционных задач переноса лучистой энергии, в которых когерентное поле отсутствует.

Во-вторых, при волновом выводе УПИ выявляется роль специфического интерференционного эффекта, которое можно назвать «усилением обратного рассеяния». Этот эффект проявляется, в частности, в том, что сечение обратного рассеяния малого (по сравнению с  $\lambda$ ) тела, погруженного в среду со случайными крупными неоднородностями, увеличивается с ростом флуктуаций проницаемости среды; при этом индикатриса рассеяния принимает вид, показанный на рис. 14<sup>36</sup>. Как видно из рис. 14, усиление рассеяния назад ( $\theta \sim \pi$ ) сопровождается ослаблением рассеяния в направлениях, близких к  $\pi$ ; при этом полное сечение рассеяния остается таким же, как в отсутствие флуктуаций. Оказывается, что при учете эффекта усиления обратного рассеяния УПИ теряет силу в некоторых участках пространства, например, в небольшой окрестности точечного источника<sup>37</sup> или в узком секторе в направлении назад, если рассеивающий объем облучается плоской волной<sup>38</sup>. При переносе же лучистой энергии в атмосферах звезд и планет этот эффект не проявляется в силу того, что там источники «размазаны» по всему рассеивающему объему.

В рамках ТМР можно получить приближенные замкнутые уравнения для моментов волнового поля не только в случае сплошной случайно неоднородной среды (объемные неоднородности), но и для моментов волнового поля, рассеянного на совокупности большого числа дискретных

вкраплений (дифракция на телах или точечных частицах, занимающих случайное положение — статистическая схема в). На основе общих уравнений ТМР здесь также удастся вывести УПИ (см., например, <sup>39, 40</sup>) и установить микроскопический смысл феноменологических параметров  $\alpha$  и  $\sigma$ . При этом оказывается, что сечение рассеяния единичного объема  $\sigma$  в общем случае не совпадает с сечением рассеяния одной частицы, умноженным на концентрацию частиц  $N$ . Это справедливо только при малых  $N$ , при больших же концентрациях проявляются так называемые кооперативные эффекты, предсказанные Г. В. Розенбергом <sup>41, 42</sup>. В указанных работах Г. В. Розенберга, а также в <sup>43, 44</sup> рассматривается векторная форма УПИ, которая описывает поведение вектора — параметра Стокса. Таким образом, при помощи УПИ осуществляется полное описание когерентных характеристик поля, включая и поляризационные характеристики.

## 7. СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ

До сих пор мы обсуждали, так сказать, «чистые» статистические схемы. В действительности могут встретиться различные комбинации схем, скажем, типа а) или б) гл. 2. Поскольку число решенных задач смешанного типа пока еще невелико, мы ограничимся только упоминанием некоторых частных постановок такого рода задач.

а) *Тепловое излучение случайно-неоднородного слоя.* Такая задача была рассмотрена (в борновском приближении) в работе <sup>45</sup> (см. также библиографию к этой работе) в связи с анализом экспериментальных данных о тепловом излучении антарктических льдов.

б) *Тепловое излучение шероховатых поверхностей* рассматривалось в работе <sup>46</sup> применительно к хорошо проводящим телам (например, к зеркальным радиоантеннам) и в работах <sup>47, 48</sup> для статистически неровной морской поверхности. Анализ теплового излучения взволнованного моря существенно усложняется при появлении третьего статистического фактора — дискретных рассеивателей в виде пены или пузырьков воздуха.

в) *Дифракция волн в случайно-неоднородной среде при наличии дискретных вкраплений* изучалась в работе <sup>49</sup>, где выведено уравнение переноса излучения для этого случая. Область приложения этой теории — перенос излучения в турбулентной атмосфере при наличии аэрозоля. Несколько неожиданным (по крайней мере на первый взгляд) результатом работы <sup>49</sup> является то, что сечения рассеяния на объемных турбулентных неоднородностях и на аэрозоле неаддитивны: сечение рассеяния содержит еще слагаемое, обусловленное корреляцией объемных неоднородностей и концентрации аэрозоля.

г) *Дифракция частично-когерентных полей в случайно-неоднородной среде* представляет интерес для многих приложений: прохождение радиоволн от радиоисточника конечных угловых размеров через ионосферу Земли или межпланетную среду <sup>5, 50</sup>, уширение частично когерентного (в поперечном сечении) лазерного луча в турбулентной атмосфере <sup>51</sup> и др.

д) *Рассеяние волн на шероховатой поверхности, окруженной случайно-неоднородной средой*, отличается рядом особенностей, часть которых проанализирована в работах <sup>52, 53</sup>.

е) *Дифракция частично когерентного света на экране со статистически неровным краем* представляет интерес для определения угловых размеров звезд методом покрытия Луной, поскольку неровности края лунного диска могут ограничить возможности этого метода.

Этот перечень является, разумеется, далеко не полным, однако, он может дать некоторое представление о тенденциях, действующих в линей-

ной статистической волновой теории. Что же касается статистических явлений при распространении волн в нелинейных средах и квантовых эффектов при дифракции электромагнитных волн, то эти вопросы требуют отдельного рассмотрения.

В заключение авторы выражают признательность Г. В. Розенбергу за ценные замечания по затронутым в обзоре вопросам.

Московский государственный педагогический  
институт им. В. И. Ленина  
Радиотехнический институт АН СССР  
Институт физики атмосферы АН СССР

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Я. С. Ш и ф р и н, Вопросы статистической теории антенн, М., «Сов. радио», М., 1970.
2. М. Л. Л е в и н, С. М. Р ы т о в, Теория равновесных тепловых флуктуаций в электродинамике, М., «Наука», 1967.
3. М. Б о р н, Э. В о л ь ф, Основы оптики, М., «Наука», 1970.
4. В. А. З в е р е в, сборник «Материалы V Всесоюзной школы по голографии», (Новосибирск, 1973), Л., Изд. ЛИЯФ АН СССР, 1974, стр. 472.
5. Я. И. А л ь б е р, Л. М. Е р у х и м о в, Ю. А. Р ы ж о в, В. П. У р я д о в, Изв. вузов (Радиофизика) 11, 1371 (1968).
6. В. И. Ш и ш о в, *ibid*, 14, 85 (1971).
7. Ю. Н. Б а р а б а н е н к о в, Ю. А. К р а в ц о в, С. М. Р ы т о в, В. И. Т а т а р с к и й, УФН 102, 3 (1970).
8. Р. Х. э н б е р и Б р а у н, УФН 108, 529 (1972).
9. Э. О' Н е й л, Введение в статистическую оптику, М., «Мир», 1966.
10. Р. К о л ь е р, К. Б е р к х а р т, Л. Л и н, Голография, М., «Мир», 1973.
11. Б. Б а р к, УФН 101, 537 (1970).
12. R. O. H a r g e r, Synthetic Aperture Radar Systems: Theory and Design, N.Y.—L., Academic Press, 1970.
13. Н. И. Б у р е н и н, Радиолокационные станции с синтезированной апертурой, М., «Сов. радио», 1972.
14. Radar Astronomy. Ed. J. V. E v a n s, T. H a g f o r s (MIT Lincoln Lab.), N.Y., McGraw-Hill Book Co., 1968.
15. Ф. Г. Б а с с, И. М. Ф у к с, Рассеяние волн на статистически неровной поверхности, М., «Наука», 1972.
16. А. Б. Ш м е л е в, УФН 106, 459 (1972).
17. С. М. К о з е л, Г. Р. Л о к ш и н, Радиотехн. и электрон. 19, 1142 (1974).
18. Р. Б. В а г а н о в, Р. Ф. М а т в е е в, А. С. М е р и а к и, Многоволновые волны со случайными неоднородностями, М., «Сов. радио», 1972.
19. R. B. P a t t e r s o n, J. Acoust. Soc. Amer. 36, 1150 (1960); J. E. B u r k e, V. T w e r s k y, *ibid*. 40, 883 (1966).
20. Г. В а н д е Х ю л с т, Рассеяние света малыми частицами, М., ИЛ, 1961.
21. Е. А. Ш т а г е р, Изв. вузов (Радиофизика) 16, 962 (1973).
22. Ю. М. П о л и щ у к, Радиотехн. и электрон. 16, 2056 (1971).
23. Л. А. Ч е р н о в, Распространение волн в среде со случайными неоднородностями, М., Изд-во АН СССР, 1958.
24. С. М. Р ы т о в, Введение в статистическую радиофизику, М., «Наука», 1966.
25. В. И. Т а т а р с к и й, Распространение волн в турбулентной атмосфере, М., «Наука», 1967.
26. В. И. К л я ц к и й, В. И. Т а т а р с к и й, Изв. вузов (Радиофизика), 15, 1433 (1972); В. И. К л я ц к и й, *ibid*. 16, 1629 (1974).
27. В. И. Т а т а р с к и й, Распространение коротких волн в среде со случайными неоднородностями в приближении марковского случайного процесса. Препринт АН СССР (Отделение океанологии, физики атмосферы и географии), Москва, 1970.
28. В. И. Ш и ш о в, ЖЭТФ 61, 1399 (1971).
29. Л. А. А п р е с я н, Изв. вузов (Радиофизика) 17, 165 (1974).
30. Ю. Н. Б а р а б а н е н к о в, А. Г. В и н о г р а д о в, Ю. А. К р а в ц о в, В. И. Т а т а р с к и й *ibid*. 15, 1852 (1972).
31. Л. С. Д о л и н, *ibid*. 7, 559 (1964); 11, 840 (1968).
32. K. M. W a t s o n, J. Math. Phys. 10, 688 (1969).
33. Г. И. О в ч и н н и к о в, В. И. Т а т а р с к и й, Изв. вузов (Радиофизика) 15, 1419 (1972).

34. Л. А. Апресян, *ibid.* 16, 461 (1973).
  35. Ю. А. Рыжов, В. В. Тамойкин, *ibid.* 13, 356 (1970).
  36. А. Г. Виноградов, Ю. А. Кравцов, В. И. Татарский, *ibid.* 16, 1064 (1973).
  37. А. Г. Виноградов, Ю. А. Кравцов, *ibid.* 16, 1055 (1973).
  38. Ю. Н. Барабаненков, *ibid.*, p. 88.
  39. В. М. Финкельберг, ЖЭТФ 53, 401 (1967).
  40. Ю. Н. Барабаненков, В. М. Финкельберг, ЖЭТФ 53, 978 (1967).
  41. Г. В. Розенберг, УФН 56, 77 (1955).
  42. Г. В. Розенберг, УФН 69, 57 (1959).
  43. G. V. Rosenberg, Appl. Optics 18, 2855 (1973).
  44. Г. В. Розенберг, Опт. и спектр. 28, 392 (1974).
  45. А. С. Гурвич, В. И. Калинин, Д. Т. Матвеев, Изв. АН СССР (Физика атмосферы и океана) 9, 1247 (1973).
  46. В. В. Караваев, Изв. вузов (Радиофизика), 10, 658 (1967).
  47. А. Г. Павельев, Радиотехн. и электрон. 12, 1178 (1967).
  48. S. T. Wu, A. K. Fung, J. Geophys. Res. 77, 4231 (1972).
  49. Г. И. Овчинников, Изв. АН СССР (Физика атмосферы и океана) 10, 88 (1974).
  50. В. И. Шишов, Изв. вузов (Радиофизика) 15, 1279 (1972).
  51. А. И. Кон, В. И. Татарский, *ibid.* 15, 1547 (1972).
  52. А. Г. Виноградов, *ibid.* 17, 1584 (1974).
  53. А. Г. Виноградов, А. Б. Шмелев, сборник «Вопросы излучения и распространения волн» (Труды РТИ АН СССР, № 8), М., 1974, стр. 74.
-