

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

539.124

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СВОБОДНЫХ ЭЛЕКТРОНОВ С ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ

Я. Б. Зельдович

Памяти дорогого друга,
Александра Соломоновича
Компанейца

СОДЕРЖАНИЕ

I.	Введение	161
II.	Сильная волна	170
	1. Теория Томсона (напоминание)	170
	2. Критерий силы волны	171
	3. Движение электрона и рассеяние сильной волны	172
	4. Реакция излучения и продольное ускорение	173
	5. Решение для волны с круговой поляризацией	174
	6. Оценки силы волны для пульсара	176
III.	Кинетическое уравнение фотонного газа	177
	7. Постановка задачи. Числа заполнения	177
	8. Томсоновское рассеяние	178
	9. Интегральное уравнение изменения спектра	178
	10. Дифференциальное уравнение Компанейца	180
	11. Свойства уравнения Компанейца	182
IV.	Индукированное рассеяние и классическая теория взаимодействия волн с электронами	184
	12. Эволюция спектра и бозе-конденсация	184
	13. Температура электронов при индуцированном рассеянии	187
	14. Классическая интерпретация теории индуцированного рассеяния	188
	15. Классическая теория эволюции спектра	191
	16. Анизотропные поля, узкие пучки и условия применимости теории	192
	17. Неоднородное распределение электронов в пространстве	194
	Цитированная литература	196

I. ВВЕДЕНИЕ

Взаимодействие свободных электронов с электромагнитным излучением занимало физиков начиная с момента, когда Дж. Дж. Томсон сформулировал теорию электрона. На разных этапах цели исследований были различны, но значение их всегда было велико.

В классической физике сам Томсон нашел сечение рассеяния, его угловую зависимость, поляризацию, фазу. Мы говорим «томсоновское рассеяние»; «томсоновское сечение» равно численно

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_0^2 = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 = 0,665 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2.$$

В этом приближении рассеяние происходит без изменения частоты излучения в системе покоя электрона.

Как выяснилось позже, результаты Томсона являются асимптотикой квантовой теории при энергии фотона $\hbar\omega$, малой по сравнению с единственной характерной величиной, энергией покоя электрона mc^2 .

Поэтому теория Томсона сохраняет свое значение для рассеяния радиоволн в ионосфере и для рассеяния света горячей плазмой. В астрофизике от томсоновского рассеяния зависит скорость переноса энергии излучения. При рассеянии происходит передача количества движения. В потоке излучения на электрон действует определенная сила. Из условия равенства этой силы и силы тяготения получается предельный поток излучения звезды — так называемый эдингтоновский предел, в 30 000 раз превышающий светимость Солнца. Более сильный поток энергии сорвет атмосферу звезды.

В 1905 г. Эйнштейн сформулировал теорию квантов света. Эта теория основывалась на теории Планка, но в то же время представляла существенный шаг вперед — Планк первоначально считал «квантованным» только излучение и поглощение света, не посягая на распространение, которое так хорошо описывается максвелловской теорией.

Исследование рассеяния приобрело значение решающего эксперимента! Квантовая теория, используя одни только законы сохранения энергии и импульса, приводит к определенному изменению энергии и частоты кванта (фотона) в зависимости от угла рассеяния.

Экспериментальные исследования Артура Комптона подтвердили теоретическую зависимость

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{\hbar}{mc} (1 - \cos \theta),$$

где $\lambda = \lambda/2\pi$, λ — длина волны после рассеяния, λ_0 — начальная длина волны, θ — угол отклонения луча. Результат имел огромное значение для всего последующего развития физики. Это отражено и в терминологии: мы говорим о комптоновской длине электрона $\hbar/mc = 3,86 \cdot 10^{-11}$ см и других частиц.

Принято говорить о комптоновском рассеянии (в отличие от томсоновского), когда учитывается изменение частоты фотона в системе покоя электрона.

Отметим, что картина комптоновского рассеяния существенно статистична. Одинаковый фотон может быть рассеян одинаковым электроном под тем или иным углом по законам случая.

Эта статистичность нашла свое полное отражение только в квантовой механике *).

Понимание того, что «статистичен» угол рассеяния, но не статистичны законы сохранения, пришло не сразу. В 1924 г. Бор, Крамерс и Слейтер выдвинули теорию, в которой закон сохранения энергии и закон сохранения импульса в отдельных элементарных актах рассеяния не имеют места, нарушаются и имеют место в макроскопической физике лишь благодаря усреднению по большому числу элементарных актов. Вскоре они отказались от своей теории. Однако уже позже, в 1933 г., появилась экспериментальная работа, в которой утверждалось, что формула Комптона неверна.

*) Для дальнейшего существенно, что разница между классической и квантовой теорией и в этом пункте (изменение частоты) меньше, чем это может показаться на первый взгляд. В классической теории в ходе рассеяния электрон приобретает импульс в направлении падающей волны и доплер-эффект вызывает смещение частоты, нарастающее со временем, в системе которой электрон первоначально покоился. Средние смещения частоты квантовое и классическое, совпадают.

Возникло замешательство. Потребовались новые тщательные экспериментальные работы (первая и лучшая в этом ряду — работа братьев А. И. и А. И. Алихановых и Л. А. Арцимовича), чтобы восстановить истину и реабилитировать формулу Комптона и применимость законов сохранения к элементарным актам. Этот эпизод здесь приводится не для подтверждения афоризма Арцимовича: «Нет ничего хуже „грязного“ эксперимента», подтверждающего „грязную“ теорию» — и не для компрометации Бора и его славных соавторов. История с мнимым несохранением энергии и импульса в элементарных актах поучительна для характеристики трудного положения теоретической физики в период с 1905 (или с 1899) до 1925 г.: квантовые представления уже зародились, но не было строгой теории; «квантование» было скорее искусством, чем строгой наукой, успех зависел от интуиции, нужно было получать новое, но с должной оглядкой на старое, на принцип соответствия с классической механикой и электродинамикой. Современный читатель иногда воспринимает операторную формулировку квантовой механики как осложнение жизни, быть может, ненужное. Для физиков первой четверти XX века квантовая механика появилась как долгожданное избавление от мучительной неуверенности во всех рассуждениях и расчетах.

В нерелятивистской квантовой механике гамильтониан нейтральной частицы содержит кинетическую энергию $p^2/2m$. Рецепт перехода к заряженной частице, взаимодействующей с электромагнитным полем, заключается в замене $p \rightarrow p - (e/c) A$, где A — вектор-потенциал электромагнитного поля. В получающемся выражении

$$\frac{p^2}{2m} - \frac{e}{mc} pA + \frac{e^2}{2mc^2} A^2$$

последний член, пропорциональный A^2 , непосредственно дает вклад в комптоновское рассеяние: этому члену на языке фейнмановских диаграмм соответствует четыреххвостка — вершина, в которой соединяются две электронные линии и две фотонные линии (рис. 1). Средний член $(e/mc) pA$ соответствует треххвостке с одной фотонной линией (рис. 2).

Рассмотрение комптоновского рассеяния сыграло важнейшую роль в релятивистской теории электрона. Уравнение Дирака — первого порядка, что соответствует первой степени импульса в гамильтониане. В уравнение для заряженной частицы входит A в первой степени, существует лишь вершина типа треххвостки (см. рис. 2). Значит, комптон-эффект в теории Дирака соответствует диаграммам второго порядка, отличающимся последовательностью: «поглощение, затем испускание» (рис. 3) и «испускание, затем поглощение» (рис. 4).

В промежутке между написанием уравнения Дирака (1928 г.) и открытием позитрона (1932 г.) был период — 3 или 4 года, когда не было единого отношения к предсказанию уровней с отрицательными энергиями, содержащемуся в уравнении. Считать протон античастицей электрона, очевидно, нельзя. Может быть, следует как-то запретить уровни с отрицательной энергией, а имя Дирака занести на черную доску за то, что он сам этого не сделал?

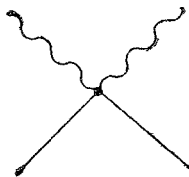


Рис. 1. Диаграмма прямого рассеяния фотона частицей с нулевым спином.

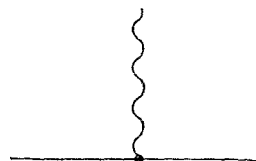


Рис. 2. Диаграмма испускания или поглощения фотона заряженной частицей.

Расчеты комптон-эффекта подсказывали правильный ответ задолго до открытия позитрона. Дело в том, что в диаграммах (см. рис. 3 и 4) доминирует вклад, зависящий от путей, при которых электрон в промежуточном состоянии находится в состоянии отрицательной энергии *). Эти состояния нельзя запретить, не испортив согласия теории с тривиальным предельным случаем рассеяния низкочастотных электромагнитных волн. Однозначно получался вывод о реальности *всех* предсказаний теории Дирака. Прошло еще несколько лет, и это было признано также Комитетом по Нобелевским премиям.

Рассмотрение релятивистской задачи дало не только подтверждение принципов. Одновременно была получена зависимость сечения рассеяния от энергии фотона: сечение падает вдвое при $\hbar\omega = 0,7 mc^2$ и в 10 раз при

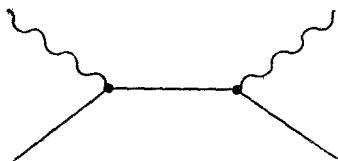


Рис. 3. Диаграмма рассеяния фотона электроном.

1-й вариант: поглощение падающего фотона и последующее испускание рассеянного фотона.

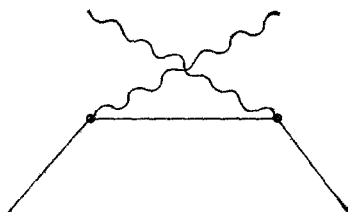


Рис. 4. Диаграмма рассеяния фотона электроном.

2-й вариант: испускание рассеянного фотона и последующее поглощение падающего фотона.

$\hbar\omega = 13 mc^2$ (формула Клейна — Нишины — Тамма). Диаграммы, описывающие рассеяние при другом взгляде на них (читатели должны лечь на бок, если они не хотят повернуть журнал), соответствуют двухфотонной аннигиляции электрона и позитрона и обратному процессу рождения пар e^+e^- при столкновении фотонов. Изложенные выше исторические реминисценции имеют сравнительно малое отношение к теме данного обзора. Непосредственно в дальнейшем используется один факт: во всех вариантах квантовая теория (нерелятивистская, релятивистская, уравнение Дирака или другие уравнения) дает результат, совпадающий с классической теорией при малых частотах.

Но есть и другая сторона дела: история исследования комптон-эффекта показывает, как много сторон раскрывает пристальное, вдумчивое, настойчивое изучение одного явления. Этот вывод остается справедливым и сегодня, он подтверждается и теми дальнейшими исследованиями, которые собственно и рассматриваются ниже.

Побудительными причинами дальнейших исследований явились:

1) развитие лазеров и мазеров, т. е. появление мощных источников строго когерентных электромагнитных волн. Возник вопрос о рассеянии сильной электромагнитной волны. После открытия пульсаров стало ясно, что пульсар — вращающийся магнитный диполь — также является источником сверхдлинных радиоволн с периодом от 0,03 сек до 5 сек.

Сказанное является мотивировкой исследований, подытоженных в гл. II («сильная волна»).

Основным критерием того, что волна «сильная», является релятивистская скорость колебаний электронов под влиянием волны.

*) В действительности этот вывод был сделан путем расчетов в старой манере без фейнмановских диаграмм, которые появились на 20 лет позже; в период споров о позитроне Фейнман учился в средней школе. С другой стороны, нынешние учащиеся средней школы знают о диаграммах, и это оправдывает нарушение хронологии в тексте.

Релятивистские электроны излучают высшие гармоники. Общее сечение рассеяния увеличивается в сильной волне. Вместе с тем уменьшается вклад электронов в показатель преломления плазмы и облегчается по сравнению со слабой волной, проникновение сильной волны данной частоты в плазму.

2) В астрофизике обнаружены тела и ситуации, для которых характерно резкое преобладание комптоновского рассеяния над испусканием и поглощением фотонов. Такое соотношение имеет место, когда высока температура и/или низка плотность электронов и ядер.

Для этих задач характерно, что фотоны рождаются в количестве, во много раз меньшем равновесного, и со спектром, не похожим на равновесный планковский спектр. После этого каждый фотон много раз испытывает комптоновское рассеяние. Наряду с эффектом отдачи учитывается доплер-эффект, зависящий от движения электронов. При нерелятивистской температуре электронов каждый акт рассеяния мало меняет частоту отдельного фотона, мало меняет общий спектр. Однако при многократном повторении рассеяния получается спектр вполне определенного вида, существенно отличающийся как от первоначального тормозного спектра, так и от равновесного планковского спектра.

А. С. Компанейцу принадлежит заслуга четкой постановки вопроса об особенностях установления термодинамического равновесия в разреженной плазме ¹.

Точная постановка задачи приводит к интегральному уравнению для спектра фотонов. Однако в силу того, что мала передача энергии при отдельном акте рассеяния, изменение спектральной плотности на данной частоте зависит только от спектральной плотности на соседних частотах, и потому интегральное уравнение эффективно заменяется дифференциальным уравнением. Дифференциальное уравнение Компанейца послужило надежной основой и для решения других задач, возникших позже.

Отметим некоторые применения теории:

1) Лабораторная диагностика плазмы с помощью комптоновского рассеяния, в принципе, тривиальна. Плазма освещается пучком строго монохроматического лазерного излучения. Фиксируя спектр излучения, рассеянного под различными углами, можно найти плотность электронов и распределение их по импульсам, т. е. в простейшем случае — температуру электронов.

2) Облака горячей плазмы в галактике или за ее пределами невозможно «осветить» намеренно. Но облака эти облучаются реликтовым равновесным радиоизлучением с температурой $2,7^\circ \text{K}$. Комптоновское рассеяние на горячих электронах в среднем сдвигает весь спектр в область более высоких частот. Теория предсказывает ² уменьшение интенсивности в низкочастотной области спектра ($\hbar\omega < kT_e = k \cdot 2,7^\circ \text{K}$), так как из этой области фотоны частично переходят в область $\hbar\omega > kT$. Эффект пропорционален произведению длины пути, плотности электронов и их температуре. По-видимому, эффект порядка $\Delta I/I = -2 \cdot 10^{-4}$ (I — интенсивность на длине волны около 3 см) наблюдался для плазмы в богатом скоплении галактик Кома ³. Это скопление является также источником рентгеновского излучения, но рентгеновское излучение зависит от другой комбинации параметров, рентгеновские и радиоизмерения дополняют друг друга.

3) Вселенная — горячая Вселенная, заполненная фотонами, является частным случаем *) астрофизической системы, к которой применимо уравнение Компанейца ⁴⁻⁷.

*) Кошутственное словосочетание: Вселенная — частный случай, и все же это так с узковедомственной точки зрения физика, изучающего взаимодействие электронов с излучением.

Как известно, во Вселенной плотность протонов и электронов составляет всего 10^{-8} — 10^{-9} от плотности фотонов. Вследствие малой плотности p и e число столкновений электронов с протонами (от которого зависит тормозное, т. е. свободно-свободное излучение) оказывается весьма малым, во много раз меньше числа столкновений электронов с фотонами, ведущих к комптоновскому рассеянию. При температуре плазмы выше $3 \cdot 10^9$ °K в равновесии находится много позитронов и электронов сверх того количества электронов, которые в настоящее время компенсируют заряд ядер (главным образом, водорода и гелия). Поэтому при высокой температуре обеспечено полное термодинамическое равновесие и, в частности, планковский спектр излучения.

Замечательный факт состоит в том, что расширение Вселенной, происходящее в соответствии с теорией А. А. Фридмана, не нарушает равновесия. В однородной (везде одинаковой) изотропной (расширяющейся во всех направлениях одинаково) Вселенной излучение испытывает красное смещение, плотность энергии с течением времени уменьшается. Но красное смещение не зависит от направления распространения фотонов: относительное изменение частоты также одинаково для всех фотонов. Планковский спектр в ходе расширения преобразуется в планковский же спектр с более низкой температурой.

В настоящее время наблюдения подтверждают (хотя и с ограниченной точностью порядка 5—10%) планковский спектр. Но это не означает, что в настоящее время какие-то процессы поддерживают равновесие. Таких процессов нет. Вселенная в настоящее время прозрачна.

Достаточно того, чтобы не было процессов, нарушающих равновесие. На симпозиуме Международного Астрономического союза в Кракове в 1973 г. реликтовое излучение сравнили с некрасивой столетней девственницей: она осталась таковой не потому, что очень добродетельна, а потому, что никто не покусился на эту добродетель.

Реальный астрофизический интерес проблемы связан с тем, что Вселенная не точно соответствует космологической модели Фридмана. Существование галактик является свидетельством какой-то неоднородности плотности плазмы и каких-то ее движений (более или менее случайных и незакономерных, добавленных к общему космологическому расширению) на ранних стадиях эволюции Вселенной.

Детальное исследование показывает, что возмущения большого масштаба, связанные с неоднородной плотностью, усиливаются с течением времени за счет гравитационной неустойчивости. Однако возмущения малого масштаба гасятся вследствие вязкости плазмы. Кинетическая энергия случайных движений превращается в тепло. Это и есть пример «покушения» на планковский спектр излучения.

Можно ли отличить «тепло», энергию, выделившуюся таким образом, от первичной энергии плазмы? Можно ли установить амплитуду возмущений, затухающих задолго до настоящего времени? Оказывается, что детальное рассмотрение комптон-эффекта и применение уравнения Компанейца позволяют сделать важные выводы. Сопоставление теории с наблюдениями приводит к жестким ограничениям энергии возмущений. Приведем только основной вывод: Вселенная практически однородна и изотропна не только в масштабе тысяч мегапарсек (отклонения меньше 10^{-3}), но она всегда была так же однородна и изотропна с точностью порядка 10^{-1} в масштабе, начиная от 100 ns в пересчете на сегодняшнюю шкалу расстояний⁶⁷⁸.

Дело в том, что выделение тепла в плазме после исчезновения позитронов увеличивает плотность энергии без изменения плотности фотонов. После этого комптон-эффект вызывает перемещение фотонов по шкале

частот и вызывает эволюцию спектра в направлении установления равновесия — но равновесия неполного, с заданным числом фотонов. Такое равновесие с ограничивающим условием соответствует спектру так называемого бозе-эйнштейновского типа, отличающемуся от планковского. Теория дает четкие рекомендации, на каких частотах следует искать отклонений. Перераспределение фотонов увеличивает чувствительность наблюдений: выделение 1% тепла меняет спектральную плотность в длинноволновой части более чем на 20%⁶.

4) Потребности астрофизики привели к постановке вопроса об излучении хаотическом, но со спектром, сильно отличающимся от планковского. Низкочастотная часть спектра соответствует весьма высокой температуре T , притом зависящей от частоты, высокочастотная часть спектра практически отсутствует, полная плотность излучения во много раз меньше излучения черного тела aT^4 при высокой температуре.

Наиболее удивительный пример такого рода — радиоизлучение пульсаров: эффективная температура источника на длине волны порядка метров достигает 10^{30} °К для первого пульсара. Детальная картина таких источников излучения не ясна. Скорее всего, имеет место в какой-то форме трансформация энергии макроскопического движения от большего масштаба к меньшему. Волнующееся море обладает спектром колебаний, соответствующим эффективной температуре порядка 10^{26} °К на частоте порядка обратной секунды. Высокочастотная часть спектра, 10^{10} гц и выше, соответствует температуре воды 298° К. Переменная по спектру температура сама по себе не чудо, в частности, и для колебаний плазмы. Наибольшую трудность в теории представляет механизм трансформации колебаний в электромагнитные волны. Но вопрос о структуре излучающей области пульсара лежит за пределами темы данной статьи. Спектры с высокой эффективной радиотемпературой при слабом оптическом и рентгеновском излучении характерны и для радиогалактик и квазаров. В этом случае вероятное объяснение заключается в синхронном излучении релятивистских электронов. Максимум температуры достигается на частоте, где играет роль обратный процесс поглощения излучения электронами в магнитном поле. В максимуме kT порядка энергии электронов; в области высоких частот источник излучения прозрачен и соответственно мало излучает. В каком-то смысле вопрос не решен, а отодвинут: откуда появились электроны высоких энергий? Снова источником является организованное движение.

Темой данного обзора является поведение такого излучения в сравнительно холодной плазме, *вне источника*.

Но помимо астрофизических предложений есть и внутренняя логика исследования. Фотоны являются бозонами. Вероятность процесса, приводящего к появлению фотона с данными свойствами (частотой, направлением, поляризацией) пропорциональна $(n + 1)$, где n есть число фотонов, уже находящихся в данном состоянии. Знаменитый множитель $(n + 1)$, описывающий стимулированное (иногда говорят — индуцированное) излучение, лежит в основе теории мазеров и лазеров. Но этот множитель или, лучше сказать, явление индуцирования должно проявляться и в рассеянии. В этом смысле весьма поучительны ранние работы по теории термодинамического равновесия системы, состоящей из свободных электронов и электромагнитного излучения.

В одной из них⁶¹ рассматривается газ, состоящий из атомов двух сортов — электронов и фотонов, упруго сталкивающихся между собой подобно твердым шарикам. При этом равновесие достигается тогда, когда электроны имеют максвелловский спектр, а фотоны — так называемый виновский спектр, $F_\nu = \text{const} \cdot \nu^3 e^{-h\nu/kT}$, соответствующий той же

температуре. Точная (планковская) формула для излучения не получается.

Молодой Паули еще чуть раньше (⁶², см. также ⁶³) показал, что для термодинамического равновесия электронов и излучения, подчиняющегося формуле Планка, необходимо учесть индуцированное рассеяние.

Вероятность столкновения фотона с электроном зависит также от интенсивности излучения того направления и той частоты, которая получается *после* рассеяния. В этом проявляется двойственная — корпускулярная и волновая — природа фотона, отличие фотонов от жестких шариков.

Уравнение Компанейца включает в себя также вклад индуцированного рассеяния для простейшего случая однородной и изотропной задачи. Предельный случай высокой температуры низкочастотной части спектра соответствует большим числам заполнения n , так как в равновесии $n = (e^{\hbar\omega/kT} - 1)^{-1}$ и, следовательно, $n = kT/\hbar\omega$ в пределе $kT \gg \hbar\omega$.

Итак, возникает вопрос об уравнении Компанейца (т. е. об уравнении эволюции спектра), когда $n \gg 1$ и индуцированное рассеяние, пропорциональное n^2 , доминирует над спонтанным рассеянием, пропорциональным n .

Оказывается ⁹, что уравнение при определенных начальных условиях приводит к образованию ударных волн в фазовом пространстве, т. е. к разрывам в зависимости $n(\omega)$. Дальнейший анализ ¹⁰ структуры ударной волны предсказал появление резких максимумов, т. е., по существу, широких линий, которым не соответствуют никакие собственные частоты плазмы. Такие линии до сих пор не обнаружены; тем интереснее найти их в природе или в лаборатории.

5) Наряду с вопросом об эволюции спектра излучения возникает вопрос о поведении электронов в данном поле излучения ¹¹⁻¹³. Более того, в большинстве случаев необходимо взаимосогласованное рассмотрение обоих вопросов. Сохранение энергии связывает изменение энергии излучения (следующее из эволюции спектра) с вкладом, который вносится в баланс энергии электронов. Оказывается, что для электронов нет вопроса о распределении их по энергии (аналогичного вопросу о спектре): электроны приобретают и отдают импульс малыми случайными порциями, следовательно, их импульс распределен по гауссову закону. Но гауссов закон для нерелятивистских электронов совпадает с равновесным максвелл-большцмановским распределением. Для установления этого распределения не нужно столкновений между электронами, следовательно, оно (распределение) будет иметь место и в разреженной системе. Остается определить одну величину — дисперсию гауссова распределения, т. е. температуру электронов. Для этого достаточно одного уравнения баланса энергии *).

6) Теория индуцированного рассеяния интересна еще и потому, что предельный случай бозонов с большими числами заполнения представляет собой, как известно, классическое волновое поле. Получается типичный пример того, как «классическая теория помогает понять квантовую» (напомним читателям УФН заметку некоего П. Парадоксова ¹⁴ с таким заглавием). Необходимо исправить этот не прямой путь (по-немецки «Herumführung» вместо «Einführung» — обведение вместо введения) и показать прямо на языке классической теории Максвелла и уравнений движения Лоренца смысл полученных результатов.

Оказывается, что решающую роль играют эффекты второго порядка, например лоренцовские силы магнитного поля одной волны, действующие

*) Ситуация существенно изменяется, если излучение анизотропно или имеет узкий спектр (см. п. 16 и работу ⁵⁶).

на электрон, колеблющийся под действием второй волны. Весьма интересен и практически важен случай анизотропных потоков излучения. Индуцированное рассеяние в целом не приводит к выравниванию анизотропии: если в каком-то телесном угле нет излучения, то излучение туда и не попадет в приближении $n \gg 1$. Анизотропное излучение создает анизотропную температуру электронов; выравнивается ли последняя анизотропия — это зависит от взаимодействия электронов между собой и, в частности, от коллективных плазменных взаимодействий и неустойчивостей.

Наконец, анизотропное индуцированное рассеяние создает силу, действующую на электрон, пропорциональную квадрату интенсивности, т. е. четвертой степени поля и, соответственно, четвертой степени заряда электрона¹⁵. Любопытно, что эта сила обращается в нуль как в случае изотропии (очевидно, по симметрии), так и в случае максимальной анизотропии, когда все волны строго совпадают по направлению. Может быть, именно поэтому сила индуцированного рассеяния не была замечена вплоть до 1971 г., хотя в действительности эта сила классическая и могла быть вычислена еще в XIX веке.

7) Весьма важной областью применения теории являются процессы в газе, окружающем нейтронные звезды и коллапсировавшие звезды — черные дыры¹⁶. Можно считать установленным, что рентгеновские волны излучаются газом, нагретым за счет падения в гравитационном поле сверхплотной звезды. При этом тормозное излучение горячего газа успевает существенно измениться при рассеянии на электронах. Давление излучения в значительной мере определяет движение газа и его плотность.

В реальной ситуации, особенно в случае нейтронных звезд, магнитное поле существенно осложняет теорию.

В кратком введении перечислены лишь главнейшие вопросы, рассматриваемые в следующих главах обзора. Введение не заменяет обзор, так же как обзор не заменяет оригинальные работы. Расположение материала в следующих главах также не вполне соответствует введению. Полностью опущена теория рассеяния ультрарелятивистскими электронами с преобразованием радио- и оптического излучения в рентгеновское и гамма-излучение.

Этот вопрос с большой полнотой рассмотрен Гинзбургом и другими исследователями^{17–19}. В последующих главах приведены также литературные ссылки на оригинальные работы. Исключение составляют астрофизические вопросы, упомянутые выше: подробное их рассмотрение в рамках данного обзора потребовало бы слишком много места и отвлекло бы от физики явления. Поэтому ограничимся сказанным выше и ссылками на оригинальные статьи. Астрофизические проблемы заслуживают отдельного подробного изложения!

Для астрофизики весьма важно излучение и рассеяние электронами, находящимися в постоянном магнитном поле. Излучение (так называемое синхротронное) изучено с большой полнотой и рассмотрено в ряде монографий и обзоров^{20–23}. Рассеяние замагниченными электронами изучается особенно активно в последние годы, в связи с предполагаемыми полями до $10^{12}–10^{14}$ гс у поверхности пульсаров. Велико искушение включить этот предмет в обзор, но при заданном объеме обзора это пошло бы в ущерб полноте и пониманию основной части обзора. Будем надеяться, что авторы оригинальных работ^{57–59} по свойствам замагниченных электронов завершат этот цикл самостоятельным обзором.

Наконец, электромагнитные волны, взаимодействующие с электронами, можно рассматривать как частный случай взаимодействующих плазменных колебаний. В таком контексте комптоновское рассеяние рассматривается, в частности, в обзорах и монографиях Цытовича и Каплана^{24, 25}.

Некоторые результаты и методы являются общими. Однако своеобразные свойства электромагнитных волн, особенно скорость их, равная скорости света (пусть мне простят тавтологию, ибо свет \equiv электромагнитные волны) и особое их значение в астрофизике оправдывают отдельное рассмотрение, предлагаемое ниже.

Пользуюсь случаем поблагодарить сотрудников Института прикладной математики, с результатами работы которых я знакомился задолго до выхода в свет их работ. Особо благодарю Р. А. Сюняева и А. Ф. Илларионова, в содружестве с которыми получены многие результаты по теме обзора, за дискуссии и помощь в написании обзора.

Обзор составлен так, что читатель, интересующийся только общими целями рассматриваемого цикла работ, может на этом остановиться.

Следующие главы содержат конкретные расчеты и методические замечания, интересные для физиков-теоретиков. Эти главы можно рассматривать как дополнения к краткой популярной статье, которой, по существу, является данное введение. Именно по этой причине, в расчете на тех, кто не будет читать дальше, именно здесь, в конце введения, а не в конце статьи, помещены слова благодарности.

Здесь же уместно затронуть один глубоко личный вопрос. Статья в первоначальном варианте была сдана в редакцию при жизни А. С. Компанейца. Все то, что сказано в статье о его вкладе, оставлено строго без изменений. Но только теперь, после неожиданной кончины Александра Соломоновича, этот обзор посвящается его памяти. Невольно по-другому, с другим чувством перечитывает автор написанное ранее; но пусть оно останется неизменным, пусть горе утраты не изменит и без того высокой оценки работы А. С. Компанейца, лежащей в основе обзора.

II. СИЛЬНАЯ ВОЛНА

1. Т е о р и я Т о м с о н а (напоминание). Классическая теория Томсона начинается с решения уравнения движения электрона. Плоскополяризованная электромагнитная волна распространяется по оси z ,

$$E_x = E_y = E \cos(kz - \omega t), \quad k = \frac{\omega}{c};$$

остальные компоненты поля равны нулю. Для движения электрона пишем

$$\ddot{x} = -\frac{eE}{m} \cos \omega t, \quad \dot{x} = -\frac{eE}{m\omega} \sin \omega t, \quad x = \frac{eE}{m\omega^2} \cos \omega t. \quad (1.1)$$

Принято, что другие координаты электрона $y = z = 0$. Это уравнение написано без релятивистских поправок, не учтена сила Лоренца в магнитном поле волны, не учтена реакция излучения.

В слабой волне по движению, заданному формулой (1.1), находим излучение электрона: его мощность, мгновенную \dot{W} и усредненную по времени \bar{W} :

$$W = \frac{2e^2}{3c^3} \dot{x}^2, \quad \bar{W} = \frac{e^4 E^2}{3c^3 m^2}.$$

Поток энергии в плоской электромагнитной волне

$$Q = \frac{c}{8\pi} (E^2 + H^2), \quad \bar{Q} = \frac{c}{8\pi} E^2.$$

Сечение

$$\sigma = \frac{\bar{W}}{\bar{Q}} = \frac{8\pi}{3} \frac{e^4}{m^2 c^4} = \frac{8\pi}{3} r_0^2, \quad r_0 = \frac{e^2}{mc^2}.$$

Численно $\sigma = 6,65 \cdot 10^{-25} \text{ см}^2$, $r_0 = 2,82 \cdot 10^{-13} \text{ см}$. Рассеянное излучение

плоскополяризовано. Его интенсивность пропорциональна квадрату проекции вектора \mathbf{x} на плоскость, перпендикулярную к направлению \mathbf{n} рассеянного луча,

$$I \sim \sin^2 \alpha, \quad \alpha = (\widehat{\mathbf{n}\mathbf{x}}).$$

Соответственно дифференциальное сечение

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{3\sigma \sin^2 \alpha}{8\pi}. \quad (1.2)$$

В эйлеровых координатах ($\theta = (\widehat{\mathbf{n}\mathbf{z}}$), φ)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{3\sigma}{8\pi} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi). \quad (1.3)$$

Для неполяризованного луча нужно усреднить по углу φ . Получаем

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{3\sigma}{8\pi} \left(\cos^2 \theta + \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right) = \frac{3\sigma}{16\pi} (1 + \cos^2 \theta). \quad (1.4)$$

При этом θ есть угол рассеяния. Рассеянное излучение частично поляризовано (полностью для $\theta = \pi/2$).

Индукированный дипольный момент, приходящийся на один электрон, равен

$$d_x = -ex = -\frac{e^2}{m\omega^2} E_x. \quad (1.5)$$

Соответственно диэлектрическая постоянная ϵ и квадрат коэффициента преломления α для плазмы с плотностью n_e электронов/см³ равны

$$\epsilon = \alpha^2 = 1 - 4\pi n_e \frac{e^2}{m\omega^2}, \quad (1.6)$$

откуда следует также выражение критической (лэнгмюровской) частоты ω_c , для которой $\epsilon = 0$:

$$\omega_c = \sqrt{\frac{4\pi n_e e^2}{m}} = 5,65 \cdot 10^4 \sqrt{n_e} \text{ сек}^{-1}. \quad (1.7)$$

Поскольку движение электрона найдено без учета реакции излучения, соответствующая диэлектрическая постоянная получилась вещественной.

2. К р и т е р и й с и л ы в о л н ы. Найдём ту амплитуду волны E_c , при которой скорость электрона, вычисленная наивно, нерелятивистски, становится равной скорости света. Обозначим через b безразмерное отношение фактической амплитуды к E_c :

$$E_c = \frac{mc\omega}{e}, \quad b = \frac{E}{E_c}. \quad (2.1)$$

Очевидно, что слабая волна (для которой справедливы формулы предыдущего раздела) соответствует $b \ll 1$, сильной волной надо называть волну с $b \gtrsim 1$. Необходимая мощность луча на единицу поверхности равна (при $b = 1$) согласно ²⁶

$$Q = \frac{10^{10}}{\lambda^2} \text{ вт/см}^2 = 10^{18} \text{ вт/см}^2 \quad \text{для} \quad \lambda = 10^4 \text{ \AA}.$$

Пусть луч имеет круглое сечение и радиус, равный $a\lambda$, где a — безразмерное число, которое не может быть меньше 1; λ — длина волны, деленная на 2π (т. е. обратный волновой вектор k^{-1}). Мощность луча равна

$$\begin{aligned} W_r = SQ &= \pi a^2 \lambda^2 \frac{c}{8\pi} b^2 E_c^2 = -\frac{a^2 b^2 m^2 c^5}{8e^2} = \frac{a^2 b^2 m c^2 c}{8\gamma_0} = \\ &= a^2 b^2 \cdot 10^{16} \text{ эрг} \cdot \text{сек}^{-1} = a^2 b^2 \cdot 10^9 \text{ вт}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Критическая мощность, необходимая для ускорения электрона до релятивистской скорости, оказывается не зависящей от частоты. Абсолютно она не велика, соответствует 1 дж/нсек в импульсном режиме.

В плазме, облучаемой лучом с $b > 1$, электроны при столкновениях с ядрами смогут рождать электронно-позитронные пары или испускать (тормозным образом) гамма-лучи. Однако эти процессы пропорциональны квадрату плотности плазмы. При большем $b > 137$ рождение пар при столкновениях электронов с позитронами превзойдет аннигиляцию и при достаточной длительности облучения и удержания плазмы пойдет лавинообразный процесс нарастания количества пар (ср. работу ²⁷, в которой аналогичный процесс рассмотрен для электронов, распределенных по Больцману). Напомним, что в двух встречных световых пучках возможно прямое рождение электронно-позитронных пар в вакууме, без первоначальной плазмы и притом не за счет частоты сталкивающихся лучей, а за счет квазистатического поля. Соответствующее критическое поле E_{pc} получается из условия

$$\frac{eE_{pc}\hbar}{mc} = mc^2, \quad E_{pc} = \frac{m^2c^3}{e\hbar} = \frac{E_c mc^2}{\hbar\omega}.$$

Следовательно, при квазистатическом поле, т. е. при $\hbar\omega \ll mc^2$, рождение пар в вакууме труднее (требует большей амплитуды поля) по сравнению с ускорением электронов до релятивистской скорости и рождением пар в плазме.

3. Движение электрона и рассеяние сильной волны. Вернемся к теме обзора. Пусть имеется разреженная плазма. Пренебрежем столкновениями и рассмотрим более подробно движение и излучение электронов в сильной электромагнитной волне.

В ряде работ эта задача решена с точным учетом релятивистской механики электрона и сил Лоренца, но без учета реакции излучения. Задача решена в квантовой теории (см. весьма подробные работы Никишова и Ритуса ²⁸) и в классической теории для точечного заряда (последняя работа такого рода ²⁶).

Качественно результат классического расчета приводит к следующему: при $b > 1$ движение электрона действительно становится релятивистским,

$$\bar{\gamma} = \frac{\bar{\mathcal{E}}}{mc^2} = (1 - \beta^2)^{-1/2} \approx b, \quad 1 - \beta \sim b^{-2}, \quad \beta = \frac{v}{c}. \quad (3.1)$$

Силы Лоренца становятся равными по порядку величины электрическим силам. Электрон описывает замкнутую траекторию типа восьмерки в плоскости x, z (рис. 5).

Этот ответ относится к плоскополяризованной волне с $E_x = H_y \neq 0$. Амплитуда колебаний по обоим осям x, z достигает (по порядку величины, но оставаясь меньше) $\lambda = c/\omega$.

Важно, что траектория замкнута. Точнее, есть система координат, в которой электрон только колеблется, в этой системе *) движение перио-

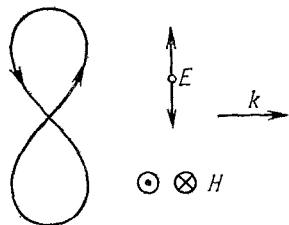


Рис. 5. Движение электрона в плоскости, проходящей через направление волны и электрический вектор.

Стрелки сбоку указывают поляризацию волны и ее направление.

*) Выбор этой системы неоднозначен. В частности, если задаться условием, что электрон покоился до прихода волны, и рассмотреть волну, постепенно нарастающую от нуля до заданной большой амплитуды, то окажется, что электрон (без учета реакции

дическое, траектория замкнутая; очевидно, что свойство замкнутости не сохранится при переходе к другой системе, равномерно движущейся относительно первой.

По найденному закону движения можно определить излучение электрона. Излучение релятивистского электрона отличается тем, что это излучение в каждый момент лежит в узком конусе вокруг мгновенного направления движения электрона (центральный угол конуса порядка γ^{-1}). При повороте траектории излучение в данной точке наблюдения резко включается и выключается. Поэтому спектр излучения содержит высокие гармоники основной частоты, с которой обращается электрон *).

Общее излучение при $b > 1$ оказывается приблизительно в b^2 раз больше, чем по формулам Томсона. Следовательно, в соответствующее число раз увеличивается и сечение рассеяния. Закон для сечения рассеяния сильной волны $\sigma(b)$ в зависимости от b дается ниже; в формуле σ без индексов и знака функции есть томсоновское сечение. Запишем, опуская численные множители:

$$\sigma(b) = \sigma b^2 = \frac{e^6 E^2}{m^4 c^6 \omega^2} = \frac{e^6 E^2}{m^4 c^8} \lambda^2. \quad (3.2)$$

Отметим особо, что в ультрарелятивистском пределе не исчезает, а усиливается зависимость излучения и рассеяния от массы покоя рассеивающей частицы.

Полная задача о взаимодействии электромагнитной волны и электрона решается последовательными приближениями: мы уверены, что излучение электрона вперед в направлении распространения сильной волны, интерферируя с сильной волной, ослабит ее как раз в соответствии с мощностью, рассеянной в стороны.

Излучение вперед не содержит высших гармоник! Этот факт ^{26, 28} не тривиален; из него следует, что сильная волна, проходя через разреженную плазму, сохраняет свою синусоидальную форму. Волна ослабляется, меняется ее фаза (в соответствии с мнимой и вещественной частями диэлектрической постоянной), но не появляется пилообразности, нет тенденции к образованию «ударной волны».

4. Реакция излучения и продольное ускорение. Что изменится в следующем приближении, если учесть влияние реакции излучения на движение?

Главным является систематическое ускорение электрона в направлении распространения волны. Происхождение его очевидно: электрон, отнимая от сильной волны энергию, отнимает и соответствующий импульс, равный энергии, деленной на c (точнее, надо говорить о мощности W и силе $F = W/c$). Энергия не накапливается электроном, она переизлучается. Но переизлученная энергия не направлена прямо вперед. Импульс, отданный электроном, пропорционален $\cos \theta$, он меньше импульса, полученного электроном. Средняя сила, действующая на электрон, равна $\bar{F} = (W/c)(1 - \cos \theta)$. С учетом этой силы траектория электрона не замкнута ни в какой системе координат.

излучения!) приобретет релятивистскую продольную скорость. При учете реакции излучения эта продольная скорость с течением времени изменяется, так что строго стационарного решения такого типа не существует.

Ниже рассматривается другая постановка задачи — излучение в системе координат, в которой колеблющийся электрон в среднем покоится за счет продольного поля, — подробно об этом поле см. ниже п. 5.

*) Эти свойства хорошо известны из теории синхротронного излучения; см. обзоры и монографии, упомянутые во введении.

Если $b \gg 1$, но все же не слишком велико ($b < \lambda/r_0$), т. е. $b < 10^{13}$ для сантиметровых радиоволн, $b < 10^8$ для оптического излучения, то заметное изменение поступательной скорости происходит за большое число колебаний, можно говорить о мгновенной системе координат, в которой электрон только колеблется.

Замечательно, что параметр силы волны b является лоренц-инвариантным. В системе электрона, движущегося (в среднем) в направлении волны, поля E_x и H_y меньше по сравнению с исходной системой покоя, но в том же отношении меньше и частота! Обозначая через $\bar{\beta}$ среднюю поступательную скорость (отнесенную к c), получим $E_x \sim H_y \sim \omega \sim \sqrt{(1-\bar{\beta})/(1+\bar{\beta})}$, так что $b = \text{const } (\bar{\beta})$.

Электрон остается все время одинаково релятивистским, характерная скорость его колебаний постоянна, амплитуда колебаний увеличивается как ω^{-1} с течением времени. Постоянство b означает, что существует автомодельное решение для движения электрона в поле волны с учетом реакции излучения, подобное решению²⁹ для слабой волны.

В реальной ситуации, когда мы имеем дело не с одним электроном, а с плазмой, общему усредненному движению электронов препятствует продольное поле, возникающее вследствие разделения электронов и ядер, т. е. вследствие нарушения электронейтральности.

5. Решение для волны с круговой поляризацией. Существует, однако, такая постановка задачи, в которой эти коллективные эффекты необычайно облегчают точное решение. Рассмотрим сильную волну с круговой поляризацией и продольное поле, подстраиваемое таким образом, чтобы исключить продольный дрейф электрона *)³⁰.

Тогда по симметрии задачи очевидно, что электрон совершает круговое движение с периодом, равным периоду волны. Итак, функционально траектория найдена, решать дифференциальные уравнения не нужно! Остается найти несколько численных параметров: радиус орбиты $R = v/\omega$ и скорость электрона v , сдвиг фазы вращения электрона по отношению к фазе волны, характеризуемый, например, углом ϕ между \mathbf{E} и \mathbf{R} , радиусом-вектором электрона (\mathbf{E} — электрическое поле волны; продольная компонента E_z не зависит от времени).

Для этих величин получается система уравнений, следующих из баланса энергии и импульса. По существу, используется известный школьный метод определения частоты кругового маятника рассмотрением центробежной силы, натяжения нити и тяготения. Получаются конечные уравнения — тогда как плоскополяризованный маятник приводит к дифференциальному уравнению.

Возвратимся (из школы) к электрону: используем известные формулы синхротронного излучения. Выраженная через скорость и частоту, мощность излучения равна

$$W = \frac{2}{3} \frac{e^2 \omega^2}{c} \left(\frac{v}{c} \right)^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-2}. \quad (5.1)$$

Далее очевидно, что излучение симметрично относительно плоскости $z = \text{const}$.

*) Рассматривается только строго стационарное состояние, период включения волны не рассматривается.

Уравнения имеют такой вид:

$$eEv \sin \varphi = W(v, \omega), \quad (5.2)$$

$$\frac{mv}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} \omega = eE \cos \varphi, \quad (5.3)$$

$$eE \frac{v}{c} \sin \varphi = eE_z. \quad (5.4)$$

Здесь (5.2) есть уравнение энергии, (5.3) — уравнение центробежной силы, (5.4) — уравнение лоренцовой силы (использовано $|\mathbf{H}| = |\mathbf{E}|$, $\mathbf{H} \perp \mathbf{E}$), уравновешенной продольным полем. Ответ удобно записать в параметрическом виде, выражая безразмерные

$$b, \beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}, \quad s = \frac{\sigma(b)}{\sigma}, \quad p = \frac{P(b)}{P}$$

в виде функций угла φ , $0 < \varphi < \pi/2$. Получаются явные выражения *):

$$b\beta \sin \varphi = \frac{2}{3} \frac{\beta^2 \gamma^4 r_0}{\lambda}, \quad \gamma\beta = b \cos \varphi, \quad s = \frac{W}{\sigma c} \frac{E^2}{4\pi} = \frac{\beta^2 \gamma^4}{b^2}, \quad (5.5)$$

$$p = \frac{\beta}{b} \cos \varphi.$$

Если бы мы захотели выразить все величины явно через естественный параметр силы волны b , пришлось бы решать трансцендентное уравнение. При учете реакции излучения выявляется принципиально новый факт: решение в целом (выраженное в безразмерных величинах) зависит от двух безразмерных входных параметров: b — сила волны и λ/r_0 — характеристика частоты. Однако предельные случаи описываются простыми формулами

$$\varphi \ll 1, \quad b < \sqrt[3]{\frac{\lambda}{r_0}}, \quad s = 1 + b^2, \quad p = \frac{1}{\sqrt{1 + b^2}}, \quad (5.7)$$

$$\frac{\pi}{2} - \varphi \ll 1, \quad b > \sqrt[3]{\frac{\lambda}{r_0}}, \quad s = \frac{3\lambda}{2r_0} \frac{1}{b}, \quad p = \left(\frac{3}{2} \frac{\lambda}{r_0}\right)^{1/4} b^{-7/4}. \quad (5.8)$$

Первая область дает результаты, близкие к результатам для плоскополяризованной волны, но гораздо более легким путем. Уравнения движения электрона в сильной волне нелинейны. Поэтому, решив задачу для плоскополяризованной волны, нельзя непосредственно суперпозицией решений перейти к решению для волны с круговой поляризацией. Нельзя сделать и обратный переход. Совокупность обоих решений доказывает, что основные свойства решений стабильны — увеличение сечения рассеяния в сильной волне, отсутствие высших гармоник в волне, рассеянной вперед, имеет место во всех случаях. В первой области λ/r_0 не играет роли.

Но решение для круговой поляризации содержит и учет реакции излучения; во второй области (φ близко к $\pi/2$) этот эффект становится главным. Максимальная мощность, которую электрон может извлечь из данного

*) $P(b)$ и P — проекция дипольного момента электрона на электрическое поле волны, в сильной волне $P(b) = -eR \cos \varphi = -e \frac{v}{\omega} \cos \varphi$ и по томсоновской формуле $P = -\frac{e^2 E}{m\omega^2}$. Вещественная часть диэлектрической постоянной в сильной волне равна

$$\text{Re } \varepsilon = 1 - P(b) \frac{4\pi e^2 n_e}{m\omega^2}. \quad (5.6)$$

поля, равна eEs . Так как поток энергии волны равен $sE^2/4\pi$, то сечение рассеяния не может превышать $4\pi e/E$. Именно этот предел, обратно пропорциональный амплитуде волны, достигнут во второй области.

Волна с круговой поляризацией *) допускает точное решение и для электрона в продольном магнитном поле; при этом простыми средствами удается исследовать поведение резонанса на гирочастоте в нелинейной области ³¹. Волна, поляризованная по кругу, соединяет свойства, казалось бы, не соединимые. У нее есть определенная длина волны и частота. Вместе с тем движение электрона в такой волне не зависит от времени — постоянны все скалярные величины: скорость, угол между скоростью и полем и т. п.

Постоянна в пространстве плотность энергии и другие скалярные величины, характеризующие саму волну. Благодаря этому удается построить строго однородное решение во всем бесконечном пространстве, так же как и в случае, когда учтены гравитационные явления. Другими словами, существует пространственно однородное совместное решение уравнений общей теории относительности и уравнений Максвелла, соответствующее волне с круговой поляризацией ³².

Если бы вместо круговой была избрана плоская поляризация, однородное решение было бы лишь приближенным: в плоской волне плотность энергии зависит от координаты как $\cos^2 kz = (1 + \cos 2kz)/2$.

6. Оценки силы волны для пульсара. От гимна в честь волн с круговой поляризацией вернемся к конкретной астрофизике. Рассмотрим пульсар с периодом 0,03 сек, $\omega \approx 200 \text{ сек}^{-1}$ и магнитным моментом $3 \cdot 10^{30}$ (размер 10^6 см , поле $3 \cdot 10^{12} \text{ гс}$ на поверхности, момент равен $\mu = HR^3$ по порядку величин). Если момент перпендикулярен к оси вращения, такой пульсар излучает $W = (2/3)\mu^2\omega^4/c^3 = 3 \cdot 10^{38} \text{ эрг/сек}$.

Найдем поле волны E и критерий b на расстоянии r от пульсара. Усредняя по углу, найдем $E = 10^{14}/r$ ед. CGSE и $b = 10^{19}/r$ (поскольку $E_c = mc\omega/e = 10^{-5}$ при $\omega = 200$).

Расстояние, начиная с которого поле можно считать волновым, равно $c/\omega = 1,5 \cdot 10^8 \text{ см}$. Следовательно, максимальное значение параметра b равно приблизительно 10^{11} . Зона сильной волны простирается до расстояния порядка $10^{18} = 0,3 \text{ пс}$, где достигается $b = 1$.

На оси вращения волна имеет круговую поляризацию; изложенные выше результаты верны буквально, а не только по духу. Найдем также значение b_c , при котором происходит переход от главенствующей роли реакции излучения (при $b > b_c$) к возможности учета излучения как малой поправки в уравнениях движения (при $b < b_c$). Найдем $b_c = \sqrt[3]{\lambda/r_0} = 7 \cdot 10^6$ для $\omega = 200$, $\lambda = 1,5 \cdot 10^8$. Таким образом, реакция излучения является главной в широкой области $10^7 < b < 10^{11}$, $10^8 < r < 10^{12}$. Однако b_c не лоренц-инвариантно. Для плазмы, истекающей с релятивистской скоростью, λ эффективно увеличивается, а $r_0 = \text{const}$, в отличие от параметра b , который сохраняется.

В данном обзоре нельзя более подробно анализировать конкретную ситуацию в пульсарах. Ограничимся констатацией того, что электроны и протоны подвергаются действию сильной электромагнитной волны, в которой формулы Томсона неприменимы. Увеличивается (по сравнению с теорией Томсона) отбор энергии от волны, энергия переизлучается в высоких гармониках, в значительной области реакция излучения глубоко влияет на движение электронов. Велики силы продольного ускорения.

*) И с подстраиваемым продольным электрическим полем.

Изложенная выше теория существенна для понимания эжекции релятивистских частиц пульсаром. Радиоизлучение пульсаров на длинных радиоволнах, с помощью которого пульсары были открыты, по-видимому, требует для своего объяснения коллективных эффектов и не объясняется прямо теорией сильной волны.

Приводим (для желающих углубиться в теорию пульсаров) несколько литературных ссылок^{33-35, 60}.

III. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ФОТОННОГО ГАЗА

7. Постановка задачи. Числа заполнения. Рассмотрим задачу об эволюции свободного электромагнитного поля, в среднем однородного по пространству. Под эволюцией понимается изменение с течением времени. Непосредственно такая постановка задачи справедлива для горячей Вселенной^{7, 36-39}, в которой однородность электромагнитного поля следует прямо из наблюдений. Точнее, наблюдения доказывают только изотропию излучения, но сильная неоднородность заведомо разрушила бы также изотропию, поэтому на основании наблюдаемой изотропии делаем вывод об однородности, по крайней мере в больших масштабах. Эволюция Вселенной связана с общим расширением, в ходе которого изменяется также температура, и с наличием возмущений, приводящих к макроскопическому движению плазмы. Эволюция не сводится к тривиальному распространению фотонов в пространстве с заданной метрикой (на языке общей теории относительности) потому, что в поле излучения находятся свободные электроны, т. е. мы имеем дело с плазмой.

Для многих задач объем, занятый плазмой, не слишком велик, и наблюдается излучение, выходящее из плазмы, т. е. существенна и неоднородность и анизотропия излучения. Тем не менее приближенно можно характеризовать данное плазменное облако определенным средним временем пребывания фотонов в облаке и решать задачу об эволюции однородного излучения за данное время. Такая постановка задачи резко уменьшает число параметров и переменных и позволяет найти общие закономерности. Электромагнитное поле считаем хаотическим, имеющим сплошной спектр.

Будем характеризовать хаотическое свободное электромагнитное поле распределением чисел заполнения фотонов $n_i(\mathbf{k})$. Волновой вектор \mathbf{k} одновременно характеризует и направление распространения (единичный вектор $\mathbf{r} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$), и частоту волны, $\omega = c|\mathbf{k}|$, а следовательно, и энергию одиночного фотона $\hbar\omega$. Индекс i , пробегающий два значения, характеризует два ортогональных состояния поляризации, например правую и левую круговую.

Макроскопические величины такие, как плотность фотонов N и плотность энергии в единице объема $\vec{\mathcal{E}}$ или спектральная плотность энергии излучения, легко выражаются через n :

$$N = \sum_{i=1,2} \frac{1}{(2\pi)^3} \int n_i d^3\mathbf{k}, \quad \vec{\mathcal{E}} (\text{эрг/см}^3) = \sum_{i=1,2} \frac{1}{(2\pi)^3} \int n_i \hbar\omega d^3k^5, \quad (7.1)$$

$$F_{\omega, \mathbf{r}} = \sum_{i=1,2} \frac{n_i \hbar\omega^3}{(2\pi c)^3}. \quad (7.2)$$

Задание $n_i(\mathbf{k})$, очевидно, приводит к частичной потере информации о фазе. Например, утверждение $n_1(\mathbf{k}) = n_2(\mathbf{k})$ не позволяет отличить неполяризованную волну от плоскополяризованной. Не будем, однако, останавливаться здесь на этих тонкостях; мы отчасти вернемся к ним

позже в связи с ситуацией $n \gg 1$, где квантовомеханическая неопределенность фазы мала, и, в частности, в связи с теорией индуцированного рассеяния узких (спектрально и пространственно) линий.

8. Томсоновское рассеяние. Уравнения комптоновского рассеяния в первом приближении, без учета изменения энергии фотона, имеют вид

$$\frac{\partial n_i(\mathbf{r}, \omega)}{\partial t} = \rho \sigma \left\{ -n_i(\mathbf{r}, \omega) + \frac{1}{4\pi} \int [\alpha(\theta) n_1(\mathbf{r}', \omega) + \beta(\theta) n_2(\mathbf{r}', \omega)] d\mathbf{r}' \right\}. \quad (8.1)$$

Здесь вместо 3-вектора \mathbf{k} в качестве аргумента написан 2-вектор (единичный) направления \mathbf{r} и частота $\omega = c|k|$. Интегрирование производится только по \mathbf{r} , точнее, по \mathbf{r}' , угол между \mathbf{r} и \mathbf{r}' обозначен θ , при этом $\alpha(\theta)$ есть дифференциальное сечение рассеяния без изменения поляризации (т. е. правая — в правую, левая — в левую), а $\beta(\theta)$ — тоже с изменением поляризации. Очевидно *),

$$(4\pi)^{-1} \int (\alpha + \beta) d\mathbf{r}' \equiv 1, \quad \alpha + \beta = \frac{3}{16\pi} (1 + \cos^2 \theta). \quad (8.2)$$

В общем множителе в формуле (2.1) ρ есть плотность электронов, σ — томсоновское сечение, c — скорость света. Произведение $\rho \sigma t = \tau$ есть так называемая оптическая толща по томсоновскому рассеянию, т. е. среднее число актов рассеяния каждого фотона за время t . При томсоновском постоянном сечении τ не зависит от частоты. Стационарным решением уравнения (2.1) и аналогичного для n_2 является $n_1 = n_2 = n(\omega)$, где $n(\omega)$ есть произвольная (!) функция частоты. Легко убедиться, что за время, соответствующее толще $\tau = 1$, приблизительно вдвое или в e раз уменьшается разность $n_1 - n_2$, а также угловая зависимость n_1 и n_2 (и то и другое при постоянном данном ω). Результат легко получить, разлагая n_1 и n_2 по сферическим гармоникам. Все гармоники затухают приблизительно одинаково быстро, так как α и β слабо зависят от угла. Особо отметим, что в данном приближении индуцированное рассеяние тождественно выпадает из рассмотрения. В самом деле, если есть два пучка с $n_i(\mathbf{r}_1, \omega)$ и $n_k(\mathbf{r}_2, \omega)$, причем ω одинаково в обоих пучках, i и k , например, одинаковы, то в выражении перехода из первого пучка во второй

$$\frac{dn_i}{dt} = -\rho \sigma \{ \alpha n_i(\mathbf{r}_1, \omega) [1 + n_k(\mathbf{r}_2, \omega)] - \alpha n_k(\mathbf{r}_2, \omega) [1 + n_i(\mathbf{r}_1, \omega)] \}. \quad (8.3)$$

Очевидно, произведения $n_i n_k$ сокращаются, так как угол θ и функция $\alpha(\theta)$ одинаковы для переходов $n_i(\mathbf{r}_1) \rightarrow n_k(\mathbf{r}_2)$ и обратного $n_k(\mathbf{r}_2) \rightarrow n_i(\mathbf{r}_1)$.

Этот результат нужно запомнить, чтобы сравнить его с ролью индуцированного рассеяния при учете изменения частоты.

9. Интегральное уравнение изменения спектра. Изменение частоты в отдельном акте рассеяния мало, поскольку в дальнейшем рассматриваются электроны с нерелятивистской температурой и фотоны с энергией, малой по сравнению с mc^2 . Поэтому существенные

*) Конкретно, $\alpha = (3/32\pi) (1 + \cos \theta)^2$, $\beta = (3/32\pi) (1 - \cos \theta)^2$. Здесь α и β отнесены к среднему томсоновскому сечению. Рассмотрение круговой поляризации значительно удобнее по сравнению с рассмотрением плоской поляризации; утверждение, что волна имеет данную круговую поляризацию, является инвариантным относительно любого собственного преобразования координат (поворота или лоренц-преобразования).

эффекты происходят при времени взаимодействия, соответствующем $\tau \sim (\hbar\omega/mc^2)^{-1} \gg 1$ или $\tau \sim (\hbar T/mc^2)^{-1} \gg 1$. Согласно результатам предыдущего раздела отсюда следует, что в течение почти всего времени (за вычетом первых нескольких единиц τ) излучение изотропно и не поляризовано, даже если оно не было таковым в начале. Поэтому в течение основного времени рассматриваем $n_i = n_k = n(\omega, \tau)$, т. е. одну функцию двух скалярных величин частоты ω и толщи τ (введение толщи вместо времени позволяет избавиться от множителей $\rho\sigma$ во всех уравнениях). Для удобства астрофизиков перейдем от круговой частоты ω к частоте в герцах. Нормировочный множитель в выражении для плотности неполяризованных фотонов в изотропном распределении обозначим одной буквой A ,

$$N = \frac{8\pi}{c^3} \int n\nu^2 d\nu = A \int n\nu^2 d\nu. \quad (9.1)$$

В точной формулировке интегрального уравнения главную роль играет «ядро» $K(\nu_i, \nu_f)$ — вероятность перехода фотона с начальной частотой ν_i в одну клетку фазового пространства с частотой ν_f .

Вероятность нормирована на сечение рассеяния, так что $A \int K(\nu_i, \nu_f) \nu_f^2 d\nu_f \equiv 1$. В дальнейшем индексы i — initial и f — final не пишем, запомнив, например, что в $K(\nu, \nu')$ на первом месте стоит $\nu = \nu_i$, а на втором $\nu' = \nu_f$. Функция $K(\nu, \nu')$ зависит от температуры электронов T как от параметра $K(\nu, \nu', T)$; для сокращения письма эту зависимость от T иногда опускаем. Пишем также $n(\nu)$ вместо $n(\nu, \tau)$, опуская одинаковую во всех членах формулы величину τ .

Без учета индуцированного рассеяния, т. е. бозе-факторов $(1 + n_f)$ в вероятности рассеяния, кинетическое уравнение имело бы вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(\nu)}{\partial \tau} &= -n(\nu) A \int K(\nu, \nu') \nu'^2 d\nu' + A \int K(\nu', \nu) n(\nu') \nu'^2 d\nu' \equiv \\ &\equiv -n(\nu) + A \int K(\nu', \nu) n(\nu') \nu'^2 d\nu'. \end{aligned} \quad (9.2)$$

С учетом индуцированного рассеяния изменяются оба члена:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(\nu)}{\partial \tau} &= -n(\nu) A \int K(\nu, \nu') [1 + n(\nu')] \nu'^2 d\nu' + \\ &+ [1 + n(\nu)] A \int K(\nu', \nu) n(\nu') \nu'^2 d\nu' = \\ &= -n(\nu) + A \int K(\nu', \nu) n(\nu') \nu'^2 d\nu' + \\ &+ n(\nu) A \int [K(\nu', \nu) - K(\nu, \nu')] n(\nu') \nu'^2 d\nu'. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Формулы содержат предельный случай рассеяния без изменения частоты:

$$K(\nu', \nu) = \frac{\delta(\nu - \nu')}{A\nu^2}. \quad (9.4)$$

В этом случае $\partial n(\nu)/\partial \tau = 0$, как и следовало ожидать. Индуцированный член обращается в нуль не только для K , равного δ -функции, но и для любого симметричного $K_S(\nu, \nu') = K_S(\nu', \nu)$.

Функция $K(\nu, \nu', T)$ довольно сложна; выписать ее в приближенном виде, сохранив все принципиально важные общие свойства, нелегко. Малость изменения частоты при рассеянии означает, что K мало отличается от δ -функции. Но для эволюции спектра существенно именно это малое отличие. При $T = 0$ возможно лишь уменьшение частоты, притом

не более чем на величину $\Delta v_m = 2h v^2/mc^2$. Значит, $K_0(v, v')$ отлично от нуля лишь в интервале $0 \leq v - v' \leq \Delta v_m$ (индекс 0 при K означает $T = 0$). При конечной температуре электронов добавляется доплер-эффект, зависящий от движения электронов. Соответствующая функция $K_T(v, v')$ имеет приблизительно гауссовский вид $\sim \exp[(v - v')^2/2\Delta^2]$, причем ширина $\Delta \sim \sqrt{\overline{v^2}/c^2} \sim \sqrt{kT/mc^2}$. Полная функция $K(v, v', T)$ не будет ни суммой, ни произведением K_0 и K_T . При малых T полная функция есть свертка K_0 и K_T . Однако позже, когда от $K(v, v', T)$ мы перейдем к вычислению физических эффектов, эти эффекты, естественно, окажутся суммами нулевых и температурных эффектов.

10. Д и ф ф е р е н ц и а л ь н о е у р а в н е н и е К о м п а н е й - ц а. Поскольку частота при каждом рассеянии меняется мало, естественно ожидать, что $\partial n(v)/\partial \tau$ окажется зависящим лишь от значений $n(v')$ в соседних участках спектра, при $|v' - v| \ll v$. Следовательно, можно будет выразить $\partial n(v)/\partial \tau$ через $n(v)$, $n'(v) = \partial n/\partial v$, $n''(v) = \partial^2 n/\partial v^2$, . . ., т. е. в зависимости от числа заполнения и его производных при том же значении v . Условием является гладкость функции $n(v)$: необходимо, чтобы по порядку величины было $n \sim v \partial n/\partial v \sim v^2 \partial^2 n/\partial v^2$. Математически переход от точного интегрального уравнения к дифференциальному уравнению для $\partial n/\partial \tau$ совершается по формулам

$$\begin{aligned} A \int K(v, v') n(v') v'^2 dv' &= a_0 n(v) + a_1 \frac{\partial n}{\partial v} + a_2 \frac{\partial^2 n}{\partial v^2} + \dots, \\ a_0 &= A \int K(v, v') v'^2 dv', \quad a_1 = A \int K(v, v') (v' - v) v'^2 dv', \\ a_2 &= \frac{A}{2} \int K(v, v') (v' - v)^2 v'^2 dv'. \end{aligned} \quad (10.1)$$

Однако действительно ясные физические требования к уравнению настолько ограничивают выбор параметров, что уравнение можно получить, не выписывая явно громоздкое $K(v, v', T)$.

Этим методом изящно и последовательно воспользовался А. С. Компанец в работе 1956 г.¹, в которой впервые был четко поставлен вопрос об особенностях установления равновесного спектра излучения в разреженной плазме.

Рассмотрим прежде случай холодных электронов и малых чисел заполнения, когда членами n^2 можно пренебречь. Коэффициент a_1 есть (взятое со знаком +) среднее уменьшение частоты при однократном рассеянии; при рассеянии на угол θ оно равно $\Delta v = \Delta v_m (1 - \cos \theta)/2$, т. е. равно *) $a_1 = \overline{\Delta v} = h v^2/mc^2$. Коэффициент a_2 равен среднему квадрату изменения частоты. В данном случае

$$a_2 = \overline{(\Delta v)^2} \sim (\overline{\Delta v})^2 \sim \left(\frac{h v}{mc^2} \right)^2 v^2 \ll v \overline{\Delta v}. \quad (10.1a)$$

Поэтому a_2 можно пренебречь.

Итак, остается уравнение

$$\frac{\partial n}{\partial \tau} = (a_0 - 1) n + \frac{h v^2}{mc^2} \frac{\partial n}{\partial v}. \quad (10.2)$$

*) Легко проверить, что в данном случае (благодаря симметрии индикатрисы рассеяния $\sim (1 + \cos^2 \theta)$) среднее изменение v равно изменению при рассеянии на $\pi/2$ и равно половине максимального.

Используем сохранение плотности фотонов при рассеянии. Уравнение обязано удовлетворять условию

$$\frac{dN}{d\tau} = A \frac{d}{d\tau} \int n v^2 dv = A \int \frac{\partial n}{\partial \tau} v^2 dv \equiv 0.$$

Для того чтобы это соотношение выполнялось при любом $n(v)$, нужно, чтобы правая часть уравнения (2.2) имела вид

$$\frac{\partial n}{\partial \tau} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} q \left(v, n, \frac{\partial n}{\partial v} \right). \quad (10.3)$$

Как говорят, *дивергентная* форма уравнения обеспечивает закон сохранения: можно представить себе, что q есть поток фотонов через сферическую поверхность в фазовом пространстве, соответствующую данной частоте v . Сопоставляя с тем, что уже известно из уравнения (2.1), получим

$$q = f(v) n, \quad \frac{1}{v^2} f(v) \frac{\partial n}{\partial v} = \frac{h v^2}{m c^2} \frac{\partial n}{\partial v}, \quad f = \frac{h v^2}{m c^2}, \quad (10.4)$$

$$\frac{\partial n}{\partial \tau} = \frac{h}{m c^2} \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} v^4 n.$$

Достойно внимания, как общие принципы позволили обойти трудное вычисление a_0 по функции $K_0(v, v')$: его трудность связана с тем, что необходимо вычислять малую разность $a_0 - 1 = 4h\nu/mc^2$, для чего приближение $K \sim \delta(v - v')$ недостаточно.

Уравнение (10.4) описывает вполне определенную физическую ситуацию, и из него могут быть сделаны выводы, относящиеся к распространению рентгеновских лучей в холодной плазме. Здесь мы продолжим вывод общего уравнения. Обратимся к квадратичному члену, описывающему индуцированное рассеяние, оставляя по-прежнему электроны холодными. Из интегрального выражения следует

$$\left(\frac{\partial n}{\partial \tau} \right)_{\text{инд}} = b_0 n^2 + b_1 n \frac{\partial n}{\partial v},$$

где b_0 и b_1 — функции v , далее $b_1 = 2 h v^2 / m c^2 = 2 a_1$. Применяя принцип дивергентности, получим окончательно

$$\frac{\partial n}{\partial \tau} = \frac{h}{m c^2} \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} v^4 (n + n^2). \quad (10.5)$$

Значительная часть приложений теории связана с этим уравнением и его предельной формой при $n \gg 1$, когда учитывается только индуцированное рассеяние:

$$\frac{\partial n}{\partial \tau} = \frac{h}{m c^2} \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} v^4 n^2. \quad (10.6)$$

Обратимся к случаю горячих электронов, считая, однако, $kT \ll mc^2$ и оставляя старшие члены в разложении по малому параметру kT/mc^2 . Смещение частоты в отдельном акте рассеяния $\sim \nu v/c$, квадрат $\nu^2 v^2/c^2 \sim \sim \nu^2 kT/mc^2$. Итак, доплеровское расширение линии дает определенное, не малое значение коэффициента a_2 . Напомним, что в уравнении для $\partial n/\partial \tau$ этому соответствует член, пропорциональный $\alpha(kT/mc^2) v^2 \partial^2 n/\partial v^2$. Однако смещение частоты, т. е. $\Delta \nu$, не содержит члена $\nu v/c$, так как изменения порядка $\nu v/c$ имеют оба знака, частота увеличивается и уменьшается, член порядка $\nu v/c$ обращается в нуль при усреднении. Симметрия $K_T(v, v')$ означает также, что нет квадратичного по n , индуцированного вклада в рассеяние, зависящего от температуры.

Уравнение с учетом температуры должно удовлетворять термодинамическому принципу: равновесное планковское распределение фотонов при взаимодействии с электронами той же температуры не должно изменяться. Это означает, что $\partial n / \partial \nu \equiv 0$ при $n = (e^{h\nu/kT} - 1)^{-1}$. Вместе с принципом сохранения фотонов (дивергентности) термодинамический принцип без вычислений фиксирует множитель α при $\partial^2 n / \partial \nu^2$ и остальные члены, пропорциональные температуре. Окончательно получается уравнение Компанейца:

$$\frac{\partial n}{\partial \tau} = \frac{h}{mc^2} \frac{1}{\nu^2} \frac{\partial}{\partial \nu} \nu^4 \left(\frac{kT}{h} \frac{\partial n}{\partial \nu} + n + n^2 \right). \quad (10.7)$$

При постоянной температуре электронов удобно, следуя автору уравнения, вместо частоты ввести безразмерную энергию фотона x , а также изменить величину, характеризующую время взаимодействия

$$x = \frac{h\nu}{kT}, \quad y = \tau \frac{kT}{mc^2}. \quad (10.8)$$

В новых переменных уравнение не содержит параметров

$$\frac{\partial n}{\partial y} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} x^4 \left(\frac{\partial n}{\partial x} + n + n^2 \right). \quad (10.9)$$

В общем случае к эффектам рассеяния добавляются также эффекты рождения новых фотонов и поглощения фотонов. Если рождение и поглощение обусловлены плазмой с заданной температурой, то их вклад можно записать в виде

$$\left. \frac{\partial n}{\partial y} \right|_{e, a} = B(x) (1 + n) - nB(x) e^x \quad (10.10)$$

В этой формуле учтено, что, кроме спонтанного $B(x)$, имеется также индуцированное излучение (член $nB(x)$) и учтена термодинамическая связь между излучением $B(x)$ и поглощением $nB(x)e^x$. Величина $B(x)$ пропорциональна квадрату плотности электронов. В разреженной плазме в большинстве рассматриваемых ниже задач можно пренебречь $B(x)$ полностью или везде, кроме малой области $x \ll x_0$, в связи с тем, что B , будучи малой, растёт как x^{-3} при $x \rightarrow 0$.

Краткая историческая справка. Первая работа с неполной (без индуцированных процессов) постановкой задачи об эволюции спектра при комптоновском рассеянии принадлежит Дираку⁴⁰. Компанейц провел свое исследование в 1949 г.; значительное участие в нем принял безвременно погибший молодой талантливый физик С. Дьяков. Работа проходила на глазах автора обзора. По причинам, не зависящим от участников работы, публикация задержалась до 1956 г. До 1964 г. астрофизическое значение работы оставалось не ясным. Значительно позже, в 1965 г., не зная о работе Компанейца, к тому же уравнению пришел Вейман⁴. В настоящее время приоритет Компанейца признан повсеместно.

11. Свойства уравнения Компанейца. Два важнейших свойства (а именно, тот факт, что $dN/dt = 0$ и что $P(x) = (e^x - 1)^{-1} = \text{const}(y)$ является решением) были использованы при выводе уравнения и, следовательно, удовлетворены тождественно. Здесь $P(x)$ есть равновесная планковская функция излучения, соответствующая температуре электронов; иначе обозначаем $P(\nu) = (e^{h\nu/kT} - 1)^{-1}$. Подразумевается, естественно, уравнение Компанейца (2.7) без поглощения и излучения. Однако $P(x) = \text{const}(y)$ не единственное решение: легко убедиться, что и бозе-эйнштейновское выражение $BE(x) = (e^{x+\mu} - 1)^{-1}$,

отличающееся от планковского наличием химического потенциала μ , также обращает в нуль скобку $\frac{\partial n}{\partial x} + n + n^2$. Этот результат не является неожиданным: $BE(x)$ отвечает на вопрос о термодинамическом равновесии заданного числа фотонов в заданном объеме при данной температуре. Поскольку в процессе рассеяния N остается постоянным, мы вправе спросить о том, каково будет распределение фотонов по частоте (т. е. какой будет функция $n(\nu)$ или $n(x)$ при данной температуре электронов и данном числе N). Планковская формула дает для данного T определенное N , а следовательно, не отвечает на этот вопрос. Необходим еще один параметр — таким параметром и является μ . Химический потенциал μ выражается через T и N по уравнению

$$\int_0^{\infty} (e^{x+\mu} - 1)^{-1} x^2 dx = \frac{\text{const} \cdot N}{T^3}.$$

Только $P(x)$ и $BE(x)$ являются равновесными решениями, обращающими в нуль поток фотонов q в ν -пространстве.

Существуют, кроме того, стационарные, но не равновесные решения $q = \text{const} \neq 0$, $\partial q / \partial \nu = 0$. $\partial n / \partial \tau = 0$, однако эти решения, очевидно, не играют такой фундаментальной роли, как равновесные решения. Стационарные решения с $q \neq 0$ существуют лишь за счет притока фотонов при $\nu = \infty$ и стока при $\nu = 0$ (или притока при $\nu = 0$ и стока при $\nu = \infty$).

Уравнение Компанейца позволяет найти скорость изменения плотности энергии излучения для данного спектра и данной температуры излучения. Удобно вернуться к размерному уравнению *)

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}}{dt} &= \frac{d}{dt} A \int h\nu n(\nu) \nu^2 d\nu = Ah \int \frac{\partial n}{\partial t} \nu^2 d\nu = \\ &= \frac{\rho c \sigma}{mc^2} \left(4kT\mathcal{E} - Ah^2 \int_0^{\infty} (n + n^2) \nu^4 d\nu \right). \end{aligned} \quad (11.1)$$

Очевидно, что энергия, приобретаемая излучением, отбирается от электронов, так что можно записать уравнение для температуры электронов

$$\frac{3}{2} k\rho \frac{dT}{dt} = -\frac{d\mathcal{E}}{dt}. \quad (11.2)$$

В частности, приведенное выше выражение дает возможность вычислить стационарную температуру электронов (из условия $dT/dt = 0$):

$$T_{st} = \frac{Ah^2 \int (n + n^2) \nu^4 d\nu}{4k\mathcal{E}} = \frac{h^2}{4kh} \frac{\int (n + n^2) \nu^4 d\nu}{\int n \nu^3 d\nu}. \quad (11.3)$$

Выражение (2.8) позволяет найти T_{st} в поле излучения изотропного и неполяризованного, но с произвольным спектром. В частном случае планковского или бозе-эйнштейновского спектра с определенной температурой излучения T_r формула дает тождественно $T_{st} = T_r$.

*) По ходу получения последней формулы производилось интегрирование по частям, требующее, чтобы n убывало быстрее ν^{-3} при $\nu \rightarrow \infty$ и росло слабее $\nu^{-2,5}$ при $\nu \rightarrow 0$. Для стационарных, но неравновесных решений с $q \neq 0$ эти условия не выполняются.

IV. ИНДУЦИРОВАННОЕ РАССЕЯНИЕ И КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОЛН С ЭЛЕКТРОНАМИ

12. Эволюция спектра и бозе-конденсация. Рассмотрим с помощью уравнения Компанейца эволюцию спектра в предельном случае, когда доминирует квадратичный (n^2) член, описывающий индуцированное рассеяние.

Уравнение сводится к

$$\frac{\partial n}{\partial \tau} = \frac{\hbar}{mc^2} \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} v^4 n^2. \quad (12.1)$$

Введем величину $f = \hbar n v^2$. Для новой функции $f(v, \tau)$ уравнение имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = \frac{2f}{mc^2} \frac{\partial f}{\partial v}. \quad (12.2)$$

Но такое уравнение решается в характеристиках: это значит, что его можно подвергнуть дальнейшему преобразованию:

$$\frac{df}{d\tau} = 0 \quad \text{вдоль} \quad \frac{dv}{d\tau} = -\frac{2f}{mc^2}. \quad (12.3)$$

Решение в неявном виде $v(f, \tau)$ имеет вид

$$v(f, \tau) = v_0(f) - \frac{2f}{mc^2} \tau. \quad (12.4)$$

Эволюция спектра, соответствующая этим уравнениям, весьма наглядна. Построим в момент $\tau = 0$ спектр в координатах $f \div v$ (рис. 6, а).

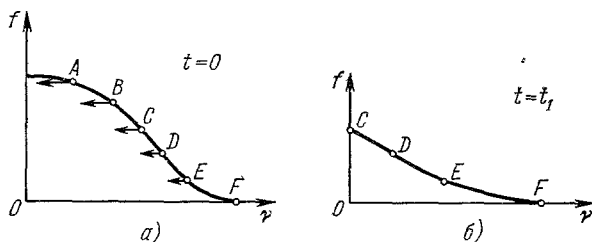


Рис. 6. а) Начальный спектр фотонов (по оси ординат отложено произведение $\hbar v^2$, пропорциональное F_v/v , где F_v — спектральная плотность энергии); б) бозе-конденсация фотонов, частота которых обращается в нуль.

Каждая точка кривой движется влево с постоянной, не зависящей от времени скоростью. Однако для разных точек эта скорость различна — она пропорциональна ординате точки.

Таким образом, для каждой точки начальной кривой $f_0(v)$ легко определить момент пересечения оси ординат. В результате индуцированного рассеяния фотоны всех мастей (простите, — всех цветов, всех длин волн) «дружно» уменьшают свою частоту, а следовательно, и свою энергию, отдавая ее электронам. Каждая группа (с начальной частотой в данном интервале от v_0 до $v_0 + dv_0$) движется самостоятельно (в этом приближении!) и через отмеренный интервал времени исчезает, когда $v \rightarrow 0$ (рис. 6, б). Действительно, что такое фотоны с нулевой частотой? При $v \rightarrow 0$ обязательно появляются те или иные механизмы истинного поглощения, так что риторический вопрос о фотоне с $v = 0$ отпадает.

Но не при любом виде начального спектра ситуация так проста.

В некоторых условиях можно ожидать спектр f с перегибом (рис. 7). Тогда еще раньше бозе-конденсации формальное применение правила

эволюции спектра приведет к образованию характерной трехзначной структуры, к «перехлесту»⁹. Это явление полностью аналогично образованию ударной волны в газовой динамике или захлестыванию морских волн на

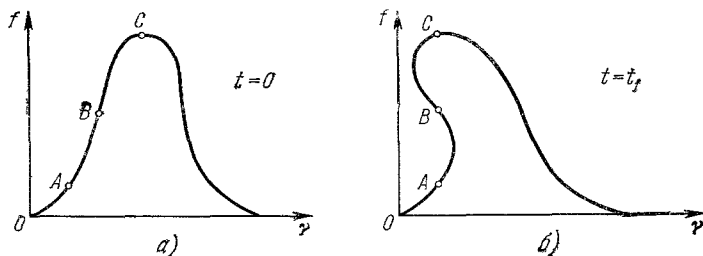


Рис. 7, а) Начальный спектр фотонов с перегибом; б) образование области трехзначности при эволюции спектра рис. а).

мелководье. Образование «ударных волн» в спектре еще раньше отмечалось при исследовании плазменной турбулентности, т. е. спектра хаотических плазменных колебаний^{41, 42}.

Но какова структура и дальнейшая судьба ударной волны?

Для исследования этого вопроса необходимо вернуться к интегральному уравнению. Вспомним, что дифференциальное уравнение Компанейца было выведено в предположении гладкого спектра, а при возникновении ударной волны нарушается

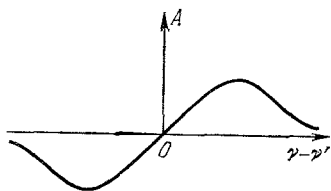


Рис. 8. Ядро для индуцированного рассеяния.

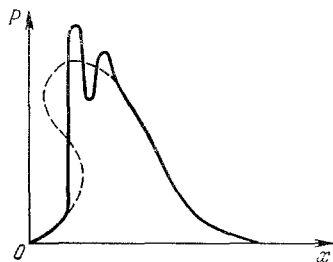


Рис. 9. Структура ударной волны, образующаяся взамен трехзначной области, показанной пунктиром.

именно гладкость $f(v)$. Напомним выражение индуцированного рассеяния:

$$\frac{\partial n(v)}{\partial \tau} = \text{const} \cdot n(v) \int A(v, v') n(v') v'^2 dv', \quad (12.5)$$

$$A(v, v') = K(v, v') - K(v', v).$$

Ядро A антисимметрично (зависимость A от разности $v - v'$ качественно показана на рис. 8), характерная ширина A порядка

$$|v - v'| \sim v \frac{v}{c} \sim v \sqrt{\frac{kT}{mc^2}}. \quad (12.6)$$

Эта величина представляет собой нечто вроде длины свободного пробега фотонов по шкале частот. Естественно было бы сделать вывод, что структура ударной волны в спектре фотонов в пространстве импульсов окажется подобной структуре (в обычном координатном пространстве) ударной волны в газе с данной длиной пробега. Однако оказывается¹⁰, что эти две структуры не имеют ничего общего. Интегральное уравнение, — а лучше сказать, сам индуцированный процесс, — таково, что вместо сглаживания S-образной волны в газе возникает скупивание

фотонов в узком интервале частот, колебательная структура $n(\nu)$ и квазилинии в спектре фотонов (рис. 9).

Начнем с простейшего случая: пусть начальное $f = 0$ при $\nu < \nu_0$, кривая уже при $t = 0$ задана с разрывом (рис. 10, а).

Число фотонов, попадающих в данную ячейку, пропорционально числу фотонов, уже имеющихся в этой ячейке: в бозе-факторе $(n + 1)$ мы пренебрегаем «спонтанной» единицей, остается «индуцированное» n . Там

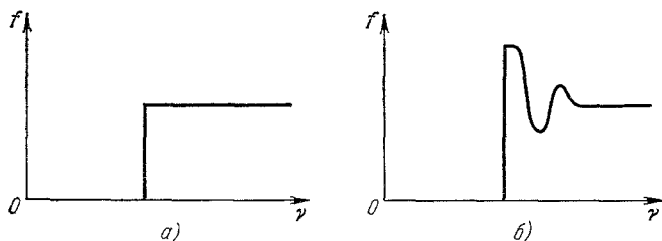


Рис. 10. а) Начальный спектр фотонов с разрывом; б) образование квазилинии при эволюции спектра рис. 10, а.

(при $\nu < \nu_0$), где в начальный момент $n = f = 0$, всегда сохранится условие $n = f = 0$. Но справа, в области $\nu > \nu_0$, где $n \neq 0$, $f \neq 0$, налицо поток фотонов, движущихся в сторону уменьшения частоты *).

Эти фотоны должны собираться вблизи разрыва, при $\nu_0 < \nu < \nu_0 + \Delta\nu$, и с течением времени образовать там высокий максимум — квазилинию (рис. 10, б).

Можно рассмотреть конечный разрыв в начальных условиях:

$$n = n_1, \nu = \nu_0 - 0, \quad n = n_2, \nu = \nu_0 + 0, \quad n_2 > n_1.$$

Из интегрального уравнения следует, что разрыв не замывается, $n_2/n_1 = \text{const}(\tau) > 1$. Действительно, интеграл $I(\nu, \tau) = \int A(\nu, \nu') n(\nu', \tau) \nu'^2 d\nu'$ является гладкой функцией ν даже при разрывном n под интегралом, а из уравнения следует, что скорость роста $\partial \ln n / \partial \tau$ зависит только от I и, следовательно, одинакова по обе стороны разрыва.

Было проведено детальное исследование (в том числе и численными методами) эволюции гладкого начального $n(\nu)$ или $f(\nu)$. Рассмотрен случай, когда простое дифференциальное уравнение предсказывает образование ударной волны и после этого уже не применимо. Решение интегрального уравнения приводит к образованию нескольких квазилиний, число и амплитуда которых растут с течением времени. Вопрос о наблюдении квазилиний до настоящего времени остается открытым. Для того чтобы индуцированное рассеяние доминировало, необходима высокая эффективная температура излучения. Естественно представить себе, что источником излучения является турбулентная, может быть, замагниченная, плазма,

*) Напомним, что в соответствии с определением потока q (см. гл. III), $q = \text{const} \cdot \nu^4 n^2$, соответствующая средняя скорость фотонов в шкале частот $\frac{d\nu}{dt} = -\frac{q}{n\nu^2} = -\frac{f}{mc^2}$. При индуцированном рассеянии скорость зависит от амплитуды (n или f),

но не от градиента $\left(\frac{\partial n}{\partial \nu}\right)$; в этом отличие от диффузии фотонов при спонтанном рассеянии на движущихся электронах. Скорость движения вдвое меньше скорости перемещения точки с $f = \text{const}$, т. е. «массовая» скорость вдвое меньше фазовой скорости (скорости характеристики).

а рассеяние геометрически отделено от излучения, т. е. происходит в других оболочках плазмы, более холодной и спокойной, почти равновесной и не замагниченной. Но в таком случае возникают вопросы о распределении излучения по углам: при индуцированном рассеянии изотропизация не происходит!

13. Температура электронов при индуцированном рассеянии. До сих пор мы занимались почти исключительно эволюцией спектра излучения в присутствии тепловых электронов. Не менее принципиален и другой вопрос — об эволюции энергетического спектра электронов в данном поле излучения. Ответ тривиален, если излучение равновесное, планковское, соответствующее определенной радиационной температуре T_r . Ясно, что электроны примут эту температуру $T \rightarrow T_r$. Так как в планковском распределении средняя энергия фотона $\sim 2,7 kT_r$, то можно сказать также, что в равновесии средняя энергия электрона оказывается того же порядка, что и средняя энергия каждого фотона.

Однако вопрос становится нетривиальным, если спектр излучения неравновесный. В астрофизических приложениях мы часто встречаемся с ситуацией, когда эффективная температура весьма высока, но лишь в области низких частот. Спектр эффективно срезан на частоте ν_0 , которая во много раз меньше той, $\nu = kT_r/\hbar$, при которой сказывается квантовая природа света.

Высокая эффективная температура обязательно свидетельствует о наличии излучающих «единиц» с большой энергией. Этими «единицами» могут быть релятивистские электроны или сгустки с большими эффективными зарядами (см. литературу, касающуюся пульсаров³³⁻³⁵). На низких частотах играет роль поглощение излучения этими же «единицами» и температура излучения не превышает средней энергии каждой единицы. На высоких частотах система прозрачна, мало поглощение, но мало и излучение «единиц». Малость излучения экспоненциальная, однако экспонента здесь не максвелл-большмановского происхождения; экспонента происходит от свертки быстро меняющейся функции (характеризующей высокочастотную волну) и плавной функции, характеризующей размеры или траекторию излучающей «единицы».

Итак, мы возвращаемся к задаче о рассеянии для своеобразного поля излучения. В астрофизике, особенно «плазменной», типично поле излучения с $n = kT_{r1}/\hbar\nu \gg 1$ при $\nu < \nu_0$ и $n \ll kT_{r1}/\hbar\nu$ при $\nu > \nu_0$, причем $\hbar\nu_0 \ll kT_{r1}$.

Соответственно и полная плотность излучения в таком поле гораздо меньше равновесной. Опуская безразмерные множители, запишем

$$\mathcal{E} \text{ (эрг/см}^3\text{)} \approx kT_{r1} \frac{\nu_0^3}{c^3} \ll aT_{r1}^4 = \frac{(kT_{r1})^4}{\hbar^3 c^3}. \quad (13.4)$$

Теперь, когда ситуация полностью охарактеризована, попробуйте выбрать правильный ответ из трех возможных: электрон в данном поле излучения примет температуру:

- а) такую, что kT порядка средней энергии одного фотона $\hbar\nu_0$;
- б) равную по порядку величины T_{r1} , т. е. температуре излучения в той области спектра, где сосредоточено излучение;
- в) соответствующую общей плотности излучения, т. е. такую T_{eff} , что $\mathcal{E} = aT_{\text{eff}}^4$, так что $T_{\text{eff}} = T_{r1}^{1/4} (\hbar\nu_0/k)^{3/4}$.

Трудность выбора правильного ответа связана с тем, что свободный электрон, рассеивающий по Томсону, чувствует излучение всех частот.

Эйнштейн решал задачу о броуновском движении осциллятора в поле излучения. В этом случае ответ ясен: осциллятор чувствует эффективную температуру излучения на резонансной частоте и только. Зная этот ответ заранее, Эйнштейн сделал грандиозного значения выводы о квантовой структуре самого поля излучения.

Вернемся к электрону. Формула, выписанная выше, дает

$$kT = \frac{h^2 \int n^2 v^4 dv}{4h \int n v^3 dv} = \frac{kT_{r1}}{4}. \quad (13.2)$$

Итак, оказывается, что правилен (по порядку величины) средний ответ; электрон «чувствует» именно *температуру* низкочастотного излучения.

Введем спектральную плотность потока энергии излучения

$$F_\nu \text{ (эрг/см}^2 \text{ сек} \cdot \text{гц стер)} = \frac{2h\nu^3}{c^2} n, \quad \mathcal{E} = \frac{4\pi}{c} \int F_\nu d\nu. \quad (13.3)$$

Выражение температуры электрона в изотропном поле излучения, выписанное через F_ν , принимает вид

$$kT = (c^2/8) \int F_\nu^2 \nu^{-2} d\nu / \int F_\nu d\nu. \quad (13.4)$$

Отметим, что при допустимом F_ν (таком, что $\int F_\nu d\nu$ сходится), и даже при $F_\nu \rightarrow 0$ при $\nu \rightarrow 0$, возможен ответ $T \rightarrow \infty$, интеграл в числителе может расходиться.

14. Классическая интерпретация теории индуцированного рассеяния. Большие значения «числа заполнения» $n \gg 1$, как известно, соответствуют возможности перехода к классической (не квантовой) максвелловской теории электромагнитных волн.

Применительно к рассматриваемому кругу явлений формальным подтверждением классичности является исчезновение постоянной Планка в окончательных формулах после того, как вместо переменной n произведен переход к спектральной плотности F_ν — классической величине. Это сокращение постоянной Планка в окончательных формулах относится как к эволюции спектра излучения, так и к поведению электронов в заданном классическом поле излучения.

Предыдущий вывод уравнений производился с помощью рассмотрения квантовой задачи, введения бозе-факторов $(1 + n)$ и перехода к пределу $n \gg 1$. Очевидно, должен быть и прямой подход к классической задаче *).

С логических позиций любопытно, что такой прямой подход оказывается намного сложнее обходного пути (ср. со статьей ¹⁴, упомянутой во введении). С точки зрения истории науки можно отметить, что все необходимые исходные положения для решения задачи уже существовали к концу прошлого века, по сумме работ Максвелла, Лоренца, Рэлея, Джинса

*) Любопытный пример представляет работа Дирака и Капицы ⁴³ о дифракции электронов на стоячей волне. Здесь электрон рассматривается как квантовый объект, стоячая волна классична. Ее можно представить как суперпозицию двух волн равной частоты, бегущих навстречу. Авторы вначале рассматривают спонтанное рассеяние фотона, соответствующего одной из бегущих волн, в состояние другой бегущей волны. Затем учитывается индуцированный характер рассеяния: при этом находит объяснение рассеяние именно в другую бегущую волну, а не в любое другое состояние. Но одновременно происходит и переход к классической теории электромагнитного поля.

Если задача не была поставлена и решена 100 лет назад, то главным образом потому, что не было вкуса к (или моды на...) плазме, турбулентности, случайным полям и процессам.

Вернемся к проблеме взаимодействия излучения и электронов. Прямое классическое рассмотрение ее начнем с более простой задачи о поведении электрона в хаотическом поле; более сложная задача об эволюции случайного поля, т. е. об эволюции спектра излучения будет затронута лишь вкратце.

На вопрос о движении электрона легко дать ответ в первом, линейном по полю, приближении. Этот ответ уже был получен при выводе томсоновской формулы рассеяния. Средний квадрат скорости электрона дается формулой

$$\overline{v^2} = \frac{\overline{E^2} e^2}{m^2 \omega^2}. \quad (14.1)$$

Для хаотического поля, т. е. некоррелированных волн, средний квадрат скорости складывается из средних квадратов, соответствующих каждой отдельной волне. Квадрат поля выражается через поток энергии. Таким образом, для полной энергии колебательного движения получим несколько эквивалентных формулировок:

$$\mathcal{E}_0 = \frac{mv^2}{2} = \frac{2e^2}{mc} \int \frac{F_v}{v^2} dv = \frac{e^2}{2\pi m} \int \frac{d\mathcal{E}}{v^2}. \quad (14.2)$$

В частности, в случае планковского спектра излучения энергия электрона по порядку величины равна

$$\mathcal{E}_0 \approx kT_r \frac{kT_r}{mc^2} \frac{e^2}{\hbar c} \ll kT_r. \quad (14.3)$$

Как в немецком языке, длинная фраза может закончиться частицей отрицания *nicht*, так и данный расчет закончим решительным опровержением. Энергия колебательного движения *не есть* та энергия электронов, которой мы интересуемся. Энергия колебаний должна классифицироваться как поправка к энергии электромагнитных волн, связанная с тем, что показатель преломления плазмы отличен от единицы.

Но в предыдущем расчете не рассматривалось поступательное движение электрона. В линейной по полю теории его поступательная скорость может быть любой. Только в следующем приближении поступательная скорость меняется с течением времени; этот процесс и представляет собой набор и отдачу энергии электроном.

Какие эффекты нужно учесть в следующем приближении?

Рассмотрим сначала одиночную плоскую волну, распространяющуюся по оси z , с полями E_x и H_y . В линейном приближении электрон колеблется, $v_x = \sin \omega t \cdot eE/m\omega$. В следующем приближении появляется сила Лоренца, направленная по оси z , равная по порядку величины

$$F_L = \frac{eHv}{c} = \frac{e^2 E^2}{mc\omega}. \quad (14.4)$$

Однако эта сила пропорциональна $\sin \omega t \cdot \cos \omega t \sim \sin 2\omega t$; в среднем по времени она равна нулю. Только учет излучения электрона сдвигает фазу скорости, $v \sim \sin(\omega t + \varphi)$, благодаря чему появляется отличная от нуля средняя величина $\overline{\sin(\omega t + \varphi) \cos \omega t} = \frac{1}{2} \sin \varphi$ и далее

$$\overline{F} = \frac{1}{2} \frac{e^2 \overline{E^2} \sin \varphi}{mc\omega} \sim \sigma \overline{E^2}.$$

По порядку величины

$$\frac{\bar{F}}{|F_L|} = \sin \varphi \approx \frac{e^2 \omega}{mc^3} \approx \frac{r_0}{\lambda}. \quad (14.5)$$

В сущности, здесь подробно разъяснен на языке сил результат, полученный ранее из законов сохранения. Рассеяние потока энергии электронном создает силу, направленную в сторону потока. Эта сила мала, во много раз меньше лоренцовой. В изотропном поле излучения средний поток энергии равен нулю. Но понятие изотропного поля выделяет определенную систему покоя. Наблюдатель, движущийся вместе с электроном относительно этой системы, воспринимает излучение как анизотропное: встречное излучение смещено в синюю сторону и более мощное. Излучение, летящее вдогонку, «покраснело» и ослабло. Поток энергии относительно электрона равен

$$q = -c\mathcal{E} \frac{4\beta}{3(1-\beta^2)} \approx -c\mathcal{E} \frac{4v}{3}, \quad (14.6)$$

где \mathcal{E} — плотность энергии излучения в системе, где излучение изотропно. Следовательно, сила, действующая на электрон, и соответствующая теряемая энергия равны

$$F = -\frac{4\sigma\mathcal{E}v}{3c}, \quad W_- = Fv = -\frac{4\sigma\mathcal{E}v^2}{3c} = -\frac{8}{3} \frac{\mathcal{E}\sigma c}{mc^2} \frac{mv^2}{2} = -4\mathcal{E}\sigma c \frac{kT}{mc^2}. \quad (14.7)$$

В последнем выражении подставлено значение кинетической энергии электронов с температурой T ; мы узнаём выражение потери энергии электронами. Предыдущие длинные рассуждения были бы бесполезны, если бы они не подсказали эффективный механизм нагрева электронов лоренцовыми силами: достаточно избавиться от условия, связывающего E и H в плоской волне! В хаотическом (в среднем изотропном) поле излучения существует лоренцова сила магнитного поля H_1 одной волны, действующая на электрон, скорость которого v_2 зависит от электрического поля второй волны E_2 . Когда направления волновых векторов двух волн, \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 , не совпадают, то нет причин, чтобы сила точно обращалась в нуль за большой интервал времени. Сила пропорциональна квадрату амплитуды, т. е. интенсивности излучения. Изменение энергии электрона пропорционально квадрату импульса силы; значит, рассматриваемый классический механизм нагрева приведет к выражению W_+ , пропорциональному $F_+ F_-$. Трудный статистический расчет приводит — для широкого спектра излучения — к выражению $\text{const} \cdot \int (F_v^2/v^2) dv$, совпадающему с найденным раньше.

Картина проясняется, если ввести понятие квазипотенциала (КП). Роль КП играет кинетическая энергия колебаний электрона, вычисленная по первому приближению.

Как показали Гапонов и Миллер⁴⁴, усредненная по времени сила, квадратичная по амплитуде поля^{*)}, равна градиенту кинетической энергии колебаний, вычисленной по первому приближению.

Следуя идеям работы⁴⁴, рассмотрим стоячую волну, в которой $E_x = E \cos \omega t \cdot \cos kz$, $k = \omega/c$. В такой стоячей волне энергия колебаний электрона равна

$$\mathcal{E}_{(1)} = \frac{e^2 E^2}{4m\omega^2} \cos^2 kz \quad (14.8)$$

*) Лоренцова сила, описанная выше, и другие аналогичные члены, которые необходимо учитывать вместе с ней.

Для более простой механической системы с одномерным движением — маятника такой принцип введения квазипотенциала был сформулирован еще раньше Капицей⁴⁵ и попал в учебники (см. ⁴⁶).

и соответственно усредненная сила *), направленная вдоль оси,

$$F_{z(2)} = \frac{e^2 E^2}{2mc\omega} \cos kz \sin kz. \quad (14.9)$$

Холодные электроны собираются в узлах, т. е. в плоскостях $z = n\pi/2k$, где $E_x = 0$. Стоячая волна является суперпозицией двух встречных волн равной частоты. Если частоты встречных волн несколько различны, то узлы медленно перемещаются в пространстве; результирующее поле, строго говоря, не является стоячей волной.

На этом основаны некоторые идеи использования лазерных световых пучков для ускорения частиц ^{47, 48}.

Темой данной статьи является хаотическое поле. В таком поле и квазипотенциал $\mathcal{E}_{(1)}$, и соответствующая **) сила $F_{(2)} = -\nabla \mathcal{E}_{(1)}$ являются хаотическими функциями координат и времени.

Можно разложить на элементарные волны $\mathcal{E}_{(1)}$ и $F_{(2)}$ так же, как на отдельные волны разлагается само поле E, H .

В чём отличие этих двух разложений?

Величина $\mathcal{E}_{(1)}$ есть скаляр; вектор $F_{(2)}$ потенциальный, он разлагается на продольные волны. В разложении $F_{(2)}$ при данном волновом векторе k есть все частоты ω от 0 до $c|k|$. Это значит, что в поле силы $F_{(2)}$, рассматриваемой как функция координат и времени, есть составляющие с любой — в том числе и малой — фазовой скоростью. Итак, каждый медленный электрон находит в поле $F_{(2)}$ такую созвучную ему компоненту (волну, синхронную с его поступательной скоростью), которая непрерывно ускоряет его. В первом порядке, где сила равна $F_{(1)} = eE$, такой синхронной волны нет — поле E поперечное, и фазовая скорость его равна c . Именно поэтому в классической теории эффект нагрева электронов имеет место лишь во втором порядке и квадратичен по интенсивности.

Таким образом, классическая теория нагрева электронов хаотическим полем действительно может быть построена; в ходе развития теории появляются важные качественные понятия квази-потенциала, гапонов-миллеровских сил, синхронизма. Если речь идет лишь о получении выражения W_+ , то квантовое «обведение» (Herumführung) короче. Однако полное понимание невозможно без сочетания точных квантовых формул с классическим подходом.

15. Классическая теория эволюции спектра. Вернемся к элементарному мысленному опыту — рассеянию монохроматического пучка с частотой ν_0 плазмой, находящейся в поле излучения с широким спектром, направленного под углом к монохроматическому пучку (рис. 11).

В квантовой теории индуцированного рассеяния рассмотрим вначале покоящиеся электроны. Изменение интенсивности равно

$$\frac{dn_0}{dt} = \text{const} (n_0 n_1 v_1^2 - n_0 n_2 v_2^2), \quad (15.1)$$

где n_1 — число заполнения на частоте ν_1 такой, которая после рассеяния

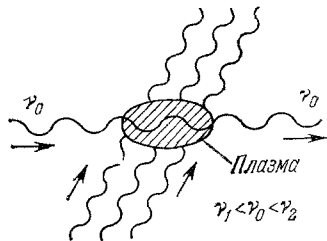


Рис. 11. Взаимодействие монохроматического излучения со спектрально-широким пучком в плазме.

*) Индексы в скобках указывают порядок приближения: 1) первое, линейное по полю вычисление скорости, на основе которого найдена энергия колебаний, 2) квадратичное по полю приближение; отметим, что $F_{z(1)} \equiv 0$.

**) Кинетическая энергия от первого приближения квадратична по полю.

дает v_0 :

$$v_1 = v_0 \left[1 + \frac{hv_0}{mc^2} (1 - \cos \theta) \right]. \quad (15.2)$$

Соответственно n_2 — число заполнения на частоте v_2 , получающейся после рассеяния,

$$v_2 = v_0 \left[1 - \frac{hv_0}{mc^2} (1 - \cos \theta) \right]. \quad (15.3)$$

Следовательно, изменение интенсивности пучка зависит от разности n_1 и n_2 на близких частотах; при широком спектре эту разность можно заменить производной,

$$\frac{d \ln n}{dt} = \frac{d \ln I_0}{dt} = \text{const} \cdot \frac{2hv^2}{mc^2} (1 - \cos \theta) \frac{\partial}{\partial v} (v^2 n). \quad (15.4)$$

Итак, в зависимости от спектра «подсветки» (а именно, в зависимости от знака производной nv^2) плазма либо эффективно ослабляет, либо усиливает пучок.

При $\partial(nv^2)/\partial v > 0$ плазма подобна инвентированной среде, т. е. усиливает пучок. Выдвигалось предложение использовать этот эффект в лабораторных условиях⁴⁹, однако оказалось, что максимально возможная амплитуда усиленных волн невелика⁵⁰.

Как объяснить воздействие накачки на монохроматический пучок в классической электродинамике?

Когда плазма подвергается воздействию двух волн — с частотами v_0 и v и амплитудами E_0 и E , возникают гапонов-миллеровские силы с разностной частотой $v_0 - v$ и амплитудой $E_0 E$. Эти силы вызывают возмущение плотности электронов, пропорциональное $E_0 E (v_0 - v)^{-2}$ по амплитуде и меняющееся со временем с частотой $v_0 - v$. Показатель преломления плазмы и ее диэлектрическая постоянная зависят от плотности электронов. Возмущение плотности означает и возмущение показателя преломления.

Волна накачки (v, E) рассеивается на возмущениях показателя преломления *). При этом частоты $(v_0 - v)$ и v складываются, появляется волна с частотой пучка v_0 .

Итак, получается

$$\frac{dE_0}{dt} \sim \delta \rho E \sim (E_0 E) E \sim E_0 E^2 \quad (15.5)$$

или

$$\frac{dI_0}{dt} \sim \frac{dE_0^2}{dt} \sim E_0^2 E^2 \sim I_0 I f(v, v_0). \quad (15.6)$$

Зависимость dI_0/dt от I_0 и интенсивности накачки квадратичная, т. е. как раз соответствует индуцированному рассеянию. Зависимость от частоты v (за которой мы не следили) такова, что в классической теории для покоящихся электронов ($T = 0$) функция $f(v, v_0) \approx d[\delta(v - v_0)]/dv$. При конечной температуре электронов $f(v, v_0)$ есть антисимметричная функция $v - v_0$, отличная от нуля в области $|v - v_0| \lesssim v_0 \sqrt{kT/mc^2}$. Для широкого спектра накачки $dI_0/dt \sim I_0 \int I f dv$ превращается в выражение с производной, выписанное в начале раздела.

16. Анизотропные поля, узкие пучки и условия применимости теории. Уравнение Компанейца и сделанные из него выводы относятся к изотропному полю излучения. Рассмотрение изотропного поля было обосновано тем, что каждый акт рассея-

*) Таков общий способ рассмотрения процессов вынужденного рассеяния^{51, 52}.

ния уменьшает вдвое анизотропию, тогда как для эволюции спектра нужно многократное рассеяния: число актов, необходимое для изменения частоты на величину порядка самой частоты ($\Delta\nu \sim \nu$), равно mc^2/kT , т. е. гораздо больше единицы.

Однако если главную роль играет индуцированное рассеяние, то может оказаться, при больших n , что скорость индуцированной эволюции спектра даже больше, чем скорость спонтанной изотропизации поля излучения. Условием является (для широкого спектра, когда $\partial n/\partial \nu \sim n/\nu$)

$$n > \frac{mc^2}{h\nu}, \quad (16.1)$$

т. е. эффективная яркостная температура излучения $kT > mc^2$. Напомним, однако, что эта температура относится к низкочастотной области спектра $\nu \ll mc^2/h$, так что ни релятивистские эффекты, ни рождение пар e^+e^- не имеют места.

Если высокая яркостная температура имеет место, то можно рассматривать индуцированные процессы в анизотропных пучках. Общая угловая ширина пучка не увеличивается, но угловые распределения разных длин волн эволюционируют по-разному. С уменьшением углов рассеяния все эффекты замедляются пропорционально $\bar{\theta}^2$. Подробно об анизотропных эффектах см. работы ^{53, 64}.

Поляризация излучения также не выравнивается в режиме индуцированного рассеяния; вопрос нуждается в точном рассмотрении. Ряд работ ⁵⁴⁻⁵⁶ посвящен эволюции спектрально узких линий при индуцированном рассеянии. Этот вопрос интересен в связи с лабораторным экспериментом; лазеры дают весьма высокую эффективную температуру в узком спектральном интервале.

В этом режиме не все электроны максвелловского распределения принимают участие в рассеянии. Соответственно, при нагреве спектрально узким излучением получается распределение электронов, убывающее быстрее, чем по максвелловскому закону при больших скоростях электронов ⁵⁶.

Из классической картины индуцированного рассеяния видны и ограничения теории: возмущения плотности вызывают электростатическое отталкивание избыточных электронов. Чтобы пренебречь этим эффектом, нужно, чтобы разность частот $|\nu_0 - \nu|$ была больше плазменной ленгмюровской частоты.

Если спектр широкий, то условие на частоты приведет к требованию, чтобы длина волны излучения была меньше дебаевского радиуса.

Вопрос об ограничениях, связанных с плазменными эффектами, рассмотрен в работах ^{55, 56}. Авторы находят приведенные выше условия достаточными, но не необходимыми, т. е. слишком жесткими.

Отметим, наконец, что индуцированное рассеяние в анизотропном поле излучения приводит к появлению средней силы, действующей на электроны и пропорциональной квадрату интенсивности, т. е. четвертой степени амплитуды поля и четвертой степени заряда электрона ¹⁵. По порядку величины эта сила $F_2 \sim \sigma q \mathcal{E}/mv^3$. Однако зависимость F_2 от углового распределения и спектра дается сложным двойным интегралом по углу и интегралом по частоте.

При изотропном распределении $\mathbf{q} = 0$ и $\mathbf{F}_2 = 0$; при осесимметричном распределении \mathbf{q} и \mathbf{F}_2 направлены по оси, но не исключено, что их направления противоположны; возможны оба знака отношения F/q . Сила \mathbf{F}_2 обращается в нуль для узкого (по углу) пучка, несмотря на то, что \mathbf{q} при этом максимально (для данного \mathcal{E}). Сила \mathbf{F}_2 того же порядка, что и известная $\mathbf{F}_1 = \sigma \mathbf{q}/c$ при яркостной температуре излучения $T_r \sim mc^2/k$.

Важный случай представляет малая анизотропия, получающаяся при медленном ($v/c = \beta \ll 1$) движении электрона относительно изотропного поля. Можно показать, что эта средняя сила пропорциональна скорости и имеет противоположное направление, т. е. тормозит электрон *). Сравнение тормозящей средней силы с той хаотической силой, которая обуславливает нагрев электронов, показывает, что для нерелятивистской температуры электронов торможение несущественно; к релятивистским электронам неприменимо уравнение Компанейца и все предшествующие расчеты и рассуждения.

Получить F_2 (которую можно назвать супергазонов-миллеровской) классически было бы нелегко. Расчет через квантовые выражения подразумевает приближение случайных фаз в теории хаотического поля. При рассмотрении спектрально узких (и узких по углу) потоков излучения это приближение необходимо проверять: первичное излучение может быть не полностью случайным, да и в ходе рассеяния может возникнуть корреляция. Напротив, результаты, относящиеся к изотропному или почти изотропному излучению с широким спектром весьма надежны, они дают прочную основу для решения многих астрофизических вопросов.

17. Неоднородное распределение электронов в пространстве. Во всем предыдущем изложении рассматривалось рассеяние одним электроном, спонтанное или индуцированное.

Подразумевалось, что в реальных условиях, когда рассеивает электронный газ, складываются потоки излучения, т. е. интенсивности излучения многих отдельных электронов. Очевидно, что возможна ситуация, когда складываются амплитуды. Пусть N электронов находятся внутри шара радиусом значительно меньше длины волны падающего излучения. Все N электронов колеблются синхронно, излучение их когерентно, амплитуда рассеянной волны в N раз больше амплитуды рассеяния одного электрона, следовательно, интенсивность рассеянного излучения возросла в N^2 раз. Итак, группа из N электронов имеют сечение, равное $\sigma_g = \sigma N^2$, где σ — томсоновское сечение одного электрона.

Этот результат легко получить формально: будем рассматривать группу как одну частицу с зарядом Ne и массой Nm . Сечение $\sigma \sim e^4 m^{-2}$; подставляя Ne , Nm вместо e , m , получим как раз написанное выше соотношение между σ_g (для группы) и σ .

Как обстоит дело в случае равномерного (однородного) распределения электронов в плазме? Надо уточнить, что здесь подразумевается *статистическая* однородность: вероятность ΔP найти один электрон в малом объеме ΔV равна $\Delta P = n_e \Delta V$, где коэффициент n_e не зависит от координат x, y, z , а также и от положений других электронов и ионов; n_e есть плотность электронов.

Не следует ли в этом случае мысленно разбить пространство на ячейки размером $\lambda/2$ и объемом $\lambda^3/8$ и объединить в группы электроны, находящиеся в одной ячейке, в количестве $N = n_e \lambda^3/8$? Такой способ действий привел бы к ошибочному результату; если здесь он упоминается, то лишь в связи со словами Нильса Бора: «хороший специалист тот, кто знает наиболее распространенные ошибки в своей области и умеет их избежать».

*) Ее можно представить в виде $F_2 = -\frac{v\sigma}{m} p \int_0^\infty v^a \left[\frac{\partial (Fv^b)}{\partial v} \right]^2 dv$; по расчету

А. Ф. Илларионова и Д. А. Компанейца (мл.) $p = 7/60 \pi$, $a = 1 \pm \sqrt{15/7}$, $b = -a/2$.

При расчете излучения, рассеянного под определенным углом из волны с волновым вектором \mathbf{k}_1 в волну с вектором \mathbf{k}_2 , войдет выражение вида

$$\sigma_g = \sigma \left| \sum_{j=0}^{j=N_1 \rightarrow \infty} e^{i(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) \mathbf{r}_j} \right|^2.$$

В этом выражении перекрестные члены дадут вклад вида

$$A = \sum_{j,l} \cos [(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l)].$$

При усреднении по статистически однородному ансамблю электронов по большому объему (размеры $L \gg \lambda$) получим $A = 0$ и останется $\sigma_g = N\sigma$, что и соответствует сложению интенсивностей. Наглядно результат объясняется просто: электроны в слое толщиной порядка λ , точнее, $\lambda/2 \cos(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$, действительно «интерферируют конструктивно», для них амплитуды складываются. Однако следующий слой дает интерференцию другого знака — «деструктивную» и т. д. В среднем члены, зависящие от интерференции волн, исчезают.

Такой сложный взгляд на простой результат полезен потому, что он дает возможность лучше почувствовать область применимости формул. Как правило, мы имеем дело с $n\lambda^3 \gg 1$. Даже в межзвездном газе $n_e \sim 0,1 - 1 \text{ см}^{-3}$, а исследуется рассеяние радиоволн с $\lambda \leq 10^4 \text{ см}$, так что $n_e \lambda^3$ достигает 10^{12} ! Сложение интенсивностей есть результат точной компенсации больших эффектов конструктивной и деструктивной интерференции. Достаточно сравнительно малого возмущения плотности электронов, например, акустической волной, для того, чтобы сечение рассеяния в определенных направлениях резко возросло. Этот эффект недавно подтвержден экспериментально. Общие формулы содержат также отражение волны от границ резкого изменения n_e . В равновесной плазме поправки возникают в связи с электростатическим взаимодействием электронов; характерным размером здесь является дебаевская длина волны. Однако развитие этих тем завело бы далеко в теорию плазмы. Вопрос о влиянии неоднородности на спонтанное рассеяние изложен для того, чтобы подчеркнуть отличие индуцированного рассеяния.

На индуцированном рассеянии не сказывается пространственная неоднородность распределения электронов!

Начнем с предельного случая: в кинетическое уравнение для фотонов входит плотность электронов и томсоновское сечение, деленное на массу электрона, т. е. комбинация

$$a = \frac{n_e \sigma}{m} \approx \frac{n_e e^4}{m^3}.$$

Объединим электроны в компактные группы по N штук. Плотность групп $n_g = n_e/N$, заряд и масса Ne , Nm . Подставляя эти величины, приходим к выводу, что a не изменилось. Другой аргумент связан с рассмотрением нагрева электронов в данном внешнем поле излучения. Учитывая эффекты, нелинейные по полю (и не учитывая собственное излучение электрона, его «радиационное трение»), получим выражение для скорости нагрева, не зависящее от того, где находятся соседние электроны. Но процесс нагрева электронов есть обратная сторона индуцированного рассеяния. Баланс энергии электронов и излучения связывает между собой эволюцию спектра при индуцированном рассеянии и описанный несколькими строками выше нагрев электронов. Еще раз, несколько иным путем, мы приходим к выводу, что пространственное распределение электронов не влияет на индуцированное рассеяние.

Частный вывод, который отсюда следует, заключается в том, что можно произвести предельный переход к размазанной электронной жидкости с данной плотностью массы $\rho = n_e m$ и плотностью заряда $q = n_e e$ — переход, обратный рассмотрению групп электронов.

Эволюцию спектра можно рассматривать, написав уравнения Максвелла и уравнения движения сплошной электронной жидкости. Отказываясь от рассмотрения отдельных точечных электронов, мы автоматически исключаем спонтанное томсоновское и комптоновское рассеяние, а заодно и квантовые эффекты. Хорошо известно, что плазменная частота и показатель преломления плазмы могут быть найдены в приближении электронной жидкости; они зависят от ne^2/m и не меняются при группировке электронов.

Обзор окажется написанным не напрасно, если найдетсЯ читатель, который проведет программу, эскизно намеченную выше.

Институт прикладной математики
АН СССР

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. А. С. Компанеев, ЖЭТФ 31, 876 (1956).
2. Я. В. Зельдович, Р. А. Сюняев, *Astrophys. and Space Sci.* 7, 3 (1970); *Comm. Astrophys. and Space Phys.* 4, 173 (1972).
3. Ю. Н. Парийский, *Астрон. ж.* 49, 1322 (1972).
4. R. Weuman, *Phys. Fluids* 8, 2112 (1965); *Astrophys. J.* 145, 560 (1966).
5. Я. В. Зельдович, Р. А. Сюняев, *Astrophys. and Space Sci.* 4, 285 (1969).
6. А. Ф. Илларионов, Р. А. Сюняев, *Астрон. ж.* 51, 698, 1162 (1974).
7. Я. В. Зельдович, И. Д. Новиков, *Строение и эволюция Вселенной*, М., «Наука», 1975; *Relativistic Astrophysics II. Cosmology and Relativity*, Chicago, Chicago Univ. Press, 1975.
8. А. Г. Дорошкевич, Я. В. Зельдович, Р. А. Сюняев, доклад на Симпозиуме № 63. Краков, 1973 (Ed. M. S. Longair, Dordrecht, D. Reidel, 1974).
9. Я. В. Зельдович, Е. В. Левич, ЖЭТФ 55, 2433 (1968).
10. Я. В. Зельдович, Р. А. Сюняев, ЖЭТФ 62, 153 (1972).
11. H. Dreiser, *Phys. Fluids* 7, 735 (1964).
12. J. Reugaud, *J. de Phys.* 29, 88, 306, 872 (1968).
13. Я. В. Зельдович, Е. В. Левич, *Письма ЖЭТФ* 11, 57 (1970).
14. П. П. Парадоксов, УФН 89, 707 (1966).
15. Е. В. Левич, ЖЭТФ 61, 112 (1971).
16. N. I. Shakura, R. A. Sunyaev, *Astron. and Astrophys.* 24, 337 (1971).
17. В. Л. Гинзбург, С. И. Сыроватский, ЖЭТФ 46, 1865 (1964).
18. В. Л. Гинзбург, С. И. Сыроватский, УФН 87, 65 (1965).
19. J. E. Felten, P. Morrison, *Astrophys. J.* 146, 686 (1966).
20. В. Л. Гинзбург, С. И. Сыроватский, УФН 87, 65 (1965).
21. В. Л. Гинзбург, В. И. Сазонов, С. И. Сыроватский, УФН 94, 63 (1968).
22. В. Л. Гинзбург, С. И. Сыроватский, *Происхождение космических лучей* М., Изд-во АН СССР, 1963.
23. И. С. Шкловский, *Космическое радиоизлучение*, М., Гостехиздат, 1956.
24. В. Н. Цытович, *Теория турбулентной плазмы*, М., Атомиздат, 1971.
25. С. А. Каплан, В. Н. Цытович, *Плазменная астрофизика*, М., «Наука», 1972.
26. E. S. Sarachik, G. T. Scharperrt, *Phys. Rev.* D1, 2738 (1970).
27. Г. С. Бисноватый-Коган, Я. В. Зельдович, Р. А. Сюняев, *Письма ЖЭТФ* 12, 64 (1970).
28. А. И. Никишов, В. И. Ритус, ЖЭТФ 46, 776 (1964); 47, 1130 (1964).
29. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, М., «Наука», 1973.
30. Я. В. Зельдович, сборник памяти И. Е. Тамма «Проблемы теоретической физики», М., «Наука», 1972, стр. 281.
31. Я. В. Зельдович, А. Ф. Илларионов, ЖЭТФ 61, 880 (1971).
32. В. Н. Лукаш, *Письма ЖЭТФ* 19, 499 (1974); ЖЭТФ 67, 1594 (1974).

33. В. Л. Гинзбург, В. В. Железняков, В. В. Зайцев, УФН 98, 201 (1969); В. Л. Гинзбург, УФН 103, 393 (1971).
 34. Ф. Дайсон, Д. Тер-Хаар, Нейтронные звезды и пульсары, М., «Мир», 1973.
 35. Сборник «Пульсары», под ред. В. В. Виткевича, М., «Мир», 1971.
 36. Я. Б. Зельдович, УФН 89, 647 (1966).
 37. Р. J. E. Peebles, Physical Cosmology, Princeton, Princeton Univ. Press, 1971.
 38. S. Weinberg, Gravitation and Cosmology, N. Y., Wiley, 1972.
 39. I. D. Novikov, Ya. B. Zeldovich, Ann. Rev. Astron. and Astrophys. 5, 627 (1966); 11, 387 (1973).
 40. P. A. M. Dirac, Month. Not. Roy. Astron. Soc. 85, 825 (1925).
 41. А. А. Галеев, В. М. Карпман, Р. З. Сагдеев, ДАН СССР 157, 1088 (1964).
 42. W. Drummond, Preprint, 1967.
 43. P. L. Kapitza, P. A. M. Dirac, Proc. Cambr. Phil. Soc. 29, 297 (1933).
 44. А. В. Гапонов М. А. Миллер, ЖЭТФ 34, 242, 751 (1958).
 45. П. Л. Капица, ЖЭТФ 21, 588 (1951); УФН 44, 7 (1951).
 46. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика, М., «Наука», 1973.
 47. М. А. Миллер, ЖЭТФ 36, 1909 (1959).
 48. Г. А. Аскарьян, ЖЭТФ 42, 1567 (1962); Г. А. Аскарьян, С. Д. Манукян, ЖЭТФ 62, 2156 (1972).
 49. В. А. Дубровский, Б. Г. Цикин. Радиотехн. и электрон. 17, 1433 (1972).
 50. А. В. Виноградов, Б. Я. Зельдович, И. И. Собельман, Письма ЖЭТФ 17, 271 (1973).
 51. Н. Бломбергс, УФН 97, 307 (1969).
 52. Б. Я. Зельдович, И. И. Собельман, УФН 101, 3 (1970).
 53. В. Я. Гольдин, Р. А. Сюняев, Б. Н. Четверушкин, ЖЭТФ 68, 36 (1975).
 54. Я. Б. Зельдович, Е. В. Левич, Р. А. Сюняев, ЖЭТФ 62, 1322 (1972).
 55. А. А. Галеев, Р. А. Сюняев, ЖЭТФ 63, 1266 (1972).
 56. А. В. Виноградов, В. В. Пустовалов, ЖЭТФ 62, 980 (1972); сборник «Квантовая электроника», под редакцией Н. Г. Басова, вып. 8, М., «Сов. радио», 1972, стр. 3.
 57. J. Lodenquai, V. Canuto, M. Ruderman, Phys. Rev. D3, 2303 (1971).
 58. Ю. Н. Гнедин, Р. А. Сюняев, ЖЭТФ 65, 102 (1973).
 59. М. М. Баско, Р. А. Сюняев, Astron. and Astrophys. (1975).
 60. В. Л. Гинзбург, В. В. Железняков, Ann. Rev. Astron. and Astrophys. 13 (1975).
 61. L. S. Ornstein, H. C. Burger, Zs. Phys. 20, 345, 351 (1923).
 62. W. Pauli, Jr., ibid. 18, 272 (1923).
 63. W. Pauli, Jr., ibid. 22, 261 (1924).
 64. Я. Б. Зельдович, Р. А. Сюняев, ЖЭТФ 68 (3) (1975).
-