1975 г. Декабрь *Том 117, вып. 4*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

539.12.01

СИММЕТРИИ МЕЖДУ БОЗОНАМИ И ФЕРМИОНАМИ И СУПЕРПОЛЯ

В. И. Огиевецкий, Л. Мезинческу

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение 637
2. Алгебры суперсимметрий 643
а) Минимальное спинорное расширение группы Пуанкаре (643). б). Тензор энергии-импульса и спин-векторный ток (645). в) Неприводимые представления суперсимметрий (646).
3. Суперполя 647
а) Суперпространство (647). б) Концепция суперполя (649). в) Ковариантные спинорные производные (651). г) Суперполя и представления группы суперсимметрий (652). д) Преобразования бозонных и фермионных полей (653).
4. Лагранжева теория суперполей 655
а) Явно инвариантные интегралы от суперполей (655). б) Лагранжианы для простых суперполей (657). в) Суперток (659).
5. Инвариантная теория возмущений 661
а) Пропагаторы (662). б) Правила Фейнмана в модели Весса и Зумино (664). в) Тождества Уорда (666). г) Сокращение расходимостей в высших порядках (669).
6. Суперсимметричное обобщение теорий Янга — Миллса 670
7. Объединение внутренних симметрий и суперсимметрий 675
8. Попытки нарушения суперсимметрий 677
9. Заключение 679
Приложение 680
1. Полезные соотношения спинорного формализма (680). 2. Произведения ковариантных производных (680).
Цитированная литература 681

«Никто не может заранее предсказать, какой следующий закон природы будет открыт. Тем не менее, законы природы обладают структурой, называемой нами принципами инвариантности. В некоторых случаях эта структура простирается настолько далеко, что позволяет находить новые законы природы на основе постулата о том, что законы должны обладать определенной инвариантностью.

Е. Вигнер («Этюды о симметрии»)

1. ВВЕДЕНИЕ

Принципы симметрии всегда играли важнейшую роль в физике. Эта роль особенно возросла в последнее время. Открыто огромное число новых частиц и резонансов, однако пока не известны законы природы, которые количественно и точно описывали бы взаимодействия между элементарными частицами, спектр масс и так далее. Только квантовая электродинамика может претендовать на количественное описание чисто электромагнитных взаимодействий.

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Успехи физических наук», 1975 г.

Вместе с тем установлен ряд принципов точных и приближенных симметрий, которые позволяют ориентироваться в имеющихся экспериментальных данных и подсказывают теоретические модели, постановку и результаты новых опытов, способствующих более глубокому проникновению в понимание природы. Изотопическая инвариантность сильных взаимодействий и ее обобщение — гипотеза об унитарной SU (3)-симметрии — привели к систематике адронов Гелл-Манна и Нишиджимы. При исследовании инвариантности относительно дискретных симметрий (пространственного отражения, обращения времени и зарядового сопряжения) был открыт один из самых красивых в физике элементарных частиц эффектов, эффект Гелл-Манна, Пайса и Пиччиони для K-мезонов, и построены феноменологическая теория слабого взаимодействия. Недавно открытые новые узкие резонансы, ψ-частицы, усиленно обсуждаются на основе гипотез о высших изощренных симметриях и связанных с ними кварковых моделях и т. д.

Гипотезы о принципах симметрии в определенных ситуациях приводят к построению последовательных теорий. Соединение идей калибровочных симметрий и спонтанного нарушения позволило построить единую перенормируемую теорию слабых и электромагнитных взаимодействий.

Царствует над симметриями инвариантность относительно группы Пуанкаре, состоящей из преобразований Лоренца, вращений и сдвигов в пространстве-времени. Фундаментальное значение имеет и симметрия относительно перестановок тождественных частиц, которая ведет к разделению частиц на фермионы, обладающие полуцелым спином и подчиняющиеся статистике Ферми — Дирака, и на бозоны, обладающие целым спином и подчиняющиеся статистике Бозе — Эйнштейна.

Преобразования всех традиционных симметрий не смешивают частицы с различным спином. Так, в октуплет барионов по унитарной симметрии входят нуклоны, λ-, Σ- и Ξ-частицы, и все они имеют один и тот же спин, равный 1/2.

В последние несколько лет появилось и бурно развивается новое направление в теории симметрий элементарных частиц — исследование суперсимметрий. Как это ни парадоксально, оказалось принципиально возможным связать преобразованиями суперсимметрии поля частиц с целым и полуцелым спином, подчиняющиеся разным статистикам, и объединить бозоны и фермионы в обобщенные мультиплеты. Введение суперсимметрий значительно расширяет область принципов симметрий, потенциально применимых в релятивистской квантовой теории поля и теории элементарных частиц. Уже первые шаги привели к сюрпризам: новый сохраняющийся спин-векторный ток связан преобразованием суперсимметрии с такой фундаментальной величиной, как тензор энергии-импульса [36,102], в простейшей суперсимметричной модели резко сокращается число расходимостей по сравнению с обычными моделями теории поля (необходима только одна константа перенормировки вместо большого числа ожидаемых), обращаются в нуль все диаграммы вакуумных петель и среднее по вакууму от тензора энергии-импульса и так далее.

Подчеркнем, что пока еще на создана какая-либо реалистическая суперсимметричная теория. Совпадение масс фермионов и бозонов из одного неприводимого представления суперсимметрий заставляет искать ее удачное нарушение. Имеются и другие неясности, например, связанные с сохранением числа фермионов. Вспомним, однако, что теория калибровочных полей Янга — Миллса во время ее создания была также нереалистической (равенство нулю массы векторных полей). Понадобилось около пятнадцати лет, чтобы построить на ее основе с привлечением идеи о спонтанном нарушении реалистическую модель единую — теорию слабых и электро-

магнитных взаимодействий, перенормируемую и содержащую массивные промежуточные векторные бозоны. Можно надеяться, что создание физической теории с применением суперсимметрий произойдет за более короткий период. Уже сейчас суперсимметрия помогает строить модели теории поля с асимптотическими свободными безмассовыми [80,100] и массивными [21] (при ее нарушении) частицами. Суперсимметрии очень необычны, своеобразны и требуют привыкания. При написании настоящей статьи мы преследовали цель дать по возможности понятное введение в теорию суперсимметрий и способствовать привыканию к ним. Проследим специфику суперсимметрии на примере простейшего супермультиплета. Он состоит из комплексного бесспинового поля $A_1(x)$, двухкомпонентного спинора $\psi_\alpha(x)$ и вспомогательного комплексного бесспинового поля $F_1(x)$. Инфинитезимальные преобразования в суперсимметрии, смешивающие бозоны и фермионы, записываются в виде

$$\delta_\zeta A_1(x) = \zeta^\alpha \psi_\alpha(x), \quad \delta_\zeta F_1(x) = -i\partial^\mu \psi^\alpha(x)(\sigma_\mu)_{\alpha\dot\beta}\bar\zeta^{\dot\beta},$$
$$\delta_\zeta \psi_\alpha(x) = 2i(\sigma_\mu)_{\alpha\dot\beta}\bar\zeta^{\dot\beta}\partial^\mu A_1(x) + 2\zeta_\alpha F_1(x), \tag{1.1}$$

где ζ — спинорный параметр преобразования ($(\sigma_\mu)_{\alpha\dot\beta} = (1, \sigma_i)$; см. обозначения ниже). Так как фермионные поля антикоммутируют между собой, а бозонные коммутируют, то возникает очень непривычная ситуация, в которой параметры преобразования должны антикоммутировать между собой, $\{\zeta_\alpha, \zeta_\beta\} = 0$, вместо того, чтобы быть c-числами, как обычно. Групповое свойство этих преобразований выражается в том, что коммутатор двух преобразований суперсимметрии есть сдвиг. Например,

$$\delta_\eta\delta_\zeta A_1(x) = 2i(\zeta\sigma_\mu\bar\eta)\,\partial^\mu A_1(x) + \zeta^\alpha\eta_\alpha F_1(x),$$
$$(\delta_\eta\delta_\zeta - \delta_\zeta\delta_\eta)\,A_1(x) = 2i(\zeta\sigma_\mu\bar\eta - \eta\sigma_\mu\bar\zeta)\,\partial^\mu A_1(x). \tag{1.2}$$

Сдвиги коммутируют с преобразованиями (1.1) и образуют вместе с ними супергруппу, обобщенную группу, содержащую как коммутирующие,так и антикоммутирующие параметры. Математическая теория таких обобщенных групп развита совсем недавно, в 1970 г., Березиным и Кацем [7]. Чтобы получить соответствующую обобщенную алгебру Ли, представим преобразования (1.1) в виде

$$\delta A_1(x) = i[\zeta^\alpha Q_\alpha + \bar Q_{\dot\alpha}\bar\zeta^{\dot\alpha}, A_1(x)], \tag{1.3}$$

где Q, $\bar Q$ — спинорные генераторы, явный вид которых определяется в соответствующей модели теории поля. В коммутаторе (1.2) двух таких преобразований за счет антикоммутативности спинорных параметров возникнут антикоммутаторы спинорных генераторов вместо коммутаторов. Возникает алгебра

$$\{Q_\alpha, \bar Q_{\dot\beta}\} = 2(\sigma_\mu)_{\alpha\dot\beta}P^\mu, \quad \{Q_\alpha, Q_\beta\} = \{\bar Q_{\dot\alpha}, \bar Q_{\dot\beta}\} = 0, \quad [P_\mu, Q_\alpha] = [P_\mu, \bar Q_{\dot\alpha}] = 0, \tag{1.4}$$

где $P_\mu = -i\partial_\mu$ — генератор сдвигов. Тот факт, что генераторы, превращающие взаимно фермионы в бозоны, должны удовлетворять именно антикоммутационным соотношениям, обусловлен, с другой стороны, их фермионным характером. В суперсимметричных теориях *сохраняется спин-векторный ток* $J_{\mu,\alpha}(x)$, *содержащий нечетное число фермионных полей*

$$\partial^\mu J_{\mu,\alpha} = 0, \quad Q_\alpha = \int d^3x J_{0,\alpha}(x). \tag{1.5}$$

Алгебра суперсимметрий содержит (1.4), алгебру группы Пуанкаре и коммутаторы между Q_α, $\overline{Q}_{\dot\alpha}$ и генераторами группы Лоренца, определенные тем, что Q_α и $\overline{Q}_{\dot\alpha}$ преобразуются по представлениям (1/2, 0) и (0, 1/2) группы Лоренца.

Неприводимые представления суперсимметрий, супермультиплеты, содержат в качестве компонент бозонные и фермионные поля. Мы привыкли к тому, что компоненты данного неприводимого представления, мультиплета, можно пронумеровать некоторым индексом. Например, в изотопической симметрии «нуклон» $N=\begin{pmatrix} P \\ n \end{pmatrix}$ объединяет протон и нейтрон, так что N_1 описывает протон, а N_2 — нейтрон и т. д. Как снабдить чем-то вроде индексов бозонные и фермионные поля из данного супермультиплета, обладающие разной статистикой, и рассматривать их воедино? Ответ на этот вопрос связан с реализацией спинорных генераторов. Их антикоммутатор дает сдвиги (см. (2.3) в гл. 2) и поэтому преобразования суперсимметрии действуют на координаты пространства-времени. Однако только из операций дифференцирования по x_μ и самих координат нельзя построить спинорный генератор. Введем дополнительные антикоммутирующие спинорные «координаты» θ^α и $\overline{\theta}^{\dot\beta}$.

$$\{\theta^\alpha, \theta^\beta\}=\{\theta^\alpha, \overline{\theta}^{\dot\beta}\}=\{\overline{\theta}^{\dot\alpha}, \overline{\theta}^{\dot\beta}\}=0, \tag{1.6}$$

и рассмотрим восьмимерное «суперпространство» x_μ, θ, $\overline{\theta}$. В суперпространстве уже можно реализовать спинорные генераторы в виде операций сдвига по обычным и спинорным координатам (см. гл. 3):

$$Q_\alpha=-i\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}, \quad \overline{Q}_{\dot\alpha}=i\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot\alpha}}+2(\theta\sigma_\mu)_{\dot\alpha}\partial^\mu, \tag{1.7}$$

и рассматривать суперполя $\Phi_{\mu,\nu,\ldots,\alpha}(x, \theta, \overline{\theta})$. Простейшим суперполем является $\Phi(x, \theta)$ — киральное скалярное суперполе. Киральное—потому что оно зависит от одного кирального спинора θ, скалярное — потому что оно не содержит внешних векторных или спинорных индексов. Разложим $\Phi(x, \theta)$ в ряд по степеням θ. В силу (1.6) $(\theta^1)^2=(\theta^2)^2\equiv 0$, и разложение оборвется на втором члене (произведение трех θ всегда содержит два одинаковых θ и равно нулю)

$$\Phi(x, \theta)=A_1(x)+\theta^\alpha\psi_\alpha(x)+\theta^\alpha\theta_\alpha F_1(x). \tag{1.8}$$

Различие в статистиках фермионных и бозонных полей компенсируется введением антикоммутирующих спинорных величин θ.

Записывая закон инфинитезимального преобразования суперсимметрии в виде

$$\delta\Phi(x, \theta)=i(\zeta^\alpha Q_\alpha+\overline{Q}_{\dot\alpha}\overline{\zeta}^{\dot\alpha})\Phi(x, \theta), \tag{1.9}$$

мы получаем (1.1). Итак, удается объединить бозонные и фермионные компоненты супермультиплета в единый объект — суперполе. Более сложные суперполя зависят и от θ и от $\overline{\theta}$, имеют внешние индексы и описывают высшие представления группы суперсимметрий. Для всех них справедлив закон преобразования типа (1.9), и они всегда эквивалентны некоторому конечному набору фермионных и бозонных полей в обычном пространстве — некоторому супермультиплету.

Введение суперполей позволяет алгоритмически, экономно и удобно строить лагранжеву теорию суперполей, которая в конечном итоге оказы-

вается эквивалентной обычной локальной теории бозонных и фермионных полей со специфическими связями между константами взаимодействий. Характерной особенностью является наличие вспомогательных полей (типа $F_1(x)$ в (1.8)), которые входят в лагранжиан без производных и могут быть исключены. После их исключения суперсимметрия остается в неявном виде и проявляется в сохранении спин-векторного тока.

Идея о возможном объединении фермионов и бозонов в одно семейство в полуфантастическом плане обсуждалась в 1964 г. Липкином [56] *) (барбар(ион)ская **) классификация»). Он отметил, что $SU(3)$-классификация барионного, псевдоскалярного, векторного и антибарионного октуплетов «инвариантна» относительно одновременной перестановки изотопического спина с обычным спином и гиперзаряда с барионным числом (см. таблицу).

	$S=1/2,\ B=1$	$S=0,\ B=0$	$S=1,\ B=0$	$S=1/2,\ B=-1$
$T=1/2,\ Y=1$	N	K	K^*	$\bar{\Xi}$
$T=0,\ Y=0$	Λ	η	$\omega\ (\varphi)$	$\bar{\Lambda}$
$T=1,\ Y=0$	Σ	π	ρ	$\bar{\Sigma}$
$T=1/2,\ Y=-1$	Ξ	$\bar{K}$	$\bar{K}^*$	$\bar{N}$

При обычной $SU(3)$-классификации частицы с одним спином s и барионным числом B объединяются в октуплеты, компоненты которых характеризуются значениями изоспина T и гиперзаряда Y (столбцы таблицы).

При барбарионской классификации в одно семейство объединяются частицы с общим изоспином и гиперзарядом, и компоненты каждого семейства имеют разный обычный спин и барионное число. Предлагается рассматривать прямое произведение обычной $SU(3)$-и барбарионской симметрии. Отметим также, что в связи с обобщениями алгебры токов в шестидесятые годы предпринимались попытки ввести фермионные токи, меняющие барионное число [38,62,110], а также исследовались некоторые модели теории поля с фермионными генераторами [91,92].

Суперсимметрии приобрели фундамент после пионерских работ Гольфанда и Лихтмана [26,27,57], в которых были предложены и исследованы спинорные расширения группы Пуанкаре, алгебры суперсимметрий и их представления. В связи с возможной трактовкой нейтрино как голдстоуновской частицы [104] значительный вклад в развитие и понимание суперсимметрий внесли Волков и Акулов [16,18,20], которые рассмотрели их нелинейные реализации. Интерес к суперсимметриям резко возрос в результате появления конструктивных статей Весса и Зумино [12,13], выявивших исключительное свойство — перенормируемость предложенной ими модели. Весс и Зумино не знали о предшествующих работах и обобщили так называемые суперкалибровочные симметрии, возникающие в дуальных моделях [3,25,34,64]. Важный шаг был сделан Саламом и Стратди [77], которые ввели антикоммутирующие спинорные координаты, суперпространство и концепцию суперполя. Заметим, что возможная спинорная структура пространства-времени обсуждалась в связи с желанием объединить внутренние и пространственно-временные симметрии Смржем, Араки и Окубо [4,88], а в связи с перспективами квантования

*) Не лишено интереса, что статья Липкина развивает его шуточную заметку в «Jocular Physics for Pedestrians» за 1962 г.

**) В оригинале «barbaryon» (ср. «barbarian» (*англ.*)).

теория тяготения пропагандируется Пенроузом [70]. Возможная взаимосвязь суперсимметрий и теории тяготения подчеркивалась Д. Волковым и Сорокой [19]. Установленный Феррара и Зумино [102] факт, что сохраняющийся спин-векторный ток и тензор энергии-импульса входят в одно суперполе-суперток — побуждает серьезно думать в этом направлении.

Резюмируем содержание обзора. Во второй главе продемонстрирована единственность минимального расширения алгебры группы Пуанкаре и описаны неприводимые представления. При ненулевой массе покоя неприводимое представление с данным суперспином Y содержит поля со спином $Y + (1/2)$, Y, Y и $Y - (1/2)$, а при нулевой массе покоя только два поля с соседними значениями суперспина. Уже из самой алгебры просто получить важное следствие, что в любой суперсимметричной теории среднее по вакууму тензора энергии-импульса обращается в нуль. В гл. 3 подробно обсуждаются понятия суперпространства и суперполя, свойства суперполей при отражении пространства, обращении времени и т. д. Мы стараемся показать, что обращаться с теорией суперполя не намного сложнее, чем с теорией поля, подчеркиваем далеко прослеживаемые аналогии. Развитый Березиным [6] обобщенный математический анализ на гроссмановой алгебре оказывается адекватным проблеме и упрощает ситуацию. В гл. 4 обсуждается лагранжева теория суперполей простого вида. Как и в случае обычных полей (например, векторного поля A_μ), общие суперполя отягчены лишними компонентами, которые либо обращаются в нуль дополнительными условиями, следующими из уравнений движения (при ненулевой массе покоя), либо обезвреживаются соответствующей калибровочной инвариантностью. Далее излагается конструкция супертока-суперполя, содержащего сохраняющийся спин-векторный ток и тензор энергии-импульса. Гл. 5 посвящена инвариантной теории возмущений для суперполей на простом примере модели Весса и Зумино. Использование формального интегрирования по антикоммутирующим переменным [6], простых свойств дельта-функции от них и тождеств Уорда (см. [107] и нашу статью [61]) позволяет детально и просто проследить сокращение расходимостей и другие удивительные особенности этой модели. Читатель, не интересующийся техникой вычислений, может пропустить п. в) и г) этой главы. Исследования 1974 г. по суперсимметричному обобщению Янга — Миллса и электродинамики кратко изложены в гл. 6 [14,80,87,100]. Намечается возможность и более глубоких калибровочных теорий суперсимметрий, в которых калибровочные поля имеют спин 1 и 3/2. В гл. 7 кратко излагается нетривиальное сочетание внутренних симметрий и суперсимметрий [20,33,78,82,83,109]. В свое время в рамках обычных групп Ли была доказана невозможность релятивизации унитарной $SU(6)$-симметрии без нарушения локальности теории. Суперсимметрии позволяют по-новому подойти к этой проблеме, сочетание внутренних и суперсимметрии в локальной теории возможно, но получающиеся супермультиплеты должны быть непомерно обширными и массы всех входящих в них частиц должны совпадать [51а,109]. Ключевая для суперсимметрий проблема их нарушения, без решения которой нельзя построить физическую суперсимметричную модель, очень кратко обсуждается в последней главе. Краткость обусловлена тем, что пока имеются только некоторые попытки, а поиск подходящего реалистического нарушения — дело будущего.

В статье используются двухкомпонентные спиноры с индексами с точкой и без точки (см. ниже, раздел «Обозначения» в этой главе), что технически удобно при обсуждении модели Весса и Зумино. Полезные сведения по эквивалентному формализму с майорановскими спинорами читатель может почерпнуть из содержательной статьи Салама и Стратди [82].

Обозначения. Сигнатура метрического тензора $\eta_{\mu\nu}$ $(+---)$. Используются двухкомпонентные спиноры с точечными и неточечными индексами [9,11,67]:

$$\theta_\alpha^+ = \bar\theta_{\dot\alpha}, \quad \theta^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta}\theta_\beta, \quad \theta_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta}\theta^\beta,$$

$$\varepsilon^{\alpha\beta} = -\varepsilon^{\beta\alpha}, \quad \varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta} = -\varepsilon^{\dot\beta\dot\alpha}, \quad \varepsilon^{12} = -\varepsilon_{12} = \varepsilon^{\dot1\dot2} = -\varepsilon_{\dot1\dot2} = 1,$$

$$\theta Q = \theta^\alpha Q_\alpha = -\theta_\alpha Q^\alpha, \quad \bar\theta\bar Q = \bar\theta_{\dot\alpha}\bar Q^{\dot\alpha} = -\bar\theta^{\dot\alpha}\bar Q_{\dot\alpha},$$

$$(\sigma_\mu)_{\alpha\dot\beta} = (1, \boldsymbol\sigma)_{\alpha\dot\beta}, \ (\tilde\sigma^\mu)^{\alpha\dot\beta} = (1, -\boldsymbol\sigma)^{\alpha\dot\beta}$$

(где $\boldsymbol\sigma$ — матрицы Паули), $\sigma_{\mu\nu} = (\sigma_\mu\tilde\sigma_\nu - \sigma_\nu\tilde\sigma_\mu)/2i$, $\tilde\sigma_{\mu\nu} = (\tilde\sigma_\mu\sigma_\nu - \tilde\sigma_\nu\sigma_\mu)/2i$.

Дираковский биспинор $\Psi = \begin{pmatrix}\psi_\alpha \\ \varkappa^{\dot\alpha}\end{pmatrix}$, майорановский $\Psi = \begin{pmatrix}\psi_\alpha \\ \psi^{\dot\alpha}\end{pmatrix}$. Подразумевается параметризация γ-матриц и матрицы зарядового сопряжения, в которой

$$\gamma_\mu = \begin{pmatrix}0 & \sigma_\mu \\ \tilde\sigma_\mu & 0\end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix}\varepsilon_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\end{pmatrix}, \quad \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\eta_{\mu\nu},$$

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \quad \hat\partial = \sigma_\mu\partial^\mu, \quad \tilde\partial = \gamma_\mu\partial^\mu, \quad \varepsilon_{0123} = 1.$$

2. АЛГЕБРЫ СУПЕРСИММЕТРИЙ

а) Минимальное спинорное расширение группы Пуанкаре

Простейшая и наиболее популярная группа суперсимметрий отвечает минимальному спинорному расширению группы Пуанкаре. Ее алгебра включает наряду с генераторами 4-вращений $L_{\mu\nu}$ и сдвигов P_μ с перестановочными соотношениями

$$\begin{gathered}[L_{\mu\nu}, L_{\lambda\rho}] = -i(\eta_{\mu\lambda}L_{\nu\rho} + \eta_{\nu\rho}L_{\mu\lambda} - \eta_{\mu\rho}L_{\nu\lambda} - \eta_{\nu\lambda}L_{\mu\rho}) \\ [L_{\mu\nu}, P_\lambda] = -i(\eta_{\mu\lambda}P_\nu - \eta_{\nu\lambda}P_\mu), \quad [P_\mu, P_\nu] = 0\end{gathered} \tag{2.1}$$

только один спинорный генератор Q_α и сопряженный к нему $\bar Q_{\dot\alpha}$. По определению спинора

$$[L_{\mu\nu}, Q_\alpha] = \frac{1}{2}(\sigma_{\mu\nu})_\alpha{}^\beta Q_\beta, \quad [L_{\mu\nu}, \bar Q_{\dot\alpha}] = \frac{1}{2}(\tilde\sigma_{\mu\nu})_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta}\bar Q_{\dot\beta}. \tag{2.2}$$

Чтобы замкнуть алгебру, следует задать, как обсуждалось во введении, антикоммутаторы между спинорными генераторами и коммутаторы между ними и сдвигами. Единственной возможной алгеброй без привлечения дополнительных генераторов оказывается алгебра *)

$$\{Q_\alpha, \bar Q_{\dot\beta}\} = 2(\sigma_\mu)_{\alpha\dot\beta}P^\mu, \tag{2.3а}$$

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = \{\bar Q_{\dot\alpha}, \bar Q_{\dot\beta}\} = 0, \tag{2.3б}$$

$$[Q_\alpha, P_\mu] = [\bar Q_{\dot\alpha}, P_\mu] = 0 \tag{2.3в}$$

*) Алгебра суперсимметрий (2.1)—(2.3), как и алгебра группы Пуанкаре, не является простой супералгеброй. Отметим, что Кац [50а] дал классификацию всех простых супералгебр.

(определение матриц σ_μ, $\sigma_{\mu\nu}$, $\tilde{\sigma}_{\mu\nu}$ было приведено в разделе «Обозначения» гл. 1).

Наметим доказательство. Генераторы описываются следующими представлениями группы Лоренца: $P_\mu \to (1/2,\ 1/2)$, $L_{\mu\nu} \to (1,0) + (0,\ 1)$, $Q_\alpha \to (1/2,\ 0)$, $\bar{Q}_{\dot{\alpha}} \to (0,\ 1/2)$. Отсюда следует, что совместный с релятивистской инвариантностью наиболее общий вид соотношений (2.3б) и (2.3в) есть

$$\{Q_\alpha,\ Q_\beta\} = c_1 \{\sigma_\mu \tilde{\sigma}_\nu\}_{\alpha\beta} L^{\mu\nu}, \tag{2.3б'}$$

$$[Q_\alpha,\ P_\mu] = c_2 (\sigma_\mu \bar{Q})_\alpha \tag{2.3в'}$$

и сопряженные к ним (c_1, c_2 — константы). Коммутируя (2.3в') с P_μ и применяя тождества Якоби, находим, что $c_2 = 0$. Коммутируя после этого (2.3б') с P^μ, мы убеждаемся, что и $c_1 = 0$. Наиболее общий вид соотношения (2.3а) сводится к замене коэффициента 2 в правой части на положительную вещественную константу A, значение которой определяется нормировкой Q. Положительность этой константы связана с тем примечательным фактом, что гамильтониан $\mathcal{H} = P^0$ выражается через спинорные генераторы [37]. Из (2.3а) вытекает

$$P^0 = \frac{1}{4} \{Q_\alpha,\ (\sigma^0)^{\alpha\dot{\beta}} \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = \frac{1}{4} \{Q_\alpha,\ (Q_\alpha)^+\}. \tag{2.4}$$

При пространственном отражении

$$Q_\alpha \to i\,(\sigma_0 \bar{Q})_\alpha, \quad P^0 \to P^0, \quad P^i \to -P^i, \tag{2.5}$$

и эта операция является автоморфизмом алгебры.

В литературе супералгебра (2.1) — (2.3) часто используется не в спинорном формализме Ван-дер-Вардена, а в биспинорном. Приведем в этой связи формулы для сравнения. Для майорановского биспинорного генератора

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} Q_\alpha \\ \bar{Q}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \quad \bar{S} = S^+ \gamma_0 \quad S_c = C\bar{S}^T = S \tag{2.6}$$

соотношения супералгебры (2.2), (2.3) принимают вид

$$\{S_\rho,\ \bar{S}_\tau\} = -(\gamma_\mu C)_{\rho\tau} P^\mu, \quad [P^\mu,\ S] = 0, \quad [L_{\mu\nu},\ S] = \frac{1}{2} \sigma_{\mu\nu} S. \tag{2.3'}$$

Такая форма используется в работах Салама, Стратди [77–84] и некоторых других авторов.

Подчеркнем, что супералгебра (2.1) — (2.3) впервые была предложена и исследована Гольфандом и Лихтманом [26,27] в биспинорном формализме с генераторами

$$W = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} Q_\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{W} = \frac{1}{\sqrt{2}} (0,\ \bar{Q}_{\dot{\alpha}}), \tag{2.7}$$

для которых из (2.1) — (2.3) следует, что

$$\begin{gathered} \{W,\ \bar{W}\} = \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \gamma_\mu P^\mu, \quad [L_{\mu\nu},\ W] = \frac{1}{2} \sigma_{\mu\nu} W, \\ \{W,\ W\} = \{\bar{W},\ \bar{W}\} = [P_\mu,\ W] = [P_\mu,\ \bar{W}] = 0. \end{gathered} \tag{2.8}$$

Гольфанд и Лихтман [26,27] обсуждали и другие алгебры в биспинорном формализме. Имеются и более широкие алгебры, в частности, спинорное расширение конформной группы [97,33], впервые осуществленное Вессом

и Зумино [12], а также алгебры суперсимметрий с включением внутренних симметрий. Основное внимание мы будем уделять простейшей суперсимметрии, основанной на алгебре (2.1) — (2.3).

Супералгебра (2.1) — (2.3) есть частный случай градуированной алгебры [7,46]. (Генераторы Q, $\overline{Q}$ снабжены градуировкой 1, $L_{\mu\nu}$ и P_μ — градуировкой 0. Перестановочные соотношения для операторов X и Y с градуировками k_x и k_y задаются в виде $XY - (-1)^{k_x k_y} YX$.) Градуированным алгебрам отвечают обобщенные группы Ли (назовем их супергруппами). Параметры преобразований, связанные с генераторами градуировки 1, антикоммутируют между собой, т. е. являются элементами алгебры Грассмана [6,7]. Так, в нашем случае следует ввести спинорные параметры ζ^α, $\bar{\zeta}^{\dot\alpha}$

$$\{\zeta^\alpha, \bar{\zeta}^{\dot\alpha}\} = \{\zeta^\alpha, \zeta^\beta\} = \{\bar{\zeta}^{\dot\alpha}, \bar{\zeta}^{\dot\beta}\} = 0, \tag{2.9}$$

а также

$$\{\zeta^\alpha, Q_\beta\} = \{\zeta^\alpha, \overline{Q}_{\dot\beta}\} = \{\bar{\zeta}^{\dot\alpha}, Q_\alpha\} = \{\bar{\zeta}^{\dot\alpha}, \overline{Q}_{\dot\beta}\} = 0. \tag{2.10}$$

Привлекая спинорные параметры, можно представить антикоммутаторы (2.3а), (2.3б) в виде коммутаторов спинорных преобразований [77]

$$[\zeta_1 Q, \overline{Q}\bar{\zeta}_2] = 2\zeta_1\sigma_\mu\bar{\zeta}_2 P^\mu, \qquad [\bar{\zeta}_1\overline{Q}, \bar{\zeta}_2\overline{Q}] = 0, \quad [\zeta_1 Q, \zeta_2 Q] = 0. \tag{2.11}$$

Конечное преобразование супергруппы запишется (c_μ — параметры сдвигов)

$$G(\zeta, c) = \exp[-i(\zeta Q + \overline{Q}\bar{\zeta} + c_\mu P^\mu)]. \tag{2.12}$$

Закон композиции и групповые свойства видны из формулы умножения *)

$$G(\zeta_1, c_1)\, G(\zeta_2, c_2) = G(\zeta_1 + \zeta_2, c_{1\mu} + c_{2\mu} - i\zeta_1\sigma_\mu\bar{\zeta}_2 + i\zeta_2\sigma_\mu\bar{\zeta}_1). \tag{2.13}$$

Строгое математическое определение действия супергрупп читатель может найти в статьях [7,9а]. Специфическая особенность супергруппы в том, что групповой закон

$$\begin{aligned} c_\mu &= c_{1\mu} + c_{2\mu} - i\zeta_1\sigma_\mu\bar{\zeta}_2 + i\zeta_2\sigma_\mu\bar{\zeta}_1, \\ \zeta &= \zeta_1 + \zeta_2, \end{aligned} \tag{2.14}$$

представляет собой отображение супералгебры с удвоенным числом образующих $C_{1\mu}$, $C_{2\mu}$, ζ_1, $\bar{\zeta}_1$, ζ_2, $\bar{\zeta}_2$ в супералгебру с образующими C_μ, ζ, $\bar{\zeta}$.

б) Тензор энергии-импульса и спин-векторный ток

В суперсимметричной теории поля возникает сохраняющийся спин-векторный ток $J^\mu_\alpha(x)$, $\partial_\mu J^\mu_\alpha(x) = 0$, в терминах которого спинорные генераторы —« суперзаряды»— записываются в виде

$$Q_\alpha = \int d^3x J^0_\alpha(x), \quad \overline{Q}_{\dot\alpha} = \int d^3x \overline{J}^0_{\dot\alpha}(x). \tag{2.15}$$

Зумино [36] заметил, что основное перестановочное соотношение (2.3а) можно рассматривать как результат интегрирования локального соотношения

$$\{J^\mu_\alpha(x), \overline{Q}_{\dot\beta}\} = 2(\sigma_\nu)_{\alpha\dot\beta} T^{\mu\nu}(x) + \text{о.ш.ч.}, \tag{2.16}$$

*) Использовано тождество Кемпбелла — Хаусдорфа в простейшей форме $\exp A \cdot \exp B = \exp(A + B + (1/2)[A, B])$, применимое при $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$.

где о. ш. ч. обозначает операторные швингеровские члены *), а $T_{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса (напомним, что $P^\nu = \int d^3x T^{0\nu}(x)$). Из (3.21) следует, что в пределе точной суперсимметрии, когда суперзаряды хорошо определены и дают нуль при действии на вакуум, должно обращаться в нуль среднее по вакууму от тензора энергии-импульса

$$\langle T^{\mu\nu}(x)\rangle = 0. \tag{2.17}$$

Здесь мы сталкиваемся с очень необычной ситуацией: до сих пор не были известны полевые модели, в которых вакуумное среднее тензора энергии-импульса, связанное с индуцированным космологическим членом в уравнениях Эйнштейна, тождественно бы исчезало. Заметим, что тождество (2.17) теряет силу при спонтанном нарушении [36]. Появляются голдстоуновские спиноры [16, 22] с нулевой массой и суперзаряды уже не аннигилируют вакуум в соотношении (2.16). Эти рассуждения подсказывают, что суперсимметрия может оказаться важной в теории тяготения [12, 19, 102].

в) Неприводимые представления суперсимметрий

Одним из операторов Казимира супералгебры служит оператор квадрата 4-импульса $C_1 = P_\mu P^\mu$. Второй оператор Казимира, обобщающий оператор квадрата спина в группе Пуанкаре, строится на основе обобщения вектора Паули — Любанского [57, 78]. Именно, рассмотрим

$$K_\mu = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}L^{\nu\lambda}P^\rho - \frac{1}{8}(\sigma_\mu)_{\alpha\dot\beta}[Q^\alpha, \bar{Q}^{\dot\beta}]. \tag{2.18}$$

Из (2.2) и (2.3) находим, что оператор $K_{\mu\nu} = P_\mu K_\nu - P_\nu K_\mu$ коммутирует со всеми спинорными генераторами, а в качестве второго оператора Казимира следует взять

$$C_2 = K_{\mu\nu}K^{\mu\nu}. \tag{2.19}$$

Для состояний с $C_1 = P^2 = m^2 > 0$ собственные значения C_2 равны $-2m^4Y(Y+1)$, где Y — целое или полуцелое число, которое мы будем называть суперспином [52, 78]. Действительно в системе покоя нормированные пространственные компоненты $(1/m^2)K_{0i} = Y_i$ образуют алгебру $SU(2)$, $[Y_i, Y_j] = i\varepsilon_{ijk}Y_k$.

Рассмотрим неприводимое представление с массой m и суперспином Y (супермультиплет). В системе покоя ($P^i = 0$, $P^0 = m$) алгебра (2.2) и (2.3) превращается в алгебру Клиффорда для спинорных операторов рождения и уничтожения. Вводя операторы с определенной четностью (см. (2.5)).

$$q_\alpha = \frac{1}{\sqrt{4m}}(Q_\alpha + (\sigma_0)_{\alpha\dot\beta}\bar{Q}^{\dot\beta}), \quad \bar{q}_{\dot\alpha} = \frac{1}{\sqrt{4m}}(\bar{Q}_{\dot\alpha} + Q^\beta(\sigma_0)_{\beta\dot\alpha}), \tag{2.20}$$
$$P:\ q_\alpha \to iq_\alpha, \quad \bar{q}_{\dot\alpha} \to -i\bar{q}_{\dot\alpha},$$

находим

$$\begin{aligned} &\{q_\alpha, q_\beta\} = \{\bar{q}_{\dot\alpha}, \bar{q}_{\dot\beta}\} = 0, \\ &\{\bar{q}_{\dot\alpha}, q_\beta\} = (\sigma_0)_{\beta\dot\alpha}(=\delta_{\beta\dot\alpha}). \end{aligned} \tag{2.21}$$

---

*) Их конкретный вид в лагранжевой теории приведен ниже, в разделе о супертоке в) гл. 4.

Пусть векторы состояний со спином J и четностью η_P, $|J_3| \leqslant J$ образуют «клиффордов вакуум»

$$\bar{q}_{\dot{\beta}} | J, J_3\rangle_0 = 0, \quad P: |J, J_3\rangle_0 \to \eta_P | J, J_3\rangle. \tag{2.22}$$

Построим пространство Фока. Векторы состояний $q_\alpha | J, J_3\rangle$ будут иметь спин-четности $[J - (1/2)]^{i\eta_P}$ и $[J + (1/2)]^{i\eta_P}$, а $q_\alpha q_\beta | JJ_3\rangle_0$ — снова спин J, но четность $-\eta_P$, так как q_α несет спин 1/2 и $q_\alpha q_\beta = (1/2)\, \varepsilon_{\alpha\beta}\, (qq)$ — только спин 0. Этим представление исчерпывается, поскольку $q_\alpha q_\beta q_\gamma \equiv 0$ в силу антикоммутативности. Далее заметим, что в применении к $| JJ_3\rangle_0$ пространственные компоненты обобщенного (2.18) и обычного векторов Паули — Любанского совпадают. Отсюда следует, что суперспин Y для обсуждаемого представления равен J. Итак, мы пришли к выводу, что при ненулевой массе неприводимое представление суперсимметрии с суперспином Y является $4(2Y + 1)$-мерным и содержит неприводимые представления группы Пуанкаре со спин-четностью $J^P = [Y - (1/2)]^{i\eta}$, Y^{η}, $Y^{-\eta}$ $[Y + (1/2)]^{i\eta}$ и единой массой m. Например, при $Y = 0$ — скаляр, псевдоскаляр и спинор, при $Y = (1/2)$ — $J^P = 0^{\pm 1}$, $1^{\pm 1}$, $(1/2)^{\pm i}$, $(1/2)^{\mp i}$ (верхний или нижний знак определяется выбором $\eta = \mp i$).

При нулевой массе покоя в системе отсчета, в которой $P^\mu = (p, 0, 0, p)$, алгебра (2.2), (2.3) принимает вид

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = \{Q_1, \bar{Q}_{\dot{1}}\} = \{Q_1, \bar{Q}_{\dot{2}}\} = \{Q_2, \bar{Q}_{\dot{1}}\} = 0, \tag{2.23}$$

и единственный ненулевой антикоммутатор есть

$$\{Q, \bar{Q}_{\dot{2}}\} = 4p. \tag{2.24}$$

Соответственно, вводя «клиффордов вакуум» со спиральностью λ

$$\bar{Q}_{\dot{1}} | \lambda\rangle_0 = \bar{Q}_{\dot{2}} | \lambda\rangle_0 = Q_1 | \lambda\rangle_0 = 0, \tag{2.25}$$

мы видим, что возникают только два состояния, $| \lambda\rangle_0$ и $Q_2 | \lambda\rangle_0$, со спиральностями, отличающимися на 1/2. Итак, при нулевой массе покоя [82] любое неприводимое представление содержит состояния со спиральностями λ и $\lambda + (1/2)$ (λ — любое целое или полуцелое). При инвариантности относительно пространственного отражения к ним добавляются зеркальные состояния со спиральностями $-\lambda$, $-[\lambda + (1/2)]$.

Для построения релятивистски-инвариантных теорий вводится понятие поля, определенного в пространстве-времени. Поля имеют простые трансформационные свойства и описывают частицы из тех или иных неприводимых представлений группы Пуанкаре. Аналогично, для построения теорий, инвариантных относительно суперсимметрий, целесообразно ввести понятие суперполя [77] с простыми трансформационными свойствами, чем мы сейчас и займемся. Суперполя описывают частицы из тех или иных неприводимых представлений группы суперсимметрий.

3. СУПЕРПОЛЯ

а) Суперпространство

Хорошо известна реализация генераторов группы Пуанкаре в пространстве функций от координат так, $P^\mu = -i\partial^\mu$, $L^{\mu\nu} = i(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu)$. Антикоммутатор спинорных генераторов дает сдвиги (2.1). Следовательно, преобразования суперсимметрии с необходимостью действуют на координаты пространства Минковского. Вместе с тем представляется невоз-

можным построить спинорные генераторы в терминах координат x_μ и операций дифференцирования. Реализация спинорных генераторов требует спинорного расширения пространства. Введем суперпространство [77,82], элементами которого вместе с координатами x_μ являются элементы алгебры Грассмана *) — антикоммутирующие спиноры θ^α и $\bar\theta^{\dot\alpha}$:

$$\{\theta^\alpha, \theta^\beta\} = \{\bar\theta^{\dot\alpha}, \theta^{\dot\beta}\} = \{\bar\theta^{\dot\alpha}, \bar\theta^{\dot\beta}\} = 0. \tag{3.1}$$

Действие группы Пуанкаре в пространстве x, θ записывается как

$$x_\mu \to \Lambda_\mu^\nu x_\nu + a_\mu, \quad \theta^\alpha \to A^\alpha_\beta(\Lambda)\theta^\beta, \quad \bar\theta^{\dot\alpha} \to \bar A^{\dot\alpha}_{\dot\beta}(\Lambda)\bar\theta^{\dot\beta}, \tag{3.2}$$

где A (Λ) и $\bar A$ (Λ) обозначают спинорные (1/2, 0) и (0, 1/2) представления преобразований группы Лоренца. При пространственных отражениях

$$x_0 \to x_0, \quad \mathbf{x} \to -\mathbf{x}, \quad \theta_\alpha \to \eta(\sigma_0)_{\alpha\dot\beta}\bar\theta^{\dot\beta}, \quad |\eta| = 1. \tag{3.3}$$

В суперпространстве x, θ уже можно определить действие супергруппы, полагая, что координаты x и θ преобразуются как ее параметры, т. е. согласно (2.13) $G(\zeta, 0)\,G(\theta, x) = G(\theta', x')$,

$$\begin{aligned} x'_\mu &= x_\mu + i\,\theta\sigma_\mu\bar\zeta - \zeta\sigma_\mu\bar\theta), \\ \theta' &= \theta + \zeta, \quad \bar\theta' = \bar\theta + \bar\zeta. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Переменные θ и параметры ζ имеют размерность $[L]^{1/2}$. Интересно отметить, что дифференциальная форма

$$\omega_\mu = dx_\mu - (i\,(d\theta\sigma_\mu\bar\theta - \theta\sigma_\mu\,d\bar\theta) \tag{3.5}$$

инвариантна относительно преобразований (6.4). Обобщением интервала $ds^2 = dx_\mu\,dx^\mu$ в пространстве Минковского в суперпространстве является интервал

$$ds_c^2 = \omega_\mu\omega^\mu, \tag{3.6}$$

инвариантный относительно всей группы суперсимметрий. «Форма Картана» ω_μ возникает в инвариантном разложении

$$G^{-1}(x, \theta)\,dG(x, \theta) = -i\,(\omega^\mu P_\mu + d\theta^\alpha Q_\alpha + \bar Q_{\dot\alpha}\,d\bar\theta^{\dot\alpha}). \tag{3.7}$$

Реализация (3.4) не единственна [90,99]**). Так, при замене переменных

$$x_\mu^{(a)} = x_\mu + ia\theta\sigma_\mu\bar\theta \tag{3.8}$$

мы находим

$$x_\mu^{(a)} = x_\mu^{(a)} + i\,(a+1)\theta\sigma_\mu\bar\zeta + i\,(a-1)\,\zeta\sigma_\mu\bar\theta + ia\zeta\sigma_\mu\bar\zeta. \tag{3.9}$$

При $a = 1$ (-1) в (3.9) входит только θ $(\bar\theta)$. В суперпространстве можно определить γ_5-преобразование

$$x'_\mu = x_\mu, \quad \theta' = \exp(i\lambda)\,\theta, \quad \bar\theta' = \exp(-i\lambda)\,\theta, \tag{3.10}$$

дилатации

$$x'_\mu = lx_\mu, \quad \theta' = \sqrt{l}\,\theta, \quad \bar\theta' = \sqrt{l}\,\bar\theta, \tag{3.11}$$

конформное преобразование и так далее.

*) Отметим, что, привлекая элементы алгебры Грассмана, Березин и Маринов [96] сформулировали гамильтонов подход к классической динамике частиц со спином.

**) Различные реализации супергруппы соответствуют параметризациям ее группового элемента, отличным от (2.12). С общей точки зрения все они эквивалентны.

В найденных преобразованиях координату x_μ следует толковать как некий четный элемент алгебры Грассмана. Суперпространство можно определить как пространство Минковского с заданной на нем алгеброй функций с образующими x_μ, θ, $\bar\theta$. При рассмотрении функций $\Phi(x, \theta, \bar\theta)$ можно сохранить x_μ как обычную c-числовую координату, представляя преобразования суперсимметрии как преобразования между коэффициентами разложения $\Phi(x, \theta, \bar\theta)$ в ряд по степеням θ, $\bar\theta$.

б) Концепция суперполя

Суперполе $\Phi(x, \theta, \bar\theta)$ есть поле в суперпространстве x, θ, $\bar\theta$. Разложение суперполя в ряд по степеням θ, $\bar\theta$ обрывается и получается полином, так как θ, $\bar\theta$ антикоммутируют и квадрат каждой из компонент равен нулю (например, $\theta_1\theta_1 \equiv 0$)

$$\Phi(x, \theta, \bar\theta) = A(x) + \theta\psi(x) + \bar\varphi(x)\bar\theta + \theta\theta F(x) + \bar\theta\bar\theta G(x) + \\ + \theta\sigma_\mu\bar\theta B^\mu(x) + \theta\theta\bar\varkappa(x)\bar\theta + \bar\theta\bar\theta\theta\lambda(x) + \theta\theta\bar\theta\bar\theta D(x). \qquad (3.12)$$

Соответственно, можно рассматривать тензорные и спин-тензорные поля с внешними векторными и спинорными индексами, например, тензорное поле $\Psi_{\mu\nu}(x, \theta, \bar\theta)$ или спинорное $\Psi_\alpha(x, \theta, \bar\theta)$, снабдив этими индексами каждую из компонент ($A_{\mu\nu}$, $\psi_{\alpha,\mu\nu}$ и т. д.) разложений (3.12). Таким образом, суперполе описывает конечный набор обычных полей — коэффициентов его разложения по степеням θ, $\bar\theta$. Эти поля образуют определенные представления группы Лоренца, поскольку принимается, что при действии этой группы

$$\Psi'_A(x', \theta', \bar\theta') = D_{AB}(\Lambda)\Psi_B(x, \theta, \bar\theta), \qquad x' = \Lambda x, \quad \theta' = A(\Lambda)\theta. \qquad (3.13)$$

Фермионные поля антикоммутируют, а бозонные коммутируют с θ и $\bar\theta$. Введение антикоммутирующих переменных позволяет объединить поля с разными спинами и статистиками в один компактный объект — суперполе.

В скалярном суперполе (3.12) содержатся фермионы (ψ, $\bar\varphi$, λ, $\bar\varkappa$) и бозоны (A, F, G, B^μ, D). При преобразованиях (3.4)

$$\Phi'(x_\mu, \theta, \bar\theta) = \Phi(x_\mu + i\theta\sigma_\mu\bar\zeta - i\zeta\sigma_\mu\bar\theta, \theta + \zeta, \bar\theta + \bar\zeta). \qquad (3.14)$$

Суперполе Φ является представлением полной группы суперсимметрий. Удобно ввести также соответственно (3.9) суперполя в новых реализациях Φ_1 и Φ_2,

$$\Phi_1(x, \theta, \bar\theta) = (\exp - i\theta\hat\partial\bar\theta)\Phi(x, \theta, \bar\theta), \qquad (3.15)$$

$$\Phi_2(x, \theta, \bar\theta) = (\exp i\theta\hat\partial\bar\theta)\Phi(x, \theta, \bar\theta), \qquad (3.16)$$

для которых

$$\Phi'_1(x, \theta, \bar\theta) = \Phi_1(x_\mu + 2i\theta\sigma_\mu\bar\zeta + i\zeta\sigma_\mu\bar\zeta, \theta + \zeta, \bar\theta + \bar\zeta), \qquad (3.17)$$

$$\Phi'_2(x, \theta, \bar\theta) = \Phi_2(x_\mu - 2i\zeta\sigma_\mu\bar\theta - i\zeta\sigma_\mu\bar\zeta, \theta + \zeta, \bar\theta + \bar\zeta). \qquad (3.18)$$

В реализации (3.14) можно рассматривать вещественные суперполя

$$\Phi(x, \theta\ \bar\theta)^* = \Phi(x, \theta, \bar\theta). \qquad (3.19)$$

(Операция * подразумевает комплексное сопряжение и перестановку антикоммутирующих множителей [6] и называется инволюцией.)

С другой стороны, из (3.15), (3.16) видно, что при комплексном сопряжении суперполя типа Φ_1 и Φ_2 переходят друг в друга. Однако реализация (3.15) ((3.16)) предпочтительна тем, что в преобразование координаты x_μ не входит θ $(\bar\theta)$ и потому можно ввести более «экономные» суперполя, зависящие только от θ $(\bar\theta)$, например, скалярное киральное суперполе

$$S(x, \theta) = A(x) + \theta\psi(x) + \theta\theta F(x) \tag{3.20}$$

$(\theta_\alpha\theta_\beta\theta_\gamma \equiv 0)$. При отличной от нуля массе такое суперполе описывает неприводимое представление группы суперсимметрий с суперспином $Y \equiv 0$ (оператор Казимира C_2 (2.19) дает нуль) и описывает бесспиновые комплексные поля $A(x)$, $F(x)$ и спинорное $\psi(x)$.

Представляя инфинитезимальные преобразования в виде

$$\delta\Phi = i(\zeta Q + \bar Q\bar\zeta)\Phi, \tag{3.21}$$

мы находим, что для суперполя вида Φ

$$Q_\alpha = -i\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - (\hat\partial\bar\theta)_\alpha, \quad \bar Q_{\dot\alpha} = i\frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot\alpha}} + (\theta\hat\partial)_{\dot\alpha}, \tag{3.22}$$

и для суперполей в несимметричных реализациях Φ_1 и Φ_2 соответственно (например, $Q_\alpha^{(1)} = -i\partial/\partial\theta^\alpha$, $\bar Q_{\dot\alpha}^{(1)} = i\partial/\partial\theta^{\dot\alpha} + 2(\theta\hat\partial)_{\dot\alpha}$). Суперзаряды Q, $\bar Q$ *) удовлетворяют всем соотношениям супералгебры (2.1) — (2.3). Естественно, что в $L_{\mu\nu}$ появляется добавка (1/2) $(\theta\sigma_{\mu\nu}\partial/\partial\theta + \bar\theta\tilde\sigma_{\mu\nu}\partial/\partial\bar\theta)$, поворачивающая спинорные координаты. Дифференцирование $\partial/\partial\theta^\alpha$ определяется [6] правилами $\partial/\partial\theta^\alpha\, 1 = 0$, $\{\partial/\partial\theta^\alpha, \theta^\beta\} = \delta_\alpha^\beta$. Например, $\partial\theta^\beta/\partial\theta^\alpha = \delta_\alpha^\beta$, $\partial(\theta^\beta\theta^\gamma)/\partial\theta^\alpha = \delta_\alpha^\beta\theta^\gamma - \delta_\alpha^\gamma\theta^\beta$ и т. д.

Пространственное отражение превращает представление (1/2, 0) в представление (0, 1/2) группы Лоренца:

$$\begin{gathered} x'_\mu = (x_0, -\mathbf{x}), \qquad \theta' = i\sigma_0\bar\theta, \\ P\colon \Phi(x, \theta, \bar\theta) \to \Phi^P(x', \theta', \bar\theta') = \eta_P[\Psi(x, \theta, \bar\theta)]^*, \end{gathered} \tag{3.23}$$

где $|\eta_P|^2 = 1$, причем суперполе Ψ, вообще говоря, может быть отличным от Φ.

Операцию зарядового сопряжения можно определить согласно

$$C\colon \Phi(x, \theta, \bar\theta) \to \Phi^C(x, \theta, \bar\theta) = \eta_C\Psi(x, \theta, \bar\theta). \tag{3.24}$$

При вигнеровском обращении времени

$$x'_\mu = (-x_0, \mathbf{x}), \qquad \theta'_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta}\theta_\beta, \tag{3.28}$$

$$T\colon \Phi(x, \theta, \bar\theta) \to \Phi^T(x', \theta', \bar\theta') = \eta_T\Phi(x, \theta, \bar\theta). \tag{3.25}$$

Если суперполе $\Phi(x, \theta, \bar\theta)$ предназначено для описания истинно нейтральных частиц, то $\Psi(x, \theta, \bar\theta) = \Phi(x, \theta, \bar\theta)$.

Далее, при γ_5-преобразовании (3.10)

$$\Phi'(x', \theta', \bar\theta') = \exp(i\alpha m)\Phi(x, \theta, \bar\theta), \tag{3.26}$$

где m — произвольное число.

---

*) Q_α и $\bar Q_{\dot\alpha}$ эрмитовски сопряжены относительно специальным образом определенного скалярного произведения на алгебре Грассмана [75].

При дилатациях (3.11)

$$\Phi'(x', \theta', \bar{\theta}') = l^n \Phi(x, \theta, \bar{\theta}), \tag{3.27}$$

где n определяет вес суперполя. Можно определить и конформное преобразование и суперконформное [12,28,33,63].

в) Ковариантные спинорные производные

Очевидно, что $\partial^\mu \Phi$ есть снова суперполе с теми же значениями суперспина, что и у Φ. Можно определить и спинорные «ковариантные» производные D_α и $\bar{D}_{\dot{\alpha}}$, включающие дифференцирование по спинорным координатам и антикоммутирующие с суперзарядами Q_α, $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ [82,99]:

$$\{D_\alpha, Q_\beta\} = \{D_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = \{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, Q_\beta\} = \{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 0. \tag{3.28}$$

Тогда из-за антикоммутационных свойств параметров ζ, $\bar{\zeta}$

$$[D_\alpha, \zeta Q + \bar{Q}\bar{\zeta}] = [\bar{D}_{\dot{\alpha}}, \zeta Q + \bar{Q}\bar{\zeta}] = 0, \tag{3.29}$$

и если Φ — суперполе, то и $D_\alpha \Phi$ и $\bar{D}_{\dot{\alpha}} \Phi$ снова будут суперполями, причем значения суперспина не меняются, так как D_α и $\bar{D}_{\dot{\alpha}}$ коммутируют с оператором Казимира C_2 (2.19). В явном виде

$$\left.\begin{aligned}
D_\alpha &= \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + i(\hat{\partial}\bar{\theta})_\alpha, & \bar{D}_{\dot{\alpha}} &= -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^2} - i(\theta\hat{\partial})_{\dot{\alpha}}, \\
D_\alpha^{(1)} &= \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + 2i(\hat{\partial}\bar{\theta})_\alpha, & \bar{D}_{\dot{\alpha}}^{(1)} &= -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}}, \\
D_\alpha^{(2)} &= \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}, & \bar{D}_{\dot{\alpha}}^{(2)} &= -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} - 2i(\theta\hat{\partial})_{\dot{\alpha}}.
\end{aligned}\right\} \tag{3.30}$$

Ковариантные производные D образуют ту же алгебру, что и суперзаряды:

$$\begin{aligned}
&\{D_\alpha, D_\beta\} = \{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, \bar{D}_{\dot{\beta}}\} = [P^\mu, D_\alpha] = [P^\mu, \bar{D}_{\dot{\alpha}}] = 0, \\
&\{D_\alpha, \bar{D}_{\dot{\beta}}\} = 2(\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\beta}} P^\mu.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Ввиду такой алгебраической структуры можно образовать только 16 независимых операторов из произведений D_α и $\bar{D}_{\dot{\alpha}}$. Полезные тождества и правила умножения приведены в приложении.

При действии на произведение

$$D_\alpha(\Psi_1\Psi_2) = (D_\alpha\Psi_1)\Psi_2 \pm \Psi_1 D_\alpha \Psi_2. \tag{3.32}$$

Верхний знак берется, если суперполе Ψ_1 тензорное, а нижний — если спин-тензорное (тензорные суперполя коммутируют, а спин-тензорные антикоммутируют со спинорными координатами). Аналогичная ситуация и для $D_{\dot{\alpha}}$.

г) Суперполя и представления группы суперсимметрий

Общее суперполе описывает приводимое представление группы суперсимметрий. Пусть масса покоя отлична от нуля и суперполе удовлетворяет дополнительным условиям, выделяющим данный спин j по внешним индексам, например, $\partial^\mu \Psi_\mu = 0$ для суперполя с векторным индексом. Тогда такое суперполе включает неприводимые представления группы суперсимметрий, отвечающие суперспинам $Y = j + (1/2)$, j, j и $j - (1/2)$ [89]. Средние суперспины выделяются условиями

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}\psi = 0 \quad \text{и} \quad D_\alpha \psi = 0 \tag{3.33}$$

соответственно. Эти условия имеют простой смысл. В реализации (3.15) удовлетворяющее (3.33) суперполе не зависит от θ, $\Psi_1(x, \theta, \bar{\theta}) = \Psi_1(x, \theta)$. Например, неприводимым будет скалярное суперполе $S_1(x, \theta)$ (3.34). Аналогично, неприводимыми будут суперполя $\Psi_2(x, \bar{\theta})$.

Для высшего суперспина $Y = j + (1/2)$ необходимо выполнение условий

$$(DD)\Psi = (\bar{D}\bar{D})\Psi = 0, \tag{3.34}$$

и при наличии внешних векторных индексов также

$$D^\alpha (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \Psi_{\mu\ldots} = \sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}} \bar{D}^{\dot{\beta}} \Psi_{\mu\ldots} = 0, \tag{3.35}$$

а для спинорного суперполя $\Psi_{\alpha\ldots}$ ($\Psi_{\dot{\alpha}\ldots}$) со спинорным индексом α ($\dot{\alpha}$) еще и

$$D^\alpha \Psi_{\alpha\ldots} = 0 \qquad (\bar{D}^{\dot{\alpha}} \Psi_{\dot{\alpha}\ldots} = 0). \tag{3.36}$$

Для скалярного суперполя, не имеющего внешних индексов, проекционный оператор, выделяющий суперспин 1/2 и обеспечивающий выполнение (3.34), построен Саламом и Стратди [82]

$$\begin{gathered} \Pi_V = \frac{1}{16\partial^2}\left(D^\alpha (\bar{D}\bar{D}) D_\alpha + \bar{D}_{\dot{\alpha}} (DD) \bar{D}^{\dot{\alpha}}\right), \\ DD\Pi_V = \Pi_V DD = \bar{D}\bar{D}\Pi_V = \Pi_V \bar{D}\bar{D} = 0. \end{gathered} \tag{3.37}$$

Суперполе $V = \Pi_V \Phi$ описывает при ненулевой массе неприводимый супермультиплет полей с $Y = 1/2$. Суперполе $V(x, \theta, \bar{\theta})$ часто называют векторным (по наибольшему спину).

Суперполе $(1 - \Pi_V)\Phi = \Pi_c \Phi$ описывает два неприводимых киральных суперполя с $Y = 0$, выделяемые проекционными операторами

$$\begin{gathered} \Pi_+ = -\frac{1}{16\partial^2} DD \cdot \bar{D}\bar{D}, \quad \Pi_- = -\frac{1}{16\partial^2} \bar{D}\bar{D} \cdot DD, \\ \Pi_V + \Pi_+ + \Pi_- = 1, \quad \Pi_m \Pi_n = \delta_{mn} \Pi_m. \end{gathered} \tag{3.38}$$

Проекционные свойства операторов Π_m проверяются с помощью формул ковариантных производных D_α (см. приложение 2). Проекционные операторы для общего случая, обеспечивающие выполнение всех условий (3.34) — (3.36), построены Сокачевым [89].

В заключение общего обсуждения суперполей подчеркнем следующие правила, полезные при построении инвариантных лагранжианов:

1) *Спинорные преобразования реализуются на суперполях как «сдвиги» по обычным* (x_μ) *и спинорным* (θ, $\bar{\theta}$) *координатам* (см. (3.14), (3.17), (3.18)).

2) *Следовательно, произведение суперполей в данной реализации есть снова суперполе в той же реализации*:

$$\Psi(x, \theta, \bar{\theta})\Psi'(x, \theta, \bar{\theta}) = \Psi''(x, \theta, \bar{\theta}), \qquad \Psi_1(x, \theta, \bar{\theta})\Psi_1'(x, \theta, \bar{\theta}) = \Psi_1''(x, \theta, \bar{\theta}). \tag{3.39}$$

3) *Суперполе* Ψ^* *есть снова суперполе типа* Ψ. *Суперполе* $(\Psi_1)^*$ *есть суперполе типа* Ψ_2. *Чтобы получить из* $(\Psi_1)^*$ *снова суперполе типа* Ψ_1, *следует произвести сдвиг*:

$$\Psi_1'(x, \theta, \bar{\theta}) = \exp(-2i\theta\hat{\partial}\bar{\theta})(\Psi_1(x, \theta, \bar{\theta})^*). \tag{3.40}$$

4) *Обычные* (∂^μ) *и ковариантные* $(D_\alpha, \bar{D}_{\dot{\alpha}})$ *производные от суперполя также являются суперполями.*

д) Преобразования бозонных и фермионных полей

Чтобы получить явный вид преобразований фермионных и бозонных полей в заданном суперполе, следует взять его разложение по степеням θ, $\bar{\theta}$, использовать (3.14) или (3.15), (3.16) и снова разложить по степеням θ и $\bar{\theta}$. При этом используется простое правило перестановки двухкомпонентных спиноров (см. приложение 1):
$\theta^\alpha\theta^\beta = -(1/2)\,\varepsilon^{\alpha\beta}(\theta\theta)$. Так, для кирального суперполя

$$\Phi_1(x, \theta) = A_1(x) + \theta^\alpha\psi_\alpha(x) + (\theta\theta)F_1(x) \tag{3.41}$$

при инфинитезимальных преобразованиях (см. (3.17))

$$\delta A_1(x) = \zeta^\alpha\psi_\alpha(x), \quad \delta F_1(x) = -i\partial^\mu\psi(x)\,\sigma_\mu\bar{\zeta}, \tag{3.42}$$
$$\delta\psi_\alpha(x) = 2i\,(\sigma_\mu\bar{\zeta})_\alpha\partial^\mu A_1(x) + 2\zeta_\alpha F_1(x).$$

Если суперполе $\Phi_1(x, \theta)$ имеет размерность L^{-1} (в единицах $\hbar = c = 1$), то скалярное поле $A_1(x)$ и спинорное $\psi_1(x)$ имеют канонические размерности L^{-1} и $L^{-3/2}$ соответственно, а поле $F_1(x) \sim L^{-2}$. Полагая в (3.23) фазовый множитель η_P равным 1, мы находим, что при пространственном отражении ($x' = x_0, -\mathbf{x}$)

$$P\colon\ A_1'(x') = A_1^+(x), \quad F_1'(x') = F_1^+(x), \quad \psi_\alpha'(x') = i\,(\sigma_0)_{\alpha\beta}\bar{\psi}^\beta(x), \tag{3.43}$$

а при зарядовом сопряжении (согласно (3.24))

$$C\colon\ A_{1C}(x) = A_1(x), \quad F_{1C}(x) = F_1(x), \quad (\psi_\alpha(x))_C = \psi_\alpha(x). \tag{3.44}$$

Таким образом, если в теории сохраняется четность, то

$$A_1(x) = \frac{1}{2}(A(x) - iB(x)), \qquad F_1(x) = \frac{1}{2}(F(x) + iG(x)), \tag{3.45}$$

где $A(x)$ и $F(x)$ — вещественные скалярные поля, а $B(x)$ и $G(x)$ — вещественные псевдоскалярные поля.

Как обсуждалось выше, в разделе в) гл. 2, неприводимое представление с $Y = 0$ содержит один скаляр, один псевдоскаляр, и одно поле со спином 1/2. Уравнения движения позволят выразить лишние поля F и G через поля A и B. В терминах этих полей и майорановского спинора $\psi(x)$ преобразования (3.42) записываются так:

$$\left.\begin{aligned}
&\delta A(x) = \bar{\zeta}\psi(x), \quad \delta B(x) = i\bar{\zeta}\gamma_5\psi(x),\\
&\delta F(x) = i\bar{\zeta}\tilde{\partial}\psi(x), \quad G\delta(x) = -\bar{\zeta}\gamma_5\tilde{\partial}\psi(x),\\
&\delta\psi(x) = i\,(\partial^\mu A(x) - i\gamma_5\partial^\mu B(x))\,\gamma_\mu\zeta + (F(x) + i\gamma_5 G(x))\,\zeta
\end{aligned}\right\} \tag{3.46}$$

($\tilde{\partial}$ — здесь и далее обозначает $\gamma^\mu\partial_\mu$). В первоначальных работах Весса и Зумино [12] эти преобразования были угаданы как четырехмерное обобщение суперкалибровочных преобразований в дуальных моделях. Использование супералгебры и суперполей [77] позволяет получить их последовательно и алгоритмически. Даже в простейшем случае неприводимого кирального суперполя $\Phi_1(x, \theta)$ запись преобразований в терминах суперполя существенно более емка и экономна, чем в терминах полей. Приведем еще явный вид преобразований для общего вещественного скалярного суперполя,

$$V(x, \theta, \bar{\theta}) = C + i\theta\varkappa - i\bar{\theta}\bar{\varkappa} + \frac{i}{2}\theta\theta(M + iN) - \frac{i}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}(M - iN) - \\ - \theta\sigma_\mu\bar{\theta}v^\mu + i(\theta\theta)\bar{\theta}\left(\bar{\lambda} + \frac{i}{2}\hat{\partial}\varkappa\right) - i(\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\left(\lambda + \frac{i}{2}\hat{\partial}\bar{\varkappa}\right) + \\ + (\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})\left(\frac{1}{2}D - \frac{1}{4}\partial^2 C\right). \qquad (3.47)$$

При инфинитезимальных преобразованиях непосредственно в терминах майорановских спиноров находим, применяя (3.13):

$$\begin{aligned} &\delta C = i\bar{\zeta}\gamma_5\varkappa, \\ &\delta M = \bar{\zeta}\lambda + i\bar{\zeta}\tilde{\partial}\varkappa, \quad \delta N = i\bar{\zeta}\gamma_5\lambda + \bar{\zeta}\gamma_5\tilde{\partial}\varkappa, \\ &\delta\varkappa = \gamma_5\gamma_\mu\zeta\partial^\mu C + i\gamma_\mu\zeta v^\mu + (M + i\gamma_5 N)\zeta, \\ &\delta v_\mu = i\bar{\zeta}\gamma_\mu\lambda + \bar{\zeta}\partial_\mu\varkappa, \\ &\delta\lambda = i\gamma_5\zeta D + \frac{1}{2}\gamma_\mu\gamma_\nu\zeta(\partial^\mu v^\nu - \partial^\nu v^\mu), \\ &\delta D = \bar{\zeta}\gamma_5\tilde{\partial}\lambda. \end{aligned} \qquad (3.48)$$

Эти трансформационные законы достаточно сложны. Как мы видели выше, общее скалярное суперполе несет два нулевых суперспина $Y = 0$ и один суперспин $Y = 1/2$. Разбиение достигается применением проекционных операторов Π_+, Π_- и Π_V (см. (3.37) и (3.38)):

$$\Phi = \Phi_+ + \Phi_- + \Phi_V. \qquad (3.49)$$

Этому разбиению суперполей соответствует

$$\begin{aligned} C &= C_+ + C_- \qquad + C_\perp, \\ \varkappa &= \varkappa_+ \qquad\qquad + \varkappa_\perp, \\ M + iN &= (M + iN)_+, \\ v_\mu &= i\partial_\mu C_+ - i\partial_\mu C_- + v_{\mu\perp} \quad (\partial^\mu v_{\mu\perp} = 0), \\ \lambda &= \qquad\qquad - \frac{1}{2}\tilde{\partial}\varkappa_\perp, \\ D &= \qquad\qquad + \frac{1}{2}\partial^2 C_\perp. \end{aligned} \qquad (3.50)$$

Заметим, переходя в последних трех строках (3.50) от v_μ к $v_{\mu\nu} = \partial_\mu v_\nu - \partial_\nu v_\mu$, что

$$\left.\begin{aligned} &\delta v_{\mu\nu} = i\bar{\zeta}(\gamma_\mu\partial_\nu - \gamma_\nu\partial_\mu)\lambda, \\ &\delta\lambda = i\gamma_5\zeta D + \frac{1}{2}\gamma_\mu\gamma_\nu\zeta v^{\mu\nu}, \\ &dD = \bar{\zeta}\gamma_5\tilde{\partial}\lambda, \end{aligned}\right\} \qquad (3.51)$$

т. е. поля $v_{\mu\nu}$, λ и D преобразуются сами через себя и составляют неприводимый мультиплет с $Y = 1/2$.

Аналогично можно найти и трансформационные свойства бозонных и фермионных полей из других супермультиплетов. Имеет место важное общее правило:

5) *При преобразованиях суперсимметрии изменение последнего члена в разложении любого суперполя (например, δF в (3.46), δD в (3.48)) есть полная производная.*

Действительно, последний член претерпевает изменение только за счет сдвига по координате x_μ предпоследних членов.

Следствие. *Четырехмерный интеграл от F- и D-компонент суперполей $\Phi_1(x, \theta)$ и $V(x, \theta, \bar\theta)$ инвариантен не только относительно группы Пуанкаре, но и относительно группы суперсимметрий.*

4. ЛАГРАНЖЕВА ТЕОРИЯ СУПЕРПОЛЕЙ

а) Явно инвариантные интегралы от суперполей

Правило 5) применяется в ряде работ (например, [75, 81, 83, 84]) для построения инвариантных лагранжианов. Из данных суперполей составляют такие билинейные, трилинейные и т. д. комбинации, чтобы они образовывали скалярные суперполя. Четырехмерный интеграл от соответствующих F- и D-компонент берется в качестве инвариантного лагранжиана. Такое выделение F- и D-компонент означает потерю явной инвариантности относительно группы суперсимметрий; она соблюдается только неявно. Однако этой процедуре можно придать явно суперсимметрично инвариантный вид двумя эквивалентными методами. Первый из них предложен Саламом и Стради [82] и состоит в следующем. Для F-компоненты кирального суперполя (3.20)

$$\int d^4x F(x) = \frac{1}{2}\int d^4x \frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\Phi_1(x, \theta) = -\frac{1}{2}\int d^4x\, DD\Phi_1(x, \theta), \qquad (4.1)$$

так как производная $\partial/\partial\theta_\alpha$ отличается от ковариантной производной D^α на полную производную $(\partial\bar\theta)^\alpha$. Аналогично,

$$\int d^4x D(x) = \frac{1}{4}\int d^4x\,(D^\alpha D_\alpha)(\bar D_{\dot\alpha}\bar D^{\dot\alpha})\,V(x, \theta, \bar\theta). \qquad (4.2)$$

В формулах (4.1), (4.2) зависящие от θ и $\bar\theta$ члены являются пространственно временными производными и выпадают при интегрировании. Явная суперсимметрия сохраняется, но координаты x и θ входят неравноправно и в лагранжианах появляются высокие степени ковариантных производных.

Нам представляется более предпочтительным другой метод, предложенный независимо Фуджикавой и Лангом [107] и авторами [61]. Этот метод эквивалентен изложенному, но сохраняет сходство между x и θ и не вводит лишних производных. Он основан на понятии интеграла на алгебре Грассмана, введенном Березиным [6]. Формальный грассманов интеграл определяется следующими правилами:

$$\int d\theta_\alpha = 0, \qquad \int d\partial_\beta\theta^\alpha = \delta^\alpha_\beta, \qquad (4.3)$$

где $d\theta_\alpha$ — антикоммутирующие «дифференциалы» *) (размерности $L^{-1/2}$)

$$\{d\theta_\alpha,\ d\theta_\beta\} = \{d\theta_\alpha,\ \theta_\beta\} = 0. \tag{4.4}$$

Этих правил достаточно, так как $\{\theta_\alpha,\ \theta_\beta\} = 0$ и поэтому любая из компонент θ_α не может входить в квадрате. Кратный интеграл понимается как повторный. Можно определить обобщенные дельта-функции:

$$\delta^\Gamma(\theta-\theta') = (\theta_2-\theta_2')(\theta_1-\theta_1') \tag{4.5}$$

и

$$\delta^\Gamma(\bar\theta-\bar\theta') = (\bar\theta_2-\bar\theta_2')(\bar\theta_1-\bar\theta_1'). \tag{4.6}$$

Будучи полиномами, они обладают в то же время свойствами обычных δ-функций. Так, для любой функции $f(\theta)$

$$\begin{gathered}\delta^\Gamma(\theta-\theta')f(\theta) = \delta^\Gamma(\theta-\theta')f(\theta'),\\ \int d\theta_1\, d\theta_2\, \delta(\theta) = 1 = \int d\bar\theta_1\, d\bar\theta_2,\ \delta(\bar\theta).\end{gathered} \tag{4.7}$$

Однако, в отличие от обычных δ-функций,

$$\delta^\Gamma(0) \equiv 0, \qquad (\delta^\Gamma(\theta-\theta'))^2 \equiv 0. \tag{4.8}$$

Именно эти свойства позволяют быстро и эффективно проследить сокращение расходимостей в суперсимметричных моделях, как мы увидим ниже. Дельта-функции (4.5), (4.6) представимы в виде

$$\delta^\Gamma(\theta) = \frac{1}{2}\theta^\alpha\theta_\alpha, \qquad \delta^\Gamma(\bar\theta) = -(\delta(\theta))^+ \tag{4.9}$$

и являются скалярами относительно преобразований Лоренца так же, как и $d^4\theta = d\theta_1\, d\theta_2\, d\bar\theta_1\, d\bar\theta_2 = \frac{1}{4} d\theta^\alpha\, d\theta_\alpha\, d\bar\theta^{\dot\alpha}\, d\bar\theta_{\dot\alpha} = d^2\theta\, d^2\bar\theta$. Подчеркнем, что грассманово интегрирование эквивалентно грассманову дифференцированию:

$$\int d\theta_\alpha f(\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} f(\theta). \tag{4.10}$$

Грассманов интеграл инвариантен относительно сдвигов

$$\int d^2\theta f(\theta+\alpha) = \int d^2\theta f(\theta).$$

Теперь легко писать явно инвариантные относительно суперсимметрий интегралы:

$$\left.\begin{aligned}\int d^4x\, d^4\theta\, \delta(\bar\theta)\, S_1(x,\theta) &= 2\int d^4x\, F(x),\\ \int d^4x\, d^4\theta\, \delta(\theta)\, S_1^+(x,\bar\theta) &= -2\int d^4x\, F^+(x),\\ \int d^4x\, d^4\theta V(x,\theta,\bar\theta) &= -4\int d^4x\, D(x).\end{aligned}\right\} \tag{4.11}$$

*) Дифференциал $d\theta_\alpha$ записан с нижним индексом с тем, чтобы (4.3) имело явно лоренц-инвариантный вид (авторы благодарны В. Акулову, обратившему их внимание на желательность такой записи). При линейных заменах $d\theta_\alpha$ и θ^β преобразуются взаимно обратными матрицами [6]. Формулы для общей замены переменных в интегралах по грассмановой алгебре найдены Березиным [8], а в интегралах и по обычным и по антикоммутирующим переменным — Пахомовым [69]. Эти формулы полезны при обсуждении суперконформной симметрии и для возможного спинорного обобщения группы общих преобразований координат.

Инвариантность этих интегралов очевидна, так как преобразования суперсимметрии реализуются на суперполях как сдвиги по пространственно-временны́м и спинорным координатам (см. правило 1)). Оба типа координат входят в эти определения равноправно и не появляются лишние высокие степени ковариантных производных. В последующем мы будем использовать этот подход и основываться на правиле

6) *Для построения инвариантных лагранжианов следует взять интегралы по суперпространству* x, θ, $\bar{\theta}$ (4.9) — (4.11) *от соответственно подобранных билинейных, трилинейных и т. д. комбинаций суперполей.*

б) Лагранжианы для простых суперполей

В этом разделе мы обсудим лагранжиан и уравнения движения в модели Весса и Зумино, описывающий самодействие скалярного кирального суперполя с безразмерной константой связи и свободную теорию векторного суперполя.

Применим правила 2) — 4) и 6). Для скалярного суперполя $\Phi_1(x, \theta)$ массовый член имеет вид

$$S_m = \frac{m}{2} \int d^4m\, d^4\theta\, [\delta^\Gamma(\bar{\theta})\, \Phi_1^2(x, \theta) - \delta^\Gamma(\theta)\, \Phi_1^{+2}(x, \bar{\theta})], \tag{4.12}$$

или в терминах полей (3.41), (3.45), используя майорановский спинор, имеем

$$S_m = m \int d^4x \left(AF + BG - \frac{1}{2}\bar{\psi}\psi\right), \tag{4.13}$$

а кинетический член записывается

$$\begin{aligned} S_k &= -\frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta \delta^\Gamma(\bar{\theta})\, \Phi_1(x, \theta)\, \bar{D}_{\dot{\alpha}} \bar{D}^{\dot{\alpha}} \exp(-2i\theta\, \hat{\partial}\bar{\theta})\, \Phi_1^+(x, \bar{\theta}) = \\ &= -\frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta \Phi_1(x, \theta) \exp(-2i\theta\, \hat{\partial}\bar{\theta})\, \Phi_1^+(x, \bar{\theta}) = {}^{*)} \\ &= \int d^4x \cdot \frac{1}{2} [(\partial_\mu A)^2 + (\partial_\mu B)^2 - i\bar{\psi}\, \tilde{\partial}\psi + F^2 + G^2]. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Вид S_m и S_k однозначно определяется условием, чтобы они не содержали производных бозонных и фермионных полей более высокого порядка, чем это требуется. Единственное самодействие с безразмерной константой связи есть

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{I}} &= \frac{2g}{3} \int d^4x d^4\theta\, [\delta^\Gamma(\bar{\theta})\, \Phi_1^3(x, \theta) - \delta^\Gamma(\theta)\, \Phi_1^{+3}(x, \bar{\theta})] = \\ &= g \int d^4x\, [(A^2 - B^2)\, F + 2ABG - \bar{\psi}\, (A - i\gamma_5 B)\, \psi]. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Тогда поля удовлетворяют уравнениям движения

$$\left.\begin{aligned} &\Box A = mF + 2gAF + 2gBG - g\bar{\psi}\psi, \qquad F = -mA - g(A^2 - B^2), \\ &\Box B = mG - 2gBF + 2gAG + ig\bar{\psi}\gamma_5\psi, \quad G = -mB - 2gAB, \\ &\qquad -(i\tilde{\partial} + m)\, \psi = 2g\, (A - i\gamma_5 B)\, \psi. \end{aligned}\right\} \tag{4.16}$$

---

*) Равенство проверяется интегрированием по частям с учетом тождества $\bar{D}_{\dot{\alpha}} \bar{D}^{\dot{\alpha}} \delta^\Gamma(\bar{\theta}) = 2$.

Как отмечалось выше, вспомогательные поля F и G входят в эти уравнения без производных и могут быть исключены. Используя тот факт, что

$$\frac{\delta\Phi_1(x,\theta)}{\delta\Phi_1(x',\theta')}=\delta(x-x')\,\delta^{\Gamma}(\theta-\theta'), \tag{4.17}$$

можно найти варьированием первых строк (4.12) — (4.14) уравнения движения непосредственно в терминах суперполей:

$$\frac{1}{4}\bar{D}\bar{D}\exp(-2i\theta\hat{\partial}\bar{\theta})\,\Phi_1^{+}(x,\bar{\theta})=m\Phi_1(x,\theta)+2g\Phi_1^2(x,\theta) \tag{4.18}$$

и эрмитово ему сопряженное, или

$$\frac{1}{4}\bar{D}\bar{D}\Phi^{+}=m\Phi+2g\Phi^2,\quad \frac{1}{4}DD\Phi=m\Phi^{+}+2g\Phi^{+2} \tag{4.19}$$

для симметричной реализации кирального суперполя

$$\Phi(x,\theta,\bar{\theta})=(\exp i\theta\hat{\partial}\bar{\theta})\,\Phi_1=$$
$$=A+\theta\psi+\theta\theta F+i\theta\sigma_\mu\bar{\theta}\partial^\mu A+\frac{i}{2}(\theta\theta)\bar{\theta}\tilde{\partial}\psi-\frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\partial^2 A. \tag{4.20}$$

Уравнения движения для суперполей (4.18) или (4.19) содержат в себе в компактном и явно инвариантном виде уравнения движения для полей (4.16). В силу уравнений движения сохраняется спин-векторный ток *)

$$J_\alpha^\mu(x)=\tilde{\partial}(A-i\gamma_5B)\,\gamma^\mu\psi+i(F+i\gamma_5G)\,\gamma^\mu\psi,\quad \partial_\mu J_\alpha^\mu=0. \tag{4.21}$$

Полное действие S есть

$$S=S_{\text{св}}+S_{\text{I}}=S_k+S_m+S_{\text{I}}. \tag{4.22}$$

Если исключить вспомогательные поля F и G, то полное действие будет иметь стандартный вид

$$S=\int d^4x\left\{\frac{1}{2}[(\partial_\mu A)^2+(\partial_\mu B)^2-i\bar{\psi}\tilde{\partial}\psi-m\bar{\psi}\psi-m^2A^2-m^2B^2]-\right.$$
$$\left.-mgA(A^2+B^2)-\frac{g^2}{2}(A^2+B^2)^2-g\bar{\psi}(A-i\gamma_5B)\,\psi\right\}. \tag{4.23}$$

Поля A, B, ψ имеют единую массу m, и перенормируемость теории очевидна (возникают связи Юкавы и трех- и четырех-линейные связи без производных). Однако суперсимметрия в такой записи завуалирована и выражается в сохранении спин-векторного тока (9), в котором F и G выражены через поля A и B.

Исследование этой простейшей суперсимметричной модели будет подробно изложено ниже.

Теперь мы обсудим теорию свободного суперполя с суперспином 1/2. Вещественное векторное суперполе $V(x,\theta,\bar{\theta})$ (3.47) содержит суперспин 1/2, два суперспина 0 (аналогия: векторное поле содержит спин 1 и спин 0). Запишем действие в виде

$$S_{\text{св}}=-\frac{1}{4}\int d^4xd^4\theta\,(V(x,\theta,\bar{\theta})\,\Box\Pi_V V(x,\theta,\bar{\theta})+m^2V^2(x,\theta,\bar{\theta})), \tag{4.24}$$

где Π_V — проекционный оператор, выделяющий суперспин 1/2. (Аналогия: для векторного поля A_μ лагранжеву плотность можно записать

*) При вычислении спин-векторного тока по теореме Э. Нётер следует иметь в виду, что лагранжева плотность инвариантна с точностью до 4-дивергенции, явный вид которой надо учитывать.

в виде $(1/2)\, A^{\mu}\, \Box\, \Pi_{\mu\nu} A^{\nu} - (m^2/2)\,(A_{\mu})^2$, где $\Pi_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - (\partial_{\mu}\partial_{\nu}/\Box)$ — проекционный оператор, выделяющий спин 1.) Уравнения движения для суперполей получаются варьированием (4.24) по V:

$$(\Box \Pi_V + m^2)\, V(x, \theta, \bar{\theta}) = 0. \tag{4.25}$$

Из них следует, что $DDV = \bar{D}\bar{D}V = 0$ (аналогично $\partial_{\mu} A^{\mu} = 0$).

Приведем выражение для действия в терминах полей

$$S_{\text{св}} = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 - \frac{i}{2}\bar{\lambda}\tilde{\partial}\lambda + \frac{1}{2}D^2 + \right.$$
$$\left. + m^2\left[\frac{1}{2}V_{\mu}^2 + CD + (\partial_{\mu}C)^2 + (M^2 + N^2) + \bar{\varkappa}\lambda + \frac{i}{2}\bar{\varkappa}\tilde{\partial}\varkappa\right]\right\}. \tag{4.26}$$

После исключения вспомогательных полей M, N и D возникает обычный лагранжиан, описывающий свободные поля V_{μ}, mC $(1/\sqrt{2})\,(\lambda + m\varkappa)$, $(1/\sqrt{2})\,(\lambda - m\varkappa)$ с единой массой m.

В случае нулевой массы спинорное поле $\varkappa$ и скалярное C выпадают, и теория описывает только «фотон» V_{μ} и майорановский спинор λ (как и следовало ожидать, зная содержание неприводимого представления при нулевой массе (раздел в гл. 2)). Из проекционных свойств Π_V (3.37) — (3.38) видно, что при $m = 0$ возникает калибровочная инвариантность теории относительно замены

$$V(x, \theta, \bar{\theta}) \to V(x, \theta, \bar{\theta}) + \frac{1}{i}\left(S(x, \theta, \bar{\theta}) - S^{+}(x, \theta, \bar{\theta})\right) \tag{4.27}$$

(аналогия: калибровочная инвариантность электродинамики), где S — произвольное киральное скалярное суперполе. Специфический вид аддитивной добавки связан с тем, что четность суперполя $V(x, \theta, \bar{\theta})$ предполагается отрицательной $V_P(x', \theta', \bar{\theta}') = -V(x, \theta, \bar{\theta})$. При (4.27) векторное поле V_{μ} переходит в $V_{\mu} + \partial_{\mu}A$. При помощи калибровочных преобразований (4.27) из $V(x, \theta, \bar{\theta})$ можно устранить все вспомогательные поля, исключая не затрагиваемое ими поле D.

Известно, что лагранжиан безмассового векторного поля сингулярен, и поэтому при квантовании к нему добавляют величину $(1/2\alpha)\,(\partial_{\mu}v^{\mu})^2$, релятивистски инвариантно закрепляющую калибровку. В нашем случае добавление такой величины нарушило бы явную суперсимметрию (аналогично тому, что добавление $(1/2\alpha)\,(\partial \mathbf{v})^2$ нарушило бы явную релятивистскую инвариантность). Для закрепления калибровку в явно суперсимметричном подходе следует ввести в лагранжеву плотность член $(1/2\alpha)\, DDV\, \bar{D}\bar{D}V$. При этом «возникают» лишние компоненты полей (подобно тому, что в электродинамике «появляются» продольные и скалярные фотоны), которые не сказываются на наблюдаемых эффектах.

Итак, концепция суперполя позволяет работать в формализме, явно инвариантном относительно суперсимметрий на каждом этапе.

в) Суперток

При обсуждении алгебры суперсимметрий в разделе б) гл. 2 мы уже отмечали тот замечательный факт, что сохраняющийся спин-векторный ток и тензор энергии-импульса связаны между собой преобразованием суперсимметрии. Феррара и Зумино [102] показали, как определить суперток — вещественное суперполе с одним точечным и одним неточечным

индексами — содержащий в себе обе эти важные величины. Для модели кирального суперполя (4.12) — (4.14) суперток имеет вид

$$V_{\alpha\dot{\alpha}} = i\Phi\overleftrightarrow{\partial}_{\alpha\dot{\alpha}}\Phi^* + \frac{1}{2} D_\alpha\Phi\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi^*. \tag{4.28}$$

Из уравнений движения (4.19) следует соотношение *)

$$D^\alpha V_{\alpha\dot{\alpha}} = \frac{m}{2}\bar{D}_{\dot{\alpha}}(\Phi^*)^2 \tag{4.29}$$

и эрмитовски ему сопряженное. Правая часть (4.29) зависит от модели и от способа определения **). Во всех известных моделях суперток удовлетворяет уравнению

$$D^\alpha V_{\alpha\dot{\alpha}} = \bar{D}_{\dot{\alpha}} S^*, \qquad D_\alpha S^* = 0, \tag{4.30}$$

58

где S — некое левое киральное суперполе. Для свободного векторного суперполя

$$V_{\alpha\dot{\alpha}} = (\bar{D}\bar{D}D_\alpha V)(DD\bar{D}_{\dot{\alpha}}V) + \frac{16m^2}{3}(V[D_\alpha, \bar{D}_{\dot{\alpha}}]V - D_\alpha V\bar{D}_{\dot{\alpha}}V) \tag{4.31}$$

и из уравнений движения (4.25) находим

$$D^\alpha V_{\alpha\alpha'} = \bar{D}_{\dot{\alpha}}\left(\frac{4}{3} m^2 DDV^2\right). \tag{4.32}$$

Применяя к (4.30) операцию $\hat{\partial}$, получаем независимое от модели соотношение для супертока $V_\mu = \tilde{\sigma}_\mu^{\alpha\dot{\alpha}} V_{\alpha\dot{\alpha}}$.

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} DDV_\mu = 4i\partial_\mu(\sigma^\nu)_{\alpha\dot{\alpha}} D^\alpha V_\nu. \tag{4.33}$$

Разложение по компонентам супертока V_μ отличается от разложения (3.47) только добавлением векторного индекса μ. Соответственно для получения вида преобразований полей, входящих в V_μ, все поля в (3.48) следует снабдить векторным индексом μ.

Инвариантное условие (4.30) и ему сопряженное ограничивают число независимых компонент суперполя $V_{\alpha\dot{\alpha}}$. Используя майорановские спиноры, получаем связи

$$M_\mu = \partial_\mu\tilde{A}, \quad N_\mu = \partial_\mu\tilde{B}, \quad v_{\mu\nu} - v_{\nu\mu} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}(\partial^\lambda c^\rho - \partial^\rho c^\lambda),$$

$$\lambda_\mu = -\tilde{\partial}\varkappa_\mu + \partial_\mu(\gamma\cdot\varkappa), \qquad D_\mu = -\Box C_\mu + \partial_\mu(\partial C) \tag{4.34}$$

и законы сохранения

$$\partial_\mu(t^{\mu\nu} - \eta^{\mu\nu}t^\rho_\rho) = 0, \quad t_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(v_{\mu\nu} + v_{\nu\mu}), \quad \partial^\mu(\varkappa_\mu - \gamma^\lambda\gamma_\mu\varkappa_\lambda) = 0. \tag{4.35}$$

Соотношения (4.34) означают, что поля λ_μ, D_μ и антисимметричная часть $v_{\mu\nu}$ выражаются через другие поля, а векторные поля M_μ и N_μ можно заменить на бесспиновые поля $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$.

---

*) Использованы соотношения из приложения 2.

**) Так, в обсуждаемой модели можно ввести модифицированный суперток $V^{\mathrm{mod}}_{\alpha\dot{\alpha}} = V_{\alpha\dot{\alpha}} - (im/4g)\,\hat{\partial}_{\alpha\dot{\alpha}}(\Phi - \Phi^*)$, для которого $D^\alpha V^{\mathrm{mod}}_{\alpha\dot{\alpha}} = -(m^2/4g)\Phi^*$ по аналогии с условием частичного сохранения аксиального тока.

Независимые величины $t_{\mu\nu}$, $\varkappa_\mu$, c_μ, $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ объединяются в один супермультиплет. Из закона преобразования $V_\mu(x, \theta, \overline{\theta})$ при учете условий (4.34), (4.35) следует

$$\begin{gathered}\delta\widetilde{A} = i\overline{\zeta}\gamma^\mu\varkappa_\mu, \quad \delta\widetilde{B} = \overline{\zeta}\gamma_5\gamma^\mu\varkappa_\mu, \quad \delta c_\mu = i\overline{\zeta}\gamma_5\varkappa_\mu, \\ \delta\varkappa_\mu = \gamma^\lambda t_{\lambda\mu}\zeta - \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\partial^\nu c^\rho\gamma^\lambda\zeta - \partial_\lambda c_\mu\gamma^5\gamma^\lambda\zeta + \partial_\mu(\widetilde{A} - i\gamma_5 B)\zeta, \\ \delta t_{\mu\nu} = \frac{i}{2}\zeta\partial_\mu\varkappa_\nu + \frac{i}{2}\overline{\zeta}\gamma_\mu\partial_\nu\gamma^\lambda\varkappa_\lambda - \frac{i}{2}\overline{\zeta}\gamma_\mu\widetilde{\partial}\varkappa_\nu + (\mu \leftrightarrow \nu).\end{gathered} \tag{4.36}$$

Проверка показывает, что компоненты супертока простым образом связаны с сохраняющимся спин-векторным током и тензором энергии-импульса. Так, в модели Весса и Зумино

$$\begin{gathered}\theta_{\mu\nu} = -\frac{2}{3}(t_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}t^\rho_\rho), \\ J_\mu^{\text{imp.r}} = -\frac{4}{3}(\varkappa_\mu - \gamma_\mu\gamma^\lambda\varkappa_\lambda),\end{gathered} \tag{4.37}$$

где $\theta_{\mu\nu}$ — улучшенный тензор энергии-импульса [39, 111] $\theta_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - (1/6)(\partial_\mu\partial_\nu - \eta_{\mu\nu}\Box)(A^2 + B^2)$ ($T_{\mu\nu}$ — канонический тензор энергии-импульса модели), а J^{impr}_μ — улучшенный сохраняющийся спин-векторный ток

$$J_\mu^{\text{impr}} = J_\mu + \frac{1}{3}[\gamma^\mu, \widetilde{\partial}]\{(A - i\gamma_5 B)\psi\}. \tag{4.38}$$

Величина C_μ связана с аксиальным током

$$C_\mu = \frac{1}{2}J^5_\mu = \frac{1}{2}\left(A\overleftrightarrow{\partial}_\mu B - \frac{i}{4}\overline{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi\right). \tag{4.39}$$

Использование «улучшенных» величин упрощает переход к нулевой массе, при которой возникает суперконформная инвариантность и соответствующие новые законы сохранения, а суперток $V_{\alpha\dot{\alpha}}$ удовлетворяет условию $D^\alpha V_{\alpha\dot{\alpha}} = 0$, более ограничительному, чем (4.29).

Отметим, что данный выше вывод [102] выражения для супертока основан на удачных догадках и слишком операционен; стоит попробовать найти лучший. Существование супертока представляется важным с разных точек зрения, в частности, в свете возможного суперсимметричного обобщения теории тяготения Эйнштейна *).

5. ИНВАРИАНТНАЯ ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

Инвариантная теория возмущений формулируется непосредственно в терминах суперполей. Как отмечалось выше, суперполя содержат лишние компоненты (аналогично тому, что массивное векторное поле A_μ содержит лишнюю компоненту A_0). Некоторые из уравнений движения оказываются условиями связи, которые выражают лишние компоненты через остальные поля, после чего суперсимметрия остается в неявном виде, проявляя себя в сохранении спин-векторного тока. (Аналогично, в теории векторного поля после исключения A_0 гамильтониан и пропагаторы теряют явно лоренц-инвариантный вид, но по-прежнему сохраняется тензор момента количества движения.)

*) Вместо тензора энергии-импульса — суперток? Суперток, в принципе, мог бы быть источником для суперполя типа $\mathscr{H}_{\alpha\dot{\alpha}}$, которое при нулевой массе содержит только две частицы, одну со спиральностью ± 2 и другую со спиральностью $\pm 3/2$.

Для построения инвариантной теории возмущения мы будем основываться на производящем функционале для функций Грина в виде континуального интеграла с интегрированием по всем полям. Можно было бы проинтегрировать по «лишним» полям, но при этом потерялась бы явная инвариантность относительно суперсимметрии (интегрирование по A_0 в теории векторного поля также оставляет лоренц-инвариантность только в неявном виде).

Ковариантное квантование и правила Фейнмана для суперполей определяются аналогично тому, как это обычно делается в квантовой теории поля.

а) Пропагаторы

Для свободного кирального суперполя при наличии источников

$$J_-(x, \theta) = J_F(x) + \theta\eta + \theta\theta J_A, \quad J_+(x, \bar\theta) = J^*(x, \bar\theta), \tag{5.1}$$

уравнения движения (см. (4.18))

$$\frac{1}{4}\bar D\bar D \exp(-2i\theta\hat\partial\bar\theta)\Phi_1^*(x, \bar\theta) - m\Phi(x, \theta) = J_-(x, \theta) \tag{5.2}$$

и ему эрмитовски сопряженное имеют решение

$$\Phi_1(x, \theta) = -\int d^4x d^4\theta' \,[G_{--}(x, \theta, x', \theta') J_-(x', \theta')\,\delta^\Gamma(\bar\theta - \bar\theta') + G_{-+}(x, \theta, x', \bar\theta') J_+(x', \bar\theta')\,\delta^\Gamma(\theta - \theta')]. \tag{5.3}$$

Функции Грина (пропагаторы) уравнений (5.2) записываются как

$$G_{-+}(x, \theta, x', \bar\theta') = \frac{1}{2}\exp(-2i\theta\hat\partial\bar\theta')\,\Delta_C(x - x'), \tag{5.4а}$$

$$G_{--}(x, \theta, x', \theta') = 2m\delta(\theta - \theta')\,\Delta_C(x - x'), \tag{5.4б}$$

где

$$\Delta_C(x - x') = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{\exp[ik(x - x')]}{m^2 - k^2 - i\varepsilon} \tag{5.5}$$

есть причинная функция Грина для скалярного поля с массой m.

Проверка производится подстановкой (5.4) в (5.2) с учетом тождеств

$$\exp(-2i\hat\theta\hat\partial\bar\varkappa) = 1 - 2i\hat\theta\hat\partial\bar\varkappa + 4\delta^\Gamma(\theta)\,\delta^\Gamma(\bar\varkappa)\,\Box \tag{5.6}$$

и

$$\varepsilon^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial}{\partial\theta^\beta}\exp(-2i\theta\hat\partial\bar\varkappa) = -8\delta(\bar\varkappa)\,\Box. \tag{5.7}$$

Функции Грина $G_{-+}G_{--}$ содержат в себе пропагаторы бозонных и фермионных полей как коэффициенты разложения по θ, $\bar\theta$. Так, для ферми-поля из (5.4а) и (5.4б) находим

$$\langle T\psi_\alpha(x)\,\psi_\beta(x')\rangle_0 = -im\varepsilon_{\alpha\beta}\Delta_C(x - x'), \quad \langle T\psi_\alpha(x)\,\bar\psi_{\dot\beta}(x')\rangle_0 = +(\hat\partial)_{\alpha\dot\beta}\,\Delta_C(x - x'), \tag{5.8}$$

и для майорановского спинора $\psi = \begin{pmatrix}\psi_\alpha \\ \bar\psi^{\dot\alpha}\end{pmatrix}$ получается обычный пропагатор

$$\langle T(\psi(x)\,\psi(x'))\rangle = -i(-i\tilde\partial + m)\,\Delta_C(x - x'). \tag{5.9}$$

При включении взаимодействия понадобится явно инвариантная регуляризация, которая достигается добавкой [37] в (4.2.2) члена

$$\frac{\xi}{4}\Box^2\Phi(x, \theta)\exp(-2i\theta\hat\partial\bar\theta)\,\Phi^*(x, \hat\theta). \tag{5.10}$$

Регуляризованные функции Грина вычисляются аналогично нерегуляризованным (5.4), в точности так же зависят от спинорных координат и отличаются от (5.4) только заменой причинной функции Δ_C на D_R^1 в (5.4а) и на D_R^2 в (5.4б):

$$D_R^1(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\exp(ikx)\,[1+\xi\,(k^2)^2]}{m^2-k^2\,[1+\xi\,(k^2)^2]^2-i\varepsilon},$$
$$D_R^2 = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\exp(ikx)}{m^2-k^2\,[1+\xi\,(k^2)^2]^2-i\varepsilon}. \tag{5.11}$$

В импульсном пространстве при больших k $(G_{+-})_R \sim k^{-4}$ $(G_{--})_R \sim k^{-10}$. Регуляризация временно снимает расходимости и делает расчеты осмысленными, а в окончательных результатах следует устремить параметр регуляризации ξ к нулю. Такой инвариантный способ аналогичен предложенному Славновым [86] для теорий Янга — Миллса.

Пропагатор векторного суперполя $V(x, \theta, \bar\theta)$ (3.7) может быть определен как функция Грина свободных уравнений движения при наличии источника, нейтрального векторного суперполя $J(x, \theta, \bar\theta)$:

$$\frac{1}{2}(\Box\Pi_V + m^2)\,V(x, \theta, \bar\theta) = J(x, \theta, \bar\theta). \tag{5.12}$$

Используя проекционное свойство $\Pi_V^2 = \Pi_V$, легко решить это уравнение ($\Pi_c = 1 - \Pi_V$),

$$V(x, \theta, \bar\theta) = \int d^4x\, d^4\theta\, G(x, \theta, \bar\theta, \bar x, \theta', \bar\theta')\, J(x', \theta', \bar\theta), \tag{5.13}$$

где

$$G(x, \theta, \bar\theta, x', \theta', \bar\theta') =$$
$$= 2\left(1 + \frac{\Box}{m^2}\Pi_c\right)(m^2 + \Box)^{-1}\,\delta(x-x')\,\delta^\Gamma(\theta-\theta')\,\delta^\Gamma(\bar\theta-\bar\theta') =$$
$$= 2\left[1 - \frac{1}{16m^2}(\bar D\bar D DD + DD\bar D\bar D)\right]\Delta_C(x-x', m^2)\,\delta^\Gamma(\theta-\theta')\,\delta^\Gamma(\theta-\theta').$$

Подчеркнем полную аналогию с векторным полем A_μ, для которого уравнения движения записываются в виде

$$(\Box\,(\Pi_V)_{\mu\nu} + m^2\eta_{\mu\nu})\,A^\nu = J_\mu(x), \tag{5.14}$$

где $(\Pi_V)_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + (\partial_\mu\partial_\nu/\Box)$ — проекционный оператор, выделяющий спин 1 у A_μ, и причинная функция Грина определяется как

$$(G_C)_{\mu\nu} = \left(\eta_{\mu\nu} + \frac{1}{m^2}\partial_\mu\partial_\nu\right)\Delta_C(x, m^2), \tag{5.15}$$

причем $\partial_\mu\partial_\nu = \Box\,(\Pi_c)_{\mu\nu}$, а $(\Pi_c)_{\mu\nu} = \partial_\mu\partial_\nu/\Box$ — проекционный оператор, выделяющий спин 0 у поля A_μ.

При нулевой массе этот пропагатор теряет смысл, так как возникает калибровочная инвариантность (4.27). Калибровку можно зафиксировать в явном инвариантном виде, добавляя в лагранжиан выражение $(1/2\alpha)\,DDV\bar D\bar DV$. Тогда пропагатор запишется так:

$$i\,\langle TV(x, \theta, \bar\theta)\,V(x', \theta', \bar\theta')\rangle =$$
$$= 2\left(1 - \frac{1-\alpha}{16\Box\alpha}\{DD, \bar D\bar D\}\right)\Delta_C(x-x')\,\delta^\Gamma(\theta-\theta')\,\delta^\Gamma(\bar\theta-\bar\theta'). \tag{5.16}$$

Калибровке Ферми в электродинамике здесь соответствует $\alpha = 1$.

б) Правила Фейнмана в модели Весса и Зумино

Для вычисления матричных элементов различных процессов удобно, используя грассманово интегрирование, представить S-матрицу в виде

$$S = T\exp(iL_{\text{int}}) = \\ = T\exp\left\{i\int d^4x d^4\theta\,\frac{2g}{3}\left[\delta^{\Gamma}(\theta)\,\Phi^{+3}(x,\,\bar\theta) - \delta^{\Gamma_4}(\bar\theta)\,\Phi^3(x,\,\theta)\right]\right\}. \quad (5.17)$$

Диаграммы Фейнмана изображаются обычным образом. Имеются два типа вершин, $(\Phi^+)^3$ и Φ^3. Мы будем называть их левыми и правыми и обозначать на диаграммах символами $\oplus$ и $\ominus$ соответственно. В каждой вершине сохраняется 4-импульс и ей сопоставляется множитель $(2\pi)^4\,\delta\,(\sum_i p_i)$. Каждой внутренней линии сопоставляется пропагатор: для линии, соединяющей две правые вершины,

$$\underset{\theta_2}{\ominus} \xrightarrow{p} \underset{\theta_1}{\ominus} \rightarrow \frac{im\delta^{\Gamma}(\theta_1-\theta_2)}{p^2-m^2+i\varepsilon}, \quad (5.18)$$

для линии, соединяющей две левые вершины,

$$\underset{\bar\theta_2}{\oplus} \xrightarrow{p} \underset{\bar\theta_1}{\oplus} \rightarrow -\frac{im\delta^{\Gamma}(\bar\theta_1-\bar\theta_2)}{p^2-m^2+i\varepsilon}, \quad (5.19)$$

для линии, соединяющей правую и левую вершины,

$$\underset{\bar\theta_2}{\oplus} \xrightarrow[p]{} \ominus \rightarrow \frac{1}{2}\,\frac{\exp(2\theta_1\hat p\bar\theta_2)}{p^2-m^2+i\varepsilon}. \quad (5.20)$$

С каждой внешней линией ассоциируется волновая функция $\Phi_{\text{ext}}(p,\,\theta)$ или $\Phi^+_{\text{ext}}(p,\,\bar\theta)$:

$$\Phi_{\text{ext}}(p,\,\theta) = A_{\text{ext}}(p) + \theta\psi_{\text{ext}}(p) + (\theta\theta)\,F_{\text{ext}}(p). \quad (5.21)$$

По всем импульсам внутренних линий производится интегрирование, по всем спинорным координатам θ, $\bar\theta$ внутренних вершин (т. е. вершин без внешних линий) производится грассманово интегрирование. Такая процедура дает S-матричный элемент для суперполей.

Чтобы получить S-матричный элемент процесса для бозонных и фермионных полей[83], следует взять грассманов интеграл и по спинорным координатам θ, $\bar\theta$ всех внешних вершин. При этом в Φ_{ext} и Φ^+_{ext} надо заменить $F(p)$ на $-mA^*(p)$ в соответствии с уравнениями движения для свободных полей. Суперсимметрия связывает спиновые амплитуды процессов с фиксированным числом частиц (например, двухчастичных $0^{\pm}\frac{1}{2} \rightarrow 0^{\pm}\frac{1}{2}$, $0^{\pm}0^{\pm} \rightarrow 0^{\pm}0^{\pm}$, $\frac{1}{2}\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}\frac{1}{2}$).

Метод суперполей позволяет проводить расчеты и выявлять общие свойства суперсимметричных теорий наиболее наглядно и экономно, так как каждая диаграмма с суперполями объединяет в себе инвариантным образом целую совокупность диаграмм с бозонными и фермионными полями. Приведем несколько примеров и, в частности, покажем, как легко, практически без вычислений, можно увидеть сокращение расходимостей в диаграммах низших порядков теории возмущений.

Рассмотрим диаграмму для контрчлена собственной массы (рис. 1, *а*). Этот контрчлен равен нулю, так как произведение двух G_{--} содержит

$(\delta^{\Gamma}(\theta_1 - \theta_2))^2 \equiv 0$ (см. (4.8)). По тем же соображениям не дает вклад и диаграмма рис. 1, *б*. Равен нулю вклад и от диаграмм для контрчлена перенормировки констант связи (рис. 2), потому что

$$\delta^{\Gamma}(\theta_1 - \theta_2)\,\delta^{\Gamma}(\theta_2 - \theta_3)\,\delta^{\Gamma}(\theta_3 - \theta_1) = [\delta^{\Gamma}(\theta_1 - \theta_2)]^2\,\delta^{\Gamma}(\theta_3 - \theta_1) = 0$$

и то же самое (с заменой θ и $\bar{\theta}$) для вершины $(\Phi^+)^3$.

При вычислениях интегралы по импульсам внутренних линий можно считать регуляризованными согласно (5.11). В низших порядках теории

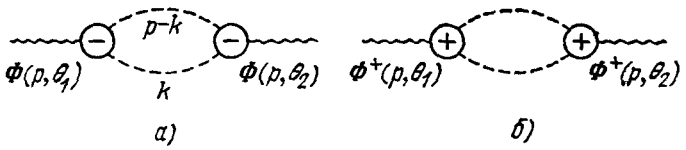

Рис. 1.

возмущений обращение в нуль контрчленов перенормировки массы и константы связи возникает из-за замечательных свойств грассмановой дельта-функции и не требует каких-либо вычислений. Чтобы усмотреть этот же факт в формализме с обычными ферми- и бозе-полями, используя лагранжиан (4.15), нужно исследовать большее число различных диаграмм и установить, что вклады от них взаимо уничтожаются.

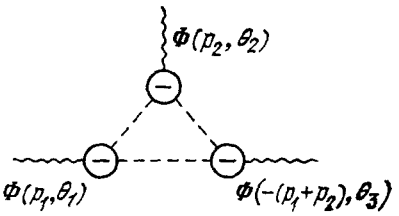

Рис. 2.

Вернемся к примерам. Равны нулю и «головастики» (рис. 3), так как $\delta^{\Gamma}(0) = 0$, и вклады от вакуумных петель, состоящих только от правых вершин (или только из левых; рис. 4). Легко показать, что любая диаграмма, которая содержит какой-либо замкнутый цикл, состоящий только из правых вершин (или только из левых) дает нулевой вклад.

Исчезает и вклад от диаграммы с вакуумными петлями (рис. 5), содержащих правую и левую вершины. В этом случае обращение в нуль

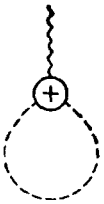

Рис. 3.

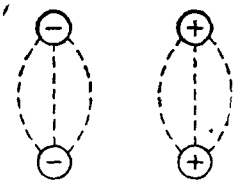

Рис. 4.

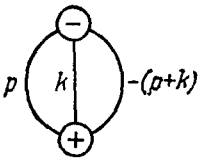

Рис. 5.

происходит из-за того, что подынтегральное выражение не зависит от θ и $\bar{\theta}$, а при грассмановом интегрировании $\int d\theta = 0$. В дальнейшем мы убедимся, что вакуумные петли в произвольном порядке теории возмущений дают нуль; здесь мы привели простейшие примеры. Наконец, диаграмма рис. 6 дает вклад

$$Z\Phi(p, \theta)\exp(-2\theta\hat{p}\theta)\,\Phi^+(p, \bar{\theta}), \tag{5.22}$$

где Z — логарифмически расходится. Таким образом, в g^2 и g^3 порядках теории возмущений возникает только одна расходимость — логарифмическая расходимость в явно инвариантном контрчлене перенормировки волновой функции.

Отметим еще, что вершинная диаграмма, изображенная на рис. 7, дает конечный вклад. В высших порядках дают конечный вклад все диаграммы, кроме диаграмм с двумя внешними линиями, одна из которых

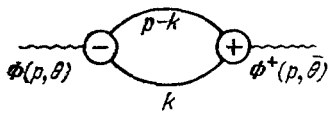

Рис. 6.

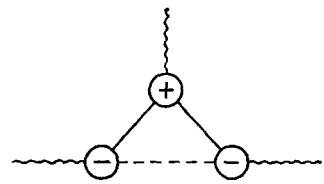

Рис. 7.

соединена с вершиной (—), а другая с вершиной (+). Такие диаграммы могут расходиться только логарифмически и их совокупность определяет единственный в обсуждаемой теории необходимый контрчлен в инвариантном относительно суперсимметрий виде. К доказательству этого удивительного факта мы сейчас и переходим, и начнем с тождеств, следующих из суперсимметрии, которые мы по традиции будем называть тождествами Уорда.

в) Тождества Уорда

Рассмотрим диаграмму Фейнмана общего вида. Пусть она содержит n внешних правых вершин θ_j и m внешних левых вершин $\bar\theta_k$, в которые входят внешние линии с импульсами p_j и q_k соответственно. Тогда соответствующая амплитуда запишется как

$$A((p\theta),\ (q,\ \bar\theta)) = \\ = \int dl_1 \ldots dl_a d^2\theta_{i_1} \ldots d^2\theta_{i_p} d^2\bar\theta_{i_1} \ldots d^2\theta_{i_s} K((p\theta),\ (q,\ \bar\theta),\ (\theta_i,\ \bar\theta_i,\ l)), \quad (5.23)$$

где интеграл берется по импульсам внутренних петель l_a и по спинорным переменным внутренних левых (θ_i) и правых ($\bar\theta_i$) вершин, причем приняты сокращенные обозначения

$$(p\theta) = (p_1\theta_1,\ \ldots,\ p_n\theta_n),\quad (q\bar\theta) = (q_1\bar\theta_1\ \ldots\ q_m\bar\theta_m), \\ (\theta_i,\ \bar\theta_i,\ l) = (\theta_{i_1},\ \ldots,\ \bar\theta_{i_1},\ \ldots,\ l_1,\ \ldots,\ l_a). \quad (5.24)$$

Покажем, что ядра амплитуды $K((p\theta)\ (q\bar\theta)\ (\theta_i\bar\theta_i l))$ для любой заданной диаграммы Фейнмана удовлетворяют следующим важным тождествам [107]:

$$K((p\theta),\ (q\bar\theta)(\theta_i\bar\theta_i,\ l)) \equiv \\ \equiv \exp\Big(-2\sum_{j=1}^{m} \zeta\hat q_j\bar\theta_j\Big) K((p,\ \theta+\zeta),\ (q\bar\theta)(\theta_i+\zeta,\ \bar\theta_i,\ l)) \equiv \\ \equiv \exp\Big(+2\sum_{k=1}^{n} \theta_k\hat p_k\bar\zeta\Big) K((p,\ \theta),\ (q,\ \bar\theta+\bar\zeta)(\theta_i,\ \bar\theta_i+\bar\zeta,\ l)) \equiv \\ \equiv \exp\Big[2\sum_{k=1}^{n} \theta_k\hat p_k\bar\zeta - 2\sum_{j=1}^{n} \zeta\hat q_j\bar\theta_j + \zeta\Big(\sum_{k=1}^{n} p_k - \sum_{j=1}^{m} q_j\Big)\bar\zeta\Big] \times \\ \times K((p,\ \theta+\zeta),\ (q,\ \bar\theta+\bar\zeta)(\theta_i+\zeta,\ \bar\theta_i+\bar\zeta,\ l)). \quad (5.25)$$

Докажем сначала тождества (5.25). Ядро K есть произведение пропагаторов. При общем спинорном сдвиге $\theta \to \theta + \zeta$ пропагаторы G_{++} и G_{--} не меняются, а пропагаторы G_{+-} приобретают множители, зависящие от переменных $\bar{\theta}$. Поэтому достаточно рассмотреть только левые вершины; каждую группу внешних левых вершин, соединенных между собой пропагаторами $G_{++} \sim \delta^{\Gamma}(\bar{\theta}_l - \bar{\theta}_m)$, можно «стянуть» в одну эффективную левую вершину (рис. 8). Каждый из пропагаторов $G_{+-} \sim \exp(-2\theta_{j_2}\hat{k}_{j_2}\bar{\theta}_j)$

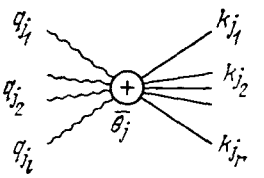

Рис. 8.

и при $\theta \to \theta + \zeta$ приобретает множитель $\exp(-2\zeta\hat{k}_{j_r}\bar{\theta}_j)$, а при ядре K за счет всех внешних левых вершин возникает множитель $\exp(-2\sum \zeta\hat{q}_j\hat{\theta}_j)$, фигурирующий в тождестве (5.25) (при этом учтен закон сохранения 4-импульса $(\sum_r k_{j_r} = -\sum_l q_{j_l})$). Внутренние левые вершины, соединенные с внешними пропагаторами G_{++}, уже рассмотрены. В остальных стянем снова каждую группу левых внутренних вершин, соединенных между собой пропагаторами G_{++} в одну эффективную вершину, из которой выходят только линии $+-$. Сумма 4-импульсов G_{+-} этих линий равна нулю, и поэтому каждая такая эффективная внутренняя вершина не дает вклада в изменение ядра ($\exp(2\zeta\sum_l \hat{k}_{j_l}\theta_j) = 1$), так как $\sum_l k_{j_l} = 0$).

Этим завершается доказательство верхнего тождества (5.25). Среднее тождество доказывается аналогично. Наконец, третье тождество получается комбинацией первых двух. Важно, что найденные тождества справедливы для каждой отдельной диаграммы. Они сильнее тождеств Уорда для функций Грина,

$$G_{nm}((x\theta), (y\bar{\theta})) = G_{nm}((x'\theta'), (y'\bar{\theta}')), \tag{5.26}$$

вытекающих из инвариантности вакуума относительно преобразований суперсимметрий (3.17) и (3.18), где

$$G_{nm}((x\theta), (y\bar{\theta})) = \langle T\Phi(x_1\theta_1)\ldots\Phi(x_n\theta_n)\Phi^+(y_1\bar{\theta}_1)\ldots\Phi^+(y_m\bar{\theta}_m)\rangle_0. \tag{5.27}$$

В импульсном пространстве для фурье-образа $\tilde{G}_{nm}$ эти тождества записываются как

$$\tilde{G}_{nm}((p, \theta+\zeta), (q, \bar{\theta}+\bar{\zeta})) =$$
$$= \exp\left[-2\sum_{k=1}^{n}\theta_k\hat{p}_k\bar{\zeta} + 2\sum\zeta\hat{q}_j\bar{\theta}_j + \zeta\left(\sum_{j=1}^{m} q_j - \sum_{k=1}^{n} p_k\right)\bar{\zeta}\right]\tilde{G}_{nm}((p\theta)(q\bar{\theta})). \tag{5.28}$$

Они содержатся и могут быть получены из нижнего тождества (5.25).

Следствия:

1) Любая вакуумная петля обращается в нуль (например, рис. 9). Действительно, при отсутствии внешних вершин и линий из (5.25) вытекает, что ядро K зависит только от разностей $\theta_{i_k} - \theta_{i_l}$ и $\bar{\theta}_{i_m} - \bar{\theta}_{i_n}$. Амплитуда переходов вакуум—вакуум обращает в нуль, так как число грассмановых интегрирований превышает число независимых грассмановых переменных, а $\int d\theta = 0$ (4.3). Выше мы проиллюстрировали этот факт на простейших примерах (см. рис. 4 и 5). Отметим, что Зумино [36] удалось выявить это поразительное свойство суперсимметричной модели суммированием вкладов многих диаграмм с бозе- и ферми-полями.

2) Для любой диаграммы без внешних левых вершин ядро K зависит от разностей переменных θ (верхнее тождество (5.25)), а амплитуда — от разностей внешних переменных θ. Аналогичное утверждение (с заменой θ на $\overline{\theta}$) справедливо для диаграмм без внешних правых вершин.

3) Для диаграммы без внешних левых вершин амплитуда обращается в нуль, когда все $p_k = 0$. В самом деле, при этом (среднее тождество (5.25))

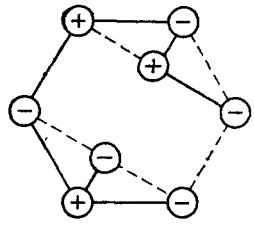

Рис. 9.

ядро зависит от разностей внутренних переменных и число грассмановых интегрирований по $\overline{\theta}_i$ превышает число независимых переменных $\overline{\theta}_i$, $A\,(0\theta) = 0$. Аналогично, $A\,(0\overline{\theta}) = 0$.

В частности, в обсуждаемой теории автоматически исчезают не только вакуумные петли, но и «головастики» произвольной сложности. Действительно, «головастикам» соответствуют диаграммы с одной внешней вершиной $\oplus$ или $\ominus$ и равным нулю внешним импульсом.

4) Если устремить к нулю все внешние импульсы, $p_i = 0$, $q_k = 0$, то ядро будет зависеть только от разностей переменных θ и разностей переменных $\overline{\theta}$, т. е. число независимых правых и левых вершин уменьшается на единицу.

5) Для любой диаграммы с двумя правыми вершинами при всех ζ

$$K((p,\ \theta_1),\ (-p,\ \theta_2),\ (\theta_i\overline{\theta}_i l)) = \\ = \exp(2(\theta_1-\theta_2)\hat{p}\zeta)\,K((p,\ \theta_1)(-p,\ \theta_2)(\theta_i,\ \theta_i+\zeta,\ l)). \qquad (5.29)$$

Полагая $\overline{\zeta} + \overline{\theta}_i = 0$ для одной из внутренних $\overline{\theta}_i$ и интегрируя по внутренним переменным $\left(\int d^2\overline{\theta}_i \exp[2(\theta_1-\theta_2)\hat{p}\overline{\theta}_i] = -4\delta^{\Gamma}(\theta_1-\theta_2)\,p^2\right)$, находим

$$A\,(p,\ \theta_1;\ -p,\ \theta_2) = \delta^{\Gamma}(\theta_1-\theta_2)\,p^2 f\,(p^2). \qquad (5.30)$$

Аналогично с заменой $\theta_k \to \overline{\theta}_k$ для любой диаграммы $(\Phi^+)^2$. В качестве примера читатель может вычислить амплитуду для диаграммы рис. 10.

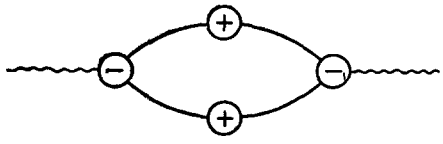

Рис. 10.

6) Для любой диаграммы с одной правой и одной левой вершинами тождество (5.25) дает при любых ζ, $\overline{\zeta}$

$$A\,(p,\ \theta;\ -p,\ \overline{\theta}) = \exp[2(\theta\hat{p}\overline{\zeta} + \zeta\hat{p}\overline{\theta} + \zeta\hat{p}\overline{\zeta})]\,A\,(p,\ \theta+\zeta;\ -p,\ \overline{\theta}+\overline{\zeta}).$$

Полагая $\theta + \zeta = \bar{\theta} + \bar{\zeta} = 0$, мы устанавливаем общую структуру

$$A\,(p,\ \theta;\ -\bar{p},\ \theta) = \exp\,(-2\theta\hat{p}\bar{\theta})\ u\,(p^2), \tag{5.31}$$

где $u\,(p^2) = A\,(p,\ 0;\ -p,\ 0)$.

г) Сокращение расходимостей в высших порядках

Установим, какие из диаграмм расходятся, и дадим оценку их индекса расходимости [107]. По форме обсуждаемая теория есть теория φ^3, однако экспонента в пропагаторе G_{+-} (5.20) дает лишний квадрат импульса. Индекс диаграммы можно записать в виде

$$\omega\,(\tau) = \omega_3\,(\tau) + \omega_{+-}\,(\tau), \tag{5.32}$$

где $\omega_3\tau$ — индекс расходимости диаграммы τ в теории φ^3, а $\omega_{+-}\,(\tau)$ — добавка из-за пропагаторов G_{+-}. Если диаграмма имеет N вершин (N_+ правых и N_- левых) и n_e внешних линий, то, как известно [10],

$$\omega_3\,(\tau) = \frac{3N - n_e}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 4 - 4\,(N-1) = 4 - N - n_l. \tag{5.33}$$

Дадим теперь оценку для $\omega_{+-}\,(\tau)$. Каждую группу левых вершин, соединенных пропагаторами $G_{++} \sim \delta\,(\bar{\theta}_j - \bar{\theta}_k)$, стянем в одну эффективную левую вершину $\bar{\theta}_j$, а каждую группу правых вершин, соединенных между собой пропагаторами $G_{--} \sim \delta\,(\theta_i - \theta_k)$, в одну эффективную вершину θ_i. Число эффективных левых и правых вершин будет соответственно равно $\tilde{N}_+ = N_+ - n_{++}$ и $\tilde{N}_- = N_- - n_{--}$, где n_{++} — число пропагаторов G_{++}, а n_{--} — число пропагаторов G_{--}. Несколько пропагаторов G_{+-}, присоединенных к одной эффективной вершине, дают ту же дополнительную вторую степень импульса, что и один: например,

$$\exp\,[2\bar{\theta}_i\,(\hat{p}_j\bar{\theta}_j + \hat{p}_k\bar{\theta}_k)] = 1 + 2\theta_i\,(\hat{p}_j\bar{\theta}_j + p_k\bar{\theta}_k) - 4\delta^{\Gamma}\,(\theta_i)\,[\delta^{\Gamma}\,(\bar{\theta}_j)\ p_j^2 + \delta^{\Gamma}\,(\bar{\theta}_k)\ p_k^2 - \theta_j\theta_k p_j p_k].$$

Поэтому

$$\omega_{+-}\,(\tau) \leqslant 2\min\,(\tilde{N}_+,\ \tilde{N}_-) = \tilde{N}_+ + \tilde{N}_- - |\,\tilde{N}_+ - \tilde{N}_-\,| =$$
$$= N - n_{++} - n_{--} - |\,N_+ - N_- - n_{++} + n_{--}\,|, \tag{5.34}$$

и, учитывая (5.33), находим

$$\omega\,(\tau) \leqslant 4 - n_e - n_\delta - |\,N_+ - N_- + n_{--} - n_{++}\,|, \tag{5.35}$$

где $n_\delta = n_{++} + n_{--}$.

Для диаграммы с пятью и более внешними линиями $\omega\,(\tau) < 0$, и они заведомо дают конечный вклад. Для диаграмм с четырьмя внешними линиями $\omega\,(\tau) \leqslant 0$. Для диаграмм Φ^3 и $(\Phi^+)^3$ снова $\omega\,(\tau) \leqslant 0$, потому что либо $n_\delta = 0$, но $|\,\tilde{N}_+ - \tilde{N}_-| = 1$, либо $n_\delta \geqslant 1$. В случае $\Phi\Phi\Phi^+$ (и $\Phi\Phi^+\Phi^+$) диаграмм комбинаторные соображения показывают, что $n_\delta \geqslant 1$ и, следовательно, для них опять $\omega\,(\tau) \leqslant 0$. Наибольшую степень расходимости дают наивысшие степени импульсов внутренних петель. Чтобы считать только их, положим внешние импульсы равными нулю. Но при этом (следствие 4) тождеств Уорда)) числа независимых правых и левых вершин уменьшаются на единицу, так как ядро диаграммы зависит от разностей спинорных переменных, что понижает степень наивысшей расходимости по крайней мере на 2. Таким образом, все диаграммы с 4-мя и 3-мя внешними линиями не содержат расходимостей.

Остается рассмотреть диаграммы с двумя внешними линиями. Для диаграмм типа $\Phi\Phi$ $\omega\,(\Phi\Phi) \leqslant 0$, так как для них либо $n_\delta \geqslant 2$, либо $n_{++} = 1$, $|\,\tilde{N}_+ - \tilde{N}_-| \geqslant 1$ (случай $n_\delta = 0$ исключается: возник бы нонсенс $3N_- - 2 = 3N_+$). Однако согласно следствию 5) тождеств Уорда, соответствующая амплитуда содержит квадрат внешнего импульса как множитель, и поэтому такие диаграммы (и, аналогично, все диаграммы $\Phi^+\Phi^+$) свободны от расходимостей.

В случае диаграмм $\Phi\Phi^+$ и n_δ и $|\,\tilde{N}_+ - \tilde{N}_-|$ могут быть равны нулю и для них $\omega\,(\tau) \leqslant 2$. Но следствие 6) тождеств Уорда говорит, что соответствующий контрчлен имеет вид

$$\Phi\,(p)\ \exp\,(-2\theta\hat{p}\bar{\theta})\ \Phi^+\,(p)\ u\,(p^2). \tag{5.36}$$

Экспонента ведет себя при больших импульсах как p^2. Поэтому $u\,(p^2)$ для любой диаграммы расходится максимум логарифмически.

При всех вычислениях предполагается, что пропагаторы были предварительно регуляризованы согласно (5.11).

Итак, доказано, что в модели Весса и Зумино только диаграммы типа $\Phi\Phi^+$ ведут к расходимостям, причем независимо от сложности диаграммы расходимости являются логарифмическими, а структура их вкладов едина и имеет инвариантный вид (5.36). Переходя в x-пространство, запишем вклад от всех диаграмм $\Phi\Phi^+$ в форме, тождественной кинетической части лагранжиана

$$\frac{Z-1}{4}\int d^4x\, d\theta\Phi(x,\ \theta)\exp(-2i\theta\hat{\partial}\bar{\theta})\Phi^+(x,\ \bar{\theta}), \tag{5.37}$$

где $Z-1$ — логарифмически расходящаяся константа.

Константа Z включается в перенормировку волновой функции скалярного суперполя. Мы убеждаемся, что ренормированные величины в модели Весса и Зумино определяются согласно

$$\Phi_r(x,\ \theta) = Z^{-1/2}\Phi(x,\ \theta),\ m_r = Zm,\ g_r = Z^{3/2}g. \tag{5.38}$$

Возникают только один контрчлен и соответственно только одна константа перенормировки. Этот поразительный факт впервые был замечен и доказан в работах [13, 37]. Именно он стимулировал внимание в суперсимметриям. Модель Весса и Зумино — простейшая суперсимметричная теория, в ней все видно и поэтому ей посвящено наибольшее число работ. Инвариантная теория возмущений для этой модели развивалась в различных планах в статьях [30, 40, 41, 54, 61, 83, 95, 107]. Сравнительно простая игра только со спинорными переменными θ, $\bar{\theta}$ позволяет выявить необычные свойства суперсимметричных теорий — резкое сокращение расходимостей, исчезновение вакуумных петель и т. д.,— минуя суммирование взаимно погашающихся вкладов от большого числа диаграмм с бозе- и ферми-полями.

Уравнения ренорм-группы для обсуждаемой модели просты, так как имеется только одна константа перенормировки (например, из (5.38) следует, что $\partial g_r/\partial m = (3/2)\,\partial \ln Z/\partial m$). Они исследовались в статьях Феррары, Илиопулоса и Зумино [98] и Шафи [85] (в последней — в терминах суперполей). Модель не обладает асимптотической свободой, эффективная константа связи неограниченно растет с увеличением энергии.

Отметим, что анализ теории скалярного поля с самодействием $(\lambda/4!)\,(\Phi^4(x,\ \theta)\,\delta(\bar{\theta}) + \text{э. с.})$ показал [55], что она неперенормируема, хотя и содержит меньше расходимостей, чем можно было бы ожидать. Теория кирального спинорного суперполя, взаимодействующего с киральным скалярным суперполем (с размерной константой связи) исследована в статье [2]. Она также неперенормируема, но многие расходимости сокращаются. Перенормируемые теории скалярного суперполя, описывающего векторный мультиплет *), и обобщающие калибровочные теории Янга и Миллса, будут кратко обсуждены в следующем разделе.

6. СУПЕРСИММЕТРИЧНОЕ ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРИЙ ЯНГА — МИЛЛСА

В этом разделе обсуждаются включение внутренних симметрий и попытки обобщения калибровочных теорий в суперсимметричной модели [14, 80, 100]. Довольно просто ввести глобальную внутреннюю симметрию, например, унитарную симметрию $SU(n)$. Скалярное киральное суперполе $S(x,\ \theta)$ описывает нейтральные частицы A, B, ψ с определенной четно-

*) Лихтман [58] недавно исследовал суперсимметричную перенормируемую модель теории поля, в которой массивное векторное поле взаимодействует с несохраняющимся током.

стью. Поэтому для построения комплексных представлений группы внутренних симметрий достаточно ввести набор комплексных суперполей ($i = 1, 2, \ldots, k$)

$$S_i(x, \theta) = S_i^{(1)}(x, \theta) + iS_i^{(2)}(x, \theta) \tag{6.1}$$

и постулировать закон преобразования

$$S_i'(x, \theta) = \exp(-i\alpha_m t_m)_{ij} S_j(x, \theta), \tag{6.2}$$

где α_m — параметры, а t_m — матрицы данного представления внутренней симметрии. Попробуем продвинуться дальше и обобщить локальные преобразования, параметры которых зависят от координат поля. Из требования, чтобы преобразованное суперполе было снова суперполем, мы заключаем, что сами параметры должны быть киральными суперполями $\alpha_m \to \alpha_m(x, \theta) = \alpha_m(x) + \theta^\alpha \alpha_{m,\alpha}(x) + \theta\theta\beta_m(x)$, т. е. что симметрия должна быть «локальна» и в суперпространстве. По сравнению с обычными локальными симметриями добавляется зависимость от спинорных координат θ. Тогда

$$S'(x, \theta) = \exp(-i\Lambda(x, \theta))\, S(x, \theta) \quad (\Lambda(x, \theta) = \alpha_m(x, \theta)\, t_m). \tag{6.3}$$

При пространственном отражении (см. (3.23))

$$S(x, \theta) \to S_P(x', \theta') = T(x, \bar\theta) = S^{(1)*}(x, \bar\theta) + iS^{(2)*}(x, \bar\theta), \tag{6.4}$$

$$\Lambda_P(x, \theta) \to \Lambda_P(x', \theta') = \Lambda^*(x, \bar\theta). \tag{6.5}$$

При локальных преобразованиях

$$T(x, \bar\theta) \to T'(x, \bar\theta) = \exp(-i\Lambda^+(x, \bar\theta))\, T(x, \bar\theta). \tag{6.6}$$

Кинетический и массовый члены лагранжиана, инвариантные относительно глобальных преобразований, имеют вид *)

$$S^+(x - i\theta\sigma_\mu\bar\theta, \bar\theta)\, S(x + i\theta\sigma_\mu\bar\theta'\, \theta) + T^*(x + i\theta\sigma_\mu\bar\theta'\, \theta)\, T(x - i\theta\sigma_\mu\bar\theta, \bar\theta) + \\ + m\,[S^*T\delta^\Gamma](\theta) - T^*S\delta^\Gamma(\bar\theta)]. \tag{6.7}$$

Массовый член инвариантен и относительно локальных преобразований (3.5), а кинетический — не инвариантен. Будем следовать идеологии калибровочных полей [1]. Введем векторные суперполя $\widetilde V_i(x_\mu, \theta, \bar\theta)$, преобразующиеся по присоединенному представлению группы внутренней симметрии ($\widetilde V = t_i \widetilde V_i$, $\alpha = t_i\alpha_i$):

$$\widetilde V'(x, \theta, \bar\theta) = \exp(-i\alpha)\, \widetilde V(x, \theta, \bar\theta) \exp(i\alpha). \tag{6.8}$$

При инфинитезимальных *локальных* преобразованиях примем, что

$$\delta\widetilde V = -i\Lambda^+\widetilde V + i\widetilde V\Lambda + \frac{i}{g}(\Lambda - \Lambda^+), \tag{6.9}$$

в качестве обобщения обычных локальных преобразований —

$$\delta v_\mu = -i\alpha v_\mu + i v_\mu \alpha + \frac{1}{g}\partial_\mu \alpha.$$

Тогда при конечных локальных преобразованиях

$$1 + g\widetilde V' = \exp(-i\Lambda^+)(1 + g\widetilde V)\exp(i\Lambda). \tag{6.10}$$

*) Если суперполе S описывается вещественным представлением $SU(n)$, то матрица Λ антисимметрична и можно обойтись без $S^{(2*)}$ и $T \equiv S^*$.

Восстановим теперь локальную инвариантность, вводя «компенсирующее» суперполе $\widetilde{V}$ и заменяя кинетический член на

$$S^* (1 + g\widetilde{V}) S + T^* (1 + gV)^{-1} T. \tag{6.11}$$

При пространственном отражении $(1 + gV) \to (1 + gV)^{-1}$, т. е. V преобразуется существенно нелинейно. Удобно сделать преобразование эквивалентности

$$1 + g\widetilde{V}' = \exp (gV). \tag{6.12}$$

Векторное суперполе $V(x, \theta, \theta')$ при пространственном отражении просто меняет знак, как и обычное векторное поле, зато калибровочные преобразования (6.9) для V становятся нелинейными. Кинетический член в (6.7) приобретает вид

$$S^* \exp (gV) S + T^* \exp (-gV) T. \tag{6.13}$$

Чтобы найти лагранжиан для самодействия суперполя V, образуем спинорное суперполе

$$\Psi_\alpha = -\frac{i}{g} \exp (-gV) D_\alpha \exp (gV), \tag{6.14}$$

которое трансформируется по закону (см. (6.10) и (6.12))

$$\Psi'_\alpha = \exp (-i\Lambda) \Psi_\alpha \exp (i\Lambda) - \frac{i}{g} \exp (-i\Lambda) D_\alpha \exp (i\Lambda), \tag{6.15}$$

так как $D_\alpha \Lambda^+ = 0$ по определению. Дважды применяя ковариантную производную $\overline{D}_\alpha$, получаем киральное спинорное суперполе

$$W_\alpha = \overline{D}\overline{D}\Psi_\alpha, \qquad \overline{D}_{\dot\gamma} W_\alpha = 0 \tag{6.16}$$

с однородным знаком преобразования

$$W'_\alpha = \exp (-i\Lambda) W_\alpha \exp (i\Lambda). \tag{6.17}$$

Теперь самодействие векторного суперполя $V(x, \theta, \overline{\theta})$ можно представить в явно инвариантной форме

$$\delta^{\Gamma} (\overline{\theta}) \operatorname{Tr} (W^\alpha W_\alpha) + \text{э. с.} \tag{6.18}$$

Калибровочная инвариантность достигнута, однако, построенная модель чрезвычайно нелинейна, нелинейны и кинетические члены для скалярных полей (6.13) и самодействие (6.18). В таком виде трудно судить о перенормируемости. Чтобы представить модель в явно перенормируемом виде, Весс и Зумино [14] закрепляют калибровку так, чтобы из всей совокупности полей, входящих в векторное суперполе (см. (3.47) и (6.7)), остались бы только поля V_μ, λ и D:

$$V(x, \theta, \overline{\theta}) = -\theta\sigma_\mu\overline{\theta}V^\mu + \theta\theta\overline{\theta}\overline{\lambda} + \overline{\theta}\overline{\theta}\theta\lambda + \theta\theta\overline{\theta}\overline{\theta}D. \tag{6.19}$$

В этой калибровке самодействие векторного суперполя описывается лагранжевой плотностью

$$L = \operatorname{Tr}\left\{ -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu})^2 - \frac{i}{2} \overline{\lambda}\gamma^\mu\nabla_\mu\lambda + \frac{1}{2} D^2 \right\}, \tag{6.20}$$

где

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu + ig [V_\mu, V_\nu], \tag{6.21}$$

$$\nabla_\mu\lambda = \partial_\mu\lambda + ig [V_\mu, \lambda]. \tag{6.22}$$

За исключением члена, содержащего вспомогательное поле D, (6.20) в точности совпадает с лагранжианом для поля Янга и Миллса во взаимодействии с майорановским спинором λ, принадлежащим к присоединенному представлению группы внутренних симметрий. Если скалярное суперполе S также описывается присоединенным представлением, то его взаимодействие с векторным суперполем запишется в терминах компонентных полей:

$$L = \mathrm{Tr}\left\{\frac{1}{2}[(\nabla_\mu A)^2 + (\nabla_\mu B)^2 - i\bar{\psi}\gamma^\mu\nabla_\mu\psi + F^2 + G^2] + \right.$$
$$\left. + g\bar{\lambda}[A - i\gamma_5 B, \psi] + igD[A, B] + m\left(FA + GB - \frac{1}{2}\bar{\psi}\psi\right)\right\}, \quad (6.23)$$

где $\nabla_\mu A = \partial_\mu A + ig[V_\mu, A]$ и т. д. Снова возникли хорошо знакомые янг-миллсовы связи. Вдобавок появились связи типа Юкавы и, после исключения вспомогательного поля D из (6.20) и (6.23), квадралинейные связи полей A и B. Во всех этих взаимодействиях фигурирует одна универсальная константа связи g. Полученная теория явно перенормируема, однако специальный выбор калибровки (6.19) лишает ее явно инвариантной относительно суперсимметрий формы.

Славнов [87] доказал перенормируемость при закреплении калибровки в инвариантном относительно суперсимметрий виде (см. также [54, 105]). В суперсимметричной электродинамике обращается в нуль аномальный магнитный момент электрона [101].

Интересно [80, 100], что в однопетлевом приближении для векторного суперполя, взаимодействующего с k суперполями S, принадлежащими к присоединенным представлениям, функция Каллана — Симанзика $\beta(g)$ равна $-(g^3/16\pi^2)(3-k)G_2$, где G_2 — величина квадратичного оператора Казимира для присоединенного представления. При $k < 3$, в частности, для самодействия векторного суперполя, теория асимптотически свободна. При $k = 3$ перенормировка константы связи конечна *).

Отметим [80, 100], что если положить массу в (6.23) равной нулю ($m = 0$), исключить поле D из уравнений движения ($D = -ig[A, B]$) и объединить майорановские спиноры λ и ψ в дираковский спинор $\varphi = (1/\sqrt{2})(\lambda + i\psi)$, то (6.20) и (6.23) запишутся так:

$$\mathrm{Tr}\left\{-\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{2}[(\nabla_\mu A)^2 + (\nabla_\mu B)^2 - i\bar{\varphi}\gamma^\mu\overleftrightarrow{\nabla}_\mu\varphi] - \right.$$
$$\left. - g\bar{\varphi}[A - i\gamma_5 B, \varphi] + \frac{g^2}{2}[A, B]^2\right\}. \quad (6.24)$$

В формуле (6.24) возникла дополнительная инвариантность $\varphi \to e^{i\alpha}\varphi$, которую можно пытаться связать с сохранением барионного числа. Аналогично, в случае киральных внутренних симметрий возникают $V - A$-калибровочные теории [29], в которых делаются попытки ввести сохраняющееся фермионное число, скалярные суперполя следует отнести к присоединенному представлению. Массы всех частиц должны исчезать при этом, и нет инвариантного способа сделать их массивными, что создает трудности.

В целом, несмотря на то, что изложенным выше способом Вессу, Дельбурго, Зумино, Ферраре, Саламу и Стратди удалось суперсимметрично обобщить теории Янга — Миллса, остается определенная неудо-

*) Калашников и Фрадкин [47] показали, что при специальном суммировании высших порядков эти результаты остаются в силе. Они вычислили также асимптотику функций Грина (при $k = 3$ возникает скейлинг). В модели со спонтанным нарушением внутренней симметрии [82] асимптотическая свобода исчезает [47].

влетворенность. Теории получились весьма нелинейными в явно суперсимметричной форме, процедура не лишена искусственности. Главное же состоит в следующем. Для полей Янга — Миллса источниками служат сохраняющиеся векторные токи. Для суперсимметричных моделей характерны сохраняющиеся спин-векторные супертоки. В изложенном подходе они остаются вне игры, не служат источниками соответствующих калибровочных спин-векторных полей. Не исключено, что это связано с искусственным выбором именно векторного суперполя в качестве калибровочного. Приведем аргументы.

Закон преобразования (6.15) спинорного суперполя (6.14) является точным аналогом янг-миллсовского преобразования

$$V'_\mu = \exp(-i\alpha)\, V_\mu \exp(i\alpha) - \frac{i}{g} \exp(-i\alpha)\, \partial_\mu \exp(i\alpha), \tag{6.25}$$

отличаясь от него заменой обычной производной $\partial/\partial x^\mu$ на спинорную D_α. Аналогом напряженности $F_{\mu\nu}$ (6.12) ($F'_{\mu\nu} = \exp(-i\alpha)\, F_{\mu\nu} \exp(i\alpha)$) для суперполя Ψ_α служит (с естественной заменой коммутаторов на антикоммутаторы)

$$\Psi_{\alpha\beta} = D_\alpha \Psi_\beta + D_\beta \Psi_\alpha + ig\{\Psi_\alpha, \Psi_\beta\}, \tag{6.27}$$

$$\Psi_{\alpha\beta} = \exp(-i\Lambda)\, \Psi_{\alpha\beta} \exp(i\Lambda). \tag{6.26}$$

Аналогия полная. Самое интересное в том, что напряженность $\Psi_{\alpha\beta}$ тождественно обращается в нуль, если выразить Ψ_α через векторное суперполе V согласно (6.14). В янг-миллсовском случае совершенно такая же ситуация [68]: $F_{\mu\nu}$ тождественно обращается в нуль, если подставить «векторное» поле в виде (ср. (6.14))

$$V_\mu = -\frac{i}{g} \exp(-ig\varphi)\, \partial_\mu \exp(ig\varphi), \tag{6.28}$$

где $\varphi(x)$ — калибровочное скалярное поле с трансформационным законом $\exp(ig\varphi)' = \exp(ig\varphi) \exp(i\lambda)$, обеспечивающим правильные трансформационные свойства (25) у поля V_μ (6.28). Нам представляется поэтому, что нелинейное обобщение теорий Янга — Миллса с векторным суперполем, обсужденное выше, в определенном смысле ортогонально идеологии Янга и Миллса, и что очень важно изучить другие возможности, особенно калибровочное спинорное суперполе Ψ_α. При этом можно надеяться на возникновение состоятельных теорий спин-векторного поля $\psi_{\mu\alpha}$, входящего в суперполе Ψ_α (ведь не существует перенормируемых теорий векторного поля, отличных от теории Янга — Миллса).

Нам не удалось построить лагранжеву теорию для суперполя Ψ_α, используя напряженности (6.26) и калибровочную группу (6.15), так, чтобы уравнения для спинорных полей были первого порядка, а для бозонных — второго. Дело, по-видимому, в том, что калибровочная группа (6.15) с *киральным* скалярным суперполем $\Lambda(x, \theta, \bar\theta)$ вместо параметров слишком бедна. Однако ее можно расширить и рассматривать формально тот же закон преобразования

$$\Psi'_\alpha = \exp(-i\Lambda)\, \Psi_\alpha \exp(i\Lambda) - \frac{i}{g} \exp(-i\Lambda)\, D_\alpha \exp(i\Lambda), \tag{6.29}$$

но считать Ψ_α майорановским спинорным суперполем, а $\Lambda(x, \theta, \bar\theta)$ — общим скалярным суперполем (3.47). Групповые свойства при этом не теряются.

Так же как калибровочная инвариантность в теории Янга — Миллса соответствует замене параметров преобразования общими скалярными полями (функциями от x), так и (6.29) отвечает замене их общими скаляр-

ными суперполями (скалярными функциями от x, θ и $\bar{\theta}$). Взаимодействие с киральными суперполями здесь включить, естественно, нельзя, но с вещественными скалярными суперполями можно, и оно получается обычным приемом удлинения ковариантной майорановской спинорной производной $D_\alpha \to D_\alpha + ig\Psi_\alpha$. Удается написать и лагранжиан самодействия, инвариантный относительно (6.29). Все эти вопросы, перенормируемость теории, эффект типа Хиггса, при котором возникает масса у поля Ψ_α и т. д., сейчас исследуются Э. Сокачевым и авторами обзора.

7. ОБЪЕДИНЕНИЕ ВНУТРЕННИХ СИММЕТРИЙ И СУПЕРСИММЕТРИЙ

Прямое произведение внутренних симметрий и суперсимметрий осуществляется просто и обсуждалось в начале предыдущего параграфа. Принципиально осуществимо [20, 33, 81] и нетривиальное их объединение. Именно, генераторы суперсимметрий Q_α можно снабдить индексами внутренней симметрии i и непротиворечиво обобщить алгебру (2.23) следующим образом:

$$\{Q_{\alpha i}, Q_{\beta j}\} = \{\bar{Q}^i_{\dot\alpha}, \bar{Q}^j_{\dot\beta}\} = 0, \tag{7.1а}$$

$$\{Q_{\alpha i}, \bar{Q}^j_{\dot\beta}\} = 2\delta^j_i (\sigma_\mu)_{\alpha\dot\beta} P^\mu, \tag{7.1б}$$

$$[Q_{\alpha i}, P_\mu] = [\bar{Q}^i_{\dot\alpha}, P_\mu] = 0. \tag{7.1в}$$

Так, нижние индексы i, j могут относиться к кварковому n-мерному представлению группы $SU(n)$, а верхние — к антикварковому. Генераторы внутренней симметрии являются скалярами и коммутируют с генераторами группы Пуанкаре. В статье под названием «Все возможные генераторы суперсимметрии S-матрицы» *) Хааг, Лопушанский и Сониус [109] утверждают, что алгебра (1) при довольно общих требованиях оказывается практически **) единственно допустимой в теории с массивными частицами ***).

Введем антикоммутирующие спинорные координаты $\theta^{\alpha i}$, $\bar{\theta}^{\dot\alpha}_i$ в полной аналогии с простой группой суперсимметрий, обсуждавшейся выше; спинорные генераторы можно реализовать в виде

$$Q_{i\alpha} = -i\frac{\partial}{\partial\theta^{i\alpha}} - (\hat{\partial}\bar{\theta}_i)_\alpha, \qquad \bar{Q}^i_{\dot\alpha} = i\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot\alpha}_i} + (\theta^i\hat{\partial})_{\dot\alpha}, \tag{7.2}$$

и они удовлетворяют алгебре (1). В суперпространстве x, $\theta^{\alpha i}$, $\bar{\theta}^{\dot\alpha i}$ спинорные преобразования аналогичны (3.1.4):

$$x'_\mu = x_\mu + i(\theta^i\sigma_\mu\bar{\zeta}_i - \zeta^i\sigma_\mu\bar{\theta}_i), \quad \bar{\theta}^{\dot\alpha\prime}_i = \bar{\theta}^{\dot\alpha}_i + \bar{\zeta}^{\dot\alpha}_i, \quad \theta^{\alpha i\prime} = \theta^{\alpha i} + \zeta^{\alpha i}. \tag{7.3}$$

Аналогично определяются и суперполя [33], но они содержат больше членов в разложении по спинорным координатам, так как число этих координат увеличивается. Мы не будем останавливаться на этих вопросах, а перейдем к обсуждению неприводимых представлений в системе покоя. Заметим

*) Эта работа обобщает на случай суперсимметрий результаты Коулмана и Мандулы [43].

**) «Практически» в том смысле, что ее мыслимые модификации сводятся к подстановке в правую часть (7.1) некоторых операторов, коммутирующих со всеми остальными генераторами и между собой.

***) В недавно опубликованной статье Конопельченко [51в] изучается структура спинорных расширений алгебры Пуанкаре с включением высших спинорных генераторов и обсуждаемое утверждение авторов [109] ставится под сомнение.

прежде всего, что спинорные генераторы коммутируют с генераторами сдвигов (7.1в), и поэтому и в обсуждаемом слиянии внутренних симметрий с суперсимметриями остается в силе теорема О'Раферти [51, 71]: массы всех частиц внутри данного представления должны совпадать. В системе покоя алгебра (7.1) становится клиффордовой алгеброй $2n$ спинорных операторов рождения и уничтожения. Введем обозначения $(1/\sqrt{2M})\, Q_{i\alpha} = Q_A$, $(1/\sqrt{2M})\, \bar{Q}^j_\beta = \bar{Q}_B$, где индексы A и B принимают $2n$ значений. Тогда при $P_\mu = (M, 0)$ алгебра (7.1) запишется как

$$\{Q_A, Q^B\} = \delta^B_A, \quad \{Q_A, Q_B\} = \{\bar{Q}^A, \bar{Q}^B\} = 0. \tag{7.4}$$

В терминах Q_A и $\bar{Q}^B$ можно образовать операторы F^B_A, коммутирующие с гамильтонианом и образующие алгебру группы $U(2n)$:

$$F^B_A = \bar{Q}^B Q_A, \quad [F^B_A, F^D_C] = \delta^D_A F^B_C - \delta^B_C F^D_A. \tag{7.5}$$

Таким образом, в системе покоя возникает группа $U(2n)$. Как и в разделе (2.3), определим «клиффордов вакуум» $|\Omega\rangle_0$ условием

$$Q_A\, |\Omega\rangle_0 = 0. \tag{7.6}$$

Пространство неприводимого представления будут образовывать состояния, получаемые действием операторов $\bar{Q}^B$ на $|\Omega\rangle_0$ в первой и высших (неисчезающих) степенях. При каждом $|\Omega\rangle_0$ будет 2^{2n} состояний, так как только антисимметризованные произведения $k \leqslant 2n$ операторов $\bar{Q}^B$ отличны от нуля. Например, в случае внутренней симметрии $SU(3)$ [81], выбрав в качестве $|\Omega\rangle_0$ одночастичное состояние с нулевыми значениями спина, изоспина и гиперзаряда, мы находим фундаментальное представление, содержащее $2^6 = 64$ состояния

$$\Omega\rangle_0,\ \bar{Q}^B|\Omega\rangle_0,\ \bar{Q}^{B_1}\bar{Q}^{B_2}|\Omega\rangle_0,\ \ldots,\ \bar{Q}^{B_1}\ldots\bar{Q}^{B_6}|\Omega\rangle_0\ \ldots \tag{7.7}$$

Эти состояния суть антисимметричные $D(6)$ тензоры, и мы имеем разложение $64 = 1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1$.

Основное состояние $|\Omega\rangle_0$ может иметь отличные от нуля квантовые числа по внутренней симметрии $SU(3)$ и по группе вращений в системе покоя $O(3)$ (спин), и мы приходим к выводу, что в системе покоя возникает обширная группа $U(6) \otimes SU(3) \otimes O(3)$. Возникновение классификации по $SU(6)$ в системе покоя очень специфично и не совсем ясна связь с группой $SU(6)$ Гюрси — Радикати — Сакита (или вигнеровской $SU(4)$ в случае внутренней симметрии $SU(2)$): 1) фундаментальное представление (64) содержит кварки (представление (6)) и высшие антисимметричные тензоры 15, 20. . . (дикварки, трикварки); 2) на каждом состоянии с данными $SU(3)$ и $O(3)$ квантовыми числами строится снова представление (64). Появляется группа $U(6) \otimes SU(3) \otimes O(3)$. Последний множитель можно трактовать как соответствующий l-возбуждению. Но генераторы $SU(3)$, как подгруппы $SU(6)$, не совпадают с генераторами группы внутренней симметрии $SU(3)$. Возникающая симметрия кажется слишком широкой.

В заключение опишем наглядную конструкцию Волкова и Акулова (см. [26]) спинорных расширений группы Пуанкаре. Как известно, групповую композицию параметров $(\hat{a}_1, \Lambda_1)(\hat{a}_2, \Lambda_2) = (\hat{a}_1 + \Lambda_1\hat{a}_2\Lambda_1^+, \Lambda_1\Lambda_2)$, где

*) Отметим, что простейшая лагранжева модель с нетривиальным объединением суперсимметрии и внутренней симметрии $SU(2)$ оказалась неперенормируемой [42].

$\hat{a} = \sigma_\mu a^\mu$, можно представить как матричное умножение 4×4 матриц

$$\begin{pmatrix} \Lambda & -\frac{i}{2}\hat{a}\Lambda^{+-1} \\ 0 & \Lambda^{+-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{i}{2}\hat{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda^{+-1} \end{pmatrix}. \tag{7.8}$$

Параметры a образуют однородное пространство, и, считая, что координата x_μ (в матричном виде $\hat{x} = \sigma_\mu x^\mu$) преобразуется как эти параметры, получаем обычный закон $\hat{x}' = \Lambda\hat{x}\Lambda^+ + \hat{a}$. Раздвинем блоки этой матрицы и вставим в центр $n \times n$-матрицу параметров внутренней симметрии U. Это соответствует прямому произведению групп Пуанкаре и внутренних симметрий. Заполним свободные блоки $2 \times n$ и $n \times 2$ вверху и справа спинорными параметрами ζ^i_α и $\bar{\zeta}^{\dot{\cdot}}_{\alpha i}$ соответственно и модифицируем правый верхний угол.

Построенная таким образом матрица

$$\begin{pmatrix} \Lambda & \zeta U & \frac{1}{2}(\zeta\bar{\zeta} - i\hat{a})(\Lambda^+)^{-1} \\ 0 & U & \bar{\zeta}(\Lambda^+)^{-1} \\ 0 & 0 & (\Lambda^+)^{-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \zeta & \frac{1}{2}(-i\hat{a} + \zeta\hat{\bar{\zeta}}) \\ 0 & 1 & \bar{\zeta} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda & 0 & 0 \\ 0 & U & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda^{+1} \end{pmatrix} \tag{7.9}$$

соответствует суперсимметриям, не тривиально смешанным с внутренними симметриями. Произведение таких матриц воспроизводит закон групповой композиции. Параметры ζ, $\bar{\zeta}$ и $\bar{a}$ образуют однородное «суперпространство». Отождествляя координаты этого суперпространства с координатами суперпространства x_μ, θ^i_α и $\bar{\theta}^{\dot{\cdot}}_{\alpha i}$, мы приходим к преобразованиям (7.3).

8. ПОПЫТКИ НАРУШЕНИЯ СУПЕРСИММЕТРИЙ

Массы фермионов и бозонов в одном суперполе совпадают, и поэтому для построения будущих реалистических моделей необходимо уметь подходящим образом нарушить суперсимметрию, сохраняя свойства перенормируемости. Адекватные методы пока не найдены. Особенно интенсивно ведется поиск удачного спонтанного нарушения. Остановимся на основных попытках.

Интересно, что спонтанное нарушение в его наиболее яркой форме в нелинейных реализациях суперсимметрий было исследовано Волковым и Акуловым [16, 20] примерно за полтора года до появления работ Весса и Зумино [12], после которых началось широкое увлечение суперсимметриями. Согласно общему подходу к нелинейным реализациям спонтанно нарушенных симметрий [17, 45] введем голдстоуновское поле с квантовыми числами тех зарядов, сохранение которых мы хотим нарушить. В нашем случае нужно ввести спинорное голдстоуновское поле $\theta(x)$, которое надлежит отождествить со спинорными координатами, считая их функциями x_μ. Иначе говоря, следует рассмотреть некоторую «поверхность» $\theta = \theta(x)$, $\bar{\theta} = \bar{\theta}(x)$ в суперпространстве. Преобразования суперсимметрии (3.4) тогда запишутся

$$\theta'(x') = \theta(x) + \zeta, \quad \bar{\theta}'(x') = \bar{\theta}(x) + \bar{\zeta}, \quad x'_\mu = x_\mu + i(\theta(x)\sigma_\mu\bar{\zeta} - \zeta\sigma_\mu\bar{\theta}(x)) \tag{8.1}$$

или, инфинитезимально,

$$\delta\theta(x) = \zeta + i(\zeta\sigma_\mu\bar{\theta}(x) - \theta(x)\sigma_\mu\bar{\zeta})\partial^\mu\theta(x) \tag{8.2}$$

и аналогично для $\bar{\theta}(x)$. Удобно снабдить спинорные поля и параметры размерностью $[L]^{-3/2}$. После соответствующего переопределения перепишем (8.2) в виде

$$\delta\theta(x) = \zeta + \frac{ia}{2}(\zeta\sigma_\mu\bar{\theta}(x) - \theta(x)\sigma_\mu\bar{\zeta})\partial^\mu\theta(x), \tag{8.3}$$

где константа a имеет размерность четвертой степени длины. Полученные нелинейные преобразования обладают должной групповой структурой, их коммутатор дает сдвиги. Наличие константного спинора в правой части (8.1) — (8.3) подчеркивает голдстоуновский характер «нейтринного» поля $\theta(x)$. При $a = 0$ свободное уравнение для нейтрино, $\sigma_\mu\partial^\mu\theta(x) = 0$, инвариантно относительно (8.3). Феноменологический лагранжиан при $a \neq 0$ строится с помощью дифференциальных форм ω_μ (3.5), инвариантных относительно (8.3)

$$\omega_\mu = dx_\mu + \frac{ia}{2}(\theta\sigma_\mu d\bar{\theta} - d\theta\sigma_\mu\bar{\theta}) = dx_\nu\left[\delta^\nu_\mu + \frac{ia}{2}(\theta\sigma_\mu\partial^\nu\bar{\theta} - \partial_\nu\theta\sigma_\mu\bar{\theta})\right] = dx_\nu z^\nu_\mu.$$

Инвариантное действие задается в виде

$$S = \frac{1}{a}\int d^4x \operatorname{Det}\|z^\mu_\nu\| \tag{8.4}$$

и соответствует инвариантному 4-мерному объему в суперпространстве. Как и во всех голдстоуновских теориях соблюдается принцип Адлера (см. [20]). Можно включить и взаимодействия с другими полями. К сожалению, теория весьма нелинейна, производные голдстоуновского «нейтрино» входят в высоких степенях *). Представляется очень важным найти спонтанное нарушение в теориях поля обычного вида и перенормируемых (аналог σ-модели в киральной симметрии, которая при стремлении массы σ-частицы к бесконечности соответствует нелинейным реализациям и становится неперенормируемой).

Илиопулос и Зумино [37] изучили мягкое индуцированное нарушение в модели Весса и Зумино **), добавляя к лагранжиану (4.22) линейное нарушение — $cA(x)$. Ренормализационные свойства при этом не меняются, по-прежнему требуется только один контрчлен. Однако массы полей A, B и ψ перестают быть равными, в «древесном приближении» возникает массовая формула (высшие поправки к которой конечны и вычисляемы)

$$m_A^2 + m_B^2 = 2m_\psi^2. \tag{8.5}$$

Эта массовая формула справедлива при любом значении параметра c, в частности, при $c = 0$. В пределе точной симметрии $m_A = m_B = m_\psi$. При спонтанном нарушении $m_\psi = 0$ и ψ становится голдстоуновским фермионом, в преобразовании ψ появляется константная спинорная добавка. Однако голдстоуновский режим не стабилен [79]; $m_A^2 = -m_B^2$, т. е. квадрат массы одной из частиц, A или B, отрицателен. Учет высших приближений [44] (эффективный потенциал в однопетлевом приближении [108]) не восстанавливает стабильности голдстоуновского режима. Модель со спонтанным нарушением суперсимметрии должна быть отличной от модели

*) В калибровочной версии этой модели [19] калибровочные поля имеют спин $^3/_2$, возможен эффект Хиггса и возникает связь с гравитацией.

**) Алгебра суперзарядов при наличии нарушения обсуждается в статье Де Вита [32].

Весса и Зумино *). Так, Файе и Илиопулос [96а] показали, что стабильный голдстоуновский режим и спонтанное нарушение возникают в суперсимметричной электродинамике при добавлении к лагранжиану линейного члена $\xi/gD(x)$, нарушающего четность, но инвариантного относительно преобразований суперсимметричного и калибровочного типа. При этом $\langle D \rangle = -\xi/g$ и $\delta\lambda = -(\xi/g)\gamma_5\zeta + \ldots$ Массы скалярных полей становятся неодинаковыми, и при определенных условиях возникает также спонтанное нарушение калибровочной инвариантности, при котором векторное поле приобретает массу посредством механизма Хиггса, а голдстоуновский фермион становится линейной комбинацией участвующих в модели майорановских спиноров. $V - A$ вариант не возникает. Модель не обобщается на калибровочные теории, связанные с неабелевыми полупростыми алгебрами. Воспроизведение вычислений заняло бы слишком много места, и мы отсылаем читателя к первоисточнику [96].

Отметим также, что специфика спонтанного нарушения внутренних симметрий в суперсимметричных моделях исследовалась Саламом и Стратди [82] и О'Раферти [73а**]). Проблема реалистического спонтанного нарушения суперсимметрий остается пока не решенной.

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, чем обогатили физику элементарных частиц суперсимметрии? Простейшие суперсимметричные модели, возникшие в 1971 г. и интенсивно исследованные в 1974 г., обладают многими неожиданными и привлекательными свойствами, обусловленными связями между функциями Грина фермионов и бозонов:

а) Наблюдается резкое сокращение числа расходимостей.

б) Обращаются в нуль все диаграммы с вакуумными петлями и вакуумное среднее от тензора энергии-импульса.

в) Сохраняющиеся векторные токи играют большую роль в физике элементарных частиц. В суперсимметричных моделях возникает совершенно новый объект — сохраняющиеся спин-векторные токи.

г) Сохраняющийся спин-векторный ток суперсимметрий входит в одно суперполе с тензором энергии-импульса.

д) Принципиально возможно нетривиальное объединение внутренних симметрий с пространственно-временными.

Проблема состоит в построении реалистических физических теорий. Появляются надежды на единую перенормируемую асимптотически свободную теорию слабых и электромагнитных (а может быть, и сильных и гравитационных) взаимодействий, в которых нейтрино было бы голдстоуновской частицей. Из более технических задач отметим поиск состоятельных теорий частиц со спином 3/2, связанных с сохраняющимися спин-векторными токами ***), развитие дифференциальной геометрии суперпро-

*) Эвристическое соображение, приведенное в работе [37], о том, что суперсимметрия вообще не допускает спонтанного нарушения, оказалось несостоятельным и было ими же опровергнуто в работах [36, 96].

**) После сдачи обзора в печать появилась работа Файе [96б], в которой предложена полуреалистическая модель единой теории электромагнитных и слабых взаимодействий электрона, электронного нейтрино и тяжелых лептонов со спонтанным нарушением суперсимметрий и калибровочной симметрии $SU(2) \times U(1)$. Электронное нейтрино служит голдстоуновским фермионом и объединяется в один супермультиплет с фотоном. К сожалению, в рамках этой модели нет места для мюонного нейтрино с нулевой массой покоя. Отметим также, что в новой статье О'Раферти [73б] рассмотрена обобщенная модель Весса и Зумино, описывающая взаимодействие N киральных скалярных суперполей. Спонтанное нарушение суперсимметрий может возникать только при $N \geqslant 3$.

***) Заметим, что для векторных полей единственными состоятельными теориями оказались теории Янг — Миллса, связанные с сохраняющимися векторными токами.

странства [5] и т. д. Внедрение этих суперсимметрий в физику требует освоения возникшей новой концепции, изыскания подходящего спонтанного нарушения и адекватного механизма сохранения числа барионов и фермионов.

Авторы искренне признательны М. С. Маринову и Э. Сокачеву за полезные обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. ПОЛЕЗНЫЕ СООТНОШЕНИЯ СПИНОРНОГО ФОРМАЛИЗМА

Матрицы $\tilde{\sigma}_\mu$ (см. обозначения в конце введения) выражаются через σ_μ:

$$(\tilde{\sigma}_\mu)^{\dot{\alpha}\beta} = \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\varepsilon^{\beta\alpha}(\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\beta}}, \quad (\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\beta}} = \varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\dot{\beta}\dot{\alpha}}(\tilde{\sigma}_\mu)^{\dot{\alpha}\beta}.$$

Соотношение полноты записывается как

$$(\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}(\tilde{\sigma}^\mu)^{\dot{\beta}\beta} = 2\delta_\alpha^\beta\delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}}, \quad (\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}(\sigma^\mu)_{\beta\dot{\beta}} = 2\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}},$$

$$\sigma_\mu\tilde{\sigma}_\nu + \sigma_\nu\tilde{\sigma}_\mu = 2\eta_{\mu\nu}, \quad \mathrm{Sp}\,(\sigma_\mu\tilde{\sigma}_\nu) = 2\eta_{\mu\nu},$$

$$\sigma_\mu\tilde{\sigma}_\nu = \eta_{\mu\nu} - \frac{i}{2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\sigma^\lambda\tilde{\sigma}^\rho, \quad (\sigma_{\mu\nu})_\alpha^\beta(\sigma^{\mu\nu})_\rho^\tau = 4(2\delta_\alpha^\tau\delta_\rho^\beta - \delta_\alpha^\beta\delta_\rho^\tau).$$

Произведение двух разных спиноров редуцируется:

$$\zeta_\alpha\bar{\xi}_{\dot{\beta}} = \frac{1}{2}(\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\beta}}\zeta\sigma^\mu\bar{\xi}, \quad \left(\left(\frac{1}{2}, 0\right) \otimes \left(0, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right),$$

$$\zeta_\alpha\xi_\beta = \frac{1}{2}\zeta^\gamma\xi_\gamma\cdot\varepsilon_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\zeta\sigma^{\mu\nu}\xi\,(\sigma_{\mu\nu})_{\alpha\beta}\left(\left(\frac{1}{2}, 0\right) \otimes \left(\frac{1}{2}, 0\right) = (0, 0) + (1, 0)\right).$$

Для тождественных антикоммутирующих спиноров имеют место простые правила, используемые при их перестановке:

$$\xi_\alpha\xi_\beta = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta}\xi^\gamma\xi_\gamma, \quad \xi^\alpha\xi^\beta = -\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}\xi^\gamma\xi_\gamma, \quad \bar{\xi}_{\dot{\alpha}}\bar{\xi}_{\dot{\beta}} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\xi}_{\dot{\gamma}}\bar{\xi}^{\dot{\gamma}}.$$

В обзоре часто приходится переходить от билинейных комбинаций спиноров к билинейным комбинациям майорановских биспиноров $\psi = \begin{pmatrix}\psi_\alpha \\ \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\end{pmatrix}$. Приведем соответствующие связи:

$$\bar{\psi}\varkappa = \bar{\varkappa}\psi = \psi^\alpha\varkappa_\alpha + \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\bar{\varkappa}^{\dot{\alpha}},$$

$$\bar{\psi}\gamma_5\varkappa = \bar{\varkappa}\gamma_4\psi = \psi^\alpha\varkappa_\alpha - \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\bar{\varkappa}^{\dot{\alpha}},$$

$$\bar{\psi}\gamma_\mu\varkappa = -\bar{\varkappa}\gamma_\mu\psi = \psi\sigma_\mu\bar{\varkappa} - \varkappa\sigma_\mu\bar{\psi},$$

$$\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\varkappa = \bar{\varkappa}\gamma_5\gamma_\mu\psi = \psi\sigma_\mu\bar{\varkappa} + \varkappa\sigma_\mu\bar{\psi},$$

$$\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_\nu\varkappa = \bar{\varkappa}\gamma_\nu\gamma_\mu\psi = \psi\sigma_\mu\tilde{\sigma}_\nu\varkappa + \bar{\psi}\tilde{\sigma}_\mu\sigma_\nu\bar{\varkappa}.$$

2. ПРОИЗВЕДЕНИЯ КОВАРИАНТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Ковариантные производные $D_\alpha\bar{D}_{\dot{\alpha}}$ подчиняются перестановочным соотношениям (3.31). Вследствие этого любое произведение D_α и $\bar{D}_{\dot{\alpha}}$ сводится к линейным комбинациям 16 независимых элементов

$$1,\ D_\alpha,\ \bar{D}_{\dot{\alpha}},\ DD,\ \bar{D}\bar{D},\ D\sigma_\mu\bar{D},\ (DD)\bar{D}_{\dot{\alpha}},\ (\bar{D}\bar{D})D_\alpha,\ (DD)(\bar{D}\bar{D})$$

с коэффициентами, включающими обычные производные ∂_μ. Так,

$$D_\alpha D_\beta = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta}(DD), \qquad \bar{D}_{\dot\alpha}\bar{D}_{\dot\beta} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\bar{D}\bar{D},$$

$$[D_\alpha, \bar{D}_{\dot\beta}] = (\sigma_\mu)_{\alpha\dot\beta} D\sigma^\mu\bar{D} + 2i\hat{\partial}_{\alpha\dot\beta},$$

$$D_\alpha D_\beta D_\gamma \equiv 0, \qquad \bar{D}_{\dot\alpha}\bar{D}_{\dot\beta}\bar{D}_{\dot\gamma} \equiv 0,$$

$$[\bar{D}_{\dot\alpha}, DD] = 4i\hat{\partial}_{\beta\dot\alpha} D^\beta, \qquad [D_\alpha, \bar{D}\bar{D}] = -4i\hat{\partial}_{\alpha\dot\beta}\bar{D}^{\dot\beta},$$

$$D_\alpha(D\sigma_\mu\bar{D}) = -\frac{1}{2}(\sigma_\mu)_{\alpha\dot\beta}(DD)\bar{D}^{\dot\beta},$$

$$\bar{D}_{\dot\alpha}(D\sigma_\mu\bar{D}) = -\frac{1}{2}(\sigma_\mu)_{\alpha\dot\alpha}(\bar{D}\bar{D})D^\alpha - 4i\partial_\mu\bar{D}_{\dot\alpha},$$

$$[DD, \bar{D}\bar{D}] = 16\Box - 8i\partial^\mu D\sigma_\mu\bar{D},$$

$$\bar{D}_{\dot\alpha}(DD)\bar{D}^{\dot\alpha} + D^\alpha(\bar{D}\bar{D})D_\alpha = (DD)(\bar{D}\bar{D}) + (\bar{D}\bar{D})(DD) + 16\Box.$$

Произведения пяти и более D редуцируются с помощью этих формул и соотношений

$$(DD)(\bar{D}\bar{D})D_\alpha = 4i\hat{\partial}_{\alpha\dot\beta}\bar{D}^{\dot\beta}.$$

Например,

$$(DD)(\bar{D}\bar{D})(DD) = -16\Box(DD), \quad (\bar{D}\bar{D})(DD)(\bar{D}\bar{D}) = -16\Box\bar{D}\bar{D},$$

$$[(DD)(\bar{D}\bar{D})]^2 = -16\Box(DD)(\bar{D}\bar{D})$$

и т. д.

Объединенный институт ядерных исследований,
Дубна (Московская обл.)

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

Для общей ориентации перечислим основные работы: исследование алгебры суперсимметрии и ее представлений [26, 27, 57, 20, 12, 77, 78, 97, 99, 75, 72, 23, 59, 65]; модель Весса и Зумино [13, 37]; инвариантная теория возмущения в подходе Салама и Стратди [82, 40, 30, 31, 54, 83, 41], а в подходе с грассмановым интегрированием [61, 107]; калибровочные теории [14, 100, 80, 87, 54, 105], объединение суперсимметрий и внутренних симметрий [20, 78, 33, 109, 42, 15]; попытки спонтанного нарушения [16, 18–20, 79, 37, 82, 73, 22, 108]; проблемы числа барионов и фермионов [100, 80, 29, 84, 24]; связь с тензором энергии-импульса и суперток [36, 102]; ренорм-группа и асимптотическая свобода [98, 100, 80, 93, 85, 47, 21]; математические работы [6, 7–9, 69, 49, 50, 92, 53, 75, 76, 46, 60], обзорные статьи [35, 15, 106, 82, 52, 46, 74].

1. E. S. Abers, B. W. Lee, Phys. Rept. C9, 1 (1973).
2. S. A. Adjei, D. A. Akyeampoug, Nuovo Cimento **A26**, 84 (1975).
3. Y. Aharonov, A. Casher, L. Susskind, Phys. Lett. **B35**, 512 (1974).
4. S. Araki, S. Okubo, Lett. Nuovo Cimento **3**, 511 (1972).
5. R. Arnowitt, P. Nath, B. Zumino, Phys. Lett. **B56**, 81, 171 (1975).
6. Ф. А. Березин, Метод вторичного квантования, М., «Наука», 1965.
7. Ф. А. Березин, Г. И. Кац, Матем. сб., вып. 82 (124), 343 (1970).
8. Ф. А. Березин, Матем. заметки **1**, 269 (1967).
9.*а*). Ф. А. Березин, Д. А. Лейтес, ДАН СССР **224** (3) (1975).
б). Ф. А. Березин, М. С. Маринов, Письма ЖЭТФ **21**, 675 (1975).
10. Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, Введение в теорию квантованных полей, М., «Наука», 1973.
11. Н. Н. Боголюбов, А. А. Логунов, И. Т. Тодоров, Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля, М., «Наука», 1969.
12. J. Wess, B. Zumino, Nucl. Phys. **B70**, 39 (1974).
13. J. Wess, B. Zumino, Phys. Lett. **B49**, 52 (1974).
14. J. Wess, B. Zumino, Nucl. Phys. **B78**, 1 (1974).
15. J. Wess, Fermi-Bose Supersymmetry (Lectures at Bonn Summer School), 1974.

16. Д. В. Волков, В. П. Акулов, Письма ЖЭТФ **16**, 621 (1972).
17. Д. В. Волков, Пробл. физ. ЭЧАЯ **4**, 3 (1973).
18. Д. В. Волков, В. П. Акулов, Phys. Lett. **B46**, 109 (1973).
19. Д. В. Волков, В. А. Сорока, Письма ЖЭТФ **18**, 529 (1973).
20. Д. В. Волков, В. П. Акулов, ТМФ **18**, 39 (1974).
21. Б. Л. Воронов, И. В. Тютин, Письма ЖЭТФ **21**, 396 (1975).
22. W. D. Garber, H. Ree, Supergauges and Goldstone Spinors, Göttingen Preprint, 1974.
23. D. Grosser, Lett. Nuovo Cimento **12**, 455, 649 (1975).
24. D. Grosser, Nucl. Phys. **B92**, 120 (1975).
25. J. L. Gervais, B. Sakita, ibid. **B34**, 633 (1971).
26. Ю. А. Гольфанд, Е. П. Лихтман, в кн. «Проблемы теоретической физики» (сборник памяти И. Е. Тамма), М., «Наука», 1972, стр. 37.
27. Ю. А. Гольфанд, Е. П. Лихтман, Письма ЖЭТФ **13**, 452 (1971).
28. Дао Вонг Дык, ТМФ **23**, 49 (1975).
29. R. Delbourgo, A. Salam, J. Strathdee, Phys. Lett. **B51**, 475, 1974.
30. *а*) R. Delbourgo, Nuovo Cimento **A25**, 646 (1975).
б) R. Delbourgo, Lett. Nuovo Cimento **12**, 293 (1975).
31. R. Delbourgo, V. B. Prasad, J. Phys. **G1**, 377 (1975).
32. B. De Wit, Phys. Rev. **D11**, 898 (1975).
33. P. H. Dondi, M. Sohnius, Nucl. Phys. **B81**, 317 (1974).
34. B. Zumino, Relativistic Strings and Supergauges. CERN Preprint TH-1779 (1973).
35. B. Zumino, in: Proc. of 17th Intern. Conference on High-Energy Physics, London, 1974, p. 1-254; то же: CERN Preprint TH-1901 (1974).
36. B. Zumino, Nucl. Phys. **B89**, 535 (1975).
37. J. Iliopoulos, B. Zumino, Nucl. Phys. **B76**, 310 (1974).
38. A. Joseph, Nuovo Cimento **A8**, 217 (1972).
39. C. Callan, S. Coleman, R. Jackiw, Ann. Phys. (N.Y.) **59**, 42 (1970).
40. D. M. Capper, Nuovo Cimento **A25**, 299 (1975).
41. D. M. Capper, G. Leibbrandt, Nucl. Phys. **B85**, 492 (1975).
42. D. M. Capper, G. Leibbrandt, ibid., p. 503.
43. S. Coleman, J. Mandula, Phys. Rev. **159**, 1251 (1967).
44. S. Coleman, E. Weinberg, ibid. **D7**, 1888 (1973).
45. S. Coleman, J. Wess. B. Zumino, ibid. **177**, 2239 (1969).
46. L. Corwin, Y. Ne'eman, S. Sternberg, Rev. Mod. Phys. **43**, 573 (1975).
47. O. K. Kalashnikov, E. S. Fradkin, Nucl. Phys. (1975).
48. A. J. Kálnay, On Superfields. Trieste Preprint IC/74/112 (1974).
49. В. Г. Кац, Изв. АН СССР, сер. матем. **32**, 1323 (1968).
50. *а*) В. Г. Кац, Функц. анализ, № 9, 91 (1975).
б) В. Г. Кац, в кн. Труды XI Всесоюзного алгебраического коллоквиума, Кишинев, Изд. КГУ, 1971, стр. 140.
51. Б. Г. Конопельченко, Письма ЖЭТФ *а*) **20**, 608 (1974); *б*) **21**, 612 (1975).
52. Б. Г. Конопельченко, Суперсимметрия, Препринт ИЯФ СО АН СССР 74-96, Новосибирск, 1974.
53. R. Kotecky, An Algebraic Framework for the Supersymmetry Theory. Universitat Carolina Pragensis Preprint, 1974.
54. F. Krause, M. Scheunert, J. Honerkamp, M. Schlindwein, Phys. Lett. **B53**, 60 (1974); Nucl. Phys. **B95**, 397 (1975).
55. W. Lang, J. Wess, ibid. **B81**, 249 (1974).
56. H. J. Lipkin, Phys. Lett. **9**, 203 (1964).
57. Е. П. Лихтман, Неприводимые представления, расширения алгебры генераторов Пуанкаре биспинорными генераторами. Препринт ФИАН СССР № 41, Москва, 1971; Кр. сообщ. физ. (ФИАН СССР), № 5, 197 (1971).
58. Е. П. Лихтман, Письма ЖЭТФ **21**, 243 (1975).
59. J. T. Lopuszanski, M. Sohnius, On Algebra of Supersymmetry Transformations. Karlsruhe Preprint, 1974; J. T. Lopuszanski, On the Supersymmetry Charges in the Theory of Scalar and Spinor Free Fields. Wroclaw Preprint 308 (1974).
60. Д. А. Лейтес, УМН **29** (3), 209 (1974); **30** (3), 156 (1975).
61. Л. Мезинческу, В. И. Огиевецкий, Action Principle in Superspace. JINR Preprint E2-8277, Dubna, 1974.
62. *а*) H. Miyazawa, Progr. Theor. Phys. **36**, 1266 (1966).
б) H. Miyazawa, Phys. Rev. **170**, 1586 (1968).
63. В. В. Молотков, С. Г. Петрова, Д. Ц. Стоянов, Представления суперкомфорной алгебры. Двух- и трехточечные функции Грина для скалярных суперполей. Препринт ОИЯИ Е2-8688, Дубна, (1975).
64. A. Neveu, J. H. Schwarz, Nucl. Phys. **B31**, 86 (1971).

65. Нгуен Ван Хьеу, О суперкалибровочных преобразованиях полей. Препринт ОИЯИ Р2-8210, Дубна (1974).
66. J. B. Nilsson, D. H. Tchrakian, On Higher Spin Content of Superfields. Göteborg Preprint, 1974.
67. Ю. В. Новожилов, Введение в теорию элементарных частиц, М., «Наука», 1972.
68. В. И. Огиевецкий, И. В. Полубаринов, Nuovo Cimento **23**, 173 (1962).
69. В. Ф. Пахомов, Матем. заметки **16**, 65 (1974).
70. R. Penrose, M. A. H. McCallum, Phys. Rept. **C6**, 241 (1972).
71. L. O'Raifertaigh, Phys. Rev. **B139**, B1052 (1965).
72. L. O'Raifertaigh, Nucl. Phys. **B89**, 418 (1975).
73. L. O'Raifertaigh, *а*) Phys. Lett. **B56**, 41 (1975); *б*) Dublin Preprint DIAS-TP-75-9.
74. L. O'Raifertaigh, Comm. Dublin Institute Advance Studies, ser. A, No. 22 (1975).
75. W. Ruhl, B. C. Yunn, Superfields as Representations. Trier-Kaiserslautern Preprint, 1974.
76. W. Ruhl, B. C. Yunn, Superfield Equations. Trier-Kaiserslautern Preprint, 1974.
77. A. Salam, J. Strathdee, Nucl. Phys. **B76**, 477 (1974).
78. A. Salam, J. Strathdee, ibid. **B80**, 499.
79. A. Salam, J. Strathdee, Phys. Lett. **B49**, 465 (1974).
80. A. Salam, J. Strathdee, ibid. **B51**, 353.
81. A. Salam, J. Strathdee, Nucl. Phys. **B84**, 127 (1973).
82. A. Salam, J. Strathdee, Phys. Rev. **D11**, 1521 (1975).
83. A. Salam, J. Strathdee, Nucl. Phys. **B86**, 142 (1975).
84. A. Salam, J. Strathdee, ibid. **B87**. 85.
85. Q. Shafi, Lett. Nuovo Cimento **12**, 321 (1975).
86. А. А. Славнов, ТМФ **10**, 153 (1972).
87. А. А. Славнов, *а*) ТМФ **23**, 3 (1975); *б*) Renormalization of Supersymmetrie Gauge Theories. II. Non Abelian Case. JINR Preprint E2-8449, Dubna, 1974.
88. P. Smrz, Can. J. Phys. **46**, 2073 (1968).
89. Э. Сокачев, Projection Operators and Supplementary Conditions for Superfields with an Arbitrary Spin. JINR Preprint E2-8681, Dubna (1975).
90. P. P. Srivastava, Lett. Nuovo Cimento **12**, 161 (1975).
91. Г. Л. Ставраки, Физика высоких энергий и элементарных частиц, Киев, «Наукова думка», 1967, стр. 296.
92. G. L. Stawraki, On a Generalization of Lie Algebra. ITPh Preprint 67-21, Kiev, 1967.
93. M. Suzuki, Nucl. Phys. **B83**, 269 (1974).
94. D. H. Tchrakian, Superfields for Any Spin. Dublin Preprint, 1974.
95. M. S. Tsao, Phys. Lett. **B53**, 381 (1974).
96. *а*) P. Fayet, J. Iliopoulos, ibid. **B51**, 461.
б) P. Fayet, Nucl. Phys. **B90**, 104 (1975).
97. M. Ferrara, ibid. **B77**, 75 (1974).
98. S. Ferrara, J. Iliopoulos, B. Zumino, ibid., p. 413.
99. S. Ferrara, J. Wess. B. Zumino, Phys. Lett. **B51**, 239 (1974).
100. S. Ferrara, B. Zumino, Nucl. Phys. **B79**, 413 (1974).
101. S. Ferrara, E. Remiddi, Phys. Lett. **B53**, 347 (1974).
102. S. Ferrara, B. Zumino. Nucl. Phys. **B87**. 207 (1975).
103. R. J. Firth, J. D. Jenkins, ibid. **B85**, 525.
104. M. Flato, P. Hillion, Phys. Rev. **D1**, 1667 (1970).
105. S. Ferrara, O. Piguet, Nucl. Phys. **B93**, 261 (1975).
106. G. Fronsdal, Introduction to Supersymmetry. Preprint UCLA/74/TEP/18 (1974).
107. K. Fujikawa, W. Lang, Nucl. Phys. **B88**, 61 (1975).
108. K. Fujikawa, W. Lang, ibid., p. 77.
109. R. Haag, J. Lopuszanski, M. Sohnius, ibid., p. 257.
110. R. C. Hwa, J. Nuyts, Phys. Rev. **151**, 1215 (1966).
111. N. A. Tchernikov, F. A. Tagirov, Ann. Inst. H. Poincaré 9, 109 (1968).