

## КВАНТОМЕХАНИЧЕСКИЕ ОГРАНИЧЕНИЯ В МАКРОСКОПИЧЕСКИХ ЭКСПЕРИМЕНТАХ И СОВРЕМЕННАЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ТЕХНИКА

В. Б. Брагинский, Ю. И. Воронцов

### СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение . . . . .	41
2. Влияние квантомеханических свойств пробных тел на точность измерения силы . . . . .	42
3. Влияние релаксации . . . . .	44
4. Условия экспериментального обнаружения сил порядка $F_{0, \min}$ . . . . .	45
5. О некоторых возможностях увеличения чувствительности преобразователя механических колебаний в электрические . . . . .	45
6. Требования к генератору накачки . . . . .	49
7. О неразрушающей регистрации $n$ -квантового состояния . . . . .	49
8. Выводы . . . . .	52
Цитированная литература . . . . .	52

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Совершенствование техники макроскопических физических экспериментов в последнее время происходит весьма интенсивно. Уже разработана методика, позволяющая регистрировать амплитуду механических колебаний на уровне  $10^{-14}$  см (амплитуда относительного удлинения  $10^{-16}$ ), разрабатывается методика, рассчитанная на амплитуду  $10^{-18}$  см <sup>2,3</sup>. Алюминиевые цилиндры массой 2,6 т охлаждаются до  $3 \cdot 10^{-3}$  К° <sup>4</sup>. Кратковременная стабильность эталонов частоты достигла  $10^{-14}$ ; естественная ширина линии оптических генераторов измерена в деталях <sup>6</sup> (она составляет сотые доли герца). В сантиметровом диапазоне достигнута <sup>7</sup> добротность электрических резонаторов  $10^{11}$ . В спутниках, свободных от сноса, регистрируются ускорения  $10^{-9}$  см/сек<sup>2</sup> и разрабатываются системы <sup>9</sup>, рассчитанные на  $10^{-11}$  см/сек<sup>2</sup>. Расстояние между космическим аппаратом и Землей порядка 100 млн. км фиксируется с точностью до 1 м <sup>10</sup>. При таком бурном развитии измерительной техники уже сейчас естественна постановка вопроса: при каких условиях в макроскопических экспериментах увеличение чувствительности будет ограничено квантово-механическими свойствами пробных тел?

В этой статье мы ограничимся рассмотрением вопроса о минимальных обнаружимых переменных (не квазистатических) ускорениях (или силах), что, по нашему мнению, актуально в связи с повышением чувствительности гравитационных антенн и задачей о создании чувствительного акселерометра.

## 2. ВЛИЯНИЕ КВАНТОМЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ПРОБНЫХ ТЕЛ НА ТОЧНОСТЬ ИЗМЕРЕНИЯ СИЛЫ

Минимальная сила, действие которой может быть обнаружено по отклику пробного тела, определяется квантовомеханическими особенностями пробного тела и временем действия силы.

Рассмотрим сначала случай, когда пробным телом является свободная частица. Действие силы на свободную частицу можно обнаружить, наблюдая изменение ее координаты или импульса. Мы должны измерить координату  $x_0$  и импульс  $p_0$  частицы в некоторый момент времени  $t_0$  и ее же координату в момент  $t_0 + \hat{\tau}$ . Значение конечной координаты  $x(\hat{\tau})$ , которое было бы при отсутствии силы, можно вычислить, используя известные  $x_0, p_0, \hat{\tau}$ . Однако  $x_0, p_0$  одновременно не могут быть измерены точно. Среднеквадратичные ошибки  $\Delta x_0$  и  $\Delta p_0$  связаны соотношением неопределенностей Гейзенберга<sup>11</sup>

$$(\Delta x_0)^2 (\Delta p_0)^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}. \quad (1)$$

Следовательно, только за счет неопределенности начальных значений импульса и координаты неопределенность конечной координаты будет равна

$$\Delta x \geq \sqrt{(\Delta x_0)^2 + \left(\frac{\hat{\tau}}{m}\right)^2 \frac{\hbar^2}{4(\Delta x_0)^2}} \quad (2)$$

( $m$  — масса частицы).

Так как изменение конечной координаты за счет действия постоянной силы  $F$  равно  $F\hat{\tau}_1^2/2m$  ( $\hat{\tau}_1$  — время действия силы), то среднеквадратичная ошибка измерения силы будет равна

$$\Delta F \geq \frac{2m}{\hat{\tau}^2} \sqrt{(\Delta x_0)^2 + \left(\frac{\hat{\tau}}{m}\right)^2 \frac{\hbar^2}{4(\Delta x_0)^2}}. \quad (3)$$

(Время действия силы считаем равным времени наблюдения  $\hat{\tau}$ .) Правая часть (3) имеет минимум при

$$(\Delta x_0)^2 = \frac{\hbar \hat{\tau}}{2m}. \quad (4)$$

Окончательно получаем

$$\Delta F_{\min} \geq \frac{1}{\hat{\tau}} \sqrt{\frac{4m\hbar}{\hat{\tau}}}. \quad (5)$$

Из (5) следует, что минимальная сила  $F_{\min}$ , которая может быть обнаружена по отклику свободной частицы, равна

$$F_{\min} = \zeta \cdot \frac{1}{\hat{\tau}} \sqrt{\frac{4m\hbar}{\hat{\tau}}}, \quad (6)$$

где  $\zeta$  — некоторый коэффициент больше 1, зависящий от достоверности обнаружения.

Рассмотрим другой способ обнаружения силы с помощью свободной частицы — путем измерения ее энергии. В этом случае мы должны измерить энергию частицы до действия силы и после. Первое измерение должно дать значение начальной энергии после процесса ее измерения. Точность  $\Delta E$  такого измерения зависит от длительности измерения  $\tau$ <sup>11-14</sup>:

$$\Delta E = \frac{\hbar}{\tau}, \quad (7)$$

и в принципе при достаточно большом времени измерения  $\tau$  она может быть сколь угодно малой. Однако полное время наблюдения за свободной частицей будет ограничено некоторой величиной  $\hat{\tau}$ . Часть этого времени будет затрачена на измерение энергии, а в оставшуюся часть будет происходить изменение энергии под действием силы. Работа силы  $F$  за время  $\tau_1$  при  $F\tau_1 \ll p_0$  будет приблизительно равна (считаем  $\mathbf{F} \parallel \mathbf{p}_0$ )

$$\Delta E_0 = \frac{p_0 F \tau_1}{m}. \quad (8)$$

Это изменение энергии может быть обнаружено, если  $\Delta E_0 > \Delta E$ . Учитывая, что  $\tau + \tau_1 = \hat{\tau}$ , из (7) и (8) найдем оптимальное соотношение  $\tau$  и  $\tau_1$ :  $\tau = \tau_1 = \hat{\tau}/2$ . Соответствующая минимальная обнаружимая сила равна

$$F_{\min} = \zeta \cdot \frac{1}{\tau} \sqrt{\frac{8m\hbar^2}{E_0 \hat{\tau}^2}}, \quad (9)$$

где  $E_0 = p_0^2/2m$  — среднее значение начальной энергии частицы.

Заметим, что, в отличие от (6), правая часть соотношения (9) зависит от  $E_0$ , при увеличении  $E_0$  уменьшается  $F_{\min}$ .

Теперь рассмотрим измерение силы с помощью другого пробного тела, принципиально отличающегося от свободной частицы, — гармонического осциллятора. Действие силы на гармонический осциллятор может быть обнаружено по изменению энергии осциллятора. Основная ошибка измерения в этом случае будет связана с дискретностью энергетических уровней. Работа силы над осциллятором может быть измерена только с точностью до  $\hbar\omega$ , так как энергия осциллятора не может быть равна дробной части  $\hbar\omega$  ( $\omega$  — собственная частота осциллятора). Ошибка определения начального и конечного значений энергии осциллятора при времени измерения  $\tau \gg 2\pi/\omega$  принципиально может быть много меньше  $\hbar\omega$ .

Рассмотрим изменение состояния гармонического осциллятора под действием силы вида  $F(t) = F_0 \cos \omega t$ . Если начальным состоянием осциллятора было состояние с заданной энергией  $E_0$ , то его средняя энергия через время  $\hat{\tau}$  будет равна<sup>15</sup>

$$E(\hat{\tau}) = E_0 + w, \quad (10)$$

а стандартное отклонение

$$\Delta E = \sqrt{2E_0 w}, \quad (11)$$

где

$$w = \frac{F_0^2 \hat{\tau}^2}{8m}; \quad (12)$$

$m$  — масса осциллятора.

Осциллятор изменит свое начальное состояние с близкой к единице достоверностью, если

$$w \geq \hbar\omega, \quad (13a)$$

либо

$$\Delta E \geq \hbar\omega. \quad (13b)$$

Когда  $E_0 > w$ , то раньше будет выполнено второе условие. Из (11) и (13b) получим

$$\Delta F_0 \geq \frac{1}{\hat{\tau}} \sqrt{\frac{4m\hbar\omega}{n_0}}, \quad (14)$$

где  $n_0 \approx E_0/\hbar\omega$ . Это неравенство определяет среднеквадратичную ошибку измерения амплитуды силы по отклику гармонического осциллятора (при указанных выше ограничениях). Соответствующая соотношению

(14) минимальная обнаружимая сила равна

$$F_{0, \min} = \zeta \cdot \frac{1}{\tau} \sqrt{\frac{4m\hbar\omega}{n_0}}. \quad (15)$$

В изложенном выше анализе мы не учитывали такие процессы в реальных пробных телах и измерительных приборах, как процесс релаксации и процесс флуктуационного силового воздействия со стороны измерительного прибора. Найдем условия, при которых названные процессы не будут определяющими.

### 3. ВЛИЯНИЕ РЕЛАКСАЦИИ

Действие силы можно обнаружить на фоне флуктуаций, если вызванное ею изменение состояния осциллятора будет больше, чем изменение в результате релаксации. Средняя величина собственного значения энергии в процессе релаксации изменяется по закону <sup>16</sup>

$$n_R(\hat{\tau}) = n_T - (n_T - n_0) e^{-\hat{\tau}/\tau^*}, \quad (16)$$

а дисперсия

$$(\Delta n_R)^2 = (2n_T + 1) (n_R - n_T) (1 - e^{-\hat{\tau}/\tau^*}) e^{-\hat{\tau}/\tau^*} + n_T (n_T + 1) (1 - e^{-2\hat{\tau}/\tau^*}), \quad (17)$$

где  $n_T = (e^{\hbar\omega/kT} - 1)^{-1}$ ,  $n_0$  — собственное значение, соответствующее энергии  $E_0$ ,  $\tau^*$  — время релаксации,  $T$  — равновесная температура,  $k$  — постоянная Больцмана. Если  $n_T \gg 1$  (т. е.  $\hbar\omega \ll kT$ ) и  $n_0 \gg 1$ , то при  $\hat{\tau}/\tau^* \ll 1$  из (17) получим

$$\Delta n_R \approx \sqrt{\frac{\hat{\tau}}{\tau^*}} 2n_T n_0. \quad (18)$$

Сравнивая (18) с (11), найдем условие обнаружения силы на фоне флуктуаций:

$$F_0 = \zeta \sqrt{\frac{8mkT}{\hat{\tau}\tau^*}}. \quad (19)$$

Заметим, что (19) совпадает с формулой Найквиста, полученной чисто классическим путем (см. подробнее <sup>17</sup>).

Сила, равная  $F_{0, \min}$ , может быть обнаружена на фоне флуктуаций, если  $\Delta n_R \leq 1$ , т. е. в нашем случае при

$$\frac{\hat{\tau}}{\tau^*} 2n_T n_0 \leq 1 \quad (20)$$

(это неравенство несколько другим путем впервые получено в работе <sup>18</sup>).

Обратим внимание на то, что, так же как и (19), формула (15) может быть получена классическим путем, если только минимальную работу силы над классическим осциллятором считать равной  $\hbar\omega$ . Более того, сами исходные соотношения (10), (11) и (16), (18) имеют свои классические аналоги. Действительно, изменение энергии классического осциллятора под действием гармонической силы равно (при  $\omega\hat{\tau} \gg 1$ )

$$W_{\text{кл}} = \frac{F_0^2 \hat{\tau}^2}{8m} + \frac{a_0 \omega F_0 \hat{\tau} \sin \varphi}{2}, \quad (24)$$

где  $\varphi$  — начальная разность фаз между силой и смещением,  $a_0$  — начальная амплитуда колебаний.

При случайном значении фазы  $\varphi$  из (21) получим

$$\overline{W}_{\text{кл}} = \frac{F_0^2 \hat{\tau}^2}{8m} = w, \quad (21a)$$

$$(\Delta W_{\text{кл}})^2 = 2E_0 w. \quad (216)$$

Классическим аналогом соотношения (18) является, в частности, (1) — (14) в книге <sup>17</sup>.

Из сказанного можно заключить, что для расчета интересующих нас величин при  $\hbar\omega \ll kT$  можно использовать классический метод, а квантовые ограничения вводятся путем ограничения минимального значения изменения энергии осциллятора величиной  $\hbar\omega$ .

#### 4. УСЛОВИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ОБНАРУЖЕНИЯ СИЛ ПОРЯДКА $F_{0, \min}$

Для практического достижения предела (15) при заданном времени наблюдения необходимо:

а) уменьшить собственные флуктуации осциллятора путем: 1) увеличения времени релаксации  $\tau^*$ , 2) уменьшения равновесной температуры  $T$ ;

б) найти такой способ измерения, который позволил бы обнаружить соответствующее изменение энергии осциллятора.

Обсудим сначала возможность выполнения программы, указанной в пункте а). Конечной целью этой программы является выполнение неравенства (20). Считая  $\hbar\omega \ll kT$ , запишем (20) в следующем виде:

$$\hat{\tau} < \frac{A\hbar^2}{(kT)^2} \alpha, \quad (22)$$

где  $A = Q\omega$  ( $Q$  — добротность осциллятора),  $\alpha = n_T/n_0$ . Если единственной причиной потерь в осцилляторе является теплопроводность материала, то величина  $A$  является характерной константой материала <sup>19</sup>. Для сапфира, например, при  $T = 0,4^\circ\text{K}$  она равна приблизительно  $10^{20} \text{ сек}^{-1}$ .

Если положить  $T = 0,4^\circ\text{K}$ ,  $\alpha = 1$ , то из (12) получим, что при  $\hat{\tau} < 0,3 \text{ сек}$  минимальная обнаружимая сила будет определяться формулой (15). При отсутствии внешней силы осциллятор в течение  $0,3 \text{ сек}$  с близкой к 1 вероятностью останется на исходном уровне.

Способы искусственного перевода осциллятора на уровень  $n_0$  мы здесь не обсуждаем. Но принципиально такое изменение энергии возможно (понижение начальной энергии колебаний уже осуществлялось, например, в работе <sup>20</sup>).

#### 5. О НЕКОТОРЫХ ВОЗМОЖНОСТЯХ УВЕЛИЧЕНИЯ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ

Основные методы измерения малых механических смещений описаны в книге <sup>17</sup>. Там же получены для определенных условий измерения оценки максимальной чувствительности этих методов. Согласно <sup>17</sup> при использовании радиотехнического преобразователя в квазистационарном режиме ( $\tau_e^* < 1/\omega$ ,  $\tau_e^*$  — время релаксации резонатора,  $\omega$  — частота модуляции емкости; см. рис. 1 и 2, а) собственные тепловые флуктуации резонатора не позволяют измерить силу меньше

$$F_{0, \min} = \zeta \cdot \frac{1}{\hat{\tau}} \sqrt{4m\hbar\omega \frac{kT_e}{\hbar\Omega}} \quad (23)$$

( $T_e$  — температура резонатора,  $\Omega$  — его собственная частота). Соотношение (23) справедливо при  $\hbar\Omega \ll kT_e$ . Сравнение (23) с (15) показывает, что при использовании радиотехнического датчика в квазистационарном режиме невозможно достичь предела (15). Для увеличения чувствительности детектора необходимо увеличивать время релаксации резонатора  $\tau_e^*$ . Однако при  $\tau_e^* > 1/\omega$  квазистационарный метод преобразования уже будет непригоден. В этом случае преобразование можно делать по методу «преобразования частоты вверх». Идея применения этого метода для регистрации механических колебаний принадлежит В. И. Панову. В этом методе между частотами резонатора  $\Omega$ , генератора накачки  $p$  и механического осциллятора  $\omega$  выполняется соотношение (рис. 2, б)

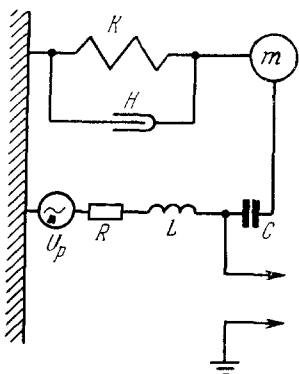


Рис. 1. Принципиальная схема преобразования механических колебаний в электрические.

$m, K, H$  — масса, коэффициенты упругости и трения механического осциллятора;  $U_p$  — э. д. с. генератора накачки;  $C$  — модулируемая емкость;  $L, R$  — индуктивность и сопротивление потерь резонатора.

При отсутствии модуляции емкости резонатора колебания на собственной частоте резонатора будут определяться только его найквистовскими шумами и шумами генератора, попадающими в полосу резонатора. Модуляция емкости с частотой  $\omega$  вызывает появление э. д. с. комбинационной частоты  $\omega + p$ . Амплитуда этой э. д. с. будет равна

$$\omega + p = \Omega. \quad (24)$$

При отсутствии модуляции емкости резонатора колебания на собственной частоте резонатора будут определяться только его найквистовскими шумами и шумами генератора, попадающими в полосу резонатора. Модуляция емкости с частотой  $\omega$  вызывает появление э. д. с. комбинационной частоты  $\omega + p$ . Амплитуда этой э. д. с. будет равна

$$U_{p+\omega} = \frac{1}{4} U_p \frac{\Omega}{\Omega - p} \frac{a}{d_0}; \quad (25)$$

здесь  $U_p$  — амплитуда э. д. с. генератора накачки,  $d_0$  — среднее расстояние между пластинами конденсатора,  $a$  — амплитуда механических

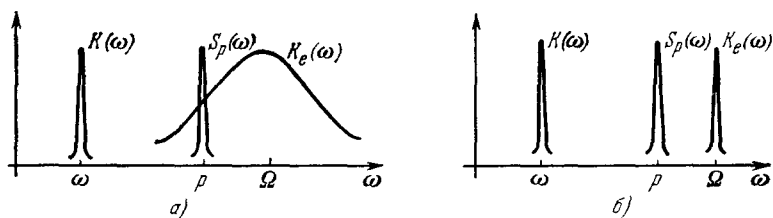


Рис. 2. Относительное положение на оси частот стационарных характеристик механического  $K(\omega)$  и электрического  $K_e(\omega)$  осцилляторов и плотности излучения генератора накачки  $S_p(\omega)$  при  $\tau_e^* < 1/\omega$  (а) и  $\tau_e^* > 1/\omega$  (б).

колебаний. (При выводе (25) принято  $\tau_e^* \gg 1/\omega$ ,  $U_{p+\omega} \ll U_p$ .) Во время действия силы на механический осциллятор изменение его амплитуды  $\delta a$  (при  $\hat{\tau} \ll \tau^*$ ,  $\delta a \ll a_0$ ) определяется соотношением

$$\delta a \approx \frac{1}{2a_0} \left( \frac{F_0 \hat{\tau}}{2m\omega} \right)^2 + \frac{F_0 \hat{\tau}}{2m\omega} \sin \varphi. \quad (26)$$

При случайном значении  $\varphi$  среднеквадратичное изменение амплитуды будет равно

$$\Delta a \approx \frac{F_0 \hat{\tau}}{2 \sqrt{2} m \omega}. \quad (27)$$

Следовательно, среднеквадратичное изменение амплитуды э. д. с. комбинационной частоты за время  $\hat{\tau}$  равно

$$\delta U_{p+\omega} = \frac{1}{8\sqrt{2}} U_p \frac{\Omega}{\omega d_0} \frac{F_0 \hat{\tau}}{m\omega}. \quad (28)$$

Действие этой э. д. с. на резонатор может быть обнаружено на фоне шумов Найквиста, если ее среднее по времени значение

$$\frac{1}{2} \delta U_{p+\omega} > \sqrt{\frac{2kT_e R}{\hat{\tau}}}; \quad (29)$$

$R$  — эквивалентное сопротивление потерь резонатора<sup>17</sup>. Детектор оказывает силовое влияние на механический осциллятор<sup>17</sup>. В рассматриваемой схеме спектральная составляющая этой силы на частоте  $\omega$  возникает как комбинационная составляющая напряжения накачки и собственных колебаний резонатора. Амплитуда этой составляющей равна

$$F_i = U_p U_\Omega \frac{\Omega}{\Omega - p} \frac{C_0}{4d_0}, \quad (30)$$

где  $C_0$  — среднее значение емкости. При изменении амплитуды механических колебаний меняется  $U_{p+\omega}$ , а следовательно,  $U_\Omega$  и  $F_i$ .

Соотношение (28) справедливо до тех пор, пока  $\delta F_i < F_0$ . Определим такую величину  $U_p$ , при которой за время  $\hat{\tau}$  величина  $\delta F_i$  достигает значения  $F_0$ . Поскольку при достаточно малом  $\hat{\tau}$

$$\delta U_\Omega = \frac{1}{2} \delta U_{p+\omega} \frac{\Omega \hat{\tau}}{2}, \quad (31)$$

то из условия

$$\delta F_i = F_0 \quad (32)$$

и соотношений (30), (31) получим

$$U_{p, \text{opt}} = \frac{8\omega d_0}{\hat{\tau} \Omega} \sqrt{2m\omega \Omega L}. \quad (33)$$

Считая (28) с определенным приближением, справедливым в течение всего времени  $\hat{\tau}$ , и подставив в (28)  $U_p$  из (33), получим минимальную обнаружимую амплитуду силы

$$F_{0, \min} = \zeta \frac{4}{\hat{\tau}} \sqrt{\frac{mkT_e \omega}{\Omega} \frac{\hat{\tau}}{\tau_e^*}}. \quad (34)$$

Данное значение  $F_{0, \min}$  по порядку величины в  $\sqrt{\hat{\tau}/\tau_e^*}$  раз меньше, чем (23).

Таким образом, использование преобразователя с большой постоянной времени позволяет получить существенный выигрыш в чувствительности. При

$$\frac{Q}{T} = \frac{Q_e}{T_e} \quad (35)$$

величина (34) совпадает с (19), т. е. шум электрической части системы при этом играет такую же роль, как и шум механической части.

Хотя ради простоты доказательства при выводе (34) мы использовали довольно грубые приближения, точный расчет подтверждает полученный результат. Однако последовательный анализ показывает, что процесс установления колебаний в системе сопровождается биениями и для обнаружения силы порядка  $F_{0, \min}$  необходимо знать либо предысторию системы, либо период биений.

Формула (35) получена чисто классическим путем, однако она при  $\hbar\Omega \ll kT_e$  справедлива и в случае квантового осциллятора. Квантовые ограничения здесь мы введем так же, как делали это при выводе соотношения (15). Именно, будем считать, что минимальное изменение энергии резонатора за время  $\hat{\tau}$  должно быть не меньше  $\hbar\Omega$ . Изменение энергии на частоте  $\Omega$  в случае  $\delta U_\Omega \ll U_\Omega$  равно

$$\delta E = C_0 U_\Omega \delta U_\Omega. \quad (36)$$

Если энергия колебаний в резонаторе равна  $kT_e$ , то

$$U_\Omega = \sqrt{\frac{2kT_e}{C_0}}. \quad (37)$$

Из условия  $\delta E = \hbar\Omega$  и соотношений (31), (34)—(37) получим

$$n_T^e \sqrt{\frac{2\hat{\tau}}{\tau_e^*}} = 1, \quad (38)$$

где

$$n_T^e = \frac{kT_e}{\hbar\Omega}. \quad (39)$$

Используя (38) и (35), найдем предельную измеримую амплитуду силы

$$F_{0, \text{пред}} = \zeta \cdot \frac{1}{\hat{\tau}} \sqrt{\frac{8m\hbar\omega}{n_T^e}}. \quad (40)$$

Таким образом, в описываемой схеме детектора найквистовский шум резонатора позволяет измерять силу на уровне соотношения (15) при условии (35) и

$$n_T^e > 2n_0. \quad (41)$$

Обсудим соотношения (38—(40) и (41). Из них следует, что для увеличения чувствительности необходимо увеличивать температуру резонатора  $T_e$ . Если принять во внимание, что при увеличении  $T_e$  необходимо в соответствии с (38) увеличивать  $\tau_e^*$ , то результат этот легко объясняется на основании (36).

Действительно, чем больше начальная амплитуда колебаний  $U_\Omega$ , тем при меньшем значении  $\delta U_\Omega$  будет выполнено условие  $\delta E \geq \hbar\Omega$ . Из этих рассуждений следует, что для повышения чувствительности не обязательно увеличивать равновесную температуру резонатора. Достаточно каким-либо способом вызвать интенсивные колебания на собственной частоте резонатора.

Допустим, что энергия начальных колебаний резонатора равна  $E_0^e$ . Тогда, согласно (18), дисперсия энергии, возникающая в результате релаксации, будет

$$\Delta E = \sqrt{\frac{\hat{\tau}}{\tau_e^*} 2kT_e E_0^e}, \quad (42)$$

а соответствующее изменение амплитуды при  $\Delta E \ll E_0^e$  не зависит от  $E_0^e$  и равно (32). Так как изменение амплитуды не зависит от  $E_0^e$ , то не изменяются неравенства (29) и (33), служащие для определения  $U_{p, \text{opt}}$  и  $F_{0, \text{min}}$ . Однако в (36) войдет  $U_\Omega = \sqrt{2E_0^e/C_0}$ , и вместо (39) получим

$$\sqrt{\frac{2\hat{\tau}}{\tau_e^*} kT_e E_0^e} \geq \hbar\Omega. \quad (43)$$

Подставив (43) в (35), найдем

$$F_{0, \text{пред}} = \zeta \frac{1}{\hat{\tau}} \sqrt{\frac{8m\hbar\omega}{n_0^e}}, \quad (44)$$



где  $n_0^e = E_0^e/\hbar\Omega$ . Теперь вместо (41) получим

$$n_0^e \geq 2n_0. \quad (45)$$

Данный расчет показывает принципиальную возможность измерения силы на уровне соотношения (15) путем наблюдения переходного процесса в системе.

Заметим, что так как амплитуда действующей на механический осциллятор суммарной силы приблизительно равна  $F_i + F_0$  и  $F_i \gg F_0$ , то за время  $\hat{\tau}$  энергия механического осциллятора изменится на величину больше, чем  $n_0\hbar\omega$ . Изменение энергии осциллятора, происходящее за счет работы силы  $F$ , будет зависеть от  $n_0^e$  и  $U_p$ . Минимальное ее значение (т. е. в случае  $n_0^e = 2n_0$ ) приблизительно равно  $4\hbar\omega$ . Это можно легко показать, подставив в (21) вместо  $F_0$  сумму  $F_i + F_0$  и используя (30), (34), (38), (43) и (45).

## 6. ТРЕБОВАНИЯ К ГЕНЕРАТОРУ НАКАЧКИ

В проведенных выше расчетах мы пренебрегали шумами генератора накачки. Рассмотрим, в каком случае такое допущение возможно. Спектральная линия излучения автогенератора, как известно, имеет узкий максимум и широкий, но относительно низкий пьедестал<sup>21</sup>. Шумы генератора могут влиять на колебания на собственной частоте резонатора двумя путями:

- а) непосредственно (за счет «крыльев» спектральной линии);
- б) в результате комбинационного взаимодействия с механическими колебаниями.

Непосредственное влияние может быть сделано пренебрежимо малым за счет: 1) увеличения разности  $\Omega - p$ , 2) уменьшения спектральной плотности на «крыльях» линии с помощью вспомогательного узкополосного резонатора.

Полная вариация комбинационной э. д. с.  $U_{p+\omega}$ , как видно из (25), равна

$$\delta U_{p+\omega} = \frac{U_p}{4a_0} \frac{\Omega}{\Omega - a} \left( \frac{\delta a}{a} + \frac{\delta U_p}{U_p} + \frac{\delta p}{\Omega - p} \right). \quad (46)$$

Следовательно, пренебечь шумами генератора в (46) можно при условии

$$\frac{\delta U_p}{U_p} + \frac{\delta p}{\Omega - p} < \frac{\delta a}{a}, \quad (47)$$

где  $\delta a$ ,  $\delta U_p$ ,  $\delta p$  — вариации соответствующих величин за время  $\hat{\tau}$ . При измерениях на уровне  $F_{0, \min}$  будет  $\delta a/a \sim 1/2n_0$ . При  $n_0 \sim 10^3$  уход частоты генератора за  $\hat{\tau}$  должен быть не больше  $\delta p = 10^{-4} \omega$ , а изменение амплитуды не больше  $\delta U_p = 10^{-4} U_p$ . Если, например,  $\omega \sim 10^4$ , а  $\Omega \sim 10^{11}$ , то стабильность частоты генератора накачки должна быть порядка  $10^{11}$ . Следовательно, в этом случае может быть использован обычный аммиачный квантовый генератор. При  $n_0 \sim 10^5$  необходим уже генератор с пучком атомарного водорода.

## 7. О НЕРАЗРУШАЮЩЕЙ РЕГИСТРАЦИИ $n$ -КВАНТОВОГО СОСТОЯНИЯ

Выше мы исходили из того, что ошибка определения начального и конечного значений энергии осциллятора принципиально может быть много меньше  $\hbar\omega$ . Другими словами, мы считали, что можно измерить энергию осциллятора, практически не возмущая его. Однако до сих пор не было предложено ни одного, хотя бы мысленного, способа такого измерения.

Покажем на примере одной конкретной схемы эксперимента, что можно определить значение  $n$  (включая случай  $n = 0$ ) для выбранной моды резонатора, так что вероятность перехода на соседние уровни после измерения будет невелика.

Принципиальная схема обсуждаемого эксперимента приведена на рис. 3. Пучок электронов, имеющих горизонтальную скорость  $v_x$ , проходит через емкость СВЧ резонатора клистронного типа так, чтобы электрическое поле отклоняло пролетающие электроны в направлении оси  $Oy$ . Затем электроны попадают в систему линз  $A_1$ ,  $A_2$ , которая осуществляет зеркальное отображение траектории электронов относительно плоскости

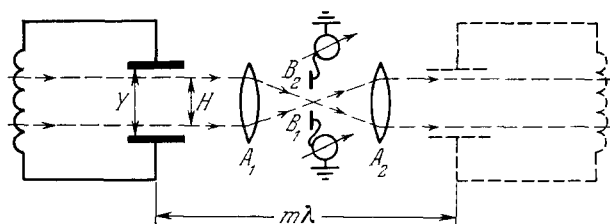


Рис. 3. Принципиальная схема «невозмущающего» измерения энергии резонатора.

симметрии конденсатора. После этого электроны попадают снова в емкость исследуемого резонатора. Резонатор в этом случае должен иметь две пространственно разнесенные емкости. Если конструкция резонатора такова, что он имеет только одну емкость, то изображенную на рис. 3 схему нужно дополнить системой зеркал.

Вторичный пролет через конденсатор электронов, не попавших на шторки  $B_1$  и  $B_2$ , используется для компенсации того воздействия на резонатор, которое они оказывают, пролетая через резонатор первый раз. Чтобы такая компенсация имела место, время между первым и вторым пролетами должно соответствовать изменению фазы колебаний на  $2\pi m$ , где  $m$  — целое число. Это условие предполагает достаточно точное знание частоты  $\omega$  и хорошую монокинетичность электронов в пучке.

Приемные электроды, выполненные в виде двух шторок ( $B_1$ ,  $B_2$ ), располагаются перпендикулярно оси  $Oy$  вблизи фокуса линз симметрично относительно их оптической оси. Под действием переменного поля в левом конденсаторе фокальное пятно будет колебаться в плоскости шторок. В результате, если края шторок расположены ближе к оптической оси, чем первый дифракционный минимум, среднее число попадающих на шторки электронов будет увеличиваться с ростом амплитуды колебаний в резонаторе. Колебания фокального пятна будут обнаружимы, когда приращение  $\delta \bar{N}_B$  среднего числа попадающих на шторки электронов превысит флуктуацию  $\Delta N_B$  числа электронов, попадающих на шторки при отсутствии поля в конденсаторе. Так как  $\delta \bar{N}_B \sim N$ , а  $\Delta N_B \sim \sqrt{N}$  ( $N$  — полное число прошедших через конденсатор электронов), то обнаружимое колебание фокального пятна будет тем меньше, чем больше  $N$ . Однако при увеличении числа пролетающих через резонатор электронов увеличивается вероятность изменения состояния осциллятора.

Расчет показывает, что если до измерения осциллятор находился в основном состоянии ( $n = 0$ ), то после пролета одного электрона только через левый конденсатор вероятность обнаружить его в этом состоянии будет равна

$$P_0 = e^{-w},$$

где в нашем случае

$$w = \frac{e^2 (\omega \tau_n)^2}{2C \hbar \omega} \left( \frac{\bar{y}^2}{Y^2} + \frac{\bar{v}_y^2 \tau_n^2}{4Y^2} \right); \quad (48)$$

здесь  $\bar{y}^2$  — среднеквадратичное значение координаты электрона относительно плоскости симметрии конденсатора,  $Y$  — расстояние между пластинами конденсатора,  $e$  — заряд электрона,  $\tau_n$  — время пролета электрона через конденсатор,  $v_y$  — неопределенность скорости электронов вдоль оси  $O_y$ .

Уравнение (48) справедливо при  $\omega \tau_n \leq 1$ . Второе слагаемое в (48), соответствующее расходимости пучка за время пролета, в практически интересных для нас случаях много меньше  $y^2/Y^2$ . Если плотность вероятности координаты  $y$  почти во всем сечении  $H$  пучка не зависит от  $y$ , то  $\bar{y}^2 = H^2/12$ . Тогда, например, при  $\omega \tau_n = 1$ ,  $C \approx 0,3 \text{ нкф}$ ,  $\omega = 2 \cdot 10^{10} \text{ сек}^{-1}$  и  $H/Y \approx 1$  получим  $w = 1,5 \cdot 10^{-3}$ , т. е. один электрон мало возмущает основное состояние осциллятора. Однако если из  $N$  пропущенных через систему электронов  $\alpha N$  электронов попадут на шторки, то величина  $w$  увеличится в  $\alpha N$  раз.

Необходимое число  $N$  электронов зависит от амплитуды колебания фокального пятна  $y_0$ . Она в общем случае равна

$$y_0 = \frac{e U_0}{\mu Y} \frac{\tau_n L}{v_x},$$

где  $U_0$  — амплитуда колебаний напряжения на емкости,  $\mu$  — масса электрона,  $L$  — длина фокусного расстояния линзы. Если  $n = 0$ , то  $U_0 = \sqrt{\hbar \omega_0 / C_0} = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ в}$ . Тогда при  $v_x = 10^{10} \text{ см/сек}$ ,  $Y = 0,2 \text{ см}$ ,  $L = 10^2 \text{ см}$  и  $\tau_n = 5 \cdot 10^{-11} \text{ сек}$  величина  $y_0 = 10^{-8} \text{ см}$ . Как показывает простой анализ, такое колебание пятна можно обнаружить, если  $N \approx 10^3$ . При этом на шторки попадает в среднем  $10^2$  электронов, т. е.  $\alpha \approx 0,1$ . Следовательно, описываемая схема эксперимента позволяет определить основное состояние осциллятора, и вероятность обнаружить осциллятор в этом состоянии после измерения будет равна  $P = 0,85$ . Эти оценки относятся к случаю, когда все электроны, летящие вне основного дифракционного максимума, задерживаются шторками. Однако: а) шторки можно сделать в виде очень узких полосок с угловой шириной меньше ширины дифракционного максимума; б) для регистрации электронов достаточно отбирать у них энергию всего в несколько электрон-вольт, а так как энергия электронов порядка  $3 \cdot 10^4 \text{ эв}$ , шторки можно делать почти прозрачными для электронов.

Следовательно, коэффициент некомпенсации  $\alpha$  может быть снижен по крайней мере еще в 10 раз. Тогда вероятность обнаружить осциллятор после измерений на исходном уровне будет равна  $P_0 = 0,98 - 0,99$ .

Минимальное значение  $\alpha$  определяется не только шириной и прозрачностью шторок, но и дифракционным возмущением электронов, пролетающих рядом со шторками. Оценки показывают, что этот эффект играет меньшую роль, чем поглощение электронов шторками.

Отметим, что в описанной схеме существенную роль играют механические степени свободы резонатора. Изменение импульса электронов сопровождается изменением механического импульса резонатора. Но так как масса последнего велика, его положение остается хорошо определенным.

Значение рассмотренной схемы эксперимента не только в том, что она может быть реализована уже при современном состоянии техники эксперимента, главное — она отвечает на принципиальный вопрос о возможности неразрушающей регистрации  $n$ -квантового состояния осциллятора.

## 8. ВЫВОДЫ

Квантовомеханические свойства пробных тел ограничивают минимальное значение обнаруживаемой силы величиной

$$F_{\min} = \zeta B(\hbar, \hat{\tau}).$$

Конкретный вид  $B(\hbar, \hat{\tau})$  зависит от свойств пробного тела и способа наблюдения.

Когда пробным телом является гармонический осциллятор, минимальная величина амплитуды силы равна

$$F_{0, \min} = \zeta \cdot \frac{1}{\hat{\tau}} \sqrt{\frac{4m\hbar\omega}{n_0}}.$$

Собственные флуктуации осциллятора не будут маскировать действие этой силы, если выполняется неравенство

$$\frac{\hat{\tau}}{\tau^*} \cdot 2n_T n_0 \leq 1.$$

Изменение состояния механического макроскопического осциллятора может быть преобразовано без потери информации в электромагнитный высокочастотный сигнал с помощью радиотехнического датчика, если время его релаксации много больше времени наблюдения. Использование датчиков с большим временем релаксации ( $\tau_e^* \gg \hat{\tau}$ ) дает возможность увеличить чувствительность в  $\sqrt{\hat{\tau}/\tau_e^*}$  раз по сравнению с датчиком, в котором  $\tau_e^* < 1/\omega$ . В классическом приближении такой датчик позволяет измерить силу порядка

$$F_{0, \min} = \zeta \cdot \frac{4}{\hat{\tau}} \sqrt{\frac{mkT_e\omega}{\Omega} \frac{\hat{\tau}}{\tau_e^*}}.$$

Учет дискретности энергетических уровней датчика преобразует последнее соотношение в (40).

Принципиально возможна неразрушающая регистрация  $n$ -квантового состояния осциллятора.

Авторы благодарят В. И. Панова за полезную дискуссию по затронутым вопросам.

Московский государственный университет  
им. М. В. Ломоносова

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. В. Б. Брагинский, В. П. Митрофанов, В. Н. Руденко, А. А. Хорев, ПТЭ, № 4, 241 (1971).
2. G. J. Dick, H. C. Yen, Applied Superconductivity Conference, Annapolis, USA, May 1972 (preprint).
3. H. Paik, сборник «Experimental Gravitation» (Proc. of the Intern. School of Physics «Enrico Fermi» (Varenna, July 17—29, 1972). Course LVI), Ed. B. Bertotti, N. Y.—L., Academic Press, 1974, p. 515.
4. W. Fairbank, Report at the GRG Conference, Copenhagen, 1971.
5. Н. Г. Басов, Э. М. Беленов, И. И. Вольков, М. А. Губин, В. В. Никитин, В. Н. Трошин, Письма ЖЭТФ 15, 659 (1972).
6. Ю. И. Зайцев, Д. П. Степанов, *ibid.* 6, 733 (1967).
7. I. P. Turneure, Nguyen Tuong Viet, Appl. Phys. Lett. 16, 333 (1970).
8. D. de Bra, Proc. of the Conference on Experimental Test of the Gravitational Theory, Caltech, 1970, p. 190.
9. R. Jullerat, *ibid.*, p. 197.
10. J. D. Anderson, цит. в <sup>3</sup> сборник, p. 163.

11. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, М. Физматгиз, 1963.
  12. Н. С. Крылов, В. А. Фок, ЖЭТФ 17, 93 (1947).
  13. В. А. Фок, ЖЭТФ 42, 1134 (1962).
  14. Д. И. Блохинцев, Основы квантовой механики, М., «Высшая школа», 1963.
  15. И. И. Гольдман, В. Д. Кривченков, Сборник задач по квантовой механике, М., Гостехиздат, 1957.
  16. Б. Я. Зельдович, А. М. Переломов, В. С. Попов, ЖЭТФ 55, 589 (1968).
  17. В. Б. Брагинский, Физические эксперименты с пробными телами, М., «Наука», 1970.
  18. В. Б. Брагинский, В. С. Назаренко, ЖЭТФ 57, 1431 (1969).
  19. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория упругости, М., «Наука» 1965.
  20. В. Б. Брагинский, В. И. Панов, В. Г. Петников, Ю. Хлынецев, ПТЭ, № 6, 147 (1971).
  21. С. М. Рытов, Введение в статистическую радиофизику, М., «Наука», 1966.
-