

ВИХРИ В СВЕРХПРОВОДНИКАХ ВТОРОГО РОДА**В. В. Шмидт, Г. С. Мкртчян**

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	459
2. Магнитный поток вихря, его магнитное поле и свободная энергия	462
3. Сила взаимодействия вихря с током	465
4. Вихрь вблизи границы сверхпроводника	468
а) Магнитный поток вихря, находящегося вблизи границы сверхпроводника (469). б) Свободная энергия вихря в ограниченном сверхпроводнике (470). в) Барьер Бина — Ливингстона (471). г) Взаимодействие вихря с полостью внутри сверхпроводника (474).	
5. Смешанное состояние сверхпроводников второго рода	477
а) Смешанное состояние безграничного сверхпроводника (477). б) Смешанное состояние вблизи границы сверхпроводника (479). в) Смешанное состояние пленки (480).	
6. Транспортный ток в смешанном состоянии	482
а) Транспортный ток в пленке (482). б) Транспортный ток в пластине (483). в) Закрепление вихрей на границе раздела двух сверхпроводников (488).	
Цитированная литература	489

1. ВВЕДЕНИЕ

Если сверхпроводник второго рода внести в достаточно сильное магнитное поле, то в нем возникают сверхпроводящие вихри (или вихревые нити). Такой вихрь — это тонкий несверхпроводящий ствол (сердцевина), вокруг которого циркулирует незатухающий сверхпроводящий ток.

Существование вихрей обуславливает многие интересные и важные в прикладном плане свойства сверхпроводников второго рода. Естественно поэтому желание уметь понимать «на пальцах», что происходит с вихрями. Оказывается, — это возможно. В умеренных полях, когда можно использовать лондоновское приближение теории сверхпроводимости, возникает линейная электродинамика, которая позволяет широко пользоваться принципом суперпозиции токов и полей. Тогда вихри можно рассматривать как самостоятельные объекты, учитывать их взаимодействие между собой и с поверхностями сверхпроводника. Это дает возможность изучить кривые намагничивания сверхпроводников второго рода и их зависимость от формы образца, понять, как происходит взаимодействие вихрей и их закрепление на неоднородностях материала.

Последний момент нам представляется особенно важным, так как закрепление вихрей на неоднородностях является причиной необратимых эффектов в намагничивании сверхпроводников, причиной появления остаточного магнитного потока и, наконец, причиной существования достаточно большого критического тока в неоднородных сверхпроводниках второго рода (жестких сверхпроводниках).

В настоящем обзоре рассмотрен сначала одиночный вихрь, его магнитный поток, его взаимодействие с границей сверхпроводника и с обтекающим его сторонним током, закрепление этого вихря на внутренней полости в сверхпроводнике. Затем мы изучим систему вихрей, взаимодействующих между собой, с границами сверхпроводника и с некоторыми дефектами. Это позволит исследовать смешанное состояние в ограниченных сверхпроводниках второго рода. Больше того, это позволит понять, как даже идеально однородный сверхпроводник второго рода, находясь в смешанном состоянии, все же сохраняет способность пропустить конечный транспортный ток в направлении, перпендикулярном к магнитному полю.

* * *

Вихри в сверхпроводниках изучаются методами теории Гинзбурга — Ландау (ГЛ) ¹. Хотя эта теория изложена в ряде обзоров и монографий (см., например, ^{2, 3, 11}), нам представляется уместным напомнить здесь ее основные положения.

Из опыта известно, что при критической температуре T_c в сверхпроводнике происходит переход из нормального состояния в сверхпроводящее, причем этот переход является фазовым переходом второго рода. Параметром порядка, который равен нулю при $T > T_c$ и мал при $T_c - T \ll T_c$, является так называемая эффективная волновая функция сверхпроводящих электронов $\psi(\mathbf{r})$. Величину $|\psi|^2$ можно трактовать как плотность сверхпроводящих электронов, т. е. число электронов металла в единице объема, находящихся в конденсате (входящих в состав куперовских пар).

Если применить к сверхпроводнику вблизи T_c теорию фазовых переходов второго рода Ландау ⁴, то выражение для плотности свободной энергии сверхпроводника в магнитном поле запишется в виде

$$F_s = F_n + \frac{H^2}{8\pi} + \alpha |\psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi|^4 + \frac{1}{2m} \left| \left(-i\hbar\nabla - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \right) \psi \right|^2;$$

здесь F_n — плотность свободной энергии нормальной фазы, \mathbf{H} — напряженность магнитного поля внутри сверхпроводника, $\alpha(T)$ и β — константы, зависящие от материала, m — масса электрона, e — заряд электрона. Последний член представляет собой плотность кинетической энергии сверхпроводящих электронов в присутствии магнитного поля, вектор-потенциал которого равен \mathbf{A} .

Интегрируя F_s по объему сверхпроводника и приравнявая нулю первые вариации свободной энергии по ψ^* и \mathbf{A} , получим хорошо известные уравнения ГЛ, к которым нужно присоединить уравнения Максвелла:

$$\frac{1}{2m} \left(-i\hbar\nabla - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \psi + \alpha\psi + \beta |\psi|^2 \psi = 0, \quad (1)$$

$$\mathbf{j} = -\frac{ie\hbar}{m} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) - \frac{4e^2}{mc} |\psi|^2 \mathbf{A}, \quad (2)$$

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \text{rot } \mathbf{H} = \frac{c}{4\pi} \text{rot rot } \mathbf{A}. \quad (3)$$

Из этих уравнений следует, что магнитное поле и ток могут существенно измениться в сверхпроводнике на расстояниях порядка

$$\lambda = \sqrt{\frac{mc^2\beta}{16\pi e^2 |\alpha|}}.$$

Эту величину называют глубиной проникновения слабого магнитного поля.

Расстояние, на котором может существенно измениться параметр порядка ψ (как это следует из уравнения (1)), равно так называемой длине когерентности:

$$\xi = \frac{\hbar}{V \sqrt{2m |\alpha|}}.$$

Параметр κ теории ГЛ равен

$$\kappa = \frac{\lambda}{\xi}.$$

В отсутствие магнитного поля равновесное значение $|\psi|^2$, как это следует из уравнения (1), будет равно $|\psi_0|^2 = -\alpha/\beta$. Вывод уравнений ГЛ из микро-теории ⁵ позволил выразить коэффициенты α и β (а следовательно, λ и ξ) через электронные характеристики материала. Приводим окончательные результаты.

Для чистого сверхпроводника

$$\lambda(T) = \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_L(0) \sqrt{\frac{T_c}{T_c - T}}, \quad \xi(T) = 0,74 \xi_0 \left(\frac{T_c}{T_c - T}\right)^{1/2}.$$

Для грязного сверхпроводника

$$\lambda(T) = 0,615 \lambda_L(0) \sqrt{\frac{\xi_0}{l}} \sqrt{\frac{T_c}{T_c - T}}, \quad \xi(T) = 0,85 \sqrt{\xi_0 l} \sqrt{\frac{T_c}{T_c - T}};$$

здесь $\lambda_L^2(0) = 3c^2/(8\pi e^2 v_F^2 N(0))$ — лондоновская глубина проникновения, $\xi_0 = 0,18 \hbar v_F / (k_B T_c)$, v_F — скорость электрона на поверхности Ферми, $N(0)$ — плотность состояний на уровне Ферми, l — длина свободного пробега электрона. Грязным сверхпроводником считается такой, у которого $l \ll \xi_0$.

Если $\kappa > 1/\sqrt{2}$, то энергия границы между нормальной и сверхпроводящей фазами ($n-s$ -границы) отрицательна. $n-s$ -граница может находиться в равновесном состоянии только тогда, когда сверхпроводник находится во внешнем магнитном поле и n - и s -фазы находятся в равновесии. При этом магнитное поле проходит через n -фазу. Пусть $\lambda \gg \xi$. Это значит, что в области $n-s$ -границы будет находиться слой (толщины $\sim \lambda$), в котором имеется и магнитное поле, и сверхпроводящий конденсат. Ясно, что плотность свободной энергии в этом поле будет меньше плотности свободной энергии n -фазы на величину, выделившуюся при конденсации (спаривании) электронов этого слоя. Это и означает, что энергия $n-s$ -границы в этом случае отрицательна. Сверхпроводники с $\kappa > 1/\sqrt{2}$ называются сверхпроводниками II рода.

Сверхпроводники с $\kappa < 1/\sqrt{2}$ имеют положительную энергию $n-s$ -границы и называются сверхпроводниками I рода.

Основываясь на теории ГЛ, Абрикосов ⁶ создал теорию сверхпроводников II рода. Пусть сверхпроводник второго рода находится в столь большом магнитном поле, что он заведомо перешел в нормальное состояние. Начнем уменьшать внешнее поле. Оказывается, что при некотором поле H_{c2} — втором критическом поле — возникает так называемое смешанное состояние, которое представляет собой расслоение однородного нормального образца на чередующиеся области нормальной и сверхпроводящей фаз. Здесь

$$H_{c2} = \sqrt{2} \kappa H_{c.m.},$$

где $H_{c,m}$ — термодинамическое критическое поле — определяется соотношением

$$\frac{H_{c,m}^2}{8\pi} = F_n - F_s.$$

Такое расслоение энергетически выгодно, так как n — s -граница в нашем сверхпроводнике имеет отрицательную поверхностную энергию. Абрикосов⁶ показал, что это расслоение должно реализоваться в виде вихревой решетки, т. е. возникает двумерная периодическая структура вихревых нитей, параллельных внешнему магнитному полю и пронизывающих все тело сверхпроводника.

По мере уменьшения внешнего поля период вихревой решетки увеличивается, число вихрей внутри сверхпроводника уменьшается. Наконец, при поле H_{c1} — первом критическом поле — пребывание вихрей внутри сверхпроводника становится энергетически невыгодным и последний вихрь покидает образец.

2 МАГНИТНЫЙ ПОТОК ВИХРЯ, ЕГО МАГНИТНОЕ ПОЛЕ И СВОБОДНАЯ ЭНЕРГИЯ

Выясним теперь, что такое одиночный вихрь. Это удобно сделать, предположив, что $\lambda \gg \xi$. Тогда уравнения (1) и (2) легко проанализировать. Пусть центр вихря находится в начале координат. Тогда $\psi(0) = 0$. Легко показать⁶, что при $r \ll \xi$ $|\psi(r)|^2 \sim (r/\xi)^2$. С другой стороны, при $r \gg \xi$ $|\psi|^2 = \psi_0^2 = -\alpha/\beta$, так как ξ — это и есть то расстояние, на котором существенно меняется параметр порядка; нарастание параметра порядка $|\psi|^2$ от нуля до ψ_0^2 происходит на длине $\sim \xi$.

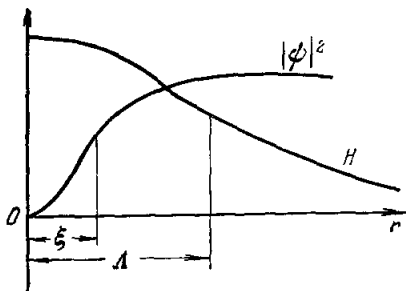


Рис. 1. Зависимость $|\psi|^2$ и H от расстояния r до изолированного вихря.

Микроскопическое рассмотрение^{7,8} показало, что спектр элементарных возбуждений в этой области вихря мало отличается от спектра элементарных возбуждений несверхпроводящего металла. Поэтому при $\lambda \gg \xi$ часто применяют такую модель вихря: сердцевина вихря радиуса ξ считается нормальным металлом, а все остальное пространство — сверхпроводником. Вихревой сверхпроводящий ток, создающий магнитное поле вихря, течет вокруг нормальной сердцевины и занимает

область радиуса λ . На расстояниях $r \gg \lambda$ ток вихря экспоненциально затухает. На рис. 1 схематично показаны $\psi(r)$ и поле нити $H(r)$ при $\lambda \gg \xi$.

Найдем теперь магнитный поток одиночного вихря, находящегося в безграничном сверхпроводнике. Центр вихря пусть по-прежнему будет в начале координат. Проведем окружность радиуса $R \gg \lambda$ в плоскости, перпендикулярной к оси нити. Плотность потока вихря на этой окружности равна нулю, а модуль параметра порядка давно вышел на уровень ψ_0 . Представив параметр порядка ψ в виде $\psi = \psi_0 e^{i\theta}$, где θ — фаза волновой функции ГЛ, перепишем (2) в виде

$$\mathbf{j} = \frac{2e\hbar}{m} \psi_0^2 \nabla \theta - \frac{4e^2}{mc} \psi_0^2 \mathbf{A}. \quad (4)$$

Проинтегрируем теперь это уравнение по контуру нашей окружности радиуса R . Рассмотрим прежде $\oint_R \nabla \theta dl$. Этот интеграл равен, очевидно, полному изменению фазы волновой функции при обходе вокруг замкнутого контура. Выдвинем естественное требование к волновой функции — требование однозначности. Тогда полное изменение фазы при обходе замкнутого контура может быть только величиной, кратной 2π . Если контур охватывает одну вихревую нить, то кратность будет минимальной *) и

$$\oint_R \nabla \theta dl = 2\pi.$$

Учитывая теперь, что $\oint_R \mathbf{j} dl = 0$, а искомый полный магнитный поток

вихря равен $\Phi_0 = \oint_R \mathbf{A} dl$, легко получаем из (4)

$$\Phi_0 = \frac{ch}{2e} = \frac{\pi\hbar}{e} \approx 2 \cdot 10^{-7} \text{ зс} \cdot \text{см}^2.$$

Эта величина носит название кванта магнитного потока.

Сразу же подчеркнем, что вихревая нить несет квант магнитного потока Φ_0 , только если она далека от поверхности сверхпроводника. Если нить находится вблизи поверхности сверхпроводника, то ее магнитный поток будет меньше Φ_0 . В дальнейшем мы еще вернемся к этому вопросу.

Займемся теперь расчетом магнитного поля нити.

С учетом сказанного будем считать сердцевину вихря радиуса ξ нормальной. Важным обстоятельством здесь является то, что для вычислений достаточно знать лишь порядок радиуса сердцевины нити, так как далее будет видно, что в выражениях для поля нити и ее энергии радиус сердцевины входит под знаком логарифма.

Оговорим область применимости наших вычислений. Здесь, кроме неравенства $\lambda \gg \xi$, надо потребовать, чтобы вне сердцевины модуль параметра порядка $|\psi|$ был постоянным. Это требование выполняется, когда сердцевины вихрей далеки друг от друга, т. е. когда внешнее поле H_0 удовлетворяет неравенству $H_{c1} \leq H_0 \ll H_{c2}$. Последнее условие состоит в том, что центр вихря должен быть достаточно (по сравнению с ξ) удален от поверхности сверхпроводника, так как в противном случае нельзя пренебречь изменениями $|\psi|$. При выводе уравнения для поля вихревой нити будем исходить из уравнения ГЛ (4), которое справедливо всюду вне сердцевины вихря. Наложим теперь граничные условия. Магнитное поле нити $H(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Это — первое граничное условие. Второе условие можно получить из требования изменения фазы волновой функции ψ на величину 2π при обходе вокруг центра вихревой нити. Проведем вокруг центра нити окружность радиуса ξ . Проинтегрируем (4) вдоль этой окружности. Пренебрегая магнитным потоком, который охватывается контуром интегрирования, т. е. магнитным потоком сердцевины, получим

$$\oint \mathbf{j} dl = \frac{c}{4\pi} \frac{\Phi_0}{\lambda^2},$$

*) То, что кратность будет минимальной для произвольных полей и κ , не доказано. Однако можно показать⁹⁻¹¹, что при $\kappa \gg 1$ во всей области смешанного состояния изменение фазы параметра порядка при обходе вокруг вихревой нити равно 2π .

или

$$|\operatorname{rot} \mathbf{H}|_{r=\xi} = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2\xi}. \quad (5)$$

Это и есть наше второе граничное условие. При выводе (5) было использовано уравнение Максвелла, связывающее поле вихря и его ток $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \left(\frac{4\pi}{c}\right) \mathbf{j}$. Условию (5) можно удовлетворить автоматически, если, взяв ротор от обеих частей уравнения (4), записать уравнение для \mathbf{H} в виде

$$\mathbf{H} + \lambda^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \Phi_0 e \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0); \quad (6)$$

здесь \mathbf{r}_0 — радиус-вектор центра вихревой нити, заданный на плоскости, перпендикулярной к нити, \mathbf{e} — единичный вектор, направленный вдоль нити. Действительно, проинтегрируем (6) по площади круга, радиуса ξ с центром на оси вихря. Снова пренебрегая потоком через сердцевину $\int \mathbf{H} d\mathbf{S}$, сразу получаем условие (5). Для одиночной вихревой нити решение уравнения (6), спадающее на бесконечности, будет

$$H = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} K_0 \left(\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}{\lambda} \right), \quad (7)$$

где $K_0(z)$ — функция Ханкеля нулевого порядка от мнимого аргумента. Напомним асимптотику этой функции: при $z \ll 1$ $K_0(z) \approx \ln(2/\gamma z)$, где $\gamma = e^c \approx 1,78$, при $z \gg 1$ $K_0(z) \approx \sqrt{\pi/2ze^{-z}}$.

Таким образом, магнитное поле вихревой нити экспоненциально спадает при $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \gg \lambda$ и логарифмически растет при приближении к сердцевине нити. Для нахождения поля в центре нити подставим в (7) $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = \xi$, т. е. обрежем логарифмическую расходимость на радиусе ξ . Тогда

$$H(\mathbf{r}_0) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \ln \kappa. \quad (8)$$

Найдем теперь свободную энергию одиночной нити. Поскольку, по предположению, $\lambda \gg \xi$, мы пренебрежем тем изменением энергии, которая обусловлена изменением энергии конденсации в нормальной сердцевине вихря. Тогда свободная энергия изолированной нити запишется в виде

$$\mathcal{F} = \frac{1}{8\pi} \int [\mathbf{H}^2 + \lambda^2 (\operatorname{rot} \mathbf{H})^2] dV. \quad (9)$$

Интеграл берется по всему объему образца. Правильнее было бы интегрировать только по объему сверхпроводника без учета области, занимаемой сердцевинной вихря. Однако, поскольку $\xi \ll \lambda$ и поскольку расчеты ведутся с логарифмической точностью, интегрирование в (9) можно распространить на весь объем образца. Первое слагаемое в (9) дает энергию магнитного поля нити, второе слагаемое — кинетическую энергию вихревых токов.

Свободную энергию единицы длины вихря ε_0 найдем, если проинтегрируем (9) по плоскопараллельному слою единичной толщины, расположенному перпендикулярно к нити. Подставляя в (9) $(\operatorname{rot} \mathbf{H})^2 = \mathbf{H} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} + \operatorname{div} [\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{H}]$, учитывая, что

$$\int \operatorname{div} [\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{H}] dV = \oint [\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{H}] d\mathbf{S} = 0$$

(\mathbf{S} — удаленная на бесконечность наружная поверхность сверхпроводника) и используя (6), имеем

$$\varepsilon_0 = \left(\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \ln \kappa. \quad (10)$$

С логарифмической точностью это совпадает с результатом численных расчетов Абрикосова $\epsilon_0 = (\Phi_0/4\pi\lambda)^2 (\ln \kappa - 0,18)$. Итак, если в сверхпроводнике второго рода появляется одиночный вихрь, то свободная энергия сверхпроводника (в расчете на единицу длины вихря) увеличивается на ϵ_0 . Почему же тогда вихри появляются в сверхпроводнике второго рода? Дело в том, что если сверхпроводник находится во внешнем однородном магнитном поле \mathbf{H}_0 , то в состоянии равновесия минимальной будет не свободная энергия \mathcal{F} , а гиббсовская свободная энергия 12 , плотность которой G определяется формулой

$$G = F - \frac{\mathbf{H}_0 \mathbf{H}}{4\pi}, \tag{11}$$

где плотность свободной энергии $F = (1/8\pi) [\mathbf{H}^2 + \lambda^2 (\text{rot } \mathbf{H})^2]$; здесь \mathbf{H} — локальное магнитное поле в сверхпроводнике. За начало отсчета энергии принята энергия сверхпроводника без внешнего поля и без вихревой нити.

Проинтегрируем (11) по всему объему сверхпроводника, содержащего одну вихревую нить. Тогда в расчете на единицу длины нити получим

$$\int G dV = \epsilon_0 - \frac{\Phi_0 H_0}{4\pi}.$$

Приравняв правую часть этого равенства нулю, сразу получим то внешнее поле H_0 , при котором проникновение первой вихревой нити в сверхпроводник становится энергетически выгодным, т. е. первое критическое поле

$$H_{c1} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\Phi_0} = \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda^2} \ln \kappa. \tag{12}$$

Сравнение формул (8) и (12) показывает, что поле в центре нити приблизительно в два раза больше первого критического поля.

3. СИЛА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВИХРЯ С ТОКОМ

Теперь мы можем перейти к изучению очень важного для практических приложений вопроса о силе взаимодействия между вихрем и обтекающим его транспортным током, т. е. током, который создан каким-то посторонним источником. Эту силу обычно называют силой Лоренца. Вначале качественная картина. На рис. 2 изображен вихрь, который обтекается транспортным током. Легко видеть, что в области слева от сердцевинки вихря сверхтекучие скорости транспортного тока и вихря складываются, а справа — вычитаются. Это значит, что по закону Бернулли давление слева от сердцевинки меньше, чем справа. Следовательно, на сердцевину вихря действует сила Лоренца, показанная на рисунке.

Подчеркнем, что эта сила приложена к границе сердцевинки вихря, и поэтому само название «сила Лоренца» представляется нам не очень удачным. Действительно, под силой Лоренца всегда понимается сила, действующая со стороны источника магнитного поля на заряд, движущийся в этом поле. А в объеме сверхпроводника все силы, действующие на заряды, уравновешены. Чтобы пояснить это, обратимся к книге Ф. Лондона 13 . Общее выражение для

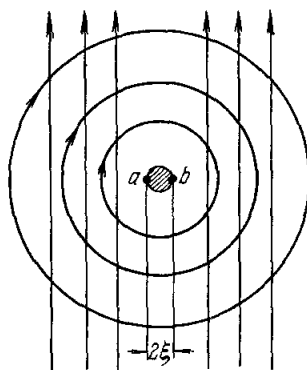


Рис. 2. Вихревая нить, обтекаемая транспортным током.

Ток вихря и транспортный ток около точки a складываются, а около точки b — вычитаются.

плотности объемной силы, действующей на движущиеся заряды, будет

$$\mathbf{f} = \frac{1}{c} [\mathbf{j}, \mathbf{H}], \quad (13)$$

где \mathbf{j} — плотность тока. Это и есть плотность силы, которую обычно называют силой Лоренца. Эту силу можно представить в виде дивергенции от тензора натяжений электромагнитного поля ($-\hat{T}$), который в стационарном случае (электрическое поле отсутствует) имеет вид

$$T_{ik} = -\frac{1}{4\pi} \left(H_i H_k - \delta_{ik} \frac{H^2}{2} \right), \quad (14)$$

т. е.

$$f_i = -\sum_k \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k},$$

или

$$\mathbf{f} = -\text{Div } \hat{T}(\mathbf{H}). \quad (15)$$

В этом легко убедиться, если в (13) подставить уравнение Максвелла $\mathbf{j} = (c/4\pi) \text{rot } \mathbf{H}$ и, учитывая, что $\text{div } \mathbf{H} = 0$, представить \mathbf{f} в виде

$$\mathbf{f} = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{H} \text{div } \mathbf{H} - [\mathbf{H}, \text{rot } \mathbf{H}]).$$

Элементарные вычисления показывают, что правая часть этой формулы может быть записана в виде $-\text{Div } \hat{T}(\mathbf{H})$, где тензор $T_{ik}(\mathbf{H})$ определен формулой (14). До сих пор мы нигде не использовали того, что наши рассуждения относятся к сверхпроводнику. Учтем теперь это обстоятельство.

Для сверхпроводника справедливо уравнение Лондонов

$$\text{rot}(\Lambda \mathbf{j}) = -\frac{1}{c} \mathbf{H}, \quad (16)$$

$$\Lambda = \frac{4\pi}{c^2} \lambda^2.$$

Это уравнение легко получается из уравнения (6), если использовать уравнение Максвелла для \mathbf{j} .

Подставим теперь (16) в (13). Теперь плотность силы \mathbf{f} можно уже выразить как дивергенцию тензора $\Lambda \hat{S}$:

$$\mathbf{f} = \text{Div}(\Lambda \hat{S}), \quad (17)$$

$$S_{ik} = \left(j_{ij} - \delta_{ik} \frac{j^2}{2} \right).$$

В этом тоже легко убедиться, если (учитывая, что в стационарном режиме $\text{div } \mathbf{j} = 0$) представить \mathbf{f} в виде

$$\mathbf{f} = \Lambda (\mathbf{j} \text{div } \mathbf{j} - [\mathbf{j}, \text{rot } \mathbf{j}]).$$

Объединяя (15) и (17), имеем следующее условие равновесного и стационарного течения тока в сверхпроводнике:

$$\text{Div}(\hat{T}(\mathbf{H}) + \Lambda \hat{S}(\mathbf{j})) = 0. \quad (18)$$

Это и означает, что силы, действующие в сверхпроводнике на элемент объема с током, сбалансированы и результирующая сила равна нулю. Иначе говоря, истинная сила Лоренца, действующая на элемент объема сверхпроводника с током ($-\text{Div } \hat{T}$), в точности уравновешена силами

инерции ($-\text{Div } \Lambda \hat{S}$). Уравнение (18) можно рассматривать как закон сохранения импульса в сверхпроводнике в стационарном состоянии.

Однако между тензорами $\hat{T}(\mathbf{H})$ и $\hat{S}(\mathbf{j})$ есть одно чрезвычайно важное отличие. На границе между сверхпроводником и диэлектриком $\hat{T}(\mathbf{H})$ остается непрерывным, а $\hat{S}(\mathbf{j})$ терпит разрыв, так как в диэлектрике $\bar{\mathbf{S}} = 0$. Поэтому на границе баланс (18) нарушается и на поверхности сверхпроводника действует сила, которая обычно интерпретируется как магнитное давление. Поясним сказанное простым примером. Рассмотрим сверхпроводник, который занимает полупространство $x > 0$. Плоскость $x = 0$ является его границей с вакуумом. На этой поверхности задано магнитное поле H_0 вдоль оси Oz . Хорошо известно, что в слое $\sim \lambda$ около поверхности возникает мейсснеровский ток в направлении оси Oy $j_y = (c/4\pi\lambda) H_0 e^{-x/\lambda}$. Напряженность магнитного поля в этом же слое $H_z = H_0 e^{-x/\lambda}$. Итак, в слое $\sim \lambda$ около поверхности течет ток j_y в поле H_z . Значит, на этот ток действует истинная сила Лоренца $(1/c) [\mathbf{j}, \mathbf{H}]$, которая в нашем случае направлена вдоль оси Ox и равна $(H_0^2/4\pi\lambda) e^{-2x/\lambda}$. Почему же ток течет прямо вдоль оси Ox ? Почему движение сверхпроводящих электронов не искажено этой силой? Ответ состоит в том, что распределение сверхтекучих скоростей в рассматриваемом слое λ таково, что на сверхпроводящие электроны действует сила Бернулли в отрицательном направлении оси Ox и эта сила в точности компенсирует силу $(1/c) [\mathbf{j}, \mathbf{H}]$. В этом легко убедиться, вычислив $\text{Div } (-\Lambda \hat{S})$ для нашего случая.

Вернемся теперь к вихрю, который обтекается поперечным транспортным током. Сердцевину вихря заменим в нашей модели несверхпроводящим цилиндром радиуса ξ . Сверхтекучие скорости на границе с сердцевинной в точках a и b (см. рис. 2) будут различны, следовательно, давление на границу из нормальной сердцевинной в точке a будет больше, чем в точке b . Их разность и создаст результирующую силу взаимодействия вихря с транспортным током, которую обычно тоже называют силой Лоренца. В дальнейшем мы будем часто пользоваться этим названием, всегда понимая под этим силу взаимодействия вихревой нити с током.

Найдем теперь количественное выражение для этой силы. Проще всего это сделать, рассмотрим взаимодействие двух параллельных вихревых нитей. Пусть координаты центров нитей будут \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 . Рассчитаем свободную энергию (9) этой системы. Те же преобразования, что и при выводе формулы (10), на этот раз дадут

$$\mathcal{F} = \frac{\Phi_0}{8\pi} [H(\mathbf{r}_1) + H(\mathbf{r}_2)]; \tag{19}$$

здесь $H(\mathbf{r}_1)$ и $H(\mathbf{r}_2)$ — полное поле в центре первого и второго вихрей. Рассмотрим первый вихрь. Полное поле в его центре складывается из его собственного поля (формула (8)), наведенного в точке \mathbf{r}_1 , и поля $H_{21}(\mathbf{r}_1)$, наведенного вторым вихрем в центре первого.

Поскольку нам предстоит вычислить силу взаимодействия между вихрями, то в этом расчете нас интересует только та часть \mathcal{F} , которая зависит от взаимного расстояния между вихрями $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$. Опуская не зависящую от r часть, имеем

$$\mathcal{F} = \frac{\Phi_0}{4\pi} H_{12}(r),$$

где H_{12} — поле, созданное первым вихрем в центре второго. Учитывая, что это поле направлено вдоль оси Oz , легко показать, что вихревой ток (\mathbf{r}) , созданный первым вихрем в точке, где находится центр второго

вихря, равен

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{H}_{12} = -\frac{[c, \nabla H_{12}]}{4\pi}.$$

Отсюда сразу получаем

$$\nabla H_{12} = -\frac{4\pi}{c} [\mathbf{j}, \mathbf{e}]. \quad (20)$$

С другой стороны, сила, действующая на вихрь, равна, по определению,

$$\mathbf{f} = -\nabla \mathcal{F} = -\frac{\Phi_0}{4\pi} \nabla H_{12}(\mathbf{r}).$$

Подставляя сюда формулу (20), имеем окончательно силу, приложенную к единице длины второго вихря:

$$\mathbf{f} = \frac{1}{c} [\mathbf{j}, \Phi_0], \quad (21)$$

где $\Phi_0 = \Phi_0 \mathbf{e}$, а ток \mathbf{j} — это ток, созданный первым вихрем в месте, где находится центр второго вихря. Это и есть формула для силы Лоренца — силы взаимодействия вихря с обтекающим его сторонним током.

Мы рассмотрели частный случай, когда ток, обтекающий вихрь, создается находящимся поблизости другим вихрем. Можно показать^{14, 15}, что формула (21) справедлива и в общем случае. В дальнейшем мы будем широко пользоваться этой формулой, поскольку представление о силе Лоренца как о силе взаимодействия вихря с обтекающим его сторонним током оказывается очень плодотворным и помогает понять физику дела.

4. ВИХРЬ ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ СВЕРХПРОВОДНИКА

До сих пор мы рассматривали вихри в безграничном сверхпроводнике. Гораздо более реальный и интересный случай — это вихрь в ограниченном сверхпроводнике.

В общем случае вихревая нить, находящаяся вблизи поверхности сверхпроводника, создает магнитное поле во внешнем пространстве. Поэтому для расчета распределения поля надо решать совместно уравнение (6) для области внутри сверхпроводника и уравнение $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$

для внешнего пространства. Последнее уравнение — это просто условие отсутствия токов во внешнем пространстве. При произвольной геометрии образца — это сложная задача. Ограничимся здесь поэтому случаем, когда вихревая нить параллельна образующей бесконечно длинного сверхпроводящего цилиндра произвольного сечения. В этом случае вихрь не создает магнитное поле во внешнем пространстве и поле вихря на поверхности сверхпроводника равно нулю. Докажем это.

На рис. 3 изображена вихревая нить, помещенная вблизи поверхности сверхпроводника параллельно этой поверхности, и контур $abcd$, причем отрезки ab и cd параллельны поверхности сверхпроводника. Из симметрии задачи следует, что

$$\oint_{abcd} \mathbf{H}_v \cdot d\mathbf{l} = \int_{ab} \mathbf{H}_v \cdot d\mathbf{l} + \int_{dc} \mathbf{H}_v \cdot d\mathbf{l}.$$

Рис. 3. К доказательству того, что поле вихря на поверхности S равно нулю.

Жирной линией показана сердцевина вихря. Кружками отмечены направления токов вихря.

С другой стороны, этот интеграл равен нулю, так как через площадку $abcd$ не проходит электрический ток.

Отсюда

$$\int_{ab} \mathbf{H}_v d\mathbf{l} = \int_{cd} \mathbf{H}_v d\mathbf{l}; \quad (22)$$

здесь и везде дальше \mathbf{H}_v — это магнитное поле, созданное вихревой нитью. Из физических соображений ясно, что если участок удалить очень далеко от поверхности сверхпроводника, то там $\mathbf{H}_v = 0$ и $\int_{ab} \mathbf{H}_v d\mathbf{l} = 0$. Но тогда

в силу (22) $\int_{cd} \mathbf{H}_v d\mathbf{l} = 0$, и, учитывая симметрию задачи, имеем $\mathbf{H}_v|_{cd} = 0$. Помещая отрезок cd на поверхности S сверхпроводника, получим окончательно

$$\mathbf{H}_v|_S = 0. \quad (23)$$

а) Магнитный поток вихря, находящегося вблизи границы сверхпроводника. В гл. 2 мы установили, что в безграничном сверхпроводнике вихрь несет магнитный поток, равный кванту Φ_0 . Найдем теперь магнитный поток одиночного вихря, когда вихрь находится вблизи внешней границы сверхпроводящего пространства и параллелен этой границе. Пусть вихревая нить находится в данном сверхпроводящем цилиндре произвольного сечения, расположена параллельно его образующей и ее центр проходит через точку \mathbf{r}_0 . Магнитный поток Φ_v , который несет такая нить, определяется как

$$\Phi_v = \int \mathbf{H}_v d\mathbf{S}, \quad (24)$$

где интегрирование ведется по площади сечения цилиндра. В работе ¹⁶ показано, что это выражение может быть представлено в виде

$$\Phi_v = \Phi_0 (1 - \mathbf{e}\mathbf{h}(\mathbf{r}_0)), \quad (25)$$

где $\mathbf{h}(\mathbf{r})$ — это то поле, которое было бы внутри цилиндра, если бы никакого вихря в цилиндре не было, а цилиндр был бы помещен в единичное магнитное поле, параллельное его образующей. Иначе говоря, $\mathbf{h}(\mathbf{r})$ удовлетворяет уравнению $\mathbf{h} + \lambda^2 \text{rot rot } \mathbf{h} = 0$ с граничным условием на поверхности σ цилиндра $\mathbf{h}|_{\sigma} = \mathbf{e}$; \mathbf{e} — как и прежде, единичный вектор, направленный вдоль вихря.

Легко видеть, что при приближении центра вихря к поверхности цилиндра $\mathbf{h}(\mathbf{r}_0) \rightarrow \mathbf{e}$ и $\Phi_v \rightarrow 0$; наоборот, при удалении вихря в глубь сверхпроводника $\mathbf{h}(\mathbf{r}_0) \rightarrow 0$, $\Phi_v \rightarrow \Phi_0$.

Вычислять поток по формуле (25) часто оказывается более удобным, чем непосредственным интегрированием (24). Например, для круглого цилиндра радиуса R с вихрем, параллельным его оси, имеем

$$\Phi_v = \Phi_0 \left(1 - \frac{I_0(r_0/\lambda)}{I_0(R/\lambda)} \right),$$

где r_0 — расстояние от центра вихря до оси цилиндра, $I_0(z)$ — функция Бесселя от мнимого аргумента. Для пластины толщины d с нитью, параллельной ее поверхности,

$$\Phi_v = \Phi_0 \left\{ 1 - \frac{\text{ch} [(2x_0 - d)/2\lambda]}{\text{ch} (d/2\lambda)} \right\}, \quad (26)$$

где x_0 — расстояние от центра вихря до поверхности пластины. Для сверхпроводящего полупространства $x > 0$, границей которого является

плоскость $x = 0$,

$$\Phi_v = \Phi_0 (1 - e^{-x_0/\lambda}), \quad (27)$$

где x_0 — координата центра вихря.

Такое изменение магнитного потока вихря можно пояснить, если воспользоваться методом изображений. Наиболее просто и наглядно этот метод работает в случае сверхпроводящего полупространства. Поскольку поле вихря \mathbf{H}_v в сверхпроводнике определяется решением уравнения (6) с граничным условием $\mathbf{H}_v |_{x=0} = 0$, то в силу линейности уравнения (6) точно такое же поле возникает в области $x > 0$ в безграничном сверхпроводнике, в котором имеются два вихря, параллельных плоскости $x = 0$ и проходящих через точки $x = x_0$ и $x = -x_0$, причем направления обоих вихрей противоположны. Действительно, в силу симметрии задачи магнитное поле вихрей на плоскости $x = 0$ будет равно нулю. Вихрь в точке $x = -x_0$ мы будем называть изображением. Поскольку он имеет противоположный знак, его магнитный поток в области $x > 0$ компенсирует часть магнитного потока первого вихря. Когда вихрь выходит на поверхность сверхпроводника, на то же место выходит и его изображение. Наступает полная компенсация и $\Phi_v = 0$.

б) Свободная энергия вихря в ограниченном сверхпроводнике. Найдем теперь свободную энергию вихря, если он находится внутри сверхпроводящего цилиндра и параллелен образующей:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{8\pi} \int [\mathbf{H}_v^2 + \lambda^2 (\text{rot } \mathbf{H}_v)^2] dV. \quad (28)$$

Интегрирование ведется по объему цилиндра и отнесено к единице его длины. Поле $\mathbf{H}_v(\mathbf{r})$ удовлетворяет уравнению (6) с граничным условием $\mathbf{H}_v |_{\sigma} = 0$. Поэтому, используя тождество $\mathbf{a} \text{ rot } \mathbf{b} = \mathbf{b} \text{ rot } \mathbf{a} - \text{div } [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ и теорему Гаусса, легко получим из (28) выражение для \mathcal{F} ¹⁶:

$$\mathcal{F} = \frac{\Phi_0 \mathbf{H}_v(\mathbf{r}_0)}{8\pi}. \quad (29)$$

Строго говоря, представление энергии нити в форме (29) некорректно, так как при $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0$ $\mathbf{H}_v \rightarrow \infty$, но эта логарифмическая расходимость может быть обрезана на расстоянии $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \sim \xi$. В этом смысле и надо понимать запись $\mathbf{H}_v(\mathbf{r}_0)$. Легко видеть, что формула (29) переходит в известное выражение для энергии одиночной нити в безграничном сверхпроводнике, если вихрь переместить в глубину цилиндра на расстояние от поверхности много большее λ . Если же вихрь приблизится к поверхности, то $\mathcal{F} \rightarrow 0$, так как $\mathbf{H}_v |_{\sigma} = 0$. Все это легко пояснить на языке силы Лоренца, и мы это сделаем при рассмотрении поверхностного барьера.

Учтем теперь взаимодействие нашего вихря в цилиндре с внешним магнитным полем, т. е. найдем гиббсовскую свободную энергию \mathcal{G} .

В этом разделе мы ограничимся случаем длинного цилиндра в продольном однородном поле \mathbf{H}_0 . Случай такой геометрии позволяет избежать осложнений, связанных с введением размагничивающего фактора.

Теперь поле внутри цилиндра определяется решением уравнения (6) с граничным условием $\mathbf{H} |_{\sigma} = \mathbf{H}_0$. Это понятно: если бы вихря в цилиндре не было, поле определялось бы решением однородного уравнения Лондона

$$\mathbf{H}_1 + \lambda^2 \text{rot rot } \mathbf{H}_1 = 0, \quad \mathbf{H}_1 |_{\sigma} = \mathbf{H}_0. \quad (30)$$

Поле самого вихря \mathbf{H}_v нам тоже известно, оно определяется уравнением (6) с граничным условием $\mathbf{H}_v |_{\sigma} = 0$. Полное поле

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_1. \quad (31)$$

Выбирая за начало отсчета свободной энергии цилиндра ее значение в отсутствие магнитного поля, получим

$$\mathcal{F} = \frac{1}{8\pi} \int [\mathbf{H}^2 + \lambda^2 (\text{rot } \mathbf{H})^2] dV.$$

Подставляя сюда (31), имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = \frac{1}{8\pi} \int [\mathbf{H}_v^2 + \lambda^2 (\text{rot } \mathbf{H}_v)^2] dV + \frac{1}{8\pi} \int [\mathbf{H}_1^2 + \lambda^2 (\text{rot } \mathbf{H}_1)^2] dV + \\ + \frac{1}{4\pi} \int [\mathbf{H}_1 \mathbf{H}_v + \lambda^2 \text{rot } \mathbf{H}_1 \text{rot } \mathbf{H}_v] dV. \end{aligned}$$

Легко показать, что последний интеграл равен нулю. Действительно,

$$\int \text{rot } \mathbf{H}_1 \text{rot } \mathbf{H}_v dV = \int \mathbf{H}_v \text{rot rot } \mathbf{H}_1 dV + \int [\mathbf{H}_v, \text{rot } \mathbf{H}_1] d\sigma,$$

но поверхностный интеграл равен нулю, так как $\mathbf{H}_v|_{\sigma} = 0$. Отсюда с учетом (30) имеем

$$\int (\mathbf{H}_1 \mathbf{H}_v + \lambda^2 \text{rot } \mathbf{H}_1 \text{rot } \mathbf{H}_v) dV = \int \mathbf{H}_v (\mathbf{H}_1 + \lambda^2 \text{rot rot } \mathbf{H}_1) dV = 0.$$

Таким образом, свободная энергия \mathcal{F} представляет собой просто сумму свободных энергий вихря в цилиндре без внешнего поля и цилиндра в поле, но без вихря. Взаимодействие вихря с полем в \mathcal{F} не входит. Ясно поэтому, что в состоянии термодинамического равновесия минимума будет достигать не величина \mathcal{F} , а другой термодинамический потенциал — гиббсовская свободная энергия

$$\mathcal{G} = \mathcal{F} - \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{H} \mathbf{H}_0 dV.$$

Интеграл берется по объему цилиндра.

Приняв за начало отсчета \mathcal{G} ее значение в отсутствие вихря, получим

$$\mathcal{G} = \frac{1}{8\pi} \int [\mathbf{H}_v^2 + \lambda^2 (\text{rot } \mathbf{H}_v)^2] dV - \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{H}_0 \mathbf{H}_v dV,$$

т. е., используя (29) и (24),

$$\mathcal{G} = \frac{\Phi_0 \mathbf{H}_v(\mathbf{r}_0)}{8\pi} - \frac{\Phi_v(\mathbf{r}_0) \mathbf{H}_0}{4\pi}, \tag{32}$$

где Φ_v — вектор, направленный вдоль вихря; его модуль равен магнитному потоку вихря.

в) **Б а р ь е р Б и н а — Л и в и н г с т о н а.** Физическое содержание формулы (32) можно пояснить, если рассмотреть пример сверхпроводящего полупространства. Пусть сверхпроводник занимает область $x \geq 0$, вихрь находится в точке x_0 , а внешнее поле H_0 направлено вдоль оси Oz . Первый член в формуле (32), т. е. \mathcal{F} , представляет собой собственную энергию свободного вихря e_0 и энергию взаимодействия вихря с током, создаваемым изображением этого же вихря. Поскольку $H_v|_{x_0 \rightarrow 0} \rightarrow 0$, функция \mathcal{F} монотонно возрастает (рис. 4) и, следовательно, вихревая нить в отсутствие внешнего поля H_0 всегда притягивается к поверхности. Совсем просто это можно пояснить с помощью рис. 5. Распределение тока вихря искажается поверхностью сверхпроводника, слева от центра вихря линии тока сгущены; следовательно, сверхтекущая скорость больше, чем справа от сердцевины вихря. Снова мы видим, что сила, определяемая разностью бернуллевских давлений справа и слева от сердцевины, приложена к сердцевине вихря и всегда притягивает вихрь

к поверхности. На другом языке — это сила Лоренца f_σ , действующая на вихрь со стороны его изображения. Работа по преодолению этой силы и есть \mathcal{F} .

Теперь займемся вторым членом в формуле (32), который мы обозначим через W . Поскольку Φ_v определяется формулой (25), то

$$W = -\frac{H_0 \Phi_v}{4\pi} = \frac{\Phi_0}{4\pi} (H_1(x_0) - H_0),$$

где H_1 — это поле внутри сверхпроводника, создаваемое внешним полем H_0 без учета поля вихря. Тогда легко видеть, что

$$-\nabla W = \frac{1}{c} [j_m(r_0), \Phi_0],$$

где

$$j_m = \frac{c}{4\pi} \text{rot } H_1,$$

т. е. j_m — это мейсснеровский ток, вызванный внешним полем H_0 . Следовательно, $-\nabla W$ — это сила Лоренца f_m , с которой мейсснеровский ток

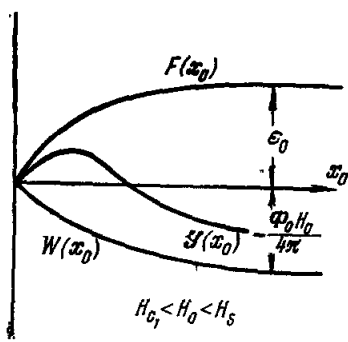


Рис. 4. К теории поверхностного барьера.

$\mathcal{F}(x_0)$ — энергия притяжения вихря к поверхности, $W(x_0)$ — энергия взаимодействия вихря с мейсснеровским током, $\mathcal{S}(x_0)$ — гиббсовская свободная энергия вблизи поверхности.

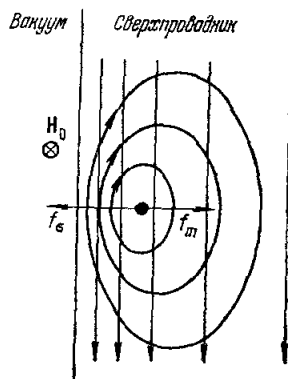


Рис. 5. Токи вихря и мейсснеровский ток вблизи поверхности.

f_σ — сила притяжения вихря к поверхности, обусловленная асимметрией вихревых токов вблизи поверхности, f_m — сила взаимодействия вихря с мейсснеровским током.

действует на единицу длины вихревой нити, находящейся вблизи поверхности сверхпроводника (рис. 5). Если вихрь и внешнее поле имеют одно направление, то сила f_m направлена внутрь сверхпроводника. Ясно, что если вихрь под действием этой силы отойдет от поверхности, то его энергия понизится на величину $W(x_0)$, которая при $x_0 \gg \lambda$ становится равной $-H_0 \Phi_0 / 4\pi$. Гиббсовская свободная энергия $\mathcal{S}(x_0)$ равна сумме $\mathcal{F}(x_0) + W(x_0)$. Как показано на рис. 4, величина $\mathcal{S}(x_0)$ может быть немонотонной функцией x_0 , создавая барьер для проникновения вихрей. Этот барьер часто называют барьером Бина — Ливингстона¹⁷. Очевидно, барьер пропадет тогда, когда для вихря, находящегося на поверхности, силы f_σ и f_m станут равны.

До сих пор мы нигде не пользовались спецификой того, что наш сверхпроводник — полупространство, поэтому все, что говорилось выше, справедливо для сверхпроводящего цилиндра любой формы. Воспользуемся теперь тем, что поверхность сверхпроводника — это плоскость $x = 0$

Тогда сила взаимодействия вихря с его изображением будет

$$f_{\sigma} = \frac{1}{c} j_v(x_0) \Phi_0.$$

где $j_v(x_0)$ — ток, созданный в точке x_0 изображением, находящимся в точке $(-x_0)$. Поле свободного вихря согласно (7) равно $(\Phi_0/2\pi\lambda^2) K_0(r/\lambda)$. Тогда ток вихря на расстоянии $r = 2x_0$ будет равен $(c/4\pi) (\Phi_0/2\pi\lambda^2) K_1(2x_0/\lambda)$. При $z \ll 1$ $K_1(z) \approx 1/z$, поэтому для вихря, близкого к поверхности,

$$f_{\sigma} = \frac{\Phi_0^2}{16\pi^2\lambda^2 x_0}.$$

Сила f_{σ} стремится к бесконечности при приближении вихря к поверхности. Однако сама методика расчета становится при $x_0 \rightarrow 0$ неправильной, так как здесь следует ожидать сильных изменений параметра порядка ψ , а мы этим все время пренебрегали. Ясно поэтому, что наше рассмотрение должно ограничиваться областью $x_0 \gg \xi$. Предельным случаем, где уже нельзя ручаться за численные коэффициенты, но можно рассчитывать на правильность порядка величины, является случай $x_0 = \xi$. Это мы и подразумеваем, когда говорим «вихрь на поверхности сверхпроводника». Сила взаимодействия вихря с мейснеровским током $f_m = (1/c) j_m \Phi_0$, где $j_m = (c/4\pi\lambda) H_0 e^{-x_0/\lambda}$. При $x_0 \ll \lambda$ имеем

$$f_m = \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda} H_{0\bullet}$$

Приравнивая теперь силы f_{σ} и f_m на поверхности сверхпроводника, получим условие для определения того поля H_s , при котором пропадает барьер Бина — Ливингстона:

$$H_s \approx \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda\xi}.$$

Учитывая, что согласно теории ГЛ $\kappa = \lambda/\xi = 2\sqrt{2} (e/\hbar c) \lambda^2 H_{c\bullet m}$, легко получим

$$H_s \approx \frac{1}{\sqrt{2}} H_{c\bullet m}.$$

Как уже говорилось, эта формула может претендовать на точность лишь по порядку величины. Поле H_s — это, по существу, максимальное поле перегрева мейснеровского безвихревого состояния сверхпроводника второго рода, поэтому его можно рассчитать «с другого конца», рассмотрев перегрев однородного сверхпроводящего состояния. Такая задача была решена де Женом¹⁸, который получил, что

$$H_s = H_{c\bullet m}. \tag{33}$$

Здесь учтено изменение параметра порядка, и эта формула уже точная.

Таким образом, можно сказать, что для преодоления притяжения вихря к поверхности (к своему изображению) на вихрь должна действовать сила f_m , создаваемая мейснеровским током $j_m = cH_{c\bullet m}/4\pi\lambda$, так как именно такой ток протекает по поверхности, когда поле на поверхности равно $H_{c\bullet m}$. Но этот ток равен тому предельному току, при котором начинается разрыв электронных пар.

Итак, проникновение вихрей в сверхпроводник, находящийся во внешнем магнитном поле, становится энергетически выгодным уже при сравнительно слабом внешнем поле $H_0 = H_{c1}$. Для многих сверхпроводников второго рода $\kappa \sim 100$ $H_{c1} \sim 100$ э. Однако этому проникновению мешает барьер, который в случае идеальной поверхности

пропадает при поле $H_0 = H_s = H_{c, m}$, т. е. при поле порядка 10^3 э. В действительности поверхность никогда не бывает идеально гладкой. Микроскопические шероховатости локально понижают этот барьер, и, если специально не позаботиться о высоком качестве поверхности, проникновение вихрей начнется при поле, близком к H_{c1} . Величина барьера характеризуется разностью $H_s - H_{c1}$. По данным работы ¹⁹ в эвтектическом сплаве Pb — Bi $H_s = 220$ э, $H_{c1} = 160$ э, $H_{c, m} = 900$ э. Теоретическая величина барьера равна $H_{c, m} - H_{c1} = 740$ э, а фактически барьер равен $H_s - H_{c1} = 60$ э, т. е. фактически барьер на порядок меньше теоретического.

Если поверхность тщательно отполирована, то проникновение вихрей в сверхпроводник будет очень затруднено. Так, в работе Де Блуа

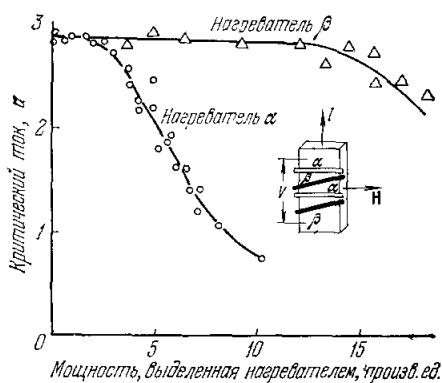


Рис. 6. Опыт Лоуэлла.

Зависимость критического тока от мощности, выделяемой нагревателями, которые находятся в положениях α и β (из ²¹).

кривой намагничивания. Поверхность пластинки химически полирована, зеркальна. Через пластинку пропускается ток, внешнее магнитное поле ($\sim H_{c2}/2$) параллельно поверхности пластинки и перпендикулярно к току. К поверхности пластинки приклеивались два вида проволочных константановых нагревателей: α ; которые располагались перпендикулярно к току и β — расположенные наклонно по отношению к току. Измерялась зависимость критического тока от мощности, рассеиваемой нагревателями. Результаты опыта представлены на рис. 6: нагреватель, расположенный перпендикулярно к току (положение α), значительно более эффективен, чем нагреватель в положении β . Этому дается такая интерпретация. Нагреватель локально разрушает барьер. В положении α возникает область пониженного барьера, которая расположена параллельно вихрям, «желающим» проникнуть в пластинку. Вихри, преодолевая этот пониженный барьер, устремляются в открытые нагревателем «двери», и возникает резистивное состояние. Иное дело — когда нагреватель занимает положение β . Поскольку зарождающаяся вихревая нить по-прежнему перпендикулярна к току, то она почувствует пониженный барьер только на том участке своей длины, который пересекает нагреватель. Поэтому нагреватель в положении β должен быть значительно менее эффективным. Это и наблюдается на опыте.

г) Взаимодействие вихря с полостью внутри сверхпроводника. До сих пор мы интересовались поведением вихрей вблизи внешней границы сверхпроводника. Посмотрим теперь, как взаимодействует вихрь внутри бесконечного сверхпроводника с параллельным ему цилиндрическим полым каналом.

и Де Сорбо ²⁰ исследовалось намагничивание массивных образцов ниобия с примесью 0,3 ат. % кислорода. Критические параметры были следующими: $H_{c, m} = 1360$ э, $H_{c1} = 580$ э, $H_{c2} = 7000$ э (при $4,2^\circ\text{K}$), $T_c = 8,8^\circ\text{K}$. Поверхность образцов была тщательно электрополирована. Оказалось, что в этом случае вихри начинают проникать в образец при поле $H_s = 1330$ э. Это хорошо согласуется с теоретической формулой (33).

Очень изящный опыт, подтвердивший существование поверхностного барьера, был сделан Лоуэллом ²¹. Условия опыта были такие. Образец — пластинка очень однородного сплава Nb — 20 ат. % Mo с почти обратимой

Как известно, поток, который несет цилиндрическая полость в массивном сверхпроводнике, должен быть квантован, т. е. содержать целое число квантов потока Φ_0 . По мере увеличения количества квантов потока в полости, растет и напряженность поля в ней и, начиная с некоторого количества квантов n_0 , может оказаться энергетически выгодным высвобождение одного кванта потока в виде вихревой нити. Иначе говоря, может оказаться, что сверхпроводник с полостью, несущей $n_0 + 1$ квантов потока, обладает большей энергией, чем в случае полости с n_0 квантами и бесконечно далеким вихрем, параллельным ее оси. Однако наличие поверхностного барьера препятствует зарождению нити на границе полости и проникновению ее в сверхпроводник. Поэтому максимальное количество n_s квантов потока в полости может превысить величину n_0 . Задача об определении n_0 и n_s решается путем исследования взаимодействия полости, несущей n квантов потока, с вихрем, параллельным ее оси²².

Итак, рассмотрим бесконечный сверхпроводник с цилиндрической полостью радиуса r , несущей n квантов потока, и вихрем, параллельным ее оси и находящимся от ее центра на расстоянии ρ_0 . Поле в полости складывается из поля, связанного с n квантами потока полости, и поля, создаваемого внутри полости вихревой нитью. Последнее следует из того, что токи нити, обтекая полость, создают в ней магнитное поле, причем легко проверить, что это поле постоянно во всем объеме полости. Обозначим суммарное поле в полости через H_0 . Тогда распределение поля в сверхпроводнике описывается уравнением

$$\mathbf{H} + \lambda^2 \text{rot rot } \mathbf{H} = \Phi_0 e \delta(\rho - \rho_0) \quad (34)$$

с граничным условием на поверхности σ полости: $\mathbf{H} |_{\sigma} = H_0$. В уравнении (34) e — единичный вектор вдоль нити, т. е. вдоль оси полости, ρ_0 — двумерный радиус-вектор центра нити. Решение этого уравнения $\mathbf{H}(\rho)$ зависит параметрически от ρ_0 и n , причем поле H_0 должно определяться самосогласованным образом. В пределе $\kappa \gg 1$ второе уравнение ГЛ (4) можно записать в виде

$$\lambda^2 \text{rot } \mathbf{H} = \frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla \theta - \mathbf{A},$$

где θ — фаза волновой функции теории ГЛ, \mathbf{A} — векторный потенциал. Интегрируя это уравнение по круговому контуру полости, т. е. по кругу радиуса r , получаем

$$r \int_0^{2\pi} \text{rot } \mathbf{H} \cdot d\varphi = \Phi_0 n - \pi r^2 H_0.$$

Подстановка в это выражение решения уравнения (34) определяет величину H_0 , которая при $r \ll \lambda$ имеет вид

$$H_0 = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} K_0 \left(\frac{\rho_0}{\lambda} \right) + \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} n K_0 \left(\frac{r}{\lambda} \right) \quad (35)$$

Это ясно показывает, из чего складывается поле в полости. Первый член — это поле в полости, создаваемое вихревой нитью. Эта величина не квантуется. Второй член — это поле, которое определяется количеством квантов потока n , захваченных полостью. Эта величина квантуется и равна тому полю, которое останется в полости, если вихревую нить удалить на бесконечность. Из выражения (35) следует, что H_0 монотонно возрастает при приближении нити к полости. В тот момент, когда ρ_0

станет равным r , нить пропадет, но H_0 станет равным $(\Phi_0/2\pi\lambda^2)(n+1)K_0(r/\lambda)$, т. е. полость захватит еще один квант потока. Свободная энергия сверхпроводника, отнесенная к единице длины вихревой нити, запишется в виде

$$\mathcal{F} = \frac{1}{8\pi} \int [\mathbf{H}^2 + \lambda^2 (\text{rot } \mathbf{H})^2] dV + \frac{1}{8\pi} H_0^2 \pi r^2.$$

В этом выражении интегрирование ведется по объему слоя единичной толщины, перпендикулярного к оси полости; второй член дает энергию поля в полости, отнесенную к единице длины полости. Эта энергия является функцией положения нити ρ_0 и числа квантов потока полости n . Зависимость $\mathcal{F}_n(\rho_0)$ при различных n дается формулами

$$\mathcal{F}_n(\rho_0) = \begin{cases} \frac{H_{c,m}^2 \lambda^2}{\kappa^2} \left[\frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{r^2}{\rho_0^2} \right) + nK_0 \left(\frac{\rho_0}{\lambda} \right) \right], & \rho_0 \ll \lambda; \\ \frac{H_{c,m}^2 \lambda^2}{\kappa^2} nK_0 \left(\frac{\rho_0}{\lambda} \right), & \rho_0 \gg \lambda, n \neq 0. \end{cases}$$

Схематически зависимость $\mathcal{F}_n(\rho_0)$ приведена на рис. 7. За начало отсчета \mathcal{F}_n принята энергия системы с удаленной на бесконечность вихревой нитью. Из рисунка видно, что полость, свободная от квантов потока, притягивает к себе вихревую нить. Выходя на поверхность полости, вихрь исчезает из сверхпроводника, а полость приобретает один квант потока. Такая ситуация продолжается до тех пор, пока количество квантов потока в полости не превысит некоторого значения n_0 — с этого момента захват полостью $n_0 + 1$ кванта уже энергетически невыгоден. Если бы отсутствовал поверхностный барьер, n_0 и было бы тем максимальным количеством квантов потока, которое может нести полость, так как полости с $n_0 + 1$ квантами потока выгодно освобождение одного кванта в виде вихревой нити. Однако наличие поверхностного барьера препятствует образованию нити на поверхности полости и проникновению ее в толщу сверхпроводника. Число квантов потока n_s , при котором барьер исчезает, и будет тем максимальным количеством квантов, которое может удержать полость. Расчет показывает²², что $n_s \sim r/2\xi$, в то время как $n_0 \sim 1$ при $r \ll \lambda$. Поскольку предполагается, что $r \gg \xi$, ясно, что $n_s \gg n_0$.

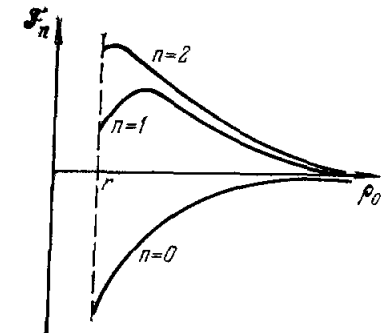


Рис. 7. Свободная энергия вихря, находящегося вблизи полости, содержащей n квантов магнитного потока.

Сила, отнесенная к единице длины вихря, которую нужно приложить к вихрю на поверхности полости, чтобы вырвать его из полости, очевидно, равна

$$f = - \left. \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \rho_0} \right|_{\rho_0=r}.$$

Если подставить в эту формулу найденную в²² зависимость $\mathcal{F}_n(\rho_0)$, то получим

$$f = \frac{H_{c,m}^2 \xi}{2} \left(1 - \frac{2n\xi}{r} \right).$$

Таким образом, если $n = 0$, сила притяжения вихря к полости максимальна, не зависит от r (при $r \gg \xi$) и для ее преодоления нужен сторонний ток

$$j = \frac{cH_{c,m}}{4\pi\sqrt{2}\lambda},$$

т. е. снова ток, по порядку величины равный току, приводящему к разрыву электронных пар.

5. СМЕШАННОЕ СОСТОЯНИЕ СВЕРХПРОВОДНИКОВ ВТОРОГО РОДА

а) Смешанное состояние безграничного сверхпроводника. До сих пор мы рассматривали один изолированный вихрь в безграничном или ограниченном сверхпроводнике. Перейдем теперь к системе взаимодействующих вихрей. Начнем со случая безграничного пространства, т. е. будем рассматривать систему параллельных друг другу вихрей, находящихся в равновесии друг с другом и с внешним магнитным полем, а все эффекты взаимодействия вихрей с поверхностью образца в этом разделе опускаем. Увеличиваем внешнее поле H_0 . Вплоть до первого критического поля H_{c1} образец находится в чисто мейснеровском состоянии, т. е. вихрей внутри сверхпроводника нет (энергетически не выгодно), а по поверхности течет мейснеровский ток. Поле внутри образца равно нулю. Магнитный момент линейно растет с полем:

$$M = \frac{B - H_0}{4\pi},$$

где M — магнитный момент единицы объема, B — среднее магнитное поле внутри образца; в мейснеровском состоянии $B = 0$. Когда H_0 достигает значения H_{c1} , станет энергетически выгодным проникновение вихрей, которые вследствие взаимодействия друг с другом начнут выстраиваться параллельно друг другу, образуя правильную двумерную решетку. Однако вихри еще далеко отстоят друг от друга, поэтому взаимодействие между вихрями достаточно учесть только для ближайших соседей каждой данной нити. Вычисление $M(H_0)$ в этой области полей²³ приводит к бесконечному значению $(dM/dH_0)_{H_0=H_{c1}}$, что объясняется экспоненциально слабым взаимодействием нитей на больших по сравнению с λ расстояниях. Происходит резкое сближение нитей до расстояний $\sim \lambda$. При дальнейшем увеличении внешнего поля H_0 мы попадаем в область магнитных полей $H_{c1} \ll H_0 \ll H_{c2}$, где легко найти равновесную вихревую структуру, используя разобранный выше модель одиночной вихревой нити.

Совершенно аналогично тому, как была получена формула (32) для гиббсовской свободной энергии одиночной нити, легко получим плотность гиббсовской свободной энергии нашего сверхпроводника в смешанном состоянии:

$$G = n \left[\epsilon_0 + \left(\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \sum_i' K_0 \left(\frac{|\mathbf{r}_i|}{\lambda} \right) \right] - \frac{n\Phi_0 H_0}{4\pi};$$

здесь n — плотность вихревых нитей, суммирование ведется по узлам вихревой решетки, штрих у знака суммы означает, что опущен член с $|\mathbf{r}_i| = 0$.

Учитывая, что среднее поле, или индукция, равно

$$B = n\Phi_0,$$

имеем

$$G = \frac{B}{4\pi} \left[\frac{4\pi\epsilon_0}{\Phi_0} - H_0 + \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda^2} \sum_i' K_0 \left(\frac{|\mathbf{r}_i|}{\lambda} \right) \right]. \quad (36)$$

Равновесному значению параметра элементарной ячейки вихревой структуры a соответствует минимальное значение G , откуда условие равновесия

$$\frac{\partial G}{\partial a} = 0. \quad (37)$$

Из этого уравнения определяется равновесное значение индукции при заданном внешнем поле H_0 . Зададимся каким-нибудь типом элементарной ячейки вихревой решетки. Пусть это будет равносторонний треугольник со стороной, равной a . Заменяя суммирование в (36) интегрированием по обратной решетке, можно получить следующее выражение для индукции ²:

$$B = H_0 - H_{c1} - \frac{\Phi_0}{8\pi\lambda^2} \ln \left(\beta \frac{\Phi_0}{\lambda^2 B} \right), \quad (38)$$

где β — численный коэффициент, зависящий от типа решетки. Для его вычисления необходимо провести точное суммирование в формуле (36). Это было сделано в работах ^{24, 25}: для треугольной решетки $\ln \beta_{\Delta} = -3,872$, для квадратной решетки $\ln \beta_{\square} = -3,852$.

Из (38) следует окончательное выражение для плотности магнитного момента

$$M(H_0) = -\frac{H_{c1}}{4\pi} - \frac{\Phi_0}{32\pi^2\lambda^2} \ln \left(\beta_{\Delta} \frac{\Phi_0}{\lambda^2 B(H_0)} \right). \quad (39)$$

Таким образом, в первом приближении ($B = H_0$) магнитный момент логарифмически зависит от поля H_0 при $H_{c1} \ll H_0 \ll H_{c2}$. При $H_0 \sim H_{c2}$ магнитный момент сверхпроводника с треугольной решеткой нитей определяется формулой ^{6, 26a}

$$M(H_0) = \frac{H_0 - H_{c2}}{4\pi\beta(2\kappa^2 - 1)}, \quad \kappa > \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \beta = 1,16. \quad (40)$$

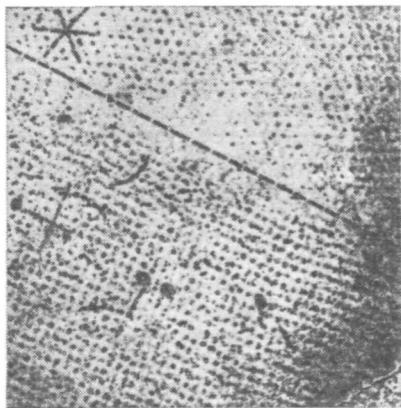


Рис. 8. Электронная микрофотография смешанного состояния, полученная Обстом ^{26б}.

В одном из зерен поликристаллического материала реализуется треугольная вихревая структура, а в другом зерне — квадратная.

Сравнение G для треугольной и квадратной решеток показывает, что энергетически более выгодной будет треугольная решетка. С другой стороны, вычисления на основе уравнений ГЛ показали ^{26a}, что при произвольных $\kappa > 1/\sqrt{2}$ вблизи H_{c2} энергетически более выгодной будет тоже треугольная решетка. Разумно поэтому предположить, что при $\kappa \gg 1$ во всей области полей от H_{c1} до H_{c2} реализуется треугольная решетка. Однако энергетический выигрыш треугольной решетки по сравнению с квадратной очень мал, и иногда из-за анизотропии кристалла может оказаться более выгодной квадратная решетка. На рис. 8 приведена очень эффектная электронная микрофотография структуры смешанного состояния в двух рядом расположенных зернах поликристаллического образца, полученная Обстом ^{26б}. Ясно видно, что в одном зерне образовалась треугольная решетка, а в другом — квадратная.

б) Смешанное состояние вблизи границы сверхпроводника. До сих пор, когда мы говорили о структуре смешанного состояния в сверхпроводниках второго рода, всегда предполагалось, что сверхпроводник бесконечен. Что же будет вблизи границы? Вопрос не тривиален. Вихри сильно взаимодействуют с границей образца (на другом языке, — со своим изображением), с мейсснеровскими токами, и в области $\sim \lambda$ около границы можно было бы ожидать сильных изменений структуры смешанного состояния. Тем неожиданнее оказывается результат расчета: структура смешанного состояния не изменяется даже в непосредственной близости к краю сверхпроводника.

Рассмотрим для простоты плоскую поверхность сверхпроводника, который занимает полупространство $x > 0$. Постоянное внешнее магнитное поле H_0 направлено вдоль оси Oz , $H_{c1} \ll H_0 \ll H_{c2}$. В сверхпроводнике возникает смешанное состояние, т. е. появляется вихревая решетка. Предположим, что вихри расположены рядами, l -й ряд находится в плоскости $x = x_l$. Все вихри в ряду параллельны внешнему полю и отстоят на расстоянии a друг от друга. Расстояния же между рядами не предполагаются одинаковыми. Наша задача как раз и состоит в том, чтобы найти равновесные положения этих рядов.

Запишем для этого выражение для гиббсовской свободной энергии нашего образца:

$$\mathcal{G} = \frac{\Phi_0}{8\pi} \sum_{l,m} H_v(\mathbf{r}_{lm}) - \frac{H_0}{4\pi} \sum_{l,m} \Phi_v(\mathbf{r}_{lm}); \quad (41)$$

здесь \mathbf{r}_{lm} — радиус-вектор центра m -го вихря в l -м вихревом ряду, H_v — поле, созданное всеми без исключения вихрями (и только вихрями) в центре вихря (l, m) , $\Phi_v(\mathbf{r}_{lm})$ — магнитный поток, создаваемый вихрем (l, m) . Формула (41) получается точно так же, как была получена формула (32). Для вычисления энергии \mathcal{G} удобно воспользоваться методом изображений. Однако предварительно надо рассмотреть, какое поле создает один вихревой ряд в точке, отстоящей на расстоянии x от этого ряда.

Иначе говоря, ставится такой вопрос. Пусть центры вихрей занимают точки $(0, \pm ma)$, $m = 0, 1, 2, \dots$, в безграничном сверхпроводящем пространстве. Какое поле они создадут в точке $(0, x)$? Это поле $H_v(x)$ можно записать сразу, воспользовавшись формулой (7):

$$H_v(x) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \sum_m K_0 \left(\sqrt{\frac{x^2 + (ma)^2}{\lambda^2}} \right).$$

Суммирование этого выражения проведено в работе ¹⁶. Окончательный результат очень прост:

$$H_v(x) = \frac{\Phi_0}{2a\lambda} e^{-x/\lambda}. \quad (42)$$

Эта формула верна с точностью до членов $\sim ae^{-2\pi x/a}/\lambda$. Поскольку формула (42) будет использоваться при $x \gg a$, то ясно, что опущенные члены пренебрежимо малы.

Используя теперь (42) и (27), запишем энергию (41), отнеся ее к полосе сверхпроводника единичной вдоль оси Oy ширины и вдоль оси Oz высоты:

$$\mathcal{G} = \frac{\Phi_0^2}{16\pi\lambda a^2} \sum_{l,l'} [e^{-|x_l - x_{l'}|/\lambda} - e^{-|x_l + x_{l'}|/\lambda}] + \frac{\Phi_0 H_0}{4\pi a} \sum_l e^{-x_l/\lambda} + \text{const.} \quad (43)$$

Здесь через const обозначены все члены, не зависящие от x_l . Физический смысл этой формулы совершенно прозрачен: первая экспонента в двойной

сумме дает энергию отталкивания вихрей друг от друга, вторая экспонента — энергию притяжения к системе изображений; наконец, вторая сумма — это энергия взаимодействия вихрей с мейснеровскими токами.

Равновесное положение всех вихревых рядов найдем из условия минимума \mathcal{G}

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x_l} = 0,$$

или, используя (43):

$$\sum_{\mu > l} e^{-(x_\mu - x_l)/\lambda} - \sum_{\mu < l} e^{-(x_l - x_\mu)/\lambda} + \sum_{\mu} e^{-(x_l + x_\mu)/\lambda} = \frac{2a\lambda H_0}{\Phi_0} e^{-x_l/\lambda}. \quad (44)$$

Точным решением системы уравнений (44) будет

$$x_l = bl + x_0, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (45)$$

В этом нетрудно убедиться прямой подстановкой (45) в (44). При этом мы получим уравнение, позволяющее определить $x_0 (H_0)$. Оказывается, что x_0 тоже порядка b и практически не зависит от H_0 .

Итак, мы получили, что в полубесконечном сверхпроводнике в смешанном состоянии вихревые ряды отстоят на одинаковом расстоянии друг от друга даже в непосредственной близости к краю сверхпроводника. Расстояние между вихревыми рядами b будет, очевидно, тем, которое соответствует равновесию и однозначно связано с индукцией B в глубине сверхпроводника: $B = \Phi_0/ab$, причем для треугольной решетки $b/a = \sqrt{3}/2$.

в) Смешанное состояние пленки. Обратимся теперь к случаю, когда сверхпроводник — это пленка толщины d и внешнее магнитное поле H_0 наложено параллельно ее плоскости. Пусть $\xi \ll d \leq \lambda$. Посмотрим, как возникает в такой пленке структура из вихревых нитей. Эта работа была сделана Абрикосовым²⁷. Оказалось, что проникновение вихрей в пленку становится выгодным не при поле H_{c1} , как для бесконечного сверхпроводника, а при поле $H_{c1}(d)$, которое переходит в H_{c1} при $d \rightarrow \infty$. Вблизи этого поля вихри выстраиваются в виде линейной цепочки параллельно полю по центру пленки, причем вначале расстояния между ними очень велики (много больше λ). Затем, по мере увеличения H_0 , вихри начинают сближаться, и происходит раздвоение цепочки, расстройка и т. д.^{28a}. Возникает обычное смешанное состояние.

Казалось бы, близость краев должна существенно изменить структуру смешанного состояния. Однако это не так. Расчет, подобный тому, который был сделан в предыдущем разделе¹⁸, снова приводит к тому, что расстояние b между вихревыми рядами одно и то же для любого места пленки.

Таким образом, поверхность пленки при $d \ll \lambda$ оказывает существенное влияние на вихревую структуру при $H_0 \sim H_{c1}(d)$ и не влияет на нее при $H_{c1}(d) \ll H_0 \ll H_{c2}$. Оказывается, что в пластине произвольной толщины (лишь бы $d \gg \xi$) в этой области полей реализуется правильная треугольная решетка²⁵. Кривая намагничивания в этой области полей по-прежнему описывается выражением (39). Такая «нечувствительность» к существованию поверхности пленки, как показал расчет²⁵, объясняется тем, что в сравнительно сильных полях взаимодействие вихрей с поверхностями пленки полностью компенсируется взаимодействием вихрей с мейснеровскими токами, вызванными внешним полем. Это приводит к тому, что параметры решетки не зависят от толщины даже в пределе $d \ll \lambda$ и магнитный момент единицы объема пластины совпадает с его значением в безграничном образце.

Вернемся теперь к области полей, близких к $H_{c1}(d)$, и посмотрим, как происходит возникновение смешанного состояния в пленке. Мы уже говорили, что равновесной структурой будет линейная цепочка вихрей, выстроенная по середине пленки. Расчет Абрикосова²⁷ показывает, что вблизи $H_{c1}(d)$ вихри в цепочке очень далеки друг от друга, и их взаимодействием можно пренебречь. Рассмотрим поэтому один вихрь.

В работе^{28б} была исследована зависимость гиббсовской свободной энергии пленки с вихрем от положения этого вихря в пленке. Эта энергия определяется формулой (32), которую с учетом формулы (25) можно записать в виде

$$\mathcal{G} = \frac{\Phi_0}{8\pi} H_v(x_0) + \frac{\Phi_0}{4\pi} (H_1(x_0) - H_0); \quad (46)$$

здесь $H_v(\mathbf{r})$ и $H_1(\mathbf{r})$ — решения уравнений соответственно (6) и (30) с граничными условиями $H_v|_{\sigma} = 0, H_1|_{\sigma} = H_0$. Вихрь находится в точке $(x_0, 0)$, а поверхности пленки совпадают с поверхностями $x = 0$ и $x = d$. Внешнее магнитное поле направлено вдоль оси Oz .

Простой подстановкой можно проверить, что искомыми решениями будут

$$H_v(x, y) = \frac{2\Phi_0}{\lambda^2 d} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{iky} \frac{\sin(\pi n x/d) \sin(\pi n x_0/d)}{k^2 + (\pi n/d)^2 + 1/\lambda^2},$$

$$H_1(x) = H_0 \frac{\text{ch}\left(\frac{2x-d}{2\lambda}\right)}{\text{ch}(d/2\lambda)}.$$

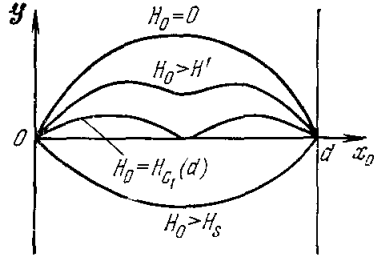


Рис. 9. Гиббсовская свободная энергия вихря в пленке при различных значениях внешнего поля.

После подстановки этих решений в (46) $\mathcal{G}(x_0)$ легко вычисляется в пределе $d \ll \lambda$ и оказывается равной

$$\mathcal{G}(x_0) = \varepsilon_0 + \left(\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda}\right)^2 \ln \left[\frac{\gamma d}{\pi\lambda} \sin \frac{\pi x_0}{d} \right] + \frac{\Phi_0 H_0}{4\pi} \left\{ \frac{\text{ch}[(2x_0-d)/2\lambda]}{\text{ch}(d/2\lambda)} - 1 \right\}, \quad (47)$$

где ε_0 — энергия единицы длины изолированного вихря, $\gamma \approx 1,78$.

Зависимость $\mathcal{G}(x_0)$ показана на рис. 9. При $H_0 < H'$ вихри в пленке абсолютно неустойчивы. Начиная с некоторого поля H' в середине пленки образуется потенциальная яма для вихрей, и они там могут устойчиво существовать, но энергетически выгодным проникновение вихрей в пленку станет только начиная с поля $H_{c1}(d)$. Все это отражено на рис. 9.

Поле H' находится из очевидного условия $(\partial^2 \mathcal{G} / \partial x_0^2)|_{x_0=d/2} = 0$:

$$H' = \frac{\pi\Phi_0}{4d^2}, \quad d \ll \lambda. \quad (48)$$

Это поле естественно назвать минимальным полем переохлаждения смешанного состояния. Поле $H_{c1}(d)$ определяется условием $\mathcal{G}(x_0)|_{x_0=d/2} = 0$. Используя (47), сразу получаем результат Абрикосова²⁷:

$$H_{c1}(d) = \frac{2\Phi_0}{\pi d^2} \ln \left(\frac{\gamma d}{\pi \xi} \right), \quad \kappa \gg 1, \quad d \ll \lambda.$$

Все это очень легко понять. Когда внешнее поле отсутствует, вихрь притягивается к поверхностям пленки и поэтому абсолютно неустойчив. Это

можно пояснить еще и так. Если вихрь находится не в центре пленки, то его вихревые токи асимметричны. Если $x_0 < d/2$ (см. рис. 10), то эта асимметрия такова, что плотность тока слева от центра вихря больше, чем справа. Следовательно, на вихрь действует разность бернуллиевских давлений справа налево, т. е. вихрь притягивается к поверхности. Включение внешнего поля H_0 приводит к появлению мейсснеровского тока, который направлен так, что, взаимодействуя с вихрем, создает силу Лоренца, которая стремится переместить вихрь на середину пленки.

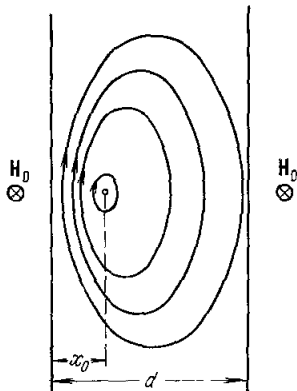


Рис. 10. Конфигурация токов вихря в пленке.

Однако и при $H_0 = H_{c1}(d)$ вихри не могут беспрепятственно проникать в пленку — этому препятствует поверхностный барьер (см. рис. 9). Этот барьер убывает с увеличением поля H_0 и пропадает при поле H_s , которое определяется условием $(\partial \mathcal{G} / \partial x_0) |_{x_0=0} = 0$. Наши расчеты могут дать оценку лишь порядка величины H_s :

$$H_s \sim \frac{\Phi_0}{2\pi \xi d}, \quad d \ll \lambda.$$

Поле H_s естественно назвать максимальным полем перегрева мейсснеровского состояния. Нетрудно видеть, что и в случае тонкой пленки барьер преодолевается вихрем только тогда, когда плотность мейсснеровского тока на поверхности пленки достигнет величины $j_s = cH_{c1} m / 4\pi \sqrt{2} \lambda$, т. е. величины, при которой начинается разрушение электронных пар.

6. ТРАНСПОРТНЫЙ ТОК В СМЕШАННОМ СОСТОЯНИИ

Сейчас мы переходим к очень интересному и очень важному для практики вопросу: как течет транспортный электрический ток по сверхпроводнику в смешанном состоянии? При этом мы предполагаем, что направление транспортного тока перпендикулярно к вихрям.

В литературе очень широко распространено утверждение, что в этом случае в идеальном однородном сверхпроводнике второго рода критический ток равен нулю, т. е. бездиссипативный транспортный ток невозможен. Аргументация очень проста: взаимодействие транспортного тока с вихрями порождает силу Лоренца, которая вызывает движение вихрей, что сопровождается диссипацией энергии²⁹⁻³². В реальных же сверхпроводниках второго рода вихри закрепляются на различных несовершенствах материала (дислокации, включения другой фазы, поры, границы зерен и т. п.) и по сверхпроводнику может идти бездиссипативный транспортный ток.

Сейчас мы покажем, что, вообще говоря, даже идеально однородный сверхпроводник второго рода в смешанном состоянии все же способен нести бездиссипативный транспортный ток.

а) Транспортный ток в пленке. Вернемся к рассмотренному в предыдущем разделе случаю, когда тонкая пленка ($d \ll \lambda$) расположена параллельно внешнему магнитному полю H_0 . Пусть $H_0 \gg H_{c1}(d)$, т. е. возникло смешанное состояние в виде линейной цепочки почти не взаимодействующих вихрей, выстроившихся по центру пленки.

Что будет, если теперь пропустить через пленку перпендикулярно к магнитному полю некоторый транспортный ток? Посмотрим, какие силы действуют на один из вихрей цепочки. Они нам хорошо известны. Это — сила притяжения к краям пленки, сила взаимодействия с мейсснеровскими токами, созданными полем H_0 , и теперь еще сила взаимодействия с транспортным током. Вихрь будет в равновесии, когда сумма всех трех сил будет равна нулю. Сумма первых двух сил была исследована в гл. 5, в). Она равна производной $(-\partial\mathcal{G}/\partial x_0)$, где $\mathcal{G}(x_0)$ определяется формулой (47), а x_0 — расстояние цепочки вихрей до одной из поверхностей пленки. Эту силу можно рассматривать как возвращающую силу, действующую на вихрь, расположенный в потенциальной яме (см. рис. 9). Смещающей силой, выводящей вихрь из минимума \mathcal{G} в центре пленки, будет сила Лоренца f_L , т. е. сила взаимодействия вихря с транспортным током. Каждому значению транспортного тока будет отвечать некоторое равновесное смещение цепочки вихрей из центра пленки, которое можно найти из условия равновесия

$$\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial x_0} = f_L.$$

Так мы столкнулись со случаем, когда есть и бездиссипативный транспортный ток, и смешанное состояние.

Очевидно, что равновесие будет существовать до тех пор, пока возвращающая сила не достигнет максимальной величины. Это произойдет тогда, когда x_0 совпадет с абсциссой точки перегиба функции $\mathcal{G}(x_0)$. Это — максимум того, что может противопоставить мейсснеровский ток силе Лоренца транспортного тока. Такой транспортный ток естественно определить как критический, т. е. такой ток, при котором возникает вихревая неустойчивость.

Расчет, проведенный в работе ²⁸⁶, показал, что определенная так критическая плотность транспортного тока будет

$$j_c = \frac{c}{4\pi^2} \frac{d}{\lambda^2} H_0 \left[\arccos \sqrt{\frac{H'}{H_0}} - \sqrt{\frac{H'}{H_0} \left(1 - \frac{H'}{H_0}\right)} \right], \quad (49)$$

где H' — минимальное поле переохлаждения смешанного состояния (48).

Зависимость $j_c(H_0)$ согласно формуле (49) дает $dj_c/dH_0 > 0$, т. е. в рассматриваемой области полей $H_0 - H_{c1}(d) \ll H_0$ должно быть возрастание критического тока с увеличением внешнего поля. Это значит, что где-то в интервале полей от $H_{c1}(d)$ до H_{c2} должен существовать максимум критического тока. Так называемый пик-эффект, т. е. существование пика в зависимости $j_c(H_0)$, наблюдался для очень многих неоднородных материалов и в большинстве случаев обусловлен, конечно, совсем другими причинами. Однако нам представляется очень знаменательным, что в таком идеальном объекте, как совершенно однородная пленка, пик-эффект возникает совершенно естественно, без каких-либо дополнительных предположений.

Физическое объяснение этого явления очень просто. С увеличением магнитного поля H_0 увеличивается глубина потенциальной ямы $\mathcal{G}(x_0)$ (см. рис. 9); следовательно, требуется больший транспортный ток, чтобы нарушить устойчивость вихревой цепочки.

б) Т р а н с п о р т н ы й т о к в п л а с т и н е. Посмотрим теперь, как протекает транспортный ток в пластине толщиной d , когда она находится в смешанном состоянии. Ток перпендикулярен к магнитному полю H_0 , которое параллельно поверхностям пластины, $H_{c1} \ll H_0 \ll H_{c2}$, $d \gg \lambda$.

То, что нам уже известно о смешанном состоянии полубесконечного сверхпроводника (см. гл. 5, б)), позволяет, по крайней мере качественно, рассмотреть механизм протекания транспортного тока по пластине¹⁶. Действительно, ничего пока не зная о распределении тока в пластине, мы задаем существование транспортного тока тем, что требуем, чтобы магнитное поле на одной поверхности пластины было равно $H_0 + H_I$, а на другой — соответственно $H_0 - H_I$, где H_I — поле на поверхности пластины, созданное транспортным током. Поскольку $d \gg \lambda$, мы можем применить результаты гл. 5, б) к каждой из двух поверхностей пластины. Мы знаем, что вихревая решетка имеет одинаковую плотность в любой точке сверхпроводника. Следовательно, и в случае пластины с током только однородная вихревая решетка может удовлетворить исходным уравнениям, т. е. никакого градиента плотности вихрей здесь не будет. Это,

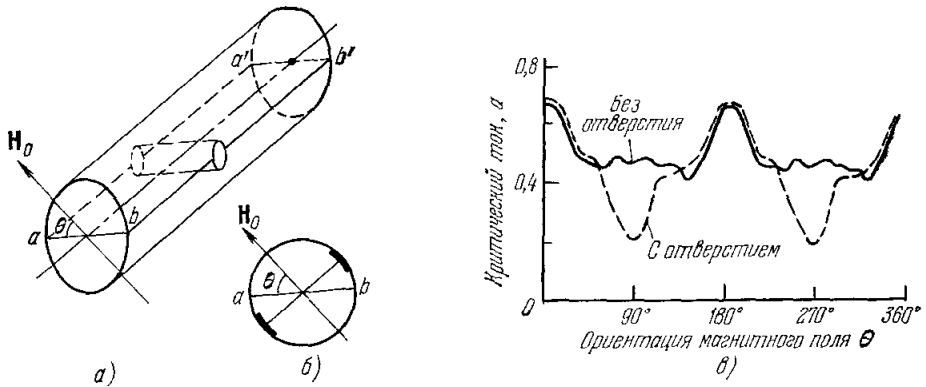


Рис. 11. К опыту Джоунза и Роуз-Инса.

а) Схематический рисунок образца; перпендикулярно к оси цилиндра в образце просверлено отверстие; б) транспортный ток течет по участкам поверхности, почти параллельным внешнему полю (выделенные на рисунке части окружности); в) зависимость критического тока от угла между направлением поля и осью отверстия.

конечно, относится только к идеально однородному сверхпроводнику без центров закрепления вихрем внутри материала. С другой стороны, расстояние x_0 первого вихревого ряда от поверхности пластины (45) остается свободным параметром, который определяется из условий минимума полной свободной энергии Гиббса, в которую включается и член взаимодействия вихрей с транспортным током. Таким образом, равновесное значение x_0 будет функцией H_I . Это означает, что при пропускании тока через пластину вся вихревая решетка как единое целое будет сдвигаться на некоторое расстояние $\Delta(H_I)$. Обратим внимание на то, что отсутствие градиента плотности вихрей означает отсутствие транспортного тока по сечению пластины. Транспортный ток течет по поверхностям пластины в слое порядка глубины проникновения. Это непосредственно следует из решения лондоновского уравнения для тока при граничном условии $H_I|_{\sigma} = \pm H_I$. Этот результат подтверждается прямым экспериментом. Джоунз и Роуз-Инс³³ поставили такой опыт. Из очень чистого сплава Nb — 50 ат. % Ta с почти полностью обратимой кривой намагничивания приготовлялся цилиндрический образец. Его поверхность была электролитически полирована. Образец помещался в поперечное поле H_0 , переводившее его в смешанное состояние. Исследовалась зависимость критического тока от направления поля (рис. 11). После этого в образце просверливалось поперечное отверстие и снова исследовалась зависимость критического тока от направления поля. Результаты

представлены на рис. 11. Авторы так интерпретируют свои результаты. Если однородный сверхпроводящий цилиндр из сверхпроводника второго рода находится в поперечном поле H_0 и перешел в смешанное состояние, то транспортный ток вдоль цилиндра будет протекать по двум полоскам, ориентированным вдоль цилиндра на диаметрально противоположных участках его поверхности. Эти полоски всегда ориентированы так, чтобы поле H_0 в них было почти параллельно поверхности цилиндра. Зависимость критического тока от направления поля, когда отверстия в цилиндре нет, определяется различными случайными неоднородностями поверхности цилиндра. Если же в образце есть поперечное отверстие, то при угле $\theta = 90^\circ$ (см. рис. 11) токонесущие полоски на поверхности цилиндра располагаются по направлениям aa' и bb' . Но именно в этом случае часть токонесущей поверхности оказывается отсутствующей (из-за поперечного отверстия) и критический ток достигает минимальной величины. Это как раз и наблюдается экспериментально.

Итак, мы установили, что транспортный ток течет по поверхностям пластины, когда она находится в смешанном состоянии, а вся вихревая структура при этом оказывается смещенной на некоторое расстояние $\Delta(H_I)$. Естественно возникает вопрос: как далеко можно сместить вихревую решетку без нарушения ее устойчивости? По существу, это вопрос о критическом токе. Подробный анализ этой модели для идеальной поверхности был проведен Терновским и Шехатой³⁴.

Реальная поверхность пластины всегда шероховата. Именно из-за этого, если специально не позаботиться о качестве поверхности, экспериментально не наблюдаются те гистерезисные явления, которые можно было бы ожидать из-за существования поверхностного барьера.

Попробуем учесть шероховатость поверхности так. Если пластина находится во внешнем поле H_0 , а среднее поле (индукция) далеко в глубине пластины равно B , то по поверхности пластины в слое порядка λ протекает ток $I_M = (H_0 - B)c/4\pi$. Этот ток отнесен к единице высоты пластины вдоль оси Oz . В положении равновесия, когда нет транспортного тока, вся вихревая решетка расположена симметрично и расстояния крайних вихревых рядов до поверхностей пластины равны x_0 . В гл. 5, б) указывалось, что равновесная величина x_0 будет порядка b — расстояния между рядами вихрей. Мы уже знаем, что при пропускании транспортного тока вся вихревая решетка как единое целое сдвигается в направлении силы Лоренца. Когда нарушится равновесие? Естественно предположить (если учесть шероховатость поверхности пластинки), что равновесие нарушится при сдвиге решетки на величину порядка b , т. е. тогда, когда крайний правый ряд вихрей выйдет из пластинки и когда крайний левый ряд вихрей освободит место для нового ряда. Насколько увеличится свободная энергия всей пластины при таком максимальном сдвиге всех вихрей на величину b ? Легко сообщить, что это будет как раз та энергия, которая необходима для удаления крайнего левого ряда из положения α и появления нового ряда в положении α' (см. рис. 12) при неизменном положении всех остальных вихревых рядов. Для этого, очевидно, требуется совершить работу

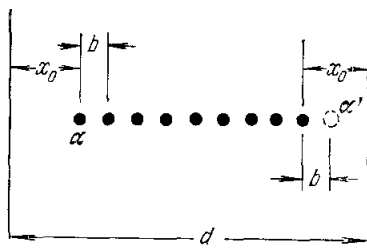


Рис. 12. Перенос вихря из положения α в положение α' эквивалентен жесткому смещению всей вихревой структуры на расстояние b .

$$\Delta\mathcal{E} = fb/a,$$

где f — это сила взаимодействия одного вихря с током I_M , a — расстояние между вихрями в ряду. Энергия $\Delta\mathcal{G}$ отнесена к вихрям, расположенным на единице длины ряда. Поскольку плотность тока I_M равна I_M/λ , то

$$f = \frac{1}{c} \Phi_0 I_M / \lambda.$$

Учитывая, кроме того, что $I_M = c |M|$, где $M = (B - H_0)/4\pi$ — обратимый магнитный момент единицы объема сверхпроводника, имеем следующее условие для критического транспортного тока:

$$\frac{|M| \Phi_0}{a} = \frac{1}{c} I_c B. \quad (50)$$

Действительно, слева стоит возвращающая сила $\Delta\mathcal{G}/b$, которая действует на все вихри, находящиеся в единичном вдоль оси Oy участке пластины, и которая отнесена к единице высоты пластины вдоль оси Oz . Иначе говоря, это максимальная сила закрепления вихрей в рассматриваемом участке пластины. Справа стоит суммарная сила Лоренца, с которой транспортный ток действует на вихри. Действительно, мы уже установили, что этот ток течет в приповерхностном слое толщины λ . На единицу длины этого слоя приходится $\left(\frac{B}{\Phi_0}\right) \lambda$ вихрей, отсюда сила Лоренца, действующая на эти вихри, равна

$$\frac{1}{c} j_c \Phi_0 \left(\frac{B}{\Phi_0}\right) \lambda = \frac{1}{c} I_c B.$$

В случае треугольной решетки расстояние a между вихрями в ряду равно $(2\Phi_0)^{1/2} 3^{-1/4} B^{-1/2}$. Подставляя это выражение в (50) и вводя определение средней плотности критического тока $\bar{j}_c = I_c/d$, имеем окончательно

$$\bar{j}_c = \frac{3^{1/4}}{\sqrt{2}} \frac{c \sqrt{\Phi_0} |M(H_0)|}{\lambda \sqrt{B}}. \quad (51)$$

Это как раз и есть (с точностью до численного коэффициента) формула, предложенная Кемпбеллом, Эветтсом и Дью-Хьюзом¹⁹. Они провели очень тщательную проверку этой формулы. Эксперимент был поставлен на эвтектическом сплаве Рь — Ви. Достаточно крупные частицы ($>\lambda$) несверхпроводящего висмута были равномерно внедрены в сверхпроводящую ϵ -фазу. Авторы рассматривали свой образец как совокупность тонких сверхпроводящих пластин, толщина которых принималась равной среднему расстоянию между частицами висмута. Исследовался необратимый магнитный момент образцов как функция внешнего поля H_0 . Эта же величина может быть рассчитана, если задаться какой-нибудь зависимостью $\bar{j}_c(H_0)$. Авторы, проведя независимое исследование обратимого магнитного момента ϵ -фазы $M(H_0)$, использовали формулу (51) для расчета необратимого магнитного момента. Сравнение результатов прямого эксперимента и расчета представлены на рис. 13, где сплошные линии — результаты расчета.

Еще одним подтверждением той точки зрения на протекание транспортного тока в пластине, находящейся в смешанном состоянии, которая была высказана выше, является работа³⁵, в которой Кардона, Гиттман и Розенблюм исследовали вещественную часть поверхностного импеданса R плоского образца сплава Рь — 17 ат. % In, находящегося в смешанном состоянии. Измерения велись в сантиметровом диапазоне. Постоянное

магнитное поле H_0 накладывалось параллельно поверхности образца. Они обнаружили, что при $H_{c1} < H_0 < H_{c2}$ возникает так называемый естественный гистерезис в зависимости R от H_0 . При этом для каждого значения H_0 существует некоторый интервал полей ΔH , в котором $R(H_0)$ меняется обратимо, безгистерезисно. Авторы объясняют это явление так. Вещественная часть поверхностного импеданса R определяется количеством нормальных сердцевин вихрей, лежащих внутри скин-слоя. Изменение внешнего поля (скажем, увеличение) приводит к отходу первых вихревых рядов от поверхности в глубину образца, чтобы освободить место для вхождения следующего вихревого ряда. Но пока этот новый ряд еще не вошел, число вихрей в скин-слое уменьшилось и R тоже уменьшилось. Такое обратимое, упругое смещение вихрей полем H_0 должно наблюдаться в некотором интервале полей ΔH . Нижняя граница этого интервала соответствует выходу крайнего вихревого ряда из образца, верхняя — входу в образец нового вихревого ряда.

Если принять эту интерпретацию работы³⁵, то можно сопоставить ее результаты с развитыми выше представлениями. Действительно, интервал полей ΔH , о котором только что говорилось, — это не что иное, как наше поле H_{Ic} , созданное транспортным током. Ведь именно поле H_{Ic} приводит к тому, что на той стороне пластинки, где поле равно $H_0 + H_{Ic}$, в нее входит новый вихревой ряд, а где поле равно $H_0 - H_{Ic}$, — вихревой ряд выходит. Итак, исходная гипотеза: $H_{Ic} \sim \Delta H$. Тогда выражение для ΔH принимает вид

$$\Delta H = k \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{a}{\lambda} (H_0 - B),$$

где a — сторона элементарной треугольной ячейки вихревой решетки, k — подгоночный коэффициент порядка единицы, его происхождение связано с тем, что мы точно не знаем, каково критическое смещение вихревой структуры, а приняли его равным b . Из работы³⁵ известны следующие параметры сплава Pb — 17 ат. % In: $H_{c2} = 4,8$ кэ, $H_{c1} = 0,14$ кэ. Этих данных достаточно, чтобы рассчитать остальные параметры: $\kappa = 5,3$, $\xi = 260$ Å, $\lambda = 1380$ Å. Используя теперь известную формулу для a : $(2\Phi_0)^{1/23-1/4} B^{-1/2}$, принимая для разности $H_0 - B$ соотношение, верное с логарифмической точностью:

$$H_0 - B = H_{c1} \frac{\ln(H_{c2}/B)^{1/2}}{\ln \kappa},$$

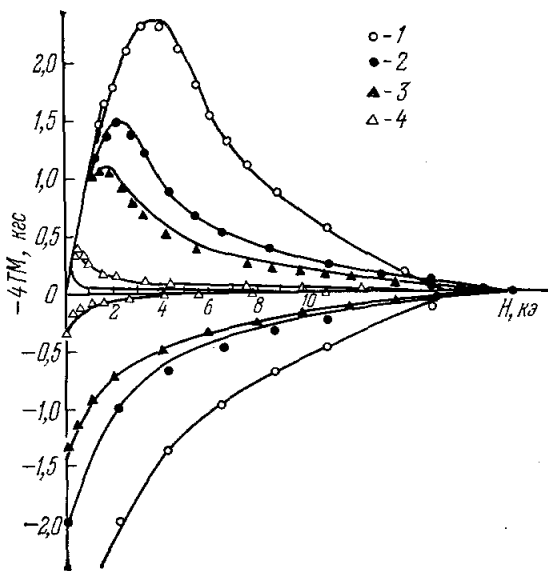


Рис. 13. Зависимость магнитного момента эвтектики Pb — Vi от внешнего магнитного поля. Значки — результат эксперимента для образцов, подвергнутых различной обработке: 1 — 1 ч, 20° С, ϕ 2 мм; 2 — 0,5 ч, 114° С, ϕ 2 мм; 3 — 80 мин, 114° С, ϕ 2 мм; 4 — 9 ч, 114° С, ϕ 0,3 мм. Сплошные линии — теоретические кривые¹⁹.

и подставляя определенные выше λ и κ , получим окончательно

$$\Delta H (\kappa\varepsilon) = k \frac{2 \cdot 10^{-2}}{\sqrt{B(\kappa\varepsilon)}} \ln \frac{4,8}{B(\kappa\varepsilon)}. \quad (52)$$

Принимая в этой формуле $B = H_0$, мы можем сравнить этот результат с экспериментальной³⁵ зависимостью $\Delta H (H_0)$. Для определения подгочного коэффициента k совместим $\Delta H_{\text{эксп}}$ и $\Delta H_{\text{теор}}$ в точке $H_0 = 0,5 \kappa\varepsilon$.

Тогда получим $k = 1,85$. На рис. 14 приведены экспериментальные точки и теоретическая кривая $\Delta H (H_0)$. Согласие удивительно хорошее, тем более если учесть, что подгочный коэффициент имеет величину порядка единицы.

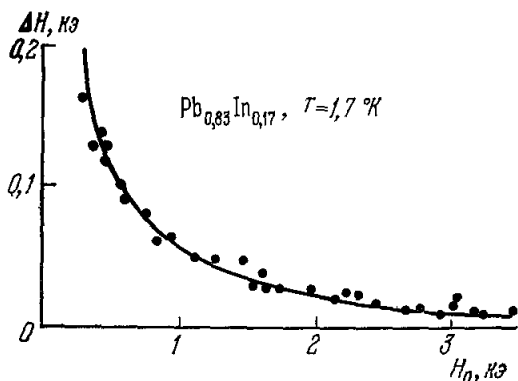


Рис. 14. Зависимость ΔH от внешнего магнитного поля H_0 .

Точки — результат эксперимента³⁵; сплошная кривая рассчитана по формуле (52), где $k = 1,85$.

в) Закрепление вихрей на границе раздела двух сверхпроводников. В предыдущих разделах мы рассматривали закрепление вихрей в результате их взаимодействия с поверхностью сверхпроводника и установили, что при этом транспортный сверхпроводящий ток течет вдоль этой поверхности в слое порядка λ .

Рассмотрим теперь случай, когда имеется плоская граница между двумя разными сверхпроводниками, а внешнее магнитное поле направлено параллельно этой границе.

Поймем прежде, как происходит взаимодействие одного вихря с такой границей³⁶. Пусть полупространство $x > 0$ заполнено сверхпроводником с глубиной проникновения λ_1 и корреляционной длиной ξ_1 ($\lambda_1 \gg \xi_1$). При $x < 0$ имеем соответственно $\lambda_2 \gg \xi_2$. Вихревая нить, параллельная оси Oz , проходит через точку r_L , причем $x_L > 0$. Напряженность магнитного поля, созданного вихрем, определяется из решения уравнений

$$\mathbf{H}_1 + \lambda_1^2 \text{rot rot } \mathbf{H}_1 = \Phi_0 \delta_2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_L),$$

$$\mathbf{H}_2 + \lambda_2^2 \text{rot rot } \mathbf{H}_2 = 0$$

и условий сшивания решений на плоскости $x = 0$: на этой плоскости должны быть непрерывны тангенциальная составляющая вектор-потенциала ($A_{t1} = A_{t2}$) и нормальная составляющая тока ($j_{n1} = j_{n2}$). Первое условие физически означает отсутствие бесконечной напряженности магнитного поля на границе раздела, а второе — отсутствие расходимости у тока ($\text{div } \mathbf{j} = 0$). В совокупности эти два условия сшивания означают, что сверхпроводящий ток, созданный вихрем, преломляется на границе раздела. Действительно, в силу уравнения Лондона $\mathbf{j} \sim \mathbf{A}/\lambda^2$ условия сшивания будут: $j_{n1} = j_{n2}$ и $\lambda_1^2 j_{t1} = \lambda_2^2 j_{t2}$. Именно это преломление линий сверхпроводящего тока вихря и приводит к взаимодействию вихря с границей раздела двух сверхпроводников. Общее выражение для энергии этого взаимодействия приведено в работе³⁶. Схематически эта энергия

показана на рис. 15. Дадим здесь некоторые предельные формулы:

$$F = F_0 + \left(\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda_1} \right)^2 \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \left(\frac{\pi\lambda_1}{4x_L} \right)^{1/2} e^{-2x_L/\lambda_1}, \quad x_L \gg \lambda_1, \quad (53)$$

$$F = F_0 + \left(\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda_1} \right)^2 K_0(2x_L/\lambda_1), \quad \lambda_2 \ll \lambda_1, \quad x_L, \quad (54)$$

$$F = F_0 - \left(\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda_1} \right)^2 K_0(2x_L/\lambda_1), \quad \lambda_2 \gg \lambda_1, \quad (55)$$

$$F = F_0 + \left(\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda_1} \right)^2 \frac{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} \ln \frac{\lambda_1}{x_L}, \quad x_L \ll \lambda_1, \quad \lambda_2, \quad (56)$$

где $F_0 = (\Phi_0/4\pi\lambda_1)^2 \ln \kappa_1$ — свободная энергия одиночного вихря в бесконечном первом сверхпроводнике, $\kappa_1 = \lambda_1/\xi_1$, K_0 — функция Ханкеля нулевого порядка от мнимого аргумента. Формула (56) позволяет с логарифмической точностью оценить энергию вихря на расстоянии порядка ξ_1 от границы:

$$F(\xi_1) \approx \frac{\Phi_0^2}{8\pi^2} \frac{\ln \kappa_1}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}. \quad (57)$$

Тогда скачок энергии вихря на границе (см. рис. 15) будет равен

$$\Delta F \approx \frac{\Phi_0^2}{8\pi^2} \frac{\ln(\kappa_1/\kappa_2)}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}. \quad (58)$$

Итак, из рис. 15 следует, что при $\lambda_1 > \lambda_2$ и $\kappa_1 > \kappa_2$ вблизи границы раздела возникает потенциальная яма для вихря, т. е. он будет закрепляться на такой границе раздела. Приведенные выражения для F позволяют оценить, какую силу извне надо приложить к такому вихрю, чтобы он покинул потенциальную яму. Это, очевидно, максимальная величина производной $|\partial F/\partial x_L|$. Поскольку яма асимметрична (см. рис. 15), ясно, что сила закрепления такого вихря будет разной при движении вихря направо или налево.

Если оба сверхпроводника находятся в смешанном состоянии, то вдоль плоскости раздела выстроятся закрепленные на границе вихри. Эти вихри образуют стенку, препятствующую движению всей вихревой системы под действием силы Лоренца. Такая сила возникает, если вдоль поверхности раздела пропустить транспортный ток. Поскольку оба сверхпроводящих полупространства предполагаются идеально однородными, никакого закрепления вихрей вне границы раздела быть не может. Поэтому транспортный ток может идти только вдоль границы раздела в слое толщиной $\sim \lambda_1 + \lambda_2$.

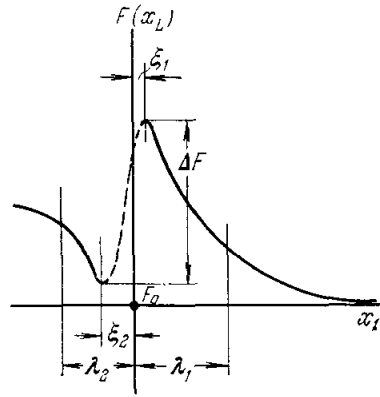


Рис. 15. Зависимость свободной энергии вихря от его расстояния до границы раздела двух сверхпроводников.

Предполагается, что $\lambda_1 > \lambda_2$, $\kappa_1 > \kappa_2$.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, Л. Д. Ландау, ЖЭТФ 20, 1064 (1950).
2. П. Де Жен, Сверхпроводимость металлов и сплавов, М., «Мир», 1968.
3. Э. Линтон, У. Мак-Линн, УФН 97, 495 (1969).
4. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Статистическая физика, М., «Наука», 1964.
5. Л. И. Горьков, ЖЭТФ 36, 1918; 37, 833, 1407 (1959).
6. А. А. Абрикосов, ЖЭТФ 32, 1442 (1957).
7. С. Caroli, J. Matricon, Phys. kondens. Materie 3, 380 (1965).

8. C. Caroli, P. G. de Gennes, J. Matricon, Phys. Lett. 9, 307 (1964).
9. J. Matricon, *ibid.*, p. 289.
10. G. Lasher, Phys. Rev. A140, 523 (1965).
11. Д. Сан-Жам, Г. Сарма, Е. Томас, Сверхпроводимость второго рода, М., «Мир», 1970.
12. В. П. Силин, ЖЭТФ 21, 1330 (1951).
13. F. London, Superfluids, v. 1, N.Y., 1950.
14. C. J. Gorter, Phys. Lett. 1, 69 (1962).
15. P. W. Anderson, Phys. Rev. Lett. 9, 309 (1962); J. Friedel, P. G. de Gennes, J. Matricon, Appl. Phys. Lett. 2, 119 (1963); В. П. Галайко, Письма ЖЭТФ 3, 121 (1966); Ф. Ф. Терновский, ЖЭТФ 60, 1790 (1971).
16. В. В. Шмидт, ЖЭТФ 61, 398 (1971).
17. C. P. Bean, J. D. Livingston, Phys. Rev. Lett. 12, 14 (1964).
18. P. G. de Gennes, Sol. State Comm. 3, 127 (1965).
19. A. M. Campbell, J. E. Evetts, D. Dew-Hughes, Phil. Mag. 18, 313 (1968).
20. R. W. De Blois, W. De Sorbo, Phys. Rev. Lett. 12, 499 (1964).
21. J. Lowell, Phys. Lett. A26, 111 (1968).
22. Г. С. Мкртчян, В. В. Шмидт, ЖЭТФ 61, 367 (1971).
23. B. V. Goodman, Rev. Mod. Phys. 36, 12 (1964).
24. A. L. Fetter, Phys. Rev. 147, 153 (1966).
25. А. И. Русинов, Г. С. Мкртчян, ЖЭТФ 61, 773 (1971).
26. а) W. M. Kleiner, L. M. Roth, S. H. Autler, Phys. Rev. A133, 1226 (1964); б) В. Obst, Phys. Lett. A28, 662 (1969).
27. А. А. Абрикосов, ЖЭТФ 46, 1464 (1964).
28. а) C. Carter, Canad. J. Phys. 47, 1447 (1969); б) В. В. Шмидт, ЖЭТФ 57, 2095 (1969).
29. Y. B. Kim, C. F. Hempstead, A. R. Strand, Phys. Rev. A139, 1163 (1965).
30. A. G. Van Vijfeijken, A. K. Niessen, Phys. Lett. 16, 23 (1965).
31. P. Nozières, W. F. Vinen, Phil. Mag. 14, 667 (1966).
32. J. Bardeen, M. J. Stephen, Phys. Rev. A140, 1197 (1965); Л. П. Горьков, Н. Б. Коппин, ЖЭТФ 64, 356 (1973).
33. R. G. Jones, A. C. Rose-Innes, Phys. Lett. 22, 271 (1966).
34. Ф. Ф. Терновский, Л. Н. Шехата, ЖЭТФ 62, 2297 (1972).
35. M. Cardona, J. Gittleman, V. Rosenblum, Phys. Lett. 17, 92 (1965).
36. Г. С. Мкртчян, Ф. Р. Шакирзянова, Е. А. Шаповал, В. В. Шмидт, ЖЭТФ 63, 667 (1972).

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

37. J. Pearl, Appl. Phys. Lett. 5, 65 (1964); J. Appl. Phys. 37, 4139 (1966).
38. A. L. Fetter, P. C. Hobenberg, Phys. Rev. 159, 330 (1967).
39. R. Labusch, *ibid.* 170, 470 (1968); Phys. Stat. Sol. 32, 439 (1969).
40. К. К. Лихарев, Изв. вузов (Радиофизика) 14, 919 (1971).
41. В. Н. Губанков, К. К. Лихарев, ФТТ 13, 125 (1971).
42. W. W. Webb, J. Appl. Phys. 42, 107 (1971).
43. A. M. Campbell, J. E. Evetts, Critical Currents in Superconductors, L., Taylor, 1972.
44. D. Dew-Hughes, M. J. Witcomb, Phil. Mag. 26, 73 (1972).
45. К. Б. Ефетов, ФТТ 15, 647 (1973).
46. В. П. Андрацкий, Л. М. Грундель, В. Н. Губанков, Н. Б. Павлов, ЖЭТФ 65, 1591 (1973).
47. Н. Я. Фогель, *ibid.*, стр. 1534.