УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

532.584 + 538.22

магнитные жидкости

М. И. Шлиомис

СОДЕРЖАНИЕ

1.	Введение	427
2.	Статические свойства магнитных суспензий	428
	а) Коллоидные системы (428). б) Приготовление и устойчивость магнитных	
	коллондов (429). в) Образование ценей и кластеров (432). г) Статические маг-	
	нитные свойства (433).	
3.	Шкала характерных времен	435
	Шкала характерных времен	
	ние частиц и релаксация анизотропии (438).	
4.	Квазистационарная феррогидродинамика	439
	а) Уравнения движения феррожидкости (439). б) Изотермические равнове-	
	сия и течения (440). в) Устойчивость поверхности в однородном поле. Капил-	
	лярно-гравитационные волны (442). г) Термоконвективная неустойчивость	
_	(446).	
5.	Магнитная суспензия как жидкость с внутренним вращением	448
	а) Тензор напряжений и уравнение для намагниченности (448). б) Зависи-	
	мость времен релаксации от напряженности поля (451). в) Вращательная вяз-	
	кость (452). г) Увлечение суспензии вращающимся полем (455).	150
Π 1	птированная литература	-456

1. ВВЕДЕНИЕ

По своим магнитным свойствам любая однофазная жидкость есть диаили парамагнетик, так что ее магнитная восприимчивость чрезвычайно мала. Например, объемная восприимчивость жидкого кислорода аномально сильного парамагнетика — составляет при 90 °K всего лишь 3·10-4. По крайней мере еще на порядок меньше магнитная восприимчивость концентрированных растворов парамагнитных солей и некоторых свободных радикалов. Что же касается ферромагнетиков, то в жидкой фазе они, как известно, не существуют, хотя вопрос о принципиальной их возможности до сих пор не решен. В то же время жидкая среда с сильными магнитными свойствами может быть получена коллоидным диспергированием ферромагнитных частиц в обычной жидкости. Такая двухфазная система очень чувствительна к магнитному полю и во многих отношениях ведет себя как однородная жидкость. Существующая технология позволяет получать сегодня коллоиды с начальной восприимчивостью 0,05-0,10 при намагниченности насыщения 30-35 гс, достигаемой в полях напряженностью 8-10 кэ.

Синтезирование и систематическое изучение свойств магнитных жидкостей было начато несколько лет назад исследовательской группой Розенцвейга ¹⁻⁹. Не совсем удачный термин «феррожидкость», предложенный в одной из первых работ ² по гидродинамике магнитных суспензий («феррогидродинамика»), утвердился в научной литературе. Отметим сразу,

что феррожидкости, о которых пойдет здесь речь, имеют мало общего с магнитными составами, применяемыми для визуализации доменных границ ¹⁰ или в магнитных сцеплениях ¹¹, получивших распространение в начале 50-х годов. В последних использовались взвеси ферромагнитного порошка (обычно карбонильное железо) в минеральном или кремнийорганическом масле. Средние размеры частиц составляли 4—12 мкм. Техническое применение таких взвесей основывалось на их свойстве затвердевать под действием магнитного поля.

Феррожидкости отличаются от упомянутых грубых суспензий прежде всего гораздо меньшими — на три порядка! — размерами взвешенных частиц: в зависимости от используемого ферромагнетика их средний диаметр колеблется от 30 до 150 Å. Малость размеров частиц в сочетании с всегда принимаемыми мерами, направленными на предотвращение коагуляции, обеспечивает высокую стабильность магнитных коллоидов: они практически не стареют и не разлагаются, остаются жидкими в магнитном поле и после снятия поля полностью восстанавливают свои характеристики.

Полученные к настоящему времени экспериментальные и теоретические данные позволяют составить более или менее цельное представление о физических свойствах и гидродинамике магнитных жидкостей. Относящийся к этой теме единственный обзор Бертрана ¹² касается в основном приготовления феррожидкостей и перспектив их использования в технике. В предлагаемой статье мы попытались восполнить имеющийся пробел, уделив основное внимание физической стороне дела.

2. СТАТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МАГНИТНЫХ СУСПЕНЗИЙ

а) Коллоидные системы. Само существование коллоидной суспензии предполагает, очевидно, что взвешенные в жидкости твердые частицы не оседают под действием силы тяжести. Для этого скорость броуновского (теплового) движения частиц должна быть не меньше скорости оседания, определяемой формулой Стокса. Отсюда — верхняя оценка размеров взвешенной частицы

$$d \leqslant \left(\frac{\eta^2 kT}{\rho_s \left(\Delta \rho\right)^2 g^2}\right)^{1/7},\tag{2.1}$$

где $\Delta \rho = \rho_s - \rho_f$ — разность плотностей твердой и жидкой фаз. В зависимости от вязкости жидкости η формула (2.1) дает $d_{\rm max} \sim 10^{-3} - 10^{-4}$ см при комнатных температурах. Практически в устойчивых коллоидах размеры частиц лежат в пределах от 10^{-7} до 10^{-4} см.

В состоянии термодинамического равновесия распределение частиц по высоте подчиняется барометрическому закону

$$n(z) \sim \exp\left[-\frac{(\Delta \rho) Vgz}{kT}\right]$$
 (2.2)

(V - oбъем частицы). Следовательно, чтобы не иметь дела с градиентами концентрации гравитационного происхождения, высота контейнера h должна быть достаточно мала:

$$h < \frac{kT}{(\Delta \rho) V_g}$$
 (2.3)

Для $\Delta \rho = 10~c/cm^3$, $T = 300~^{\circ}$ K и $d = 200~^{\mathring{\rm A}}$ должно быть h < 1~cm. Заметим, однако, что время t' установления равновесного распределения (2.2) для коллоидных частиц очень велико, и первоначально однород-

ная система остается однородной в течение большого времени t < t'. По порядку величины $t' = h^2/D$, где $D \sim kT/\eta d$ — коэффициент диффузии взвещенных частиц. При $h \sim 1$ см, $d \sim 10^{-6}$ см и $\eta \sim 10^{-2}$ г/см·сек однородность сохраняется несколько недель.

Если в обычных суспензиях градиенты концентрации частиц обусловлены одними лишь архимедовыми силами, то для магнитных суспензий, помещенных в неоднородное поле Н, роль, аналогичную полю тяжести, играют градиенты магнитного поля. В неоднородном поле на частицу с магнитным моментом m действует сила 13 ($m\nabla$) H. Оценивая величину этой силы, следует иметь в виду, что при тех размерах частиц ($d \sim 100 \text{ Å}$), какие используются в устойчивых магнитных коллоидах, каждая взвешенная частица представляет собой отдельный магнитный домен ¹⁴. Расчет критических размеров, ниже которых частица становится абсолютно однодоменной, приводит к значениям d от нескольких сотен ангстрем (330) и 760 Å для железа и никеля соответственно 15) до нескольких тысяч ангстрем для материалов с сильной магнитной анизотропией $(4 \cdot 10^3 \text{ u } 13 \cdot 10^3 \text{ Å})$ для марганцево-висмутового сплава и феррита бария 16). Магнитный момент однородно намагниченной (однодоменной) частицы равен m = $=M_sV$, где M_s — намагниченность насыщения материала частицы. Таким образом, отношение магнитной силы $M_sV \mid \nabla H \mid$ к архимедовой ($\Delta \rho$) Vg не зависит от размера частиц. При $\mid \nabla H \mid > g$ ($\Delta \rho$)/ M_s магнитные силы преобладают над гравитационными. В этом случае в формулах (2.1) и (2.3), определяющих максимально допустимые линейные размеры частиц и контейнера, следует заменить $\Delta \rho \cdot g$ на $M_s |\nabla H|$.

б) Приготовление и устойчивость магнитных коллоидов. Коллоидные ферромагнетики должны быть
стабилизированы, чтобы исключить возможную коагуляцию. Стабилизация достигается адсорбцией на поверхности диспергированных частиц
ионов с образованием двойных ионных слоев либо с помощью поверхностно-активных веществ (мыл, спиртов, жирных кислот). Молекулы этих
веществ образуют на твердых частицах адсорбционные слои с определенной
ориентацией полярных групп *). Это приводит к появлению потенциального барьера, препятствующего коагуляции: для сближения взвещенных
в жидкости частиц необходимо затратить работу на преодоление сил молекулярного сцепления между молекулами жидкости и адсорбированным
слоем. Ширина потенциального барьера в случае жирных кислот составляет примерно 20 Å.

Розенцвейг, Кайзер и др. работают с феррожидкостями, полученными путем размалывания ферритовых порошков (чаще всего — магнетит) в шаровых мельницах. Помол длится несколько недель в присутствии несущей жидкости, в которой с самого начала растворен стабилизирующий агент. В качестве основы используются керосин, вода, фторорганические и силиконовые жидкости; стабилизатором часто служит олеиновая кислота. В работе 17 получавшаяся после помола дисперсия центрифугировалась 20 минут в поле 17 после чего отделялась неосевшая фракция. В разных суспензиях, описанных в 17 , средний диаметр частиц магнетита варьировался от 50 до 90 Å при концентрации частиц n $\sim 10^{16}$ — $^{10^{18}}$ см $^{-3}$.

^{*)} Например, в водных коллоидах полярные группы СООН жирных кислот ориентированы в воду. Для коллоидных систем в органической среде стабилизация достигается, когда в среду обращены углеводородные цепи поверхностио-активных молекул.

Коллоиды магнетита готовят и путем химического осаждения ¹⁸ частиц Fe₃O₄ из раствора солей двух- и трехвалентного железа, действуя на раствор избытком щелочи. Полученный осадок промывается и затем разрыхляется до коллоидного состояния в слабой соляной кислоте или в растворе олеиновой кислоты в неполярной жидкости.

Исключительно высокую устойчивость обнаруживают коллоиды кобальтовых частиц, стабилизированные полимерными материалами с молекулярным весом 10⁴ и более ^{19, 20}. Предложенный Томасом ¹⁹ метод приготовления таких коллоидов состоит в термическом разложении дикобальта октакарбонила в толуоле или хлорбензоле, содержащих в растворенном виде подходящий полимер. Меняя концентрацию Co₂(CO)₈, температуру и состав полимера, удается варьировать размеры частиц металлического кобальта между 20 и 300 Å, причем всякий раз около 85% частиц отличаются по своим размерам менее чем вдвое от среднего значения.

В работе ²¹ для диспергирования железа в толуоле использовался электроконденсационный метод: испарение и конденсация металла в высокочастотном искровом разряде. Стабилизатором служил нафтенат алюминия.

В ряде работ делались попытки создать магнитную суспензию на основе жидких металлов. Такие феррожидкости, в отличие от существующих, обладали бы большой электро- и теплопроводностью и высокой температурой кипения. Эти качества в сочетании с сильными магнитными свойствами обеспечили бы им широкое применение в различных областях техники, в том числе и для превращения тепла в механическую или электрическую энергию ⁵ (феррогидродинамический генератор). Электроконденсационный метод использовался для получения частиц железа ²² и гадолиния ²³ в ртути. Феррожидкости из сплавов Ni — Fe на ртутной же основе приготовлялись методом электролитического осаждения ²⁴. В качестве несущей жидкости использовались также олово, ингас (сплав индий — галий — олово), висмутовые сплавы ²⁵. Основная трудность на пути создания электропроводной феррожидкости — отсутствие эффективных методов ее стабилизации.

Два механизма способствуют коагуляции магнитных коллоидов — молекулярное притяжение между взвешенными частицами и специфическое для магнитных частиц диполь-дипольное взаимодействие. Последнее при контакте частиц имеет порядок величины m^2/d^3 , так что можно ввести безразмерную «константу спаривания»

$$\lambda = \frac{m^2}{d^3kT} \,. \tag{2.4}$$

Для однодоменных частиц, когда $m=M_sV$, λ пропорционально объему частицы. Например, для магнетита ($M_s=450~cc$) при комнатной температуре ($kT=4\cdot 10^{-14}~spz$) значение $\lambda=1$ получается для частиц диаметром $d=90~{\rm \AA}$. При $\lambda<1$ определяющую роль играют ван-дер-ваальсовы силы. С увеличением размеров частиц вклад магнитного взаимодействия в общий баланс межчастичных сил возрастает.

Влияние магнитного притяжения на устойчивость дисперсных ферромагнетиков, стабилизированных электростатическими силами отталкивания между ионами двойных электрических слоев, было рассмотрено Бибиком и Лавровым 26 в духе теории устойчивости лиофобных золей Дерягина — Ландау 27 . Энергия взаимодействия W двух сферических частиц складывается из ван-дер-ваальсова и магнитного притяжений и электростатического отталкивания. Зависимость W от наикратчайшего расстояния ε поверхностей сфер может быть следующих четырех основных видов

(рис. 1). Очевидно, только при реализации кривых типа 1 или 2 ионные слои будут предотвращать слипание частиц. Предел устойчивости должен наблюдаться, когда вершина максимума W (ϵ) расположена на уровне оси абсписс (кривая 3). Критическая толщина ϵ_c уменьшается с ростом λ

и при $\lambda \geqslant 10^3$ магнитный коллоид уже не может быть стабилизирован электростатическими силами. Однородность его, однако, нарушается гораздо раньше. При $\lambda \gg 1$ магнитное притяжение частиц приводит к образованию пространственных структур 26 — цепей, колец, кластеров—за счет появления минимума суммарной энергии W на значительных расстояниях между частицами (кривая 2 на рис. 1).

На рис. 2 показаны электронные микрофотографии коллоидных частиц кобальта ²⁰. Большинство частиц на рис. 2, а имеет размеры, меньшие 100 Å. Формирование цепочечных агрегатов начинается (рис. 2, б)

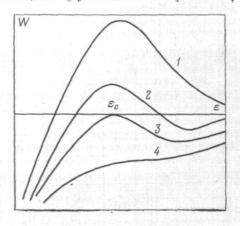
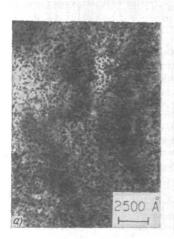
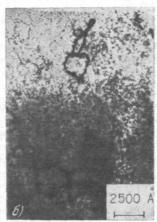


Рис. 1.

при несколько бо́льших средних размерах. Наконец, еще более крупные частицы (200—400 Å) объединены в цепи полностью (рис. 2, в).





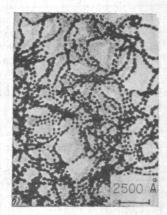


Рис. 2.

В тех коллоидах, где спонтанной агломерации частиц не происходит, внешнее магнитное поле может вызывать обратимую агломерацию. Об этом свидетельствует, например, влияние поля на прозрачность коллоидов магнетита ²⁸: в магнитном поле прозрачность уменьшается (агрегирование) и восстанавливается после выключения поля (распад агрегатов). В ²⁹ опыты производились с дисперсиями ферритовых частиц (~200 Å) в воде. Электронное микроскопирование показало, что возникающие под действием поля агломераты образуют регулярную систему линий, параллельных вектору магнитной напряженности. В зависимости от способа приготовления электронно-оптической реплики ²⁹ расстояние между соседними цепочками частиц составляло 4000 или 8000 Å.

в) Образование цепей и кластеров. Интересные результаты, касающиеся образования цепей из коллоидных магнитных частиц и влияния однородного магнитного поля на этот процесс, получили де Женн и Пинкус 30. Ими рассмотрены некоторые свойства уравнения состояния «разреженного газа» ферромагнитных частиц, взвешенных в инертной жидкости. Учитывалось отклонение газа от идеальности, связанное только с магнитным притяжением между составляющими газ частицами (электростатические и ван-дер-ваальсовы силы не принимались во внимание).

Энергия взаимодействия двух магнитных диполей, находящихся на расстоянии **r** друг от друга, равна

$$W_{12} = r^{-3} [(\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2) - 3 (\mathbf{m}_1 \mathbf{r}) (\mathbf{m}_2 \mathbf{r}) r^{-2}].$$

Во внешнем магнитном поле, достаточно сильном для полного выстраивания частиц:

$$\xi \gg 1$$
, $\xi \gg \lambda$ ($\xi \equiv mH/kT$),

бинарная корреляционная функция имеет вид

$$g(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0 & (r < d), \\ \exp\left[\lambda (d/r)^3 (3\cos^2 \vartheta - 1)\right] & (r > d), \end{cases}$$
 (2.5)

где ϑ — угол между \mathbf{r} и \mathbf{H} . Второй вириальный коэффициент выражается формулой 31

$$B = \frac{1}{2} \int [1 - g(\mathbf{r})] d^3 \mathbf{r}. \tag{2.6}$$

При малых λ подынтегральное выражение в (2.6) близко к нулю. Удерживая линейный по λ член в разложении экспоненты (2.5), находим, что коэффициент B существенно зависит от формы контейнера, в котором содержится коллоид. Если контейнер представляет собой эллипсоид вращения с осью симметрии, параллельной приложенному полю, то

$$B = \frac{1}{2} \left(N - \frac{4\pi}{3} \right) \lambda d^3 \quad (\lambda \ll 1, \xi \gg 1),$$

где N — размагничивающий фактор в направлении оси симметрии эллипсоида $(0 < N < 4\pi)$. Итак, знак B зависит от формы полости и в случае сплющенного эллипсоида (B>0) соответствует отталкиванию между частипами.

В пределе больших λ в (2.6) наиболее важна область $r \sim d$ и $\vartheta \approx 0$ или π . Асимитотическая формула для B:

$$B_{\infty} = -\frac{\pi}{18} \frac{d^3}{\lambda^2} e^{2\lambda} \quad (\xi \gg \lambda \gg 1).$$

Рассмотрев парные корреляции между положениями частиц, де Жен и Пинкус нашли, что в сильных внешних полях при малых концентрациях взвешенных частиц ферромагнитные зерна стремятся образовать цепи, параллельные направлению поля. Среднее число частиц в цепочке равно

$$\mathbf{v}_{\infty} = (1 - 2n \mid B_{\infty} \mid)^{-1}. \tag{2.7}$$

Формула (2.7) имеет смысл, очевидно, пока $2n\mid B_{\infty}\mid\leqslant 1$, т. е.

$$\varphi \leqslant \lambda^2 e^{-2\lambda} \tag{2.8}$$

 $(\varphi=nV-$ объемная концентрация твердой фазы). Условие (2.8) определяет, по-видимому, радиус сходимости разложения по степеням плотности: неравенство $n\mid C\mid <\mid B\mid$, где C— третий вириальный коэффициент, сводится к (2.8), если принять, что $\mid C\mid \sim B^2$, как в простых одноатомных газах. Можно думать, что при нарушении условия (2.8) в жидкости будут образовываться не цепи, а кластеры.

При нулевом внешнем поле и $\lambda\gg 1$ тоже существует некоторое количество цепей. Средняя длина их

$$v_0 = (1 - 2n \mid B_0 \mid)^{-1} \quad (B_0 = B_\infty \lambda^{-1})$$
 (2.9)

меныпе, чем в сильном поле, и ориентированы они случайным образом.

г) Статические магнитные свойства. Магнитные свойства суспензии определяются как состоянием твердых частиц, так и степенью их упорядоченности. При этом процессы, протекающие в твердой фазе, существенно влияют на свойства магнитного коллоида только при температурах, близких к температуре Кюри ферромагнетика или к температурам Нееля и компенсации для ферримагнетиков. Вдали от температуры Кюри каждая однодоменная частица обладает практически постоянным по величине магнитным моментом m.

При $\lambda < 1$ можно пренебречь пространственной корреляцией между отдельными частицами, а если еще и $\phi \ll 1$, то и корреляцией между направлениями их магнитных моментов. Такая однородная и изотропная «ферромагнитная жидкость» ведет себя по отношению к внешнему магнитному полю как парамагнетик, в котором элементарными носителями магнетизма являются взвешенные частицы. Магнитный момент частицы на 4-5 порядков превосходит момент отдельного атома, так что здесь вполне уместен термин «суперпарамагнетизм», введенный Бином 32 для характеристики поведения систем однодоменных частиц в поле.

Ориентации магнитных моментов в направлении приложенного поля препятствует тепловое движение. Учет обоих факторов, как и в классической теории парамагнетизма Ланжевена, приводит к формуле для намагниченности феррожидкости

$$M = M_0 L\left(\frac{mH}{kT}\right),$$

$$M_0 = nm = \varphi M_s, \quad L(\xi) = \operatorname{cth} \xi - \xi^{-1}.$$
(2.10)

Из-за большой величины момента m нелинейные эффекты проявляются довольно рано: значение $\xi \approx 1$ достигается при комнатной температуре уже в полях $H \sim 10^2$ э. Асимптотики функции Ланжевена описывают начальный участок кривой намагничения —

$$\xi \ll 1$$
: $M = \chi_0 H$, $\chi_0 = \frac{nm^2}{3kT} = \frac{2}{\pi} \varphi \lambda$, (2.11)

и приближение к насыщению —

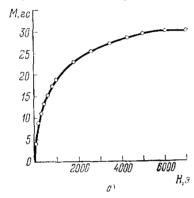
$$\xi \gg 1$$
: $M = M_0 - \frac{nkT}{H}$. (2.12)

При больших объемных концентрациях ферромагнетика ($\phi \sim 0.1$) начальная магнитная проницаемость может заметно отличаться от единицы. В этом случае уже нельзя пренебрегать взаимодействием между магнитными моментами частиц (пространственной корреляцией частиц мы по-прежнему пренебрегаем, считая $\lambda < 1$). Учет диполь-дипольного взаимодействия может быть осуществлен подобно тому, как это делается

в теории Дебая — Онзагера для полярных жидкостей (см. ³³). В результате формула (2.11) заменяется на

$$M = \chi H, \quad \chi = \frac{\mu - 1}{4\pi}$$
 , $\frac{(\mu - 1)(2\mu + 1)}{\mu} = 4\pi \, \frac{nm^2}{kT}$.

Суперпарамагнетизм магнитных коллоидов впервые наблюдал Элмор 34 . Его эксперименты положили начало магнитной гранулометрии 35 методу определения размеров мелких частиц ферромагнетика по магнитным измерениям. Метод основывается на сопоставлении экспериментальной кривой намагничивания с лапжевеновской кривой: при соответствующем выборе «масштабного множителя» m в аргументе функции Ланжевена можно добиться совмещения обеих кривых. Поскольку же магнитный момент однодоменной частицы равен $(\pi/6)~M_sd^3$, то «правильный выбор» m определяет одновременно и средний диаметр частиц. Точнее, можно



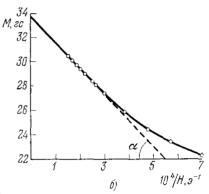


Рис. 3.

определить два средних диаметра 35 : один, d_0 , по данным в слабых полях, другой, d_{∞} , в сильных. Всегда при этом $d_0 > d_{\infty}$, так как в слабых полях главный вклад в намагниченность вносят крупные частицы, легко ориентируемые магнитным полем, а выход на насыщение определяется мелкими частицами, для ориентации которых требуются большие поля.

На рис. З, а приведена экспериментальная кривая намагничивания ³⁶ коллоидной дисперсии магнетита в керосине с небольшим добавлением олеиновой кислоты в качестве стабилизатора. Измерения проводились при температуре 290 °К. На рис. З, δ экспериментальные значения намагниченности представлены в зависимости от H^{-1} . Зависимость эта, как видно из графика, в сильных полях является линейной, в полном согласии с (2.12). Используя формулы (2.11)—(2.12) и данные, извлеченные из графиков рис. З,

$$\begin{split} M_0 &= 33.8 \text{ ec}, \quad \chi_0 \equiv \left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_{H=0} = 8 \cdot 10^{-2}, \\ nkT &\equiv \left(H^2 \frac{\partial M}{\partial H}\right)_{H\to\infty} = \text{tg } \alpha = 2.1 \cdot 10^4 \text{ spe/cm}^3, \end{split}$$

находим: $d_0 = 100 \text{ Å}$, $d_{\infty} = 65 \text{ Å}$.

В феррожидкости, о которой шла речь выше, объемная концентрация твердой фазы, вычисленная по плотности коллоида, равнялась $\varphi_0 = 0.12$. В то же время объемная концентрация, определенная по намагниченности ($\varphi = M_0/M_s$), составляет только 0,075. Одной из причин, способных вызвать такое расхождение ($\varphi/\varphi_0 = 0.62$), могла бы быть зависимость намагниченности насыщения твердой фазы от степени ее дисперсно-

сти. Однако эксперименты разных авторов, обсуждаемые в 37 , не обнаружили уменьшения спонтанной намагниченности субдоменных частиц (диаметром до $20\,\text{ Å}$) по сравнению с намагниченностью массивного материала. Наиболее правдоподобное объяснение различия между ϕ и ϕ_{ρ} содержится в работе Кайзера и Мишкольци 17 : молекулы олеиновой кислоты, адсорбированные на поверхности частиц, могут, вступая в реакцию с $\text{Fe}_{\circ}\text{O}_{4}$, образовывать олеат железа, который магнитными свойствами не обладает. Благодаря этому «магнитный диаметр» каждой частицы уменьшается на величину 2ε , где ε — толщина немагнитного шарового слоя.

Наблюдается ^{17, 36} хорошее согласие экспериментальных кривых намагничивания с теоретическими, рассчитанными по формуле

$$M = M_{\bullet} \left(\varphi_{\rho} / \sum_{i} n_{i} d_{i}^{3} \right) \sum_{i} n_{i} (d_{i} - 2\varepsilon)^{3} L \left[\frac{M_{e}H}{kT} \frac{\pi}{6} (d_{i} - 2\varepsilon)^{3} \right],$$

если принять $\varepsilon = 8,3$ Å (такова постоянная решетки кубической структуры магнетита). Распределение частиц по размерам определялось в указанных работах с помощью электронного микроскопа.

Как уже говорилось выше, сильное дипольное взаимодействие между магнитными зернами ($\lambda \gg 1$) вызывает конденсацию газа частиц с образованием линейных цепей или кластеров. Начальная магнитная восприимчивость суспензии дается в этом случае формулой

$$\chi = \frac{nm^2}{3kT} \frac{1}{1 - 2n \left\{ B_0 \right\} \left(1 - 4\lambda^{-1} \right)} \tag{2.13}$$

с B_0 из (2.9). Квадрат угла между магнитными моментами соседних зерен в цепи по порядку величины равен λ^{-1} . Поэтому при $v_0 < \lambda$ каждая цепочка подобна короткому стержию с магнитным моментом mv_0 , направленным по оси стержня. В рассматриваемом случае ($\lambda \gg 1$, $v_0 < \lambda$) можно пренебречь членом $4\lambda^{-1}$ в (2.13), после чего эта формула принимает вид

$$\chi = \frac{nm^2}{3kT} v_{0\bullet}$$

При $\nu_0 > \lambda$ цепи сильно изогнуты. Для очень больших ν_0 (2 $n \mid B_0 \mid \to 1$) получаем из (2.13)

$$\chi = \frac{nm^2}{3kT} \frac{\lambda}{4}.$$

С ростом напряженности внешнего поля цепи распрямляются и средняя длина их увеличивается (ср. (2.7) и (2.9)). При $\xi \gg \lambda$ все цепи ориентированы по полю ³⁰.

3. ШКАЛА ХАРАКТЕРНЫХ ВРЕМЕН

а) Механизмы релаксации намагниченности. До сих пор, говоря о суперпарамагнетизме суспензий, мы имели в виду лишь их магнитостатические свойства— намагниченность подчиняется закону Ланжевена,— оставляя в сторойе вопрос о кинетике процесса намагничивания.

Какими же характерными временами определяется поведение отдельной ферромагнитной частицы в магнитном поле? Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим простейшую модель суспензии сферических однодоменных частиц одноосного магнитного кристалла, предполагая, что первая константа анизотропии K>0. Направим единичный вектор \mathbf{n} вдоль

оси легчайшего намагничивания одной из частиц. Во внешнем поле Н энергия частицы дается формулой 14

$$U = U_0 - mH \cos \vartheta - KV \cos^2 (\psi - \vartheta) \tag{3.1}$$

(выбор углов указан на рис. 4). Если лишить частицу возможности вращаться (например, заморозив суспензию), то угол ф, в зависимости от направления Н, может принимать любые значения, а угол в, определяющий направление эффективного поля $\mathbf{H}_{\partial \phi \phi}$, находится из уравнения $\partial U/\partial \vartheta = 0$, т. е.

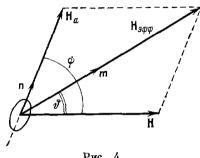


Рис. 4.

$$mH \sin \vartheta = KV \sin 2 (\psi - \vartheta). (3.2)$$

В равновесии т и Нэфф параллельны. Всякое же отклонение магнитного момента частицы от равновесной ориентации сопровождается прецессией вектора т вокруг направления Нафф с ларморовской частотой $\omega_0 = \gamma H_{\theta \dot{\Phi} \dot{\Phi}}$. В отсутствие радиочастотного поля время затухания прецессии ³⁸

$$\tau_0 = (\alpha \gamma H_{\vartheta \dot{\Phi} \dot{\Phi}})^{-1}, \qquad (3.3)$$

где а - безразмерный параметр затухания, используя который можно записать уравнение Ландау — Лифшица 39 в форме

$$\dot{\mathbf{M}} = -\gamma \left[\mathbf{M}, \, \mathbf{H}_{a\phi\phi} \right] - \alpha \, \frac{\gamma}{M} \left[\mathbf{M}, \, \left[\mathbf{M}, \, \mathbf{H}_{a\phi\phi} \right] \right]. \tag{3.4}$$

В обзоре Скроцкого и Курбатова 38 отмечалось, что в большинстве экспериментов по ферромагнитному резонансу выполняется соотношение $\alpha < 0.1$. Андерсен и Донован 40 наблюдали естественный (т. е. в отсутствие внешнего подмагничивающего поля) ферромагнитный резонанс в коллоидной суспензии никеля в диэтилфталате. Значение а, определенное по ширине линии резонансного поглощения, по данным 40 составляет примерно 10⁻². Это значение с мы и примем в дальнейшем для оценок.

Эффективное поле $H_{\vartheta \Phi \Phi}$ складывается из внешнего поля H и поля анизотропии $H_a=2K/M_s$. При $H\ll H_a$ формула (3.3) принимает вид

$$\tau_0 = \frac{M_s}{2\alpha\gamma K} . \tag{3.5}$$

Второе характерное время, определяющее наряду с то скорость протекания релаксационных процессов внутри самой частицы, связано с тепловыми флуктуациями направлений магнитного момента т. Этот механизм релаксации, впервые указанный Неелем 41, специфичен для субдоменных частиц: даже в отсутствие внешнего поля возможно их перемагничивание за счет преодоления энергетического барьера КУ между различными направлениями легкого намагничивания. Вероятность перехода из состояния с $\mathbf{m} = m\mathbf{n}$ в состояние с $\mathbf{m} = -m\mathbf{n}$ пропорциональна $\exp\left(-KV/kT\right)$, т. е. сильно зависит от размеров частицы. Для времени релаксации τ_N , характеризующего процесс Нееля, Браун 42 получил асимптотическую формулу

$$\tau_N = \tau_0 \sigma^{-1/2} e^{\sigma} \quad \left(\sigma \equiv \frac{KV}{kT}\right),$$
(3.6)

справедливую при $\sigma \geqslant 2$, с τ_0 из (3.5). Если длительность процесса измерения намагниченности t' удовлетворяет условию $t' > \tau_N$, то каждая

частица ведет себя как суперпарамагнитная, что проявляется в характерной (ланжевеновской) зависимости намагниченности системы частиц от поля и температуры ³². В обширном обзоре Бина и Ливингстона ³⁷ приводятся подробные сведения о суперпарамагнетизме систем субдоменных частиц, внедренных в твердую немагнитную матрицу: мелкие выделения железа в латуни и кобальта в меди, железные и кобальтовые амальгамы (последние — при температурах ниже точки плавления ртути).

В суспензиях однодоменных частиц равновесная ориентация магнитных моментов в приложенном поле может быть достигнута и путем вращения самих частиц относительно жидкой матрицы. Этот механизм релаксации намагниченности характеризуется броуновским временем вращательной диффузии ³⁸

$$\tau_B = \frac{3V\eta}{kT} \bullet \tag{3.7}$$

Итак, динамика намагничивания суспензий связана с двумя флуктуационными механизмами. Физически они различны: один (неелевский) определяется свойствами ферромагнетика, другой (броуновский) — вязкостью жидкости. В то же время между обоими механизмами имеется определенное сходство: процесс Нееля можно рассматривать ⁴¹ как вращательную диффузию магнитного момента относительно тела частицы, т. е. как некий аналог броуновского вращения частиц в жидкости. Отсюда ясно, что средний квадрат углового смещения вектора m за время t должен равняться (по порядку величины)

$$\langle (\delta\theta)^2 \rangle = 2t \, (\tau_B^{-1} + \tau_N^{-1}),$$

и, следовательно, наиболее важен тот механизм релаксации, который характеризуется меньшим временем вращательной диффузии. Согласно (3.5)—(3.7) равенство характерных времен $\tau_N=\tau_B$ имеет место при

$$\sigma^{-3/2}e^{\sigma} = 6\alpha\gamma\eta M_s^{-1}. \tag{3.8}$$

Это уравнение, разрешенное относительно σ , определяет критический размер для суперпарамагнитного (в смысле Нееля — Бина) состояния частицы, взвешенной в жидкости с вязкостью η . Полагая в (3.8) $\eta = 10^{-2}$, $M_s = 1500$, $\gamma = 1.7 \cdot 10^7$ и $\alpha = 10^{-2}$, находим $\sigma_* \approx 4$. Для критического диаметра d_* частиц железа ($K = 4.8 \cdot 10^5$) и гексагонального кобальта ($K = 4.5 \cdot 10^6$) получаем соответственно 85 и 40 Å при $kT = 4 \cdot 10^{-14}$. В суспензиях частиц с $d > d_*$ (и, следовательно, $\tau_N > \tau_B$) установление равновесной ориентации магнитных моментов обеспечивается в основном броуновским вращением частиц, τ . е. время релаксации намагниченности τ по порядку величины равно *) τ_B . Заметим, что в случае выполнения условий

$$\tau_0 \ll \tau_B \ll \tau_N \tag{3.9}$$

в процессе релаксации намагниченности суспензии внутреннее состояние каждой твердой частицы можно считать равновесным: за время τ_B прецессия магнитного момента успевает затухать, а флуктуационный механизм Нееля «заморожен». Условия (3.9) хорошо выполняются при $\sigma \geqslant 2\sigma_{\star}$.

В случае $\sigma < \sigma_*$ основным является неелевский механизм релаксации, так что $\tau \sim \tau_N$. Наконец, в сильном магнитном поле, когда $H \gg H_a$ (т. е. $\xi \gg \sigma$), τ минимально и равно $\tau_0 = (\alpha \gamma H)^{-1}$.

^{*)} Мы не учитываем пока зависимости τ от H, которая в сильных полях оказывается существенной (см. об этом в гл. 5, б).

б) В ращательное движение частиц и релаксация анизотропии. На частицу в магнитном поле действует момент сил $\partial U/\partial \psi$, где U — приведенное выше выражение для энергии, и момент сил трения 43 —6V $\eta\psi$. Получающееся уравнение движения 44

$$I_0 \psi + 6V \eta \psi + KV \sin 2 (\psi - \vartheta) = 0$$
 (3.10)

 $(I_0$ — момент инерции сферической частицы) должно быть дополнено соотношением, связывающим углы ψ и ϑ . В качестве последнего можно взять (3.2), если пренебречь движением частицы, вызванным прецессией вектора магнитного момента. Такое пренебрежение оправдано тем, что период ларморовской прецессии всегда на несколько порядков меньше характерного времени $\tau_{\rm u}$ поворота частицы.

По аналогичной причине в уравнении движения можно пренебречь инерционным членом по сравнению с вязким, если $\tau_n \gg \tau_s = I_0/6\eta V$. По порядку величины «вязкое время» $\tau_s \sim 10^{-11}$ сек при $d \sim 100$ Å и $\eta \sim 10^{-2}$ г/см сек. Оставшиеся члены уравнения (3.10) описывают процесс релаксации, в результате которого ось легчайшего намагничивания частицы устанавливается параллельно напряженности приложенного поля. В предельных случаях сильных или слабых внешних полей (по сравнению с полем анизотропии $H_a = 2K/M_s$) из (3.10) и (3.2) имеем

$$6V\eta\dot{\psi} = \begin{cases} -KV\sin 2\psi & (H \gg H_a), \\ -mH\sin \psi & (H \ll H_a). \end{cases}$$

Отсюда находим характерное время поворота частицы

$$\tau_{\pi} = \begin{cases} 6\eta/M_s H_a = 3\eta/K & (H \gg H_a), \\ 6\eta/M_s H & (H \ll H_a). \end{cases}$$
(3.11)

Теперь легко убедиться в справедливости принятых выше допущений $\omega_0 \tau_n \gg 1$ и $\tau_n \gg \tau_s$: имеем

$$\omega_0 au_{\mathrm{m}} = \frac{6\eta \gamma}{M_s} \geqslant 10^3$$
 и $au_{\mathrm{m}}/ au_{\mathrm{s}} \geqslant \frac{180\eta^2}{K
ho_s d^2} \geqslant 10^3$

при $M_s \sim 10^3$ ес и $K \sim 10^6$ эрг/см³.

Итак, магнитное поле как ориентирующий фактор играет двоякую роль. Оно, во-первых, создает намагниченность суспензии, ориентируя магнитные моменты частиц. Во-вторых, выстраивая оси легчайшего намагничивания, магнитное поле вызывает анизотропию механических свойств феррожидкости. Поясним последнее утверждение. При гидродинамическом движении среды со скоростью \mathbf{v} каждый элемент жидкости вращается с локальной угловой скоростью $\mathbf{Q} = \mathrm{rot} \ \mathbf{v}/2$. В отсутствие поля с той же угловой скоростью вращаются и взвешенные в жидкости частицы. Магнитное поле затрудняет вращение частиц в тех участках жидкости, где векторы \mathbf{H} и \mathbf{Q} не параллельны. Этот эффект торможения, обусловленный моментами магнитных сил, приводит к анизотропии тензора вязкости (см. гл. 5, в)). Здесь имеется аналогия с плазмой, где магнитное поле (из-за циклотронного вращения заряженных частиц) затрудняет процессы переноса в поперечном направлении, тогда как вдоль поля частицы движутся свободно.

Однако, чтобы индуцированная магнитным полем механическая анизотропия могла проявиться, нужно, чтобы время ее релаксации τ_n было меньше времени вращательной диффузии частиц τ_B (последнее играет здесь ту же роль, что и время свободного пробега частиц плазмы). Условне $\tau_{\alpha}\ll\tau_{\it B}$ с помощью (3.7) и (3.11) приводится к виду $\sigma\gg1$ (при $\xi\gg\sigma$) или $\xi\gg1$ (при $\xi\ll\sigma$). Итак, лишь при

$$\sigma \gg 1 \tag{3.12}$$

анизотропия феррожидкости может оказаться заметной. Наоборот, если выполнено условие

$$\sigma \ll 1, \tag{3.13}$$

обратное предыдущему, суспензия сферических магнитных частиц изотропна в любых внешних полях. В этом случае $\tau_n \gg \tau_B$, и из-за быстрых хаотических (броуновских) вращательных качаний частиц какая-либо преимущественная ориентация их легчайших осей не успевает устанавливаться. Можно сказать, что через время τ_B частица «забывает» о своем упорядоченном вращении, вызываемом магнитным моментом сил.

В следующей главе рассмотрена гидродинамика изотропной (σ « 1)

феррожидкости.

4. КВАЗИСТАЦИОНАРНАЯ ФЕРРОГИДРОДИНАМИКА

а) Уравнения движения феррожидкости. При движении магнитной суспензии в неоднородном поле на каждую частицу действует сила ¹³

$$\mathbf{f} = (\mathbf{m}\nabla) \mathbf{H}. \tag{4.1}$$

Этой силой и стоксовым коэффициентом трения определяется регулярная составляющая скорости броуновской частицы относительно жидкости

$$\mathbf{u} = \frac{M_s d^2}{18\eta} L(\xi) \nabla H. \tag{4.2}$$

Скорость и ничтожно мала — она не превышает 10^{-5} см/сек при $d\sim 10^{-6}$ см и $|\nabla H|\sim 10^3$ з/см. Пренебрегая относительным (поступательным) движением газа частиц и жидкости, можно построить одножидкостную гидродинамику магнитной суспензии.

Состояние движения непроводящей феррожидкости изменяется под действием объемной магнитной силы

$$\mathbf{F} = (\mathbf{M}\nabla) \mathbf{H}, \tag{4.3}$$

которую проще всего получить из (4.1) суммированием по всем частицам, содержащимся в единице объема; в последнем выражении $\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{m}_{i}$ — намагниченность суспензии, \mathbf{H} — магнитное поле, усредненное по объемам, большим по сравнению с n^{-1} . Связь между \mathbf{M} и \mathbf{H} обеспечивается уравнением для $d\mathbf{M}/dt$, описывающим динамику памагничивания, и уравнениями Максвелла

$$div (H + 4\pi M) = 0, \text{ rot } H = 0.$$
 (4.4)

Пользуясь (4.4), можно представить F в виде

$$F_i = \frac{\partial t_{ih}}{\partial x_h}, \quad t_{ih} = \frac{1}{4\pi} \left(H_i B_h - \frac{1}{2} H^2 S_{ih} \right). \tag{4.5}$$

Кроме силы (4.1), на частицу в магнитном поле действует момент сил, который. однако, можно не учитывать, если выполняется неравенство (3.13). Условие $\sigma \ll 1$ означает, что размеры частиц лежат в области глубокого суперпарамагнетизма 32 , т. е. между ориентацией частицы

и направлением ее магнитного момента нет связи. Релаксация намагниченности суспензии к равновесному значению

$$\mathbf{M} = \varphi M_s L(\xi) \frac{\mathbf{H}}{H} \tag{4.6}$$

определяется в этом случае «твердотельным» временем τ_0 , которое несоизмеримо мало по сравнению с любыми гидродинамическими временами. Равенство (4.6) может нарушаться лишь в переменном магнитном поле, когда частота его близка к ларморовской.

Последняя формула и условие отсутствия токов (4.4) позволяют записать

$$\mathbf{F} = (\mathbf{M}\nabla) \ \mathbf{H} = M\nabla H, \tag{4.7}$$

так что гидродинамическими уравнениями для несжимаемой феррожидкости будут 1

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + M \nabla H,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$
(4.8)

 ${
m K}$ этим уравнениям нужно присоединить еще уравнение переноса тепла 43

$$\rho T \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla s \right) = \kappa \Delta T + \frac{\eta}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_h} + \frac{\partial v_h}{\partial x_i} \right)^2, \tag{4.9}$$

где s — массовая плотность энтропии, \varkappa — коэффициент теплопроводности.

Уравнения (4.4), (4.6), (4.8) и (4.9) составляют полную систему уравнений феррогидродинамики Розенцвейга — Нойрингера 1 . Эту гидродинамику, использующую вместо уравнения движения M уравнение «магнитного состояния» (4.6), естественно назвать квазистационарной. Принятые в теории 1 допущения о мгновенной релаксации намагниченности и отсутствии анизотропии выполняются, как было показано, при $\sigma \ll 1$.

б) И зотермические равновесия и течения. В отсутствие сторонних источников тепла течение суспензии в неоднородном магнитном поле можно считать изотермическим, если не учитывать слабых, как правило, внутренних источников, связанных с вязкой диссипацией энергии и магнетокалорическим эффектом 14 — охлаждением магнетика при выходе из поля. При T = const из (4.6), (4.7) следует

$$\mathbf{F} = nkTL(\xi) \nabla \xi = nkT \nabla \ln \frac{\sin \xi}{\xi}, \qquad (4.10)$$

после чего уравнение движения (4.8) принимает стандартный вид уравнения Навье — Стокса, роль давления в котором играет величина

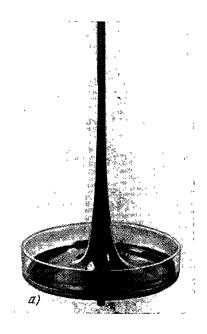
$$p_{\vartheta \Phi \Phi} \equiv p - nkT \ln (\xi^{-1} \operatorname{sh} \xi). \tag{4.11}$$

Потенциальность магнитной силы (4.10) указывает на существование теоремы Бернулли для безвихревых движений феррожидкости ¹. При стационарном течении в поле тяжести имеем

$$p + \rho gz + \frac{\rho v^2}{2} - nkT \ln \frac{\text{sh } \xi}{\xi} = \text{const.}$$
 (4.12)

Эта формула весьма полезна при качественном исследовании распределений скорости и давления в неоднородном магнитном поле. При ${\bf v}=0$

(«феррогидростатика») уравнение (4.12) предсказывает увеличение давления в тех участках жидкости, где поле сильнее. Указанный эффект демонстрируют рис. 5, а и 6 из статьи Розенцвейга 8. На рис. 5, а видна свободная



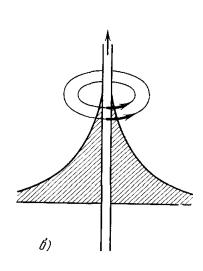


Рис. 5.

поверхность феррожидкости в магнитном поле прямого тока. Последний течет по металлическому стержню, пронизывающему чашку с жидкостью (см. схему на рис. 5, 6).

В неоднородном поле на погруженное в магнитную жидкость немагнитное тело действует дополнительная архимедова сила, направленная в сторону уменьшения напряженности поля. На единицу объема пробного тела действует сила $F_b = -F$. В случае $\xi \ll I$ формула (4.10) упрощается, и тогда имеем

$$\mathbf{F}_b = -rac{\chi}{2} \,
abla H^2, \quad \chi = rac{nm^2}{3kT} \, .$$

Таким образом, немагнитное тело ведет себя в феррожидкости подобно диамагнетику с объемной восприимчивостью $\chi_b = -\chi$ и может быть уравновешено статическими магнитными полями (магнитная подвеска). На рис. 6 по-

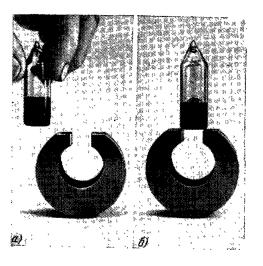


Рис. 6.

казана ампула с феррожидкостью, в которую помещен немагнитный (нейлоновый) шарик. Плотность шарика больше плотности жидкости, и потому на рис. 6, а он не виден. В неоднородном магнитном поле

(рис. 6, δ) давление в нижней части ампулы увеличилось за счет магнитного давления, и шарик всплыл на поверхность.

Рассмотрим еще для примера свободную горизонтальную струю $(p,z=\mathrm{const})$, пересекающую область, в которой создано магнитное поле. Согласно уравнению (4.12) скорость жидкости должна возрастать при вхождении в поле и уменьшаться при выходе из него. С изменением скорости будет меняться, очевидно, и площадь поперечного сечения струи. Это обстоятельство может быть использовано 1,9 для ввода сигналов с помощью магнитного поля в гидравлическую систему управления.

Неоднородное поле может само стать причиной движения жидкости, если магнитное давление не уравновешено гидростатическим (см. (4.11)). При вычислении градиента магнитного давления должны использоваться уравнения Максвелла (4.4), которые вместе с (4.6) накладывают ограничения на возможную геометрию поля. Покажем, например, как может быть организовано плоское течение Пуазейля, вызываемое магнитными силами ⁴⁵.

Пусть слой феррожидкости ограничен неподвижными твердыми поверхностями $z=\pm h$. Уравнению (4.12) удовлетворяет поле с компонентами

$$H_x = Gz$$
, $H_y = 0$, $H_z = H_0 + Gx$. (4.13)

Одномерное стационарное течение со скоростью $v=v_x$ (z) на участке слоя -l < x < l реализуется в том случае, если градиенты напряженности малы в смысле $Gl \ll H_0$. В линейном по Gl/H_0 приближении уравнение (4.4.1) выполняется тождественно, а из уравнения движения (4.8) находим

$$v = \frac{GM(\xi_0)}{2\eta}(h^2 - z^2), \quad \xi_0 = \frac{mH_0}{kT}.$$
 (4.14)

Сравнивая это с обычным пуазейлевским течением, заключаем, что роль перепада давления δp играет здесь величина $M\delta H$. Приведем оценку эффекта. В сильном поле H_0 (т. е. при $\xi_0\gg 1$) можно положить M=30-40 sc; тогда при $\delta H=3\cdot 10^3$ э получаем эффективное $\delta p\approx 0.1$ sc

Интересно сравнить среднюю скорость течения (4.14) $\overline{v} = (3\eta)^{-1}GMh^2$ со скоростью (4.2) движения частиц относительно жидкой матрицы $u = (18\eta\phi)^{-1}GMd^2$. Условие $u \ll \overline{v}$, позволяющее пренебречь относительным движением частиц и жилкости, сводится к неравенству

$$\varphi \gg \left(\frac{d}{h}\right)^2,\tag{4.15}$$

выполнение которого обеспечивается уже ничтожными концентрациями дисперсного ферромагнетика: при диаметре частиц $d\sim 10^{-6}$ см и толщине слоя $h\sim 0.1$ см достаточно иметь $\phi\gg 10^{-10}$, что соответствует $n\gg 10^8$ см⁻³.

в) Устойчивость поверхности в однородном поле. Капиллярно-гравитационные волны. Равновесная поверхность феррожидкости формируется под влиянием трех родов сил: тяжести, поверхностного натижения и магнитных. В случае, когда однородное магнитное поле вертикально, можно указать критическое значение напряженности H_* , выше которого плоская форма поверхности раздела магнитной и немагнитной сред неустойчива по отношению к малым возмущениям. Равновесным рельефом при $H > H_*$ являются неподвижные волны.

Неустойчивость границы между феррожидкостью и атмосферой впервые наблюдали Каули и Розенцвейг 3. Ими же вычислена критическая

намагниченность

$$M_*^2 = \frac{\sqrt{\rho g \alpha}}{2\pi} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\frac{\hat{\mu} \hat{\mu}}{\mu}}} \right), \quad \mu = \frac{B_*}{H_*}, \quad \hat{\mu} \equiv \left(\frac{\partial B}{\partial H} \right)_{H_*}$$
 (4.16)

(а — коэффициент поверхностного натяжения). Величины, относящиеся к атмосфере, будут отмечаться ниже индексом e. В (4.16) положено $\mu_e=1$, $ho_e=0$. Оденим величину M_* . Для феррожидкостей на керосиновой основе 3 можно принять $ho\approx 1$ г/см 3 , lpha=28 дин/см. От величины же $(\mu\mu)$ критическая намагниченность зависит слабо: изменение (µµ) в пределах $(1, \infty)$ не выводит M_* из интервала 5—7 гс. Такие значения M могут достигаться уже на линейном участке кривой намагничивания (см. рис. 3,а), так что в окрестности H_* допустимо считать $\mu = \hat{\mu} = \mathrm{const}\,(H)$. При линейной связи M и H удобно перейти от критической намагни-

ченности (4.16) к критической напряженности:

$$(H_*^e)^2 = (\mu H_*)^2 = 8\pi \frac{\mu (\mu + 1)}{(\mu - 1)^2} \sqrt{\rho g \alpha_*}$$
 (4.17)

Этой же формулой (сваменой H на E и μ на arepsilon) определяется начало неустойчивости свободной поверхности жидкого диэлектрика в постоянном вертикальном электрическом поле 46.

Если жидкость является проводником, то в (4.17) после указанной замены нужно перейти к пределу $\varepsilon \to \infty$: электрическое поле не проникает в проводящую среду. Получающееся при этом условие устой чивости $E_e^2 < 8\pi \sqrt{\overline{\rho g \alpha}}$ было дено впервые Френкелем 47 и подтверждено экспериментами 46, 48.

На рис. 7, взятом из работы ³, приведена фотография свободной поверхности феррожидкости в однородном поле $H = 1.03 \ H_*$, создаваемом катушками Гельмгольца. На снимке видны в плане вершины волн (пики), образующие правильную гексагональную решетку. Эта картина и сама природа рассматриваемого явления заставляют вспомнить кон-

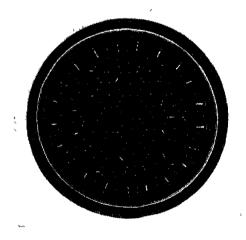
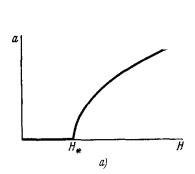


Рис. 7.

вективные ячейки Бенара, возникающие в горизонтальном слое жидкости при сверхкритических градиентах температуры.

Условиям появления ряби на поверхности жидкости можно дать следующее качественное объяснение 49. Пусть в однородном вертикальном поле возникло волнообразное искривление (возмущение) поверхности феррожидкости. Напряженность поля вблизи горбов возмущений увеличивается (силовые линии магнитного поля сгущаются), а на впадинах уменыпается по сравнению с равповесным зпачением. Поэтому возмущение магнитной силы направлено на горбах вверх, а на впадинах вниз, т. е. имеет тенденцию развивать возмущение поверхности. Наоборот, силы поверхностного натяжения и Архимеда направлены в сторону, противоположную смещению участков поверхности из положения равновесия, т. е. препятствуют смещению. Пока искривление поверхности мало, все вызванные им силы — магнитпая, поверхностного натяжения и сила Архимеда — пропорциональны величине смещения. Существенно, что коэффициенты пропорциональности между двумя последними силами и смещением — коэффициенты упругости — зависят только от свойств жидкости. Коэффициент же «упругости» в возмущении магнитной силы не только определяется свойствами жидкости (ее магнитной проницаемостью), но и пропорционален квадрату напряженности приложенного поля. Поэтому при достаточно больших напряженностях дестабилизирующая магнитная сила превышает сумму двух других сил, и смещения поверхности растут, т. е. наступает неустойчивость.



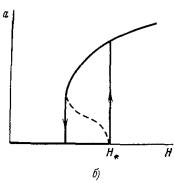


Рис. 8.

Теоретическое исследование характера перехода от плоской поверхности к волнистой было начато Зайцевым и Шлиомисом 50 . Значение $H=H_*$ является точкой бифуркации, выше которой в принципе возможны два типа возбуждения волн — мягкий и жесткий. Принадлежность к тому или иному типу определяется зависимостью амплитуды a искривления поверхности от параметра надкритичности $H-H_*$: в мягком режиме a обращается в нуль вместе с этой разностью (рис. 8, a), в жестком — амплитуда при $H=H_*$ остается конечной. В последнем случае могут наблюдаться гистерезисные явления (см. рис. 8, 6).

Равновесный рельеф границы раздела жидкость — воздух определяется условием баланса сил, действующих на поверхность ¹³:

$$(p-p_e) n_i = (t_{ik} - t_{ik}^e) n_k + \alpha (r_1^{-1} + r_2^{-1}) n_i;$$
 (4.18)

здесь t_{ik} — максвелловский тензор (4.5), **n** — вектор внешней нормали к поверхности феррожидкости. Для двумерных возмущений ⁵⁰ $z = \zeta(x)$ первоначально плоской поверхности z = 0 в последнем члене (4.18), определяющем капиллярное давление, остается один радиус кривизны $r = -(1 + \zeta'^2)^{3/2}/\zeta''$.

Уравнение (4.18) для тангенциальных компонент удовлетворяется тождественно в силу граничных условий

$$\mu H_n = H_n^e, \quad H_{\tau} = H_{\tau}^e \tag{4.19}$$

на поверхности $z=\zeta$. Пользуясь этими условиями и учитывая отсутствие объемных сил (равновесие)

grad
$$\left(p + \rho gz - \frac{\mu - 1}{8\pi}H^2\right) = 0$$
,

запишем нормальную компоненту (4.18) в виде

$$\rho g \zeta - \frac{\alpha \zeta''}{(1+\zeta'^2)^{3/2}} = \frac{\mu-1}{8\pi} H^2 + \frac{(\mu-1)^2}{8\pi} H_n^2 + \text{const.}$$
 (4.20)

Напряженность поля **H** складывается из однородной части $\mathbf{H}_0 = (0, 0, H_0)$ и возмущения $\mathbf{h} = -\nabla \varphi (x, z)$, связанного с искривлением поверхности. Потенциалы φ и φ_e удовлетворяют уравнениям Лапласа. При H_0 , близких к H_* , решение системы (4.19)—(4.20) строилось ⁵⁰ из рядов по степеням амплитуды (квазилинейный метод):

$$\zeta(x) = a \cos kx + a^{2}\beta \cos 2kx + \dots,$$

$$\varphi(x, z) = aAe^{kz} \cos kx + a^{2}Be^{2kz} \cos 2kx + \dots,$$

$$\varphi_{e}(x, z) = aA_{e}e^{-kz} \cos kx + a^{2}B_{e}e^{-2kz} \cos 2kx + \dots,$$

$$H_{0} = H_{*} + a^{2}H^{(2)} + \dots, \quad k = k_{*} + a^{2}k^{(2)} + \dots$$

В линейном приближении определяется критическое поле (4.17) и волновое число $k_* = \sqrt{\rho g/\alpha}$ критического возмущения. В третьем приближении вычисляется $H^{(2)}$, что позволяет найти амплитуду волны:

$$ak_* = \sqrt{F(\mu) \frac{H_0 - H_*}{H_*}}, \quad F(\mu) = \frac{32 (\mu + 1)^2}{42\mu - 11 (\mu^2 + 1)}.$$
 (4.21)

Функция F (μ) меняет знак при $\mu=\mu_*\approx 3.54$, т. е. характер неустойчивости зависит от магнитной проницаемости жидкости. Если $\mu<\mu_*$, то F>0 и неустойчивость мягкая: вблизи H_* высота волн пропорциональна $\sqrt{H_0-H_*}$ (закон Ландау). При $\mu>\mu_*$ из (4.21) следует возможность волнистого рельефа в подкритической области полей — ситуация, характерная для жесткой неустойчивости.

Гайлитис 51 рассмотрел возмущения гексагональной структуры

$$\zeta(x, y) = a \left[\cos kx + \cos \frac{k}{2}(x + y\sqrt{3}) + \cos \frac{k}{2}(x - y\sqrt{3})\right] + O(a^2),$$

что соответствует экспериментально наблюдаемой картине (рис. 7). Результаты первого приближения совпадают с 50 , так как линейная задача вырождена и решением ее при $H_0=H_*$ является любая суперпозиция плоских волн одинаковой длины. Однако уже во втором приближении вырождение снимается и вместо (4.21) получается

$$ak_* = \frac{8(\mu + 1)}{3(\mu - 1)} \frac{H_* - H_0}{H_*}. \tag{4.22}$$

Результат этот, по мнению Гайлитиса, указывает на жесткий характер неустойчивости, невыраженность которого в эксперименте 3 может объясняться малой величиной порогового скачка.

Выше говорилось о равновесной форме поверхности и в этой связи о статических (застывших) волнах. Распространение плоских волн

$$\zeta \sim \exp\left[i\left(\omega t - k_{x}x - k_{y}y\right)\right]$$

малой амплитуды на поверхности магнитной жидкости рассмотрели Зелазо и Мелчер 52 . В однородном поле, нормальном к невозмущенной поверхности ($H=H_z$), связь между ω и k определяется уравнением

$$\omega^2 = gk + \frac{\alpha}{\rho} k^3 - \frac{k^2 H^2}{4\pi \rho} \frac{\mu (\mu - 1)^2}{(\mu + 1)^2} \quad (k^2 = k_x^2 + k_y^2).$$

Отсюда видно, что с увеличением напряженности поля фазовая скорость волн замедляется и при $H=H_*$ наступает рассмотренная выше статическая неустойчивость ($\omega=0$) плоской поверхности по отношению к волнам с $k=k_*$.

В тангенциальном поле $H=H_x$ дисперсионное соотношение имеет вид

$$\omega^2 = gk + \frac{\alpha}{\rho}k^3 + \frac{k_x^2H^2}{4\pi\rho} \frac{(\mu-1)^2}{\mu+1}$$
.

В этом случае наибольшую скорость имеют волны, распространяющиеся вдоль поля $(k_y=0,\,k_x=k)$. Заметим, что тангенциальное поле не оказывает дестабилизирующего влияния на устойчивость поверхности.

г) Термоконвективная неустойчивость. В неоднородном поле механическое равновесие неравномерно нагретой магнитной жидкости в общем случае невозможно. В основе механизма термомагнитной конвекции 53 лежит температурная зависимость намагниченности: при прочих равных условиях сильнее намагничиваются более холодные элементы жидкости, а потому на них действует и большая сила в направлении ∇H^2 . Градиенты магнитной напряженности играют при этом ту же роль, что и поле тяжести в механизме обычной, термогравитационной, конвекции, основанном на тепловом расширении жидкости.

Уравнение равновесия

$$\nabla p = M \nabla H + \rho g \tag{4.23}$$

требует, чтобы магнитная сила и сила тяжести были уравновешены в каждой точке градиентом давления. Применив операцию rot к уравнению (4.23), получим необходимое условие равновесия ^{1, 45, 58}

$$\left[\nabla T, \left(\frac{\partial M}{\partial T}\nabla H + \frac{\partial \rho}{\partial T}\mathbf{g}\right)\right] = 0,$$

из которого видно, что равновесие возможно при $T={
m const}$ либо при вертикальных градиентах температуры и поля. В последнем случае, однако, возникает вопрос об устойчивости возможного равновесия.

Исследование конвективной устойчивости следует начать с преобразования общего уравнения переноса тепла (4.9). Выберем в качестве независимых термодинамических координат p, T и H, так что, например,

$$\nabla s = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_{p, H} \nabla T + \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_{T, H} \nabla p + \left(\frac{\partial s}{\partial H}\right)_{p, T} \nabla H. \tag{4.24}$$

Используя уравнение равновесия (4.23) и термодинамическое тождество

$$d\Phi = -s dT + \frac{1}{\rho} dp + \frac{M}{\rho} dH$$

 $(\Phi - \text{термодинамический потенциал, отнесенный к единице массы}), получаем из (4.24)$

$$\rho \nabla s = \frac{\rho c}{T} \nabla T + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_{p, H} \mathbf{g} + \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_{p, H} \nabla H,$$

где $c \equiv c_{p,\;H} = T \; (\partial s/\partial T)_{p,\;H} \; - \;$ теплоемкость при постоянном поле и давлении. Аналогичным образом преобразуется производная $\partial s/\partial t$, после чего уравнение теплопроводности в неизменяющемся со временем магнитном поле принимает вид

$$\rho c \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla T \right) + \mathbf{v} T \left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{p} \mathbf{g} + \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_{H} \nabla H \right] =$$

$$= \varkappa \Delta T + \frac{\eta}{2} \left(\frac{\partial v_{i}}{\partial x_{h}} + \frac{\partial v_{h}}{\partial x_{i}} \right)^{2}. \tag{4.25}$$

Члены в квадратных скобках описывают адиабатическое изменение температуры из-за 1) сжимаемости ⁴³ и 2) магнетокалорического эффекта ¹⁴:

$$\delta T_1 = \frac{T}{\rho c} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p g \delta z, \quad \delta T_2 = -\frac{T}{\rho c} \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_H \delta H.$$

Механическое равновесие жидкости в поле H(z) при температуре T(z) будет устойчивым, если любые малые возмущения неподвижного

режима, характеризуемые скоростью \mathbf{v} , температурой θ и давлением q, затухают со временем. Линеаризованные по этим величинам уравнения движения (4.8) (к правой части первого из них добавляется $\rho \mathbf{g}$) и теплопроводности (4.25) имеют вид

$$\dot{\rho \mathbf{v}} = \eta \Delta \mathbf{v} + (\beta \rho g + \gamma M G) \, \theta \mathbf{k} - \nabla q, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0,$$

$$\rho c \dot{\theta} = \varkappa \Delta \theta + [\rho c A - T_0 (\beta \rho g + \gamma M G)] \, (\mathbf{v} \mathbf{k}),$$
(4.26)

где k — единичный вектор, направленный вверх, вдоль оси z,

$$A=-rac{dT}{dz}$$
 , $G=-rac{dH}{dz}$, $eta=-rac{1}{
ho}\left(rac{\partial
ho}{\partial T}
ight)_p$, $\gamma=-rac{1}{M}\left(rac{\partial M}{\partial T}
ight)_H$.

Плотность, намагниченность и их температурные коэффициенты β и у берутся при некоторых постоянных средних значениях температуры $T_0 = \langle T(z) \rangle$ и поля $H_0 = \langle H(z) \rangle$.

На границе устойчивости, когда равновесие сменяется стационарным конвективным движением, возмущения пе затухают и не нарастают, т. е. вообще не зависят от времени. Получающиеся из (4.26) при соответствующем выборе единиц ⁵⁴ безразмерные уравнения нейтральных возмущений остаются теми же, что и в задачах обычной конвекции ⁵⁵:

$$\Delta \mathbf{v} + \mathbf{R} \theta \mathbf{k} = \nabla q$$
, $\Delta \theta + (\mathbf{k} \mathbf{v}) = 0$, div $\mathbf{v} = 0$,

но с другой безразмерной комбинацией параметров в качестве числа Рэлея 54 :

$$R = (\varkappa \eta)^{-1} l^4 \left(\beta \rho g + \gamma M G\right) \left[\rho c A - T_0 \left(\beta \rho g + \gamma M G\right)\right]$$
 (4.27)

(l — характерный размер контейнера).

Конвекция возникает при значениях R, больших некоторого критического R_0 . Последнее зависит лишь от геометрии полости и граничных условий на ее поверхности; например, для плоского слоя жидкости, на границах которого v=0=0, число R_0 равно 1708 при горизонтальном и 1558 при вертикальном расположении слоя.

Механическое равновесие изотермической (A=0) жидкости всегда устойчиво: ему соответствуют отрицательные «числа Рэлея»

$$R = -(\beta \rho g + \gamma MG)^2 T_0 l^4 (\kappa \eta)^{-1},$$

так что неравенство R < R₀ заведомо выполняется *). Кризис равновесия наступает при

$$A = \frac{1}{\rho c} \left[\frac{\varkappa \eta R_0}{l^4 (\beta \rho g + \gamma MG)} + T_0 (\beta \rho g + \gamma MG) \right]. \tag{4.28}$$

В полости небольшого размера главными факторами устойчивости являются вязкость и теплопроводность: при

$$l^{4} \ll \frac{\mathsf{R}_{0} \mathsf{k} \eta}{T_{0} (\mathsf{B} \mathsf{p} \mathsf{g} + \gamma M \mathsf{G})^{2}} \tag{4.29}$$

второй (адиабатический) член в (4.28) может быть опущен. Эффективное число Рэлея (4.27) принимает в этом случае более простой вид ⁵⁹:

$$R = \frac{\rho c}{\varkappa \eta} A l^4 (\beta \rho g + \gamma MG).$$

^{*)} Ошибочный вывод о конвективной неустойчивости и «термоконвективном взрыве» изотермической феррожидкости $^{56-58}$ основан на некоррсктиом пренебрежении сжимаемостью в уравнении теплопроводности: в указанных работах не учитывался член с ∇p в (4.24); см. в этой связи 90 и примечание при корректуре в работе 54 .

В другом предельном случае, когда можно пренебречь стабилизирующим влиянием диссипации, пороговое значение температурного градиента определяется «обобщенным критерием Шварцшильда»

$$A = \frac{T_0}{\rho c} (\beta \rho g + \gamma MG).$$

Сравним эффективность гравитационного и магнитного механизмов конвекции. Для суспензий на основе керосина $\beta \rho \approx 5 \cdot 10^{-4}~e/cm^3 epa\partial$. В области комнатных температур можно положить $\gamma \geqslant 10^{-3}$ (т. е. не меньше, чем у твердых ферромагнетиков) и $M \approx 30~ec$. При таких параметрах среды и $G \geqslant 100~e/cm$ магнитный механизм является основным 60 , т. е. $\gamma MG \gg \beta \rho g$. Неравенство (4.29) сводится в этом случае к $l^4 \ll 10^7~G^{-2}$ (мы взяли для оценки $R_0 \sim 10^3$, $\varkappa \sim 10^4~e/cm \cdot cek \cdot epa\partial$, $\eta \sim 10^{-2}~e/cm \cdot cek$).

В предшествующем анализе градиент поля G считался величиной заданной. Такой подход оправдан, если $G\gg G_i$, где G_i — градиент магнитной напряженности, индуцированный температурным градиентом A. Оценим величину G_i . Пусть феррожидкость находится в однородном поле $\mathbf{H}=(0,0,H_e)$ при температуре T (z). Зависимость M (T) приводит к тому, что поле внутри жидкости оказывается неоднородным: из уравнения (4.4.1) следует

$$G_i = -\frac{dH_i}{dz} = 4\pi \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H \frac{dT}{dz} = 4\pi \gamma MA. \tag{4.30}$$

Связанные с G_i магнитные силы заметно влияют на начало конвекции лишь в очень тонких слоях 61 , где критический градиент температуры велик. Условие $\gamma M G_i \ll \beta \rho g$, позволяющее пренебречь связанными с G_i магнитными силами, с помощью (4.28) и (4.30) сводится к

$$l^4 \gg 4\pi \mathsf{R}_0 \left(\frac{\gamma M}{\beta \rho g}\right)^2 \frac{\varkappa \eta}{\rho c}.$$

При указанных выше значениях параметров это неравенство справедливо вплоть до $l=1\,$ мм.

Из конкретных задач неизотермической феррогидродинамики были рассмотрены условия возникновения конвекции в подогреваемом с внутренней стороны цилиндрическом слое жидкости в поле прямого тока 45 , влияние однородного вертикального поля на рэлеевскую неустойчивость горизонтального слоя 61 , а также некоторые вопросы конвективного теплообмена в пограничном слое около холодной стенки в неоднородном магнитном поле 62 .

5. МАГНИТНАЯ СУСПЕНЗИЯ КАК ЖИДКОСТЬ С ВНУТРЕННИМ ВРАЩЕНИЕМ

а) Тензор напряжений и уравнение для намагниченности. Квазистационарная феррогидродинамика рассматривает частицы взвеси как точки, для которых не существует понятия собственного (осевого) вращения. Применимость такой модели к реальным суспензиям ограничена условием (3.13): объем отдельной частицы должен быть мал в смысле $V \ll kT/K$. Учет вращательных степеней свободы частиц, необходимый при выполнении обратного неравенства, связан с весьма радикальным видоизменением уравнений феррогидродинамики.

Макроскопической характеристикой собственного вращения частиц может служить внутренний момент импульса ⁶³ суспензии. Его объемную плотность S в случае малых концентраций одинаковых сферических частиц можно записать как $S=I\omega_s$, где $I=nI_0$ — сумма моментов инерции шариков в единице объема, а ω_s — средняя скорость их упорядоченного вращения *). При гидродинамическом описании суспензии как однородной сплошной среды внутренний момент S должен рассматриваться как независимая функция наряду со скоростью среды, плотностью и давлением.

Для жидкости с внутрепним вращением характерна асимметрия тенвора напряжений $^{64-66}$: законы сохранения импульса и момента выражаются уравненнями

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} , \quad \frac{dS_{ik}}{dt} = \sigma_{ki} - \sigma_{ik},$$

$$\left(\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_k \frac{\partial}{\partial x_k} , \quad S_{ik} = e_{ikl} S_l\right).$$
(5.1)

Включая в тензор напряжений σ_{ik} , вычисленный в 66 , максвелловский тензор t_{ik} из (4.5), получаем для магнитной суспензии

$$\sigma_{ih} = -\left[p + \frac{S}{I}\left(S - I\Omega\right)\right] \delta_{ih} + \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_h} + \frac{\partial v_h}{\partial x_i}\right) + \frac{1}{2\tau_s} \left(S_{ih} - I\Omega_{ih}\right) + \frac{1}{4\pi} \left(H_i B_h - \frac{1}{2} H^2 \delta_{ih}\right), \quad (5.2)$$

$$\Omega_{ih} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_h}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_h}\right) = e_{ihl} \Omega_l.$$

Из (5.1) и (5.2), используя уравнения Максвелла (4.4) и условие несжимаемости среды ${\rm div}\ {\bf v}=0$, находим

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla \left[p + \frac{\mathbf{S}}{I} (\mathbf{S} - I\Omega) \right] + \eta \Delta \mathbf{v} + (\mathbf{M}\nabla) \mathbf{H} + \frac{1}{2\tau_s} \operatorname{rot} (\mathbf{S} - I\Omega), \quad (5.3)$$

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = [\mathbf{M}, \mathbf{H}] - \frac{1}{\tau_s} (\mathbf{S} - I\Omega). \tag{5.4}$$

Полученная система должна быть дополнена еще одним уравнением, связывающим M и S. В магнитных суспензиях между этими величинами нет прямой связи вроде той, например, какая существует в жидкостях с гиромагнитными свойствами 67 , 68 , где $M=\gamma S$. Намагниченность системы «классических» частиц в принципе не зависит от состояния их вращения, так что напрашивающаяся аналогия между внутренним моментом импульса суспензии и спином отнюдь не является полной.

Недостающее уравнение можно получить, руководствуясь следующими простыми соображениями 69 . Введем для фиксированного элемента объема суспензии локальную систему отсчета Σ' , в которой средняя скорость вращения частиц равна нулю. Предположим далее, что намагниченность в системе Σ' описывается линейным релаксационным уравнением

$$\frac{d'\mathbf{M}}{dt} = -\frac{1}{\tau} (\mathbf{M} - \mathbf{M}_0)$$

с \mathbf{M}_0 , определяемым формулой (4.6). Система отсчета Σ' вращается относительно неподвижной системы Σ с угловой скоростью $\mathbf{\omega}_s = \mathbf{S}/I$. Пользуясь известным кинематическим соотношением, связывающим скорости изменения вектора в системах Σ и Σ' , получаем для намагниченности

^{*)} Подразумевается, конечно, усреднение по элементам объема, большим по срависпию с n^{-1} , но малым в сравнении с гидродинамическими размерами.

в неподвижной системе отсчета уравнение

$$\frac{dM}{dt} = \frac{1}{I} [S, M] - \frac{1}{\tau} (M - M_0).$$
 (5.5)

При $\sigma\gg 1$, когда только и требуется учет собственного вращения частиц, выполняются неравенства (3.9) — магнитный момент «вморожен» в тело частицы, т. е. время релаксации намагниченности т определяется броуновским временем τ_B . Последнее имеет порядок величины 10^{-6} сек при комнатной температуре и $d\sim 100$ Å. Что же касается «вязкого» времени τ_s , характеризующего скорость релаксации момента S, то оно (при тех же условиях) на иять порядков меньше τ_B :

$$\frac{\tau_s}{\tau_B} = \frac{\rho_s kT}{30\pi \eta^2 d} \sim 10^{-5}.$$

Малость τ_s позволяет пренебречь в уравнении (5.4) производной dS/dt, которая могла бы оказаться соизмеримой с S/τ_s лишь при таких частотах изменения поля ω ($\sim \tau_s^{-1} \sim 10^{11}~ce\kappa^{-1}$), когда сама модель жестких диполей становится непригодной *) из-за ларморовской прецессии магнитных моментов частиц ⁷¹.

Пренебрегая инерционным членом в (5.4), находим из этого уравнения

$$\mathbf{S} = I\mathbf{\Omega} + \mathbf{\tau}_{s} [\mathbf{M}, \mathbf{H}]. \tag{5.6}$$

Теперь внутренний момент импульса исключается из остальных уравнений системы. Тензор напряжений (5.2) оказывается симметричным:

$$\sigma_{ih} = (\dots) \delta_{ih} + \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_h} + \frac{\partial v_h}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} (M_i H_h - M_h H_i) + \frac{1}{4\pi} H_i B_h =$$

$$= (\dots) \delta_{ih} + \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_h} + \frac{\partial v_h}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} (M_i H_h + M_h H_i), \quad (5.7)$$

как и должно быть при $d{f S}/dt=0$ (см. (5.1)), а уравнение движения магнитного момента (5.5) принимает вид

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = [\mathbf{\Omega}, \mathbf{M}] - \frac{1}{\tau_B} \left(\mathbf{M} - M_0 \frac{\mathbf{H}}{H} \right) - \frac{\tau_s}{I} [\mathbf{M}, [\mathbf{M}, \mathbf{H}]]. \tag{5.8}$$

Последний (релаксационный) член в этом уравнении появился в результате учета вращательных степеней свободы частиц. Как и аналогичный член в уравнении Ландау — Лифшица (3.4), он описывает процесс приближения вектора М к равновесной ориентации, происходящий без изменения длины этого вектора. В итоге времена релаксации продольной и поперечных компонент намагниченности оказываются разными. Подставляя в (5.8)

$$\mathbf{M} = \frac{M_0}{H} \mathbf{H} + \mathbf{\mu} \tag{5.9}$$

и считая жидкость неподвижной (${f v}={f \Omega}=0$), получаем в линейном по ${f \mu}$ приближении уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{\mu}}{\partial t} = -\frac{\mathbf{H} (\mathbf{\mu} \mathbf{H})}{\tau_{||} H^2} - \frac{[\mathbf{H}, [\mathbf{\mu}, \mathbf{H}]]}{\tau_{\perp} H^2}$$
(5.10).

с временами релаксации

$$\tau_{\parallel} = \tau_B, \ \tau_{\perp} = \tau_B \left(1 + \frac{\tau_s \tau_B}{I} M_0 H \right)^{-1} = \frac{2\tau_B}{2 + \xi L(\xi)}.$$
(5.11)

^{*)} Вопреки встречающемуся мнению ⁷⁰, феномепологическое описание магнитных суспензий не может быть проведено общим образом для произвольных внешних воздействий, свойств и степени дисперсности ферромагнетика.

Итак, при феноменологическом учете внутреннего вращения обнаруживается зависимость τ_{\perp} от напряженности поля, тогда как $\tau_{||}$ остается неизменным, равным «затравочной» константе τ_{B} .

б) Зависимость времен релаксации отнапряженности поля. С целью уточнить зависимость времен релаксации намагниченности суспензии от напряженности поля мы приведем здесь, следуя работе ⁷², вывод макроскопического уравнения (5.10) из кинетического уравнения, каковым является для броуновских частиц уравнение Фоккера — Планка.

Во внешнем поле ${\bf H}=(kT/m)$ ξ функция распределения w взвешенных в жидкости частиц по ориентациям их дипольных моментов подчиняется уравнению 73

$$2\tau_B \sin \vartheta \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left[\sin \vartheta \left(\frac{\partial w}{\partial \vartheta} + \xi w \sin \vartheta \right) \right] + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}.$$
 (5.12)

Для дальнейшего удобно записать уравнение (5.12) в векторной форме, вводя в рассмотрение единичный вектор $\mathbf{e}=m/m$ в направлении магнитного момента частицы и оператор «момента импульса» $\hat{\mathbf{I}}=-i$ [e, \mathbf{v}]. В этих обозначениях уравнение (5.12) принимает вид

$$2\tau_{\mathbf{B}}\dot{w} = i\hat{\mathbf{I}} \ (i\hat{\mathbf{I}} - [\mathbf{e}, \xi]) \ w. \tag{5.13}$$

Стационарным нормированным решением уравнения (5.13) является распределение Гиббса

$$w_0 = \frac{\xi}{4\pi \operatorname{sh} \xi} e^{\xi e}, \tag{5.14}$$

а усреднение «микроскопического» вектора е с функцией w_0 дает для равновесной намагниченности суспензии известный результат

$$\mathbf{M}_{0} = nm \langle \mathbf{e} \rangle_{0} = nmL(\xi) \frac{\xi}{\xi}. \tag{5.15}$$

Уравнение движения M должно быть получено путем усреднения е с нестационарной функцией распределения, удовлетворяющей полному уравнению (5.13). Принимая во внимание антиэрмитовость оператора $i\hat{\bf l}={\bf le},\,{\bf \nabla l},\,$ легко получить из (5.13) уравнение для любого момента функции распределения. При этом оказывается, что уравнение для первого момента

$$2\tau_{B} \frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{e} \rangle = -2 \langle \mathbf{e} \rangle - \langle [\mathbf{e}, [\mathbf{e}, \xi]] \rangle$$
 (5.16)

содержит второй момент $\xi_k \langle e_i e_k \rangle$, уравнение для второго момента — третий и т. д., т. е. получается, как обычно, бесконечная система зацепляющихся уравнений. Замыкание можно осуществить в приближении эффективного поля, используя идею известного термодинамического метода Леонтовича 74 .

Будем считать, что в каждый момент времени функция распределения w(t) совпадает по виду со стационарным решением w_0 уравнения Фоккера — Планка, но с заменой в (5.14) истинного поля ξ на некоторое эффективное $\xi_*(t)$. Тогда любое мгновенное значение намагвиченности

$$\mathbf{M} = nmL\left(\xi_*\right) \frac{\xi_*}{\xi_*} \tag{5.17}$$

можно рассматривать 74 как равновесное (ср. (5.15)) при наличии дополнительного поля $\mathbf{v}=\mathbf{\xi}_*-\mathbf{\xi}$. Производя в (5.16) усреднение с введенной

указанным образом функцией распределения, получим уравнение для эффективного поля

$$2\tau_{B} \frac{\partial}{\partial t} \left[L\left(\xi_{*}\right) \frac{\xi_{*}}{\xi_{*}} \right] = -2\xi_{*}^{-1} L\left(\xi_{*}\right) \left(\xi_{*} - \xi\right) - \xi_{*}^{-3} \left[3L\left(\xi_{*}\right) - \xi_{*} \right] \left[\xi_{*}, \left[\xi, \xi_{*}\right] \right].$$

$$(5.18)$$

Рассмотрим случай слабой неравновесности, когда эффективное поле близко к истинному ($\nu \ll \xi$). Для неравновесной части намагниченности $\mu = M - M_0$ находим из (5.15) и (5.17) в линейном по ν приближении

$$\mu = nmL(\xi) \left[\left(\frac{d \ln L(\xi)}{d \ln \xi} - 1 \right) \xi^{-3} \xi(\xi v) + \xi^{-1} v \right]. \tag{5.19}$$

Производя теперь линеаризацию уравнения (5.18) и выражая в нем ν через μ с помощью (5.19), получаем уравнение движения намагниченности

 τ/τ_{B} 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5

Рис. 9.

в форме (5.10) с временами релаксации

$$\tau_{\parallel} = \frac{d \ln L(\xi)}{d \ln \xi} \tau_B,
\tau_{\perp} = \frac{2L(\xi)}{\xi - L(\xi)} \tau_B.$$
(5.20)

Графики этих функций представлены на рис. 9. Там же пунктиром показано т_⊥, найденное ранее (5.11). Заметим, что для времени релаксации перпендикулярных к полю компонент намагниченности формулы (5.11) и (5.20) дают близкие значения при любых ξ: в сильном магнит-

ном поле τ_{\perp} и τ_{\perp}' выходят на общую асимптоту $2\tau_B/\xi = 6\eta/M_s H$ (ср. (3.11)), а при $\xi \ll 1$ имеем

$$\tau_{\perp} = \left(1 - \frac{1}{6} \xi^2\right) \tau_B, \quad \tau_{\perp}' = \left(1 - \frac{1}{10} \xi^2\right) \tau_B.$$

Подобным же образом зависит от поля и т':

$$\tau'_{||} = \tau_B \times \left\{ \begin{array}{ll} \left(1 - \frac{2}{15} \, \xi^2\right) & \quad (\xi \ll 1), \\ \xi^{-1} & \quad (\xi \gg 1). \end{array} \right.$$

в) Вращательная вязкость. При выводе формулы Эйнштейна 75 для вязкости суспензии сферических частиц

$$\eta = \eta_0 \left(1 + \frac{5}{2} \, \varphi \right) \tag{5.21}$$

не учитывается возможность упорядоченного вращения шариков относительно жидкости. Дополнительное внутреннее трение, возникающее при несовпадении скорости вращения частиц ω_s с локальной угловой скоростью вращения жидкости $\Omega = \text{rot } \mathbf{v}/2$, должно проявляться в увеличении эффективной вязкости суспензии. Отметим сразу, что эта дополнительная, «вращательная», вязкость может быть замечена лишь в условиях, когда разность $\Omega - \omega_s$ поддерживается моментами каких-либо сторонних сил, действующими непосредственно на частицы взвеси. В противном случае выравнивание угловых скоростей ω_s и Ω происходит за очень

короткое время $\tau_s \sim 10^{-9} - 10^{-11}$ сек (для шариков диаметром $10^{-5} - 10^{-6}$ см).

Концепция вращательной вязкости позволяет объяснить наблюдаемое в опытах ^{7, 76, 77} увеличение вязкости магнитных суспензий под влиянием магнитного поля. Дадим вначале качественное объяснение этого эффекта.

Рассмотрим движение отдельной сферической частицы в однородном сдвиговом потоке ($\Omega={\rm const}$, плоское течение Куэтта). В отсутствие поля частица свободно «катится» вдоль соответствующей плоскости сдвига с угловой скоростью ω_s , равной Ω . В магнитном поле на частицу действует момент сил [m, H], изменяющий состояние ее вращения. Как следствие этого, возникает момент сил трения $6\eta V (\Omega-\omega_s)$, т. е. магнитное поле «включает» механизм вращательной вязкости *). Последняя достигает своего предельного значения (насыщение), когда «качение» частицы сменяется ее «скольжением»: поле достаточно большой напряженности обеспечивает постоянство ориентации частицы, не давая ей закручиваться вместе с жидкостью.

Ориентирующему влиянию поля (mH) противодействуют гидродинамические силы $(6\eta V\Omega)$ и броуновское движение (kT). Указанные в скобках величины размерности момента сил характеризуют эффективность перечисленных выше факторов. В отсутствие вращательной диффузии полная ориентация магнитных моментов достигалась бы при $mH\gg 6\eta V\Omega$, т. е. для однодоменных частиц — в полях $H\gg 6\eta\Omega/M_s$. Значения $H\sim 1$ э удовлетворяют последнему неравенству при любых разумных значениях Ω . Отсюда ясно, почему теория вращательной вязкости, не учитывающая теплового движения 79 , 80 , предсказывает насыщение вязкости уже в очень слабых полях.

Для коллоидных суспензий всегда выполняется условие

$$\frac{6\eta V\Omega}{kT} = 2\Omega \tau_B \ll 1,$$

так что главное дезориентирующее воздействие на магнитные моменты частиц оказывает вращательное броуновское движение. Насыщение вязкости как функции поля должно наступать, следовательно, при $mH\gg kT$, т. е. при $\xi\gg 1$.

Количественная теория вращательной вязкости (с учетом броуновского движения) дана в работе ⁶⁹.

Рассмотрим стационарное течение суспензии в однородном магнитном поле. В покоящейся жидкости стационарным решением уравнения (5.8) является $\mathbf{M} = \mathbf{M}_0$. Намагниченность движущейся суспензии отличается, конечно, от \mathbf{M}_0 , однако разность $\mathbf{M} - \mathbf{M}_0 \equiv \mathbf{\mu}$ мала в меру малости $\Omega \tau_B$. Считая $\mathbf{\mu}$ и $\Omega \tau_B$ величинами одного порядка, находим из (5.8) в линейном приближении

$$\mu = \tau_{\perp} \frac{M_0}{II} [\Omega, H]. \tag{5.22}$$

С учетом последней формулы, намагниченность суспензии можно представить в виде $M_i = \chi_{ih} H_h$, где

$$\chi_{ik} = \frac{M_0}{H} (\delta_{ik} - \tau_{\perp} \Omega_{ik}).$$

^{*)} Если частица не шарообразна, то поле затрудняет ее обтекание уже симметричным (безвихревым) потоком. В этом случае появляются дополнительные коэффициенты вязкости, зависящие от формы частиц и напряженности поля. Для суспензии эллипсоидов вращения, намагниченных вдоль осей симметрии, тензор вязкости вычислен в работе 78.

Как видно, антисимметричная часть тензора магнитной восприимчивости определяется завихренностью течения.

Исключая М из выражения (5.7) для тензора напряжений, получаем

$$\sigma_{ih} = (\ldots) \delta_{ih} + \eta_{ihlm} \frac{\partial v_l}{\partial x_m} + \frac{1}{4\pi} H_i B_h$$
 (5.23)

с тензором вязкости, состоящим из изотропной (обычной) части с коэффициентом у и анизотропной

$$\eta_{iklm}^{a} = \frac{1}{4} \tau_{\perp} M_{0} H^{-1} \left[\delta_{il} H_{k} H_{m} - \delta_{im} H_{k} H_{l} - \delta_{kl} H_{i} H_{m} + \delta_{km} H_{i} H_{l} \right]. \quad (5.24)$$

Тензор η_{iklm}^a антисимметричен по индексам $i,\ k$ и $l,\ m$ и симметричен по отношению к перестановке пар этих индексов.

Вычислим силу трения, действующую на обтекаемую жидкостью твердую поверхность. Введем локальную систему координат, направив ось x вдоль скорости течения и ось z по нормали к поверхности. На единицу поверхности действует сила $f_x = \sigma_{xz} - \sigma'_{xz}$, где σ'_{ik} — максвелловский тензор напряжений в твердом теле. Принимая во внимание граничные условия непрерывности H_x и B_z , получим из (5.23) — (5.24)

$$f_x = \left[\eta + \frac{1}{4} \tau_{\perp} \frac{M_0}{H} (H_x^2 + H_z^2) \right] \frac{\partial v_x}{\partial z}.$$

Величину, входящую в это выражение в сумме с обычной вязкостью, следует рассматривать как вращательную вязкость

$$\eta_r = \frac{1}{4} \tau_\perp M_0 H \sin^2 \alpha, \qquad (5.25)$$

где α — угол между векторами **H** и Ω . Обращение η_r в нуль при $\mathbf{H}||\Omega$ объясняется просто: ориентация магнитного момента частицы вдоль **H** не мешает ей вращаться со скоростью Ω в том же направлении.

В слабых полях $\tau_{\perp} \approx \tau_B$ и разложение η_r по степеням ξ начинается с членов второго порядка:

$$\eta_r = \frac{1}{4} \eta \varphi \xi^2 \sin^2 \alpha \quad (\xi \ll 1). \tag{5.26}$$

В сильном поле, когда $\tau_{\perp} \approx 2\tau_B/\xi$, вращательная вязкость достигает предельного значения *)

$$\eta_r = \frac{3}{2} \eta \varphi \sin^2 \alpha \quad (\xi \gg 1). \tag{5.27}$$

Вообще, формула

$$\eta_{r}(\xi) = \frac{3}{2} \eta \varphi F(\xi) \sin^{2} \alpha \qquad \left(F(\xi) = \frac{\xi - \ln \xi}{\xi + \ln \xi} \right), \qquad (5.28)$$

получающаяся из (5.25) после подстановки τ_{\perp} из (5.11), годится для любых ξ . Зависимость от поля, близкая к F (ξ), сохраняется и при замене τ_{\perp} на τ_{\perp}' из (5.20).

Включая η_r в формулу Эйнштейна (5.21), имеем с точностью первого порядка по концентрации

$$\eta(\xi) = \eta_0 \left[1 + \frac{\varphi}{2} \left(5 + 3 \frac{\xi - \ln \xi}{\xi + \ln \xi} \sin^2 \alpha \right) \right].$$
(5.29)

^{*)} Напомним, что этот результат ($\eta_r^{\max}/\eta \sim \varphi$) относится к суспензиям ферромагнитных частиц ($\sigma \gg 1$) с «вмороженными» магнитными моментами ($\sigma \gg \xi$). Для суспенвий суперпарамагнитных частиц ($\sigma \ll 1$) вместо (5.27) получается ⁸¹ $\eta_r^{\max}/\eta \sim \sigma^2 \varphi$. Малость этой величины оправдывает применимость к таким суспензиям изотронной модели Розенцвейга — Нойрингера ¹ (с одним коэффициентом вязкости).

В экспериментах Мак-Тэйга 76 вязкость магнитного коллоида (частицы кобальта в толуоле) измерялась по времени протекания через круглый капилляр (метод Пуазейля), помещенный в однородное магнитное поле. Экспериментальные точки, представленные на рис. 10, получены при двух различных ориентациях поля относительно скорости течения: кривая I соответствует $H||\mathbf{v}|$, кривая $2 - H \perp \mathbf{v}$. В течении Пуазейля изолинии вихря скорости ($\Omega = \mathrm{const}$) представляют собой концентрические окружности в плоскости сечения капилляра. Поэтому в случае I угол $\alpha = \pi/2$ в каждой точке потока, а в случае 2 он принимает

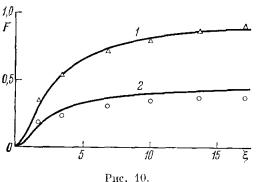
все значения от 0 до 2π , так что $\sin^2 \alpha = 1/2$.

Согласно (5.28) должно быть, следовательно,

$$\eta_r^{(1)} = \frac{3}{2} \eta \varphi F(\xi), \quad \eta_r^{(2)} = \frac{1}{2} \eta_r^{(1)}.$$
(5.30)

Рассчитанные по этим формулам кривые рис. 10 находятся в согласии с опытом.

Заметим, что в случае 2, когда локальная вязкость зависит от α , течение теряет осе-



вую симметрию 82 . Однако интенсивность вызванных полем «вторичных» течений очень мала: для вычисления поправок к скорости основного движения нужно в разложении μ по степеням $\Omega \tau_B$ сохранить отброшенные в (5.22) члены более высокого порядка. Интересно, что при учете этих членов тензор напряжений становится нелипейной функцией градиентов скорости, т. е. суспензия приобретает в магнитном поле неньютоновские свойства 69 , 80 , 83 , 84 . Следует иметь в виду, однако, что существует и другая, куда более серьезпая причина неньютоновости магнитных суспензий. Речь идет о дипольном взаимодействии частиц, способном, как отмечалось выше, приводить даже к образованию ценпых агрегатов. На фоне последнего эффекта пеньютоновость, связанная с конечностью величины $\Omega \tau_B$, едва ли может быть замечена.

г) Увлечение суспензии вращающимся полем. Увлечение пепроводящей жидкости вращающимся магнитным полем впервые паблюдал Цветков 85 в опытах с *п*-азоксианизолом. Молекулы этого жидкого кристалла обладают диамагнитной апизотропией и стремятся расположиться в поле так, чтобы наибольшая длина молекулы была параллельна напряженности поля.

В ферромагнитных суспензиях ротационный эффект выражен, конечно, гораздо сильнее ⁴. Магнитные моменты частиц «следят» за направлением поля, так что вращение поля вызывает вращение частиц. Благодаря трению, испытываемому при подобном вращении каждой частицей, жидкость не остается в покоящемся состоянии, по постепенно начинает вращаться. Происходит, таким образом, превращение части внутреннего момента импульса суспензии в видимое (гидродинамическое) ее движение. Механизм этого превращения весьма любонытен.

Каждая частица, увлекая близлежащие слои вязкой жидкости, становится центром микроскопического вихря, размеры которого не превосходят среднего расстояния между частицами. С точки зрения механики сплошной среды такое движение суспензии еще не является гидродинамическим. Усреднение микровихрей по физически малым элементам объема

также не приводит к результирующему гидродинамическому движению в том простом случае, когда частицы равномерно распределены в жидкости и вращаются с одинаковой угловой скоростью ω_s . «Макроскопический» вихрь $\Omega = \mathrm{rot} \ \mathrm{v}/2$ возможен лишь при неоднородном пространственном распределении внутреннего момента импульса $S = I\omega_s$. Это хорошо видно из уравнения движения жидкости (5.3), где член с rot S представляет собой плотность объемной силы. Здесь имеется аналогия с амперовской моделью, объясняющей магнитный момент магнетиков молекулярными токами (см., например, книгу Тамма 86). Плотность молекулярных токов пропорциональна rot M. Если же M = const, то элементарные токи смежных «молекул» взаимно компенсируются. То же происходит и с микровихрями при S = const.

Распределение внутреннего момента импульса в любом ограниченном объеме оказывается неоднородным уже из-за того, что вблизи неподвижных твердых границ полости вращение частиц затруднено. Чтобы удовлетворить граничным условиям для S *), необходимо включить в уравнение (5.4) член D_s Δ S, где D_s — коэффициент диффузии внутреннего

В работе 88 полная система уравнений теории решена для случая, когда суспензия заполняет длинный цилиндр радиуса R, помещенный в однородное вращающееся поле, перпендикулярное к оси цилиндра. Мы не приводим здесь результатов расчета, так как в некоторых деталях они расходятся с экспериментальными результатами Московитца и Розенцвейга ⁴ и особенно Бибика и др. ⁸⁹. Укажем лишь характер распределения скорости и внутреннего момента по сечению цилиндра. Отличные от нуля компоненты этих векторов (v_{ω} и S_z в координатах r, φ, z) выражаются через функции Бесселя от мнимого аргумента I_n (r/δ) , где $\delta = \sqrt{D_s \tau_s}$. Сравнение расчетных и опытных данных дает для диффузионной длины δ значение порядка 10^{-4} *см*, так что выполняется условие $R/\delta \gg 1$. В этом случае, как видно из асимптотики функций Бесселя

$$\frac{I_n(r/\delta)}{I_n(R/\delta)} \approx e^{-(R-r)/\delta},$$

градиенты скорости и момента сосредоточены в узком пристеночном слое толщины δ (пограничный слой). Во всем же остальном объеме цилиндра (в ядре) жидкость вращается как твердое тело, а внутренний момент импульса постоянен.

Отдел физики полимеров Уральского научного центра АН СССР, г. Пермь

цитированная литература

- J. L. Neuringer, R. E. Rosensweig, Phys. Fluids 7, 1927 (1964).
 R. E. Rosensweig, J. W. Nestor, R. S. Timmins, AIChE Eng. Symp. Series, No. 5, 104 (1965).
 M. D. Cowley, R. E. Rosensweig, J. Fluid Mech. 30, 671 (1967).
 R. Moskowitz, R. E. Rosensweig, Appl. Phys. Lett. 11, 301 (1967).
 E. L. Resler, R. E. Rosensweig, AIAA Journ. 2, 1418 (1964); Trans. ASME A89, 300 (1967).

- A89, 399 (1967).
 6. R. E. Rosensweig, AIAA Journ. 4, 1751 (1966); Nature 210, 613 (1966).
 7. R. E. Rosensweig, R. Kaiser, G. Miskolczy, J. Colloid Interface Sci. 29, 680 (1969).
- 8. R. E. Rosensweig, Intern. Sci. Tech., No. 55, 48 (1966).

^{*)} Различные варианты граничных условий обсуждаются в работе 67.

9. R. E. Rosensweig, New Scientist 29, 146 (1966) (см. перевод: УФН 92, 339 (1967)); Indust. Res. 12, 36 (1970).

 Н. С. Акулов, Ферромагнетизм, М.— Л., ОНТИ, 1940.
 В. Г. Могилевский, Электромагнитные порошковые муфты и тормоза, М.— Л., «Энергия», 1964. 12. A. R. V. Bertrand, Rev. Inst. franc. petrole 25, 16 (1970). «Эпергия», 1964.

- 13. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, М., Физ-

Л. Д. Лапдау, Е. М. Лифшиц, электродинамика сплошных сред, м., элематиз, 1957.
 С. В. Вонсовский, Магнетизм, М., «Наука», 1971.
 W. F. Brown, Jr., Ann. N.Y. Acad. Sci. 147, 463 (1969).
 Е. Р. Wohlfarth, Advan. Phys. 8 (1959) (см. перевод: Э. Вольфарт, Магнитно-твердые материалы, М.— Л., Госэнергоиздат, 1963).
 R. Kaiser, G. Miskolczy, J. Appl. Phys. 41, 1064 (1970).
 W. C. Elmore, Phys. Rev. 54, 309 (1938).
 J. R. Thomas, J. Appl. Phys. 37, 2914 (1966).
 P. H. Hess, P. H. Parker, J. Appl. Polym. Sci. 10, 1915 (1966).
 E. H. Mosroboň, Э. Я. Блум, Магнит. гидродип., № 4, 18 (1971).
 F. E. Luborsky, J. D. Opic, J. Appl. Phys. 34, 1317 (1963).
 P. G. Shepherd, J. Popplewell, S. W. Charles, J. Phys. D3, 1985

23. P. G. Shepherd, J. Popplewell, S. W. Charles, J. Phys. D3, 1985 (1970).

24. Р. G. Shepherd, J. Popplewell, Phil. Mag. 23, 239 (1971). 25. И. Я. Каган, В. Г. Рыков, Е. И. Янтовский, Магнит. гидродин., № 2, 155 (1970).

- 26. Е. Е. Бибик, И. С. Лавров, Коллонд. ж. 27, 652 (1965). 27. Б. В. Дерягин, Л. Д. Ландау, ЖЭТФ 11, 802 (1941); 15, 663 (1945). 28. Е. Е. Бибик, И. С. Лавров, О. М. Меркушев, Коллонд. ж. 28, 631 (1966).
- 29. P. Goldberg, J. Hansford, P. J. van Heerden, J. Appl. Phys. 42,
- 3874 (1971).
 30. P. G. de Gennes, P. A. Pincus, Phys. kondens. Mater. 11, 189 (1970). 31. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифинц, Статистическая физика, М., «Наука», 1964.
- 32. С. Р. В e a n, J. Appl. Phys. 26, 1381 (1955): I. S. I a c o b s, C. Р. В e a n, сборник «Magnetism», Ed. G. Т. Rado and H. Suhl, v. III, N.Y., Academic Press, 1963.
- 33. Я. И. Френкель, Кинетическая теория жидкостей, Собрание избр. трудов,

33. Н. И. Френкель, кинетическая теория жидкостей, соорание изор. трудов, т. 3, М.— Л., изд. АН СССР, 1952.
34. W. C. Elmore, Phys. Rev. 54, 1092 (1938).
35. С. Р. Веап, І. S. Јасов, Ј. Аррl. Phys. 27, 1448 (1956).
36. Е. Е. Бибик, Б. Я. Матыгуллин, Ю. Л. Райхер, М.И. Шлиомис, Магнит. гидродин., № 1, 68 (1973).
37. С. Р. Веап, Ј. D. Livingston, J. Appl. Phys. 30, 1208 (1959).
38. Г. В. С. г. од и ий. И. В. К. и беле од оборужи «Фергосодукический просметский прос

- 38. Г. В. Скроцкий, Л. В. Курбатов, сборник «Ферромагнитный резонанс», под ред. С. В. Вонсовского, М., Физматгиз, 1961.

 39. L. D. Landau, E. M. Lifschitz, Phys. Zs. Sowjetunion 8, 153 (1935) (см. перевод: Л. Д. Лапдау, Собрание трудов, т. 1, М., «Наука», 1969, стр. 128).

- 40. J. D. A nderson, B. Donovan, Proc. Phys. Soc. B73, 593 (1959).
 41. L. Neel, C. R. Ac. Sci. 228, 664 (1949); Ann. Geophys. 5, 99 (1949).
 42. W. F. Brown, Jr., Phys. Rev. 130, 1677 (1963); J. Appl. Phys. 34, 1319 (1963).
 43. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика силошных сред., М., Гостехиздат,
- 44. J. J. Newman, R. B. Yarbrough, J. Appl. Phys. 39, 5566 (1968); IEEE Trans. Magn. Mag-5, 320 (1969).
 45. В. М. Зайцев, М. И. Шлиомис, Ж. ПМТФ, № 1, 41 (1968).

46. J. R. Melcher, Field-coupled Surface Waves, Cambridge, Mass., The M.I.T. Press, 1663.
47. Я. И. Френкель, ЖЭТФ 6, 347 (1986).
48. G. I. Тауlог, А. D. McEwan, J. Fluid. Mech. 22, 1 (1965).

- 49. С. І. Таутот, А. Л. М. С. Е. Wan, J. Fluid. Mech. 22, 1 (1865).
 49. В. А. Брискман, Г. Ф. Шайдуров, Уч. зап. Пермского ун-та, № 216 (Гидродинамика, вып. 2), 229 (1970).
 50. В. М. Зайцев, М. И. Шлиомис, ДАН СССР 188, 1261 (1969).
 51. А. Гайлитис, Магнит. гидродин., № 1, 68 (1969).
 52. R. Е. Zelazo, J. R. Melcher, J. Fluid Mech. 39, 1 (1969).
 53. Д. И. Агейкин, ДАН СССР 74, 229 (1950).
 54. М. И. Шлиомис, Изв. АН СССР (Мех. жидк. и газа), № 6, 130 (1973).
 55. Г. З. Гершупи, Е. М. Жуховицкий, Конвективная устойчивость несжимаемой жильости. М... «Наука». 1972.

- маемой жидкости, М., «Наука», 1972. 56. Б. М. Берковский, В. Г. Баштовой, Магнит. гидродин., № 2, 24 (1971). 57. В. Г. Баштовой, Б. М. Берковский, А. К. Синицын, ibid., № 1, 12 (1972).

58. Б. М. Берковский, В. Г. Баштовой, Доклады IV Всесоюзного совещания по тепло- и массообмену, т. І, часть 2, Минск, ИТМО АН БССР, 1972, стр. 385; ная по тепло- и массоомену, т. 1, часть 2, минск, игмо Ан БССР, 1972, стр. 385; Б. М. Берковский, Автореферат докт. диссертации (Минск, 1971).
59. D. P. Lalas, S. Carmi, Phys. Fluids 14, 436 (1971).
60. R. A. Curtis, ibid., p. 2096.
61. B. A. Finlayson, J. Fluid Mech. 40, 753 (1970).
62. J. L. Neuringer, Intern. J. Non-linear Mech. 1, 123 (1966).
63. B. C. Сорокин, ЖЭТФ 13, 306 (1943).
64. С. де Гроот, П. Мазур, Неравновесная термодинамика, М., «Мир», 1964.
65. Э. П. Азрол А. Н. Булукин Е. В. Курининский ПММ 29, 297 (1965).

- 65. Э. Л. Аэро, А. Н. Булыгин, Е. В. Кувшинский, ПММ 29, 297 (1965). 66. М. И. Шлиомис, ЖЭТФ 51, 258 (1966). 67. М. И. Шлиомис, ЖЭТФ 53, 1125 (1967). 68. Ю. Каган, Л. А. Максимов, ЖЭТФ 59, 2059 (1970). 69. М. И. Шлиомис, ЖЭТФ 61, 2411 (1971). 70. В. М. Суязов, Ж. ПМТФ, № 2, 12 (1970); № 4, 40 (1970); Магнит. гидродин., № 2, 3 (1971).
- 71. C. Caroli, P. A. Pincus, Phys. kondens. Mater. 9, 311 (1969). 72. М. А. Марценюк, Ю. Л. Райхер, М. И. Шлиомис, ЖЭТФ 65, 834 (1973).

- 73. М. А. Леонтович, Статистическая физика, М., Гостехиздат, 1944.
 74. М. А. Леонтович, Введение в термодинамику, М., Гостехиздат, 1956.
 75. А. Еinstein, Ann. d. Phys. 19, 298 (1906); 34, 591 (1911) (см. перевод: А. Эйнштейн, Собрание научных трудов, т. 3, М., «Наука», 1966, стр. 75).
 76. Ј. Р. МсТадие, Ј. Chem. Phys. 51, 133 (1969).
 77. Е. Н. Мозговой, Э. Я. Блум, А. О. Цеберс, Магнит. гидродин., № 1,
- 61 (1973).

- 61 (1973).
 78. М. А. Марценюк, Ж. ПМТФ, № 5, 75 (1973).
 79. W. F. Hall, S. N. Busenberg, J. Chem. Phys. 51, 137 (1969).
 80. Н. Brenner, J. Colloid Interface Sci. 32, 141 (1970).
 81. А. О. Цеберс, Магнит. гидродин., № 3, 33 (1973).
 82. L. G. Leal, J. Fluid Mech. 46, 395 (1971).
 83. Н. Brenner, М. Н. Weissman, J. Colloid Interface Sci. 41, 499 (1972).
 84. А. С. Levi, R. F. Hobson, F. R. McCourt, Canad. J. Phys. 51, 180 (1973).
- 85. В. Н. Цветков, Acta Physicochimica URSS 10, 555 (1939).

- 86. И. Е. Тамм, Основы теории электричества, М., Гостехиздат, 1957.
 87. D. W. Condiff, J. S. Dahler, Phys. Fluids 7, 842 (1964).
 88. В. М. Зайцев, М. И. Шлиомис, Ж. ПМТФ, № 5, 11 (1969).
 89. Е. Е. Бибик, А. А. Симонов, ИФЖ 22, 343 (1972); Е. Е. Бибик, В. Е. Скобочкин, ibid., стр. 687.
 90. В. Г. Баштовой, Б. М. Берковский, Магнит. гидродин., № 3, 3 (1973).