517.5(049.3)

ФИНИТНЫЕ ФУНКЦИИ

Я. И. Хургин, В. П. Яковлев. Финитные функции в физике и технике. М. «Наука», 1971, 408 с.

Рецензируемая монография, несмотря на то, что она написана математическим языком и практически содержит только формулы, адресована широким кругам физиков и техников и ориентирована на разнообразные физические и технические приложения. По существу, в ней рассматривается одна из ветвей давно изучаемой проблемы о связи между функцией-оригиналом и функцией-изображением по Фурье, т. е. о связи между временно́й функцией и ее спектром, и о возможностях использования свойств этой связи в оптике, технике связи, голографии, антенной технике и др. приложениях.

Как это ни странно, но до сих пор практически не вскрыты закономерности, характеризующие связи между свойствами временно́й функции и ее спектра. Известные соотношения устанавливают только самые простые, лежащие на поверхности закономерности (при дифференцировании, интегрировании, свертке и т. п.); некоторым исключением, быть может единственным, является теорема С. Н. Бернштейна, дающая оценку (и только оценку!) полосы сигнала по соотношению максимальных значений функции и ее первой производной, полученная автором, кстати сказать, для рядов, а не для интеграла Фурье.

Неизвестны работы, в которых, например, обсуждался бы вопрос об изменениях периодической функции при тех или иных изменениях коэффициентов ряда Фурье или соответственно об изменениях непериодической функции при тех или иных изменениях ее спектральной функции. Вместе с тем ясно, что связи, определяющие такие изменения, существуют, и их знание принесло бы огромную пользу. Вероятно, для установления подобных связей нужны другие подходы в оценке свойств функции, быть может, такие, как оценки по модулю Липшица, по модулю непрерывности, по порядку роста и др.

Изучению одной из таких связей (как выяснилось, уже давно привлекавшей внимание математиков, но в других аспектах) и посвящена рецензируемая монография. Основу этой связи составляет тот факт, что если спектр функции является финитным, то соответствующая ему временна́я функция представляет собой аналитическую функцию, *и не просто аналитическую, а аналитическую в неограниченной области*, т. е. целую функцию, да еще характеризуемую порядком роста, зависящим от «интервала финитности»; для полного описания целой функции вовсе не нужно знать все ее значения, достаточно располагать определенным набором выборочных значений. Авторы показали, что глубокое изучение этого факта позволяет установить ряд важных следствий, открывающих широкие возможности для их практического применения. Сами авторы на этой основе получили ряд весьма важных новых результатов, а также дали «естественные» объяснения некоторым «старым» результатам.

Главным является то, что можно использовать известные фундаментальные теоремы теории функций комплексной переменной и, в частности, теории целых функций. В первую очередь эти теоремы относятся к связи между порядком роста функции и шириной «интервала финитности» ее изображения Фурье; отсюда и следует количественная оценка набора выборочных значений, необходимых для полного описания функции.

Нет необходимости перечислять результаты авторов: это ярко и обстоятельно сделано в предисловии и введении и, конечно, в самой книге. Можно разве отметить, что почти в каждом разделе авторы не только излагают фактический материал, составляющий решение данной конкретной задачи, но и указывают пути его развития и зачастую формулируют новые задачи. В частности, представляется очень перспективным применение развиваемого аппарата в задачах финитного управления; в теории сигналов также еще далеко не все исчерпано уже выполненными работами. В первую очередь можно указать на то, что из возможных систем функций с двойной ортогональностью пока изучались только «вытянутые сфероидальные волновые функции»; весьма интересны вопросы описания сигналов отсчетами по производным, вопросы аппроксимации и др.

Книга очень полезна для широких кругов специалистов и в первую очередь для специалистов, связанных с проблематикой связи и управления. Книга написана сочным и понятным языком, который вместе с тем доступен только читателям с хорошей математической подготовкой. В этом плане авторам можно сделать упрек, так как добавление очень небольших геометрических и словесных иллюстраций и толкований отдельных утверждений и формул могли бы существенно расширить возможный круг читателей; некоторые страницы написаны так, как будто они адресуются читателям-математикам, а не техникам и физикам. С другой стороны, столь большой и насыщенный материал надо излагать очень компактно и поэтому, быть может, и нужно требовать от читателя, чтобы он к такой книге относился с должной серьезностью и пониманием необходимости затраты сил, которая будет вознаграждена.

Следует еще сказать, что книга очень соответствует духу нашего времени, когда устройства становятся все сложнее и сложнее (но благодаря технологическим достижениям все доступнее и доступнее для реализации) и их возникновение и становление уже не могут быть следствием одной работы «изобретательного ума»: эти устройства «рождаются на кончике пера» и являются следствием новых количественных интерпретаций глубинных связей процессов, и в основе всех этих современных подходов лежат пласты математических теорий.

Рецензируемая монография представляет собой весьма расширенное издание первой книги авторов (Методы теории целых функций в радиофизике, теории связи и оптике, М., Физматгиз, 1962), которая была очень хорошо принята читателями; нет сомнений в том, что и эта книга получит у них высокую оценку.

Высокую оценку книги следует сопроводить рядом критических замечаний, часть из которых, может быть, дискуссионна. Среди более или менее принципиальных замечаний хотелось бы отметить следующие.

1. По существу, в книге дано систематическое изложение строгой теории дискретизации непрерывных функций в приложении к различным задачам физики и техники, причем эти задачи формулируются как в постановке анализа, так и в постановке синтеза. Однако такого четкого определения предметности содержания книги в тексте нет.

2. На стр. 18 авторы пишут: «...Не только корректность решения уравнения (0.1), но и вопросы о разрешимости и единственности решения в оптических задачах неоднократно подвергались сомнению...», и далее приводится ссылка на работу Г. Г. Слюсарева, который указывает на «трудности расшифровки, т. е. определения по заданной картине распределения освещенности формы объекта, вызывающего эту картину».

Эта ссылка не представляется правильной. Уравнение (0.1) — формула интеграла Дюамеля — дает картину мгновенных значений исчерпывающе полно, а также однозначно описывает линейный объект; в работе Г. Г. Слюсарева идет речь либо о картине *«квадратов мгновенных значений», либо о модуле спектральной* функции, т. е. без фазовых соотношений, и поэтому здесь не может быть однозначности. Применение методов голографии освобождает от этой неоднозначности.

Следующее ниже (третий абзац) разъяснение не снимает сделанного замечания.

3. Выражение (1.2.2), приведенное на стр. 24, является решением (1.2.1) не только в установившемся (как пишут авторы), но и в переходном режиме.

4. На наш взгляд, именно из выражения (2.4.34) (стр. 103) следует, что квадраты собственных значений образуют сходящийся ряд; в тексте же эта сходимость называется заданной.

5. На стр. 153 и др. авторы указывают, что В. А. Котельников для вывода своей формулы воспользовался искусственным приемом, который быстро приводит к цели, но не позволяет объяснить свойство «восстановимости» по дискретным значениям. Это верно; вывод действительно искусствен и, несмотря на это, вошел повсеместно в монографическую и учебную литературу (см., например: А. А. Харкевич, Очерки общей теории связи, М., Гостехиздат, 1955; М. В. Назаров и др., Теория передачи сигналов, М., «Связь», 1970).

Однако есть и другой вывод, представляющийся совершенно естественным и отвечающим на вопрос: как сконструировать разложение временно́й функции с финитным спектром по условию «восстановимости», по дискретным значениям? Этому выводу специально посвящена методическая статья (Известия вузов (Радиоэлектроника), № 10 (1970)).

Сделаем несколько замечаний, связанных с используемой формой записи и системой обозначений.

Авторы применяют форму записи преобразований Фурье в виде (1.1.2) и (1.1.3), т. е. с множителем $1/\sqrt{2}$, имея в виду соображения, относящиеся к дуальности (взаимности) преобразования (стр. 23 и далее). Однако более привычная и гораздо более распространенная форма записи нисколько не уступает по данному признаку, если в этой форме

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-j\omega x}\, dx,$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{j\omega x}\, d\omega$$

вместо ω писать $f = \omega/\sqrt{2\pi}$.

Распространенная форма записи представляется более удобной по многим причинам, но в первую очередь надо назвать согласованность с формулами гармонического анализа и гармонического синтеза теории рядов Фурье, а также с формулами операционного исчисления.

Относительно обозначений можно высказать следующие соображения. Значок $\sim$ (тильда), символизирующий в книге изображение, для этих целей применяется чрезвычайно редко; этот значок, как правило, используется в качестве символа приближения: $\tilde{f}(x)$ аппроксимирует $f(x)$. Представляется более удобным применять в качестве символа перехода от оригинала к изображению и обратно значок $\longleftrightarrow$ (двустороннюю стрелку), которая ставится над буквенным обозначением, т. е. $\overleftrightarrow{f}(t) = F(j\omega)$ и $\overleftrightarrow{F}(j\omega) = f(t)$. Такое обозначение широко используется в радиотехнической литературе; в его защиту недавно выступил проф. Я. С. Ицхоки (Радиотехника, № 11 (1970)).

Далее, для комплекснозначных функций, т. е. комплексных функций одного переменного, целесообразно применять один и тот же символ как для функции, так и для модуля, но в обозначении функции должен фигурировать еще и символ мнимой единицы. Например: функция $F(j\omega)$, модуль $F(\omega)$. Удобство таких обозначений состоит в том, что по записи ясно, идет ли речь о комплексной или вещественной функции. Например, по записи

$$F(j\omega) = F_1(\omega) + jF_2(\omega)$$

ясно, что функции $F_1(\omega)$ и $F_2(\omega)$ являются вещественными, тогда как по записи, применяемой в книге, такой ясности нет. Кроме того, удобно, что для обозначения модуля не нужно применять вертикальных черточек. То обстоятельство, что и функция, и модуль, т. е. разные функции, обозначены одинаково, к недоразумениям привести не может благодаря участию символа мнимой единицы.

В радиотехнической литературе отдается предпочтение именно этим обозначениям, а не тем, которые применяются в рецензируемой книге.

Можно, наконец, указать на некоторые терминологические неточности и редакционные недостатки.

Очевидно, не следует писать (стр. 6) «...целые аналитические функции...», так как целые функции именно по определению представляют собой аналитические в неограниченной области. В предпоследнем абзаце на стр. 7 сопоставлена метрика с аппроксимацией; конечно, читатель понимает, о чем идет речь, но фраза редакционно неприемлема. То, что авторы на стр. 14 называют фильтрацией, в действительности является режекцией, а не фильтрацией, термин «фильтрация» адресуют к полезному продукту, а не наоборот Об аппаратной функции (стр 16) лучше говорить, что она является исчерпывающей (но отнюдь не единственной) характеристикой прибора

Функции с двойной ортогональностью авторы также называют «дважды ортогональными» (стр 20), в то же время это отнюдь не синонимы под «дважды ортогональными» понимают так называемые биортогональные функции (см , например, статью А А Киселева и Л А Онуфриевой «Применение биортогональных систем Чебышева и Маркова для приближения функции» в сборнике «Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций», М , Физматгиз, 1961)

Вряд ли следует вводить в обращение фразу «методы финитных функций» (стр 20) Название первой главы на стр 22 неудачно союз «или» должен быть заменен союзом «и» Последний абзац на стр 64 неудачен из текста следует, что многочлены не могут быть целыми функциями

Разъяснения в сноске к стр 83 упростятся, если сказать, что $F_1(\omega) = F_1(-\omega)$, $F_2(\omega) = -F_2(-\omega)$ Досадно, что в формуле (2 3 1) (стр 83) пропущен минус у показателя степени, а в формуле (2 4 11) (стр 98) пропущен «символ сопряженности» В последнем абзаце на стр 102 речь идет о вполне непрерывном операторе, а не о непрерывном, как указано в тексте На стр 107 следует поменять местами слова «необходимость» и «достаточность»

Еще одно терминологическое замечание Есть существенная разница между функциями комплексного переменного $z = x + jy$, т е функциями $F(z)$ и комплексно-значными функциями одной вещественной переменной, т е $F(jx) = F_1(x) + iF_2(x)$ В книге авторов это обстоятельство не только не подчеркивается, но и не отмечается, впрочем, подобная недостаточность характерна почти для всей математической и технической литературы, хотя и должна быть признана весьма нежелательной, так как первые функции являются функциями двух переменных, а вторые — одной Изображение по Фурье, т е спектральные функции, являются комплексно значными функциями (частоты ω), а изображение по Лапласу — комплексными функциями (частоты ω и «затухания» σ)

Конечно, приведенные замечания никак не влияют на общую весьма высокую оценку книги, уже заслужившей признание широких кругов специалистов Насколько известно, подобной инженерно математической книги в мировой литературе до сих пор не было

Быть может, Главной редакции физико математической литературы издательства «Наука» следовало бы обсудить вопрос о целесообразности создания серии «Инженерно-математическая библиотека», наподобие издающейся уже много лет серии «Физико математическая библиотека инженера», рецензируемая книга смогла бы новым изданием открыть эту серию

А М Заездный

Успехи физических наук, т 112, вып 2

Редактор *В В Власов*

Техн редактор *В Н Кондакова* Корректор *О А Сигал*

Сдано в набор 28/XI 1973 г Подписано к печати 22/I 1974 г Бумага 70×108 1/16
Физ печ л 11+1 вкл Условн печ л 15,58 Уч -изд л 15,71 Тираж 4780 экз
Т-02938 Цена 1 р 20 к Заказ № 01314

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного знамени Московская типография № 7 «Искра революции»
Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
Москва, К-1, Трехпрудный пер 9