# УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

538.3

# СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ ДВИЖУЩИХСЯ СРЕД (Безграничные среды)

# Б. М. Болотовский, С. Н. Столяров

### СОДЕРЖАНИЕ

| Введение  | 569 |
|---|-----|
| 1. Уравнения Максвелла и материальные уравнения Минковского             | 573 |
| 2. Тензорная форма уравнений Максвелла в движущейся среде               | 574 |
| 3. Введение потенциалов в электродинамике движущихся сред               | 576 |
| 4. Смысл понятий диэлектрической и магнитной проницаемостей в движущей- |     |
| ся изотропной среде с дисперсией  | 578 |
| 5. Решение уравнений для потенциалов в движущейся среде                 | 580 |
| 6. Принции излучения в электродинамике движущихся сред                  | 581 |
| 7. Свободные волны в движущейся среде                                   | 584 |
| 8. Функция Грина в движущейся среде без дисперсии                       | 591 |
| 9. Функция Грина для монохроматических полей                            | 597 |
| 10. Функция Грина в движущейся среде с дисперсией                       | 600 |
| Приложение. Поля простейших источников в движущейся среде               | 601 |
| а) Поле покоящегося точечного заряда в движущейся среде (601). б) Поле  |     |
| покоящегося точечного магнитного диполя (604). в) Потенциалы Льенара—   |     |
| Вихерта в движущейся среде (605).                                       |     |
| Цитированная литература   | 607 |

#### **ВВЕДЕНИЕ**

Первые наблюдения, от которых берет свое начало электродинамика движущихся сред, появились в первой половине XVIII века, задолго до того, как была создана Максвелловская электродинамика.

В 1675 г. датский астроном О. Рёмер при наблюдении спутников Юпитера обнаружил, что время между двумя последующими их затмениями возрастает при удалении Юпитера от Земли и уменьшается, если Юпитер приближается к Земле. Из этого факта Рёмер сделал вывод о конечности скорости распространения света, а по данным наблюдений сумел определить величину этой скорости 214 000 км/сек, довольно близкую (если учесть сравнительно низкую точность измерений) к принятому ныне ее значению.

В 1725 г. профессор Оксфордского университета астроном Дж. Брэдли обнаружил эффект аберрации, а через три года дал правильное его объяснение. Объяснение было основано как на конечности скорости распространения света, так и на учете движения Земли. Для аберрационного угла из объяснения Брэдли получилась величина порядка v/c, где v — скорость Земли, c — скорость света.

В 1842 г. профессор Пражского университета Х. Допплер теоретически рассмотрел вопрос о том, какое влияние оказывает движение источника или наблюдателя на воспринимаемую частоту света. Предсказанный

Допплером эффект был в последующие годы подтвержден в целом ряде экспериментальных исследований.

В первой половине XIX века появляются экспериментальные исследования, ставившие целью выяснить, каким образом движение среды влияет на законы распространения света в этой среде. В 1851 г. А. Физо впервые экспериментально измерил скорость света в движущейся воде и подтвердил выводы, к которым ранее в 1818 г. прищел О. Френель при теоретическом рассмотрении распространения света в медленно движущейся среде. Отметим, что рассмотрение Френеля было проведено на основе механической модели распространения света в упругой среде — эфире.

Современные уравнения электромагнитного поля были сформулированы Дж. Максвеллом во второй половине XIX века. Эти уравнения явились той основой, на которой строилось все дальнейшее развитие теории электромагнитных явлений в вакууме и в сплошных средах. В частности, электронная теория Г. А. Лоренца <sup>1</sup> явилась известным завершением классической теории электромагнитного поля в сплощных средах.

В 1890 г. Г. Герц предпринял попытку описать электромагнитные явления в движущихся средах на основе электродинамики Максвелла. Однако уравнения Герца были получены из уравнений Максвелла для покоящихся сред с помощью преобразования Галилея, и поэтому, как мы теперь знаем, они были справедливы только для медленно движущихся сред (если опустить то обстоятельство, что Герц измерял скорость среды относительно неподвижного эфира) 50.

В конце XIX века был выполнен ряд экспериментов, ставящих целью изучение электромагнитных явлений в движущихся средах. В опытах Г. Роуланда, В. Рентгена, А. Эйхенвальда и Г. Вильсона было показано, что движение поляризованного диэлектрика приводит к появлению электрических токов и намагничению образца и, наоборот, движение магнетика приводит к появлению электрической поляризации и электрического заряда<sup>3,5,6</sup>. С современной точки эрения этот результат неудивителен и легко объясняется преобразованиями Лоренца для полей и токов, а также видом материальных уравнений в движущихся средах.

Важное значение по измерению скорости света в движущейся системе отсчета имел опыт А. Майкельсона, выполненный более чем за 20 лет до создания А. Эйнштейном специальной теории относительности <sup>2</sup>. Однако, по-видимому, результаты этого опыта не оказали решающего влияния на Эйнштейна.

Появление в 1905 г. специальной теории относительности положило конец поискам неподвижного эфира и вообще изгнало из теории преимущественную систему координат. На этой основе эффект Допплера и аберрация света в пустоте получили физически ясное объяснение, принимающее во внимание только относительное движение источника и приемника. Уравнения Максвелла для поля в пустоте вошли в теорию относительности без всякого изменения — это был первый пример релятивистски-инвариантных уравнений. Теория относительности в сочетании с уравнениями Максвелла явилась надежным фундаментом для электродинамики движущихся сред. Действительно, уравнения для электромагнитного поля в движущейся среде могут быть выведены двумя способами. С одной стороны, они могут быть получены усреднением микроскопических уравнений электронной теории, когда у всех частиц, составляющих среду, имеется скорость упорядоченного движения. С другой стороны, уравнения макроскопического электромагнитного поля в движущейся среде могут быть получены с помощью преобразований Лоренца из известных уравнений поля для покоящейся среды. По второму пути пошел Г. Минковский, показавший, что из уравнений Максвелла для покоящихся сред и принципа относительности однозначно следуют уравнения электромагнитного поля для движущихся сред  $^3.$ 

Приведенный нами краткий исторический обзор отнюдь не претендует на полноту, и желающие ознакомиться подробнее с историей вопроса могут это сделать по книгам Франкфурта и Френка <sup>4</sup>.

Исходные уравнения электродинамики движущихся сред, полученные Минковским полвека назад, позволяют дать полное описание электромагнитного поля в среде, движущейся равномерно и с произвольной скоростью \*). Экспериментальная проверка теории ограничивалась, как правило, исследованием эффектов первого порядка по u/c, где u — скорость переноса среды, а с — скорость света в вакууме. Это объяснялось тем, что в первые годы после создания теории достижимые скорости движения сред в лабораторных условиях были настолько малы в сравнении со скоростью света в пустоте, что об измерении эффектов второго или более высокого порядка по и/с нечего было и думать. Не случайно, например, в классических учебниках Беккера «Электронная теория» 5 и Тамма «Основы теории электричества» 6 изложение электродинамики движущихся сред ограничивается только рассмотрением медленно движущихся сред. По-видимому, именно ограниченными возможностями опыта и объясняется тот факт, что в течение нескольких десятков лет (примерно с 1920 г.) число экспериментальных и теоретических исследований, посвященных электродинамике движущихся сред, было незначительным.

Начиная примерно с середины 50-х годов положение существенно изменилось, и снова возрос интерес к электромагнитным явлениям в движущихся средах. Объясняется это двумя причинами. Во-первых, возросли экспериментально достижимые значения скорости среды. Например, на сильноточных ускорителях плазмы можно сейчас получать макроскопические сгустки плазмы, движущиеся как целое со скоростями 10<sup>8</sup> см/секи выше 7. Кроме того, стало возможным получение плотных пучков. быстрых электронов. Взаимодействие таких объектов с электромагнитными волнами в некоторых случаях может быть описано с помощью электродинамики движущихся сред. При этом достижимые скорости таковы, что становится возможным наблюдение эффектов более высокого порядка но u/c. Во-вторых, следует подчеркнуть, что отношение скорости движения среды к скорости света в вакууме не всегда является параметром, определяющим, по сути дела, релятивистские эффекты. Дело в том, что существуют так называемые замедляющие системы, в которых скорость распространения электромагнитных волн может быть существенно меньше скорости света в вакууме. Примером таких замедляющих систем является волновод, частично заполненный диэлектриком, цепочка связанных резонаторов, спиральный волновод и т. п. Обозначим скорость распространения электромагнитных волн в таких системах через c'. Тогда параметром, определяющим релятивистские эффекты движения среды в таких системах, является не u/c, а u/c'. Последняя величина может быть сделана близкой к единице даже при малых скоростях движения среды и.

Указанные возможности, вызванные к жизни развитием физики в последнее десятилетие, снова привлекли внимание к различным вопросам электродинамики движущихся сред. За последнее время появилось значительное количество теоретических и экспериментальных работ, посвященных как дальнейшему развитию теории, так и исследованию возможностей практического применения. Здесь следует указать на ряд возможных

<sup>\*)</sup> Мы здесь не рассматриваем важного вопроса о виде уравнений электромагнитного поля в средах, скорость движения которых зависит от координат и времени (см. конец гл. 1).

практических применений релятивистских эффектов, таких, как умножение частоты и усиление электромагнитной волны при отражении ее от движущейся границы, диагностика движущихся сред по их взаимодействию с электромагнитными волнами, исследование конвективных неустойчивостей в системах типа плазма — пучок и т. д. Немалый интерес представляет также рассмотрение и некоторых нерелятивистских эффектов, например, явлений генерации, отражения и преломления воли при наличии движущихся слоев ионосферы.

Большое количество исследований по электродинамике движущихся сред, опубликованных за последние годы в советских и зарубежных журналах, делает своевременной попытку рассмотреть то развитие, которое получила электродинамика движущихся сред, сопоставить и критически проанализировать результаты, полученные различными авторами.

Если говорить о том повом, что внесено за последние годы в развитие электродинамики движущихся сред, то следует прежде всего отметить, что большое признание и распространение получил метод формулировки основных уравнений, предложенный в 1924 г. Мандельштамом и Таммом 8. Этот метод значительно упрощает решение уравнений электродинамики движущихся сред, так как позволяет ввести потенциалы цоля. В связи с этим первая половина обзора посвящена изложению указанного метода для случая изотропных движущихся сред (т. е. сред, изотропных в системе покоя). Изложение ведется с учетом дисперсии, как частотной, так и пространственной. Рассмотрены особенности распространения свободных электромагнитных волн в движущейся среде, приведены выражения для групповой и фазовой скоростей, а также для доказателя преломления волн в движущейся среде в зависимости от направления распространения волн, скорости движения среды и других параметров. На основе метода Мандельштама — Тамма рассматривается также поле в движущейся среде при наличии заданных источников. Как известно, в этом случае поле в среде может быть выражено через функцию Грина. Обсуждаются так называемые «принципы излучения», т. е. способы выделения таких решений, которые удовлетворяют определенным физическим условиям. Приводятся выражения для функции Грина в движущейся изотропной среде при наличии дисперсии и в пренебрежении дисперсией. Полученные выражения позволяют определить поле любого заданного источника в движущейся среде, например, поле покоящегося заряда, поле диполя (статического и переменного), поле движущихся зарядов и диполей (эффект Допплера, потенциалы Льенара — Вихерта и излучение Вавилова — Черенкова в движущейся среде) \*) и т. п. Однако требования к объему настоящего обзора не позволили нам рассмотреть эти задачи, и мы ограничились только вычислением функции Грина. Не включены в обзор также весьма интересные задачи, касающиеся отражения и преломления волн на границах раздела с движущимися средами. Авторы надеются рассмотреть эти вопросы в дальнейшем.

При составлении списка литературы мы использовали указатель, составленный Глуцюком <sup>9</sup>, которому мы выражаем свою признательность Мы не касались вопроса о виде тензора энергии-импульса в движущейся среде. Желающие ознакомиться с состоянием вопроса могут это сделать по обзорам Скобельцына <sup>10</sup> и Гинзбурга <sup>11</sup> и по приведенной в них литературе. В этих обзорах, правда, не рассматриваются движущиеся среды. Но обсуждаемые там выражения для тензора энергии-импульса в покоя-

<sup>\*)</sup> Поля покоящегося точечного заряда и магнитного диполя, а также потенциалы Льенара — Вихерта приведены в Приложении (стр. 601).

щейся среде легко могут быть переписаны для движущейся среды с помощью релятивистских преобразований. Мы благодарны В. Л. Гинзбургу, прочитавшему рукопись обзора и сделавшему ряд существенных замечаний.

## 1. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА И МАТЕРИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ МИНКОВСКОГО

В этом разделе мы приведем основные уравнения электродинамики движущихся сред, сформулированные еще Минковским. Опи понадобятся нам для дальнейшего изложения. Более подробно с теорией можно ознакомиться как по оригинальной работе Минковского <sup>12</sup>, так и по известным и ставшими уже классическими учебникам <sup>3, 5, 6, 13</sup>.

Электромагнитное поле в движущихся средах формально описывается теми же уравнениями Максвелла, что и в покоящейся среде:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0;$$
(1.4)

здесь под величинами E и H понимаются электрическое и магнитное поля, а под D и B — электрическая и магнитная индукции в движущейся среде,  $\rho$  и j — плотность сторонних зарядов и токов в этой среде.

Система уравнений (1.1) должна быть дополнена материальными уравнениями, выражающими связь между полями и индукциями. Эти уравнения для движущейся изотропной среды были предложены Минковским <sup>12</sup> и носят его имя. Рассмотрим среду, которая в системе покоя изотропна. Если скорость переноса среды есть **u**, то уравнения Минковского имеют вид

$$\mathbf{D} + \left[ \frac{\mathbf{u}}{c}, \quad \mathbf{H} \right] = \varepsilon \left( \mathbf{E} + \left[ \frac{\mathbf{u}}{c}, \quad \mathbf{B} \right] \right),$$

$$\mathbf{B} + \left[ \mathbf{E}, \quad \frac{\mathbf{u}}{c} \right] = \mu \left( \mathbf{H} + \left[ \mathbf{D}, \quad \frac{\mathbf{u}}{c} \right] \right).$$
(1.2)

В этих формулах є и µ — диэлектрическая п магпитная провицаемости покоящейся среды. Соотношения (1.2) были получены Минковским из известных соотношений между индукцией и полем в покоящейся изотропной среде путем преобразований Лоренца.

Система уравнений (1.1) с материальными уравнениями (1.2) является полной и достаточной для решения задач в безграничной изотропной движущейся среде. Если в движущейся среде имеется граница раздела, то систему уравнений (1.1) и (1.2) следует дополнить граничными условиями, которым должны удовлетворять поля и индукции. Рассмотрим границу раздела двух сред, движущуюся со скоростью v. Поля по одну сторону границы будем обозначать индексом 1, а по другую сторону — индексом 2. Тогда на границе между ними должны выполняться следующие соотношения <sup>3, 13</sup>:

$$[\mathbf{n}, \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1] = \frac{v_n}{c} (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1),$$

$$[\mathbf{n}, \mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1] = -\frac{v_n}{c} (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1),$$
(1.3)

где  ${\bf n}$  — нормаль к границе раздела, а  $v_n$  — проекция скорости границы раздела на эту нормаль.

Из этих граничных условий видно, что если граница раздела перемещается только в своей плоскости, то граничные условия имеют такой же вид, как и для покоящейся границы.

Подчеркнем, что в соотношении (1.3) величина  $v_n$  является скоростью переноса границы раздела, а не скоростью движения сред по обе стороны от нее. В принципе все три величины — скорость среды по одну сторону от границы раздела  $\mathbf{u}_1$ , скорость границы раздела  $\mathbf{v}$  и скорость среды по по другую сторону от границы  $\mathbf{u}_2$  — могут быть различны.

Отметим, что при выводе формул (1.3) предполагалось отсутствие поверхностных токов и зарядов на движущейся границе раздела.

Следует иметь в виду, что для получения граничных условий на поверхности раздела нужно эту поверхность рассматривать как предельный случай переходного слоя конечной толщины. Поэтому, вообще говоря, характер решений может зависеть от структуры переходного слоя <sup>14, 15</sup>.

Предыдущие формулы справедливы в случае, когда свойства среды в системе покоя не зависят явно от координат и времени, т. е. среда является стационарной и пространственно-однородной, и, кроме того, скорость переноса среды и также не зависит от координат и времени. В общем случае, когда скорость движения среды и ее преломляющие свойства являются произвольными функциями координат и времени, рассмотрение задачи резко усложняется. Можно указать на два предельных случая, когда это рассмотрение может быть проведено достаточно просто.

Если масштаб неоднородности, характеризующий изменение свойств среды (например, расстояние, на котором существенно меняется скорость переноса среды и ее преломляющие свойства, или время, за которое существенно меняются эти параметры), много больше соответствующих величин, характеризующих электромагнитную волну (длина волны или ее период колебаний), то материальные уравнения могут быть получены методом разложения по малому параметру (отношение масштаба неоднородности волны к масштабу неоднородности среды). В этом случае в материальные уравнения входят не только сами параметры среды, но и их производные по координатам и времени <sup>16-19</sup>.

Во втором предельном случае, когда свойства среды сильно меняются в пространстве и (или) во времени, т. е. за период колебаний или на длине волны свойства среды (показатель преломления, скорость переноса и т. п.). меняются существенным образом, можно воспользоваться материальными уравнениями для стационарных и однородных сред, а неоднородность учитывать с помощью соответствующих «граничных» условий (см. формулы (1.3), а также работы <sup>20-22</sup>, где ставятся условия на временном скачке).

# 2. ТЕНЗОРНАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА В ДВИЖУЩЕЙСЯ СРЕДЕ

Запись уравнений Максвелла в тензорной форме использовалась главным образом для доказательства релятивистской инвариантности электродинамики движущихся сред. Нам она потребуется в дальнейшем для введения четырехмерных потенциалов электромагнитного поля в движущихся средах.

Следуя Минковскому, составим два тензора

$$F_{ih} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -iE_x \\ -B_z & 0 & B_x & -iE_y \\ B_y & -B_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & --iE_z & 0 \end{pmatrix}$$
(2.1)

 $H_{ih} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iD_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iD_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iD_z \\ iD_x & iD_y & iD_z & 0 \end{pmatrix}.$  (2.2)

И

Компонентами тензора  $F_{ik}$  являются составляющие электрического поля и магнитной индукции, а компонентами тензора  $H_{ik}$  — составляющие магнитного поля и электрической индукции.

С помощью введенных тензоров первые два уравнения системы (1.1) (первую пару уравнений Максвелла) можно записать в виде

$$\frac{\partial H_{ik}}{\partial x_k} = \frac{4\pi}{c} j_i, \tag{2.3}$$

где  $j_i$  — четырехмерный вектор тока с компонентами  $j_x, j_y, j_z$  и  $ic\rho$ , а четырехмерные координаты мы выберем в следующем виде:

$$x_1 = x$$
,  $x_2 = y$ ,  $x_3 = z$ ,  $x_4 = ict$ . (2.4)

Как всегда, по повторяющимся индексам проводится суммирование, поэтому

$$A_iB_i = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 + A_4B_4$$

где  $A_i = (A, A_4).$ 

Вторая пара уравнений Максвелла также записывается в виде одного тензорного уравнения:

$$\frac{\partial F_{ih}}{\partial x_l} + \frac{\partial F_{hl}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_b} = 0. \tag{2.5}$$

Материальные уравнения Минковского (1.1) в тензорной форме принимают вид

$$H_{ik}u_k = \varepsilon F_{ik}u_k, F_{ik}u_l + F_{kl}u_i + F_{li}u_k = \mu (H_{ik}u_l + H_{kl}u_i + H_{li}u_k),$$
 (2.6)

где  $u_k$  — четырехмерный вектор скорости перемещения среды, который выражается через трехмерный вектор  ${\bf u}$ :

$$u_{1,2,3} = \frac{u_{x,y,z}}{c\sqrt{1-(u^2/c^2)}}, u_4 = \frac{i}{\sqrt{1-(u^2/c^2)}}.$$
 (2.7)

Тензорная формулировка электродинамики движущихся сред полностью эквивалентна системе уравнений (1.1) - (1.2), записанной в векторной форме. Однако обе эти формулировки иногда оказываются неудобными при решении конкретных электродинамических задач. Причина здесь та же самая, что и в обычной электродинамике покоящихся сред, когда приходится определять слишком много неизвестных функций (компоненты полей и индукций), входящих в исходные уравнения. В электродинамике движущихся сред ситуация оказывается еще более сложной, ибо в материальные уравнения (2.6) дополнительно входит скорость движения среды. В ряде случаев гораздо более удобной является формулировка материальных уравнений, предложенная Таммом  $^8$ . В этой формулировке свойства движущейся среды описываются четырехмерным тензором четвертого ранга  $\epsilon_{ihst}$ , дающим прямую связь между тензорами поля  $F_{st}$  и  $H_{ih}$ ,

$$H_{th} = \varepsilon_{ihst} F_{st}. \tag{2.8}$$

Это соотношение заменяет пару материальных уравнений Минковского (1.2) или эквивалентных им уравнений (2.6).

Соотношение (2.8) может быть записано в другой эквивалентной форме  $^{3, 5}$ :

$$H_{Ak} = F_{ik} + 4\pi \mathcal{F}_{ik}; \tag{2.9}$$

здесь тензор  $\mathcal{F}_{ih}$  является четырехмерным тензором поляризуемости движущейся среды. Явный вид этого тепзора может быть получен из (2.8), если известно выражение для тензора  $\varepsilon_{ihst}$ .

Запись материальных уравнений в виде (2.8), предложенная И. Е. Таммом, удобна в том отношении, что она позволяет перейти от полей к потенциалам так же просто, как это делается в случае покоящейся среды. Переход же от полей к потенциалам в ряде случаев облегчает решение задачи, так как уменьшает число функций, подлежащих определению.

# 3. ВВЕДЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛОВ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ ДВИЖУЩИХСЯ СРЕД

Как и в случае покоящейся среды, введем четырехмерный вектор-потенциал  $A_i$  с компонентами  $A_x$ ,  $A_y$ ,  $A_z$ ,  $i\varphi$ , через который компоненты тензора  $F_{ik}$  в (2.1) выражаются следующим образом:

$$F_{ih} = \frac{\partial A_h}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_h}.$$
 (3.1)

При таком выборе вектор-потенциала  $A_i$  уравнение (2.5), содержащее вторую пару уравнений Максвелла в движущейся среде, удовлетворяется тождественно. Выразив  $H_{ik}$  через  $F_{ik}$  по формуле (2.8) и подставив полученное выражение в уравнение (2.3), содержащее первую пару уравнений Максвелла, получим уравнение, которому должны удовлетворять компоненты вектор-потенциала  $A_i$ . При этом мы используем релятивистски-инвариантное выражение для тензора  $\varepsilon_{ikst}$ , данное Рязановым  $^{23}$  (см. также запись материальных уравнений для движущихся сред в форме Ватсона и Яуха  $^{24, 25}$ ):

$$\varepsilon_{ihst} = \mu^{-1} \left( \delta_{is} - \varkappa u_i u_s \right) \left( \delta_{ht} - \varkappa u_h u_t \right); \tag{3.2}$$

здесь  $u_i$  — четырехмерная скорость переноса среды, определенная формулой (2.7),  $\delta_{is}$  — единичный тензор,

$$\varkappa = \varepsilon \mathfrak{u} - 1. \tag{3.3}$$

Выразим тензор  $H_{ik}$  через четырехмерный потенциал  $A_i$ , для чего используем соотношения (2.8), (3.1) и (3.2). Если полученное таким образом выражение для  $H_{ik}$  подставить в уравнение (2.3), эквивалентное первой паре уравнений Максвелла (1.1), получим уравнение, которому должны удовлетворять компоненты четырехмерного потенциала  $A_i$ <sup>26</sup>:

$$(\delta_{is} - \varkappa u_i u_s) \left\{ \left[ \frac{\partial^2}{\partial x_h^2} - \varkappa \left( u_h \frac{\partial}{\partial x_h} \right)^2 \right] A_s - \frac{\partial}{\partial x_s} \left( \frac{\partial A_h}{\partial x_h} - \varkappa u_h u_t \frac{\partial A_t}{\partial x_h} \right) \right\} = -\frac{4\pi}{c} \, \mu j_t. \quad (3.4)$$

Если это уравнение умножить на выражение вида

$$\delta_{i\alpha} + \frac{\varkappa}{1+\varkappa} u_i u_\alpha$$

то получим уравнение для четырехмерного потенциала в другой форме 27:

$$\left[\frac{\partial^{2}}{\partial x_{h}^{2}} - \varkappa \left(u_{h} \frac{\partial}{\partial x_{h}}\right)^{2}\right] A_{\alpha} - \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left(\frac{\partial A_{h}}{\partial x_{h}} - \varkappa u_{h} u_{t} \frac{\partial A_{t}}{\partial x_{h}}\right) =$$

$$= -\frac{4\pi}{c} \mu \left(\delta_{i\alpha} + \frac{\varkappa}{1 + \varkappa} u_{i} u_{\alpha}\right) j_{i}. \quad (3.5)$$

При этом было использовано тождество

$$(\delta_{is} - \varkappa u_i u_s) \left( \delta_{i\alpha} + \frac{\varkappa}{1 + \varkappa} u_i u_{\alpha} \right) = \delta_{\alpha s}, \tag{3.6}$$

если учесть, что в принятых нами обозначениях  $u_i u_i = -1$ .



Четыре компоненты  $\mathbf{A}$  и  $A_4=i \varphi$  вектор-потенциала  $A_s$  определяются из системы четырех линейных дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных. Эта система уравнений может быть упрощена с помощью удачно выбранного дополнительного условия, палагаемого на компоненты четырехмерного потенциала. Такая возможность, как известно, вытекает из градиентной инвариантности: как видно из определения потенциала (3.1), мы можем добавить к вектору  $A_i$  четырехмерный градиент  $\partial \Phi/\partial x_i$  произвольной функции  $\Phi$  от координат и времени. При этом тензор  $F_{ik}$  останется без изменения. Дополнительное условие, налагаемое на четырехмерный потенциал  $A_i$ , эквивалентно выбору подходящей функции  $\Phi$ .

Мы будем пользоваться в дальнейшем дополнительным условием

$$\frac{\partial A_k}{\partial x_k} - \kappa u_k u_t \frac{\partial A_t}{\partial x_k} = (\delta_{kt} - \kappa u_k u_t) \frac{\partial A_t}{\partial x_k} = 0, \tag{3.7}$$

которое является обобщением дополнительного условия Лоренца  $\partial A_k/\partial x_k+$   $+(\varkappa/c)\,\partial \varphi/\partial t=0$  для случая покоящейся среды. При таком выборе дополнительного условия система уравнений (3.4) принимает следующий более простой вид:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x_b^2} - \varkappa \left(u_h \frac{\partial}{\partial x_h}\right)^2\right] \left(\delta_{is} - \varkappa u_i u_s\right) A_s = -\frac{4\pi\mu}{c} j_i, \tag{3.8}$$

а уравнение (3.5) записывается соответственно в виде 26,53

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} - \varkappa \left(u_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right)^2\right] A_\alpha = -\frac{4\pi\mu}{c} \left(\delta_{\alpha i} + \frac{\varkappa}{1+\varkappa} u_\alpha u_i\right) j_i. \tag{3.9}$$

Уравнения для потенциалов могут быть также получены с помощью преобразований Лоренца из соответствующих уравнений для покоящейся среды  $^{27-29}$ .

Решения системы уравнений (3.8) или (3.9), удовлетворяющие необходимым граничным (и начальным) условиям, определяют поле в движущейся среде, вызванное заданным распределением зарядов и токов  $j_i$ .

Система уравнений (3.8) содержит четыре неизвестные функции — компоненты четырехмерного потенциала  $A_i$ . Но в силу дополнительного условия (3.7) независимыми являются только три из четырех функций  $A_i$ .

Рассмотренный способ введения потенциалов не является единственно возможным. Можно ввести потенциал, который является обобщением понятия вектора Герца на случай движущейся среды. С этой целью введем тензор  $\Pi_{ih}$ , определив его соотношением <sup>28</sup>, <sup>29</sup>

$$A_{i} = \left(\delta_{ih} + \frac{\varkappa}{1+\varkappa} u_{i} u_{k}\right) \frac{\partial \Pi_{k} l}{\partial x_{l}}.$$
 (3.10)

Тогда дополнительное условие (3.7) в силу соотношения (3.6) примет вид

$$\frac{\partial^2 \Pi_{kl}}{\partial x_h \partial x_l} = 0. \tag{3.11}$$

Для выполнения этого условия достаточно считать, что тензор  $\Pi_{kl}$  является антисимметричным. Подстановка вектор-потенциала в виде (3.10) в уравнение (3.9) приводит к уравнениям

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_h^2} - \varkappa \left(u_h \frac{\partial}{\partial x_h}\right)^2\right] \Pi_{ij} = -4\pi \mu P_{ij}, \tag{3.12}$$

где компоненты тензора моментов  $P_{ii}$  определятся из соотношения

$$j_i = c \, \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_i}. \tag{3.13}$$

Из последнего соотношения видно, что тензор  $P_{ij}$  также можно считать антисимметричным тензором. Действительно, в силу известного закона сохранения заряда компоненты четырехмерного тока  $j_i = (\mathbf{j}, ic\rho)$  удовлетворяют условию

$$\frac{\partial j_i}{\partial x_i} = 0. ag{3.14}$$

Если теперь в это выражение подставить четырехмерный ток  $j_i$ , записанный согласно формуле (3.13) через тензор  $P_{ij}$ , то нетрудно убедиться, что в случае антисимметричности этого тензора выражение  $\partial^2 P_{ij}/\partial x_i \partial x_j$  тождественно обращается в нуль.

В силу антисимметричности тензоров  $\Pi_{ij}$  и  $P_{ij}$  они содержат только по шесть независимых компонент. Поля выражаются через потенциалы  $\Pi_{ij}$  по формулам

$$F_{ih} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \Pi_{hl}}{\partial x_l} - \frac{\partial}{\partial x_h} \frac{\partial \Pi_{il}}{\partial x_l} + \frac{\varkappa}{1 + \varkappa} \left( u_h \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_n \Pi_{nl}}{\partial x_l} - u_i \frac{\partial}{\partial x_h} \frac{\partial u_n \Pi_{nl}}{\partial x_l} \right). \tag{3.15}$$

# 4. СМЫСЛ ПОНЯТИЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ И МАГНИТНОЙ ПРОНИЦАЕМОСТЕЙ В ДВИЖУЩЕЙСЯ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ С ДИСПЕРСИЕЙ

В полученных выше уравнениях (3.8) и (3.9) для четырехмерного потенциала  $A_i$  и в уравнениях (3.12) для тензора Герца  $\Pi_{ij}$  свойства среды учитываются путем задания скорости ее перемещения и и ее преломляющих свойств, определяемых значениями диэлектрической є и магнитной и проницаемостей в системе покоя этой среды. При этом є и и следует считать операторами, которые зависят от смещения во времени и пространстве. Поясним это на простом примере. Рассмотрим покоящуюся среду, в которой задан закон дисперсии. В дальнейшем, если это не будет оговорено, мы будем считать, что среда в системе покоя не обладает пространственной дисперсией \*). Диэлектрическая проницаемость такой среды имеет, вообще говоря, различные значения для воли различных частот. Соотношение

$$D = \varepsilon E \tag{4.1}$$

следует понимать так. Разложим D и E в интегралы Фурье по времени, т. е. представим электрическое поле и индукцию в виде суперновиции колебаний с разными частотами:

$$\mathbf{E}(t) = \int \mathbf{E}_{\omega} \exp(-i\omega t) \ d\omega, \quad \mathbf{D}(t) = \int \mathbf{D}_{\omega} \exp(-i\omega t) \ d\omega. \tag{4.2}$$

Тогда соотношение (4.1) может быть в фурье-представлении записано в виде соотношения

$$\mathbf{D}_{\omega} = \varepsilon \left( \omega \right) \, \mathbf{E}_{\omega}, \tag{4.3}$$

где  $\epsilon$  ( $\omega$ ) — значение диэлектрической проницаемости на частоте  $\omega$ . Отсюда равенство (4.1) принимает следующий вид:

$$\mathbf{D}(t) = \int \mathbf{D}_{\omega} \exp(-i\omega t) d\omega = \int \epsilon(\omega) \mathbf{E}_{\omega} \exp(-i\omega t) d\omega. \quad (4.4)$$

Если считать, что мы всегда можем представить поля в виде интеграла Фурье по времени, то соотношению (4.1) можно придать операторный смысл

$$\mathbf{D}(t) = \varepsilon \left(i \frac{\partial}{\partial t}\right) \mathbf{E}(t), \tag{4.5}$$

<sup>\*)</sup> Покоящиеся среды с пространственной дисперсией рассмотрены в монографиях Аграновича и Гинзбурга 30 Силина и Рухадзе 31.

где  $\varepsilon$  — та же функция, что и в соотношении (4.3), но аргументом ее является оператор смещения по времени. Действительно, если в это соотношение подставить  $\mathbf{E}(t)$  и  $\mathbf{D}(t)$  из разложений (4.2), мы получим соотношения (4.3), (4.4). Таким образом, диэлектрическая проницаемость покоящейся среды с дисперсией имеет смысл оператора, зависящего от смещения по времени. При наличии пространственной дисперсии оператор  $\varepsilon$  будет, очевидно, зависеть пе только от  $i\partial/\partial t$ , но и от оператора смещения в пространстве (—  $i\nabla$ ). То же самое относится, очевидно, и к оператору магнитной проницаемости  $\mu$ :

$$\varepsilon = \varepsilon \left( i \frac{\partial}{\partial t}, -i \nabla \right), \quad \mu = \mu \left( i \frac{\partial}{\partial t}, -i \nabla \right).$$
 (4.6)

Если теперь перейти к случаю движущейся среды, то функциональная зависимость операторов в и µ от своих аргументов сохранится, но сами аргументы должны быть преобразованы по Лоренцу. Это приводит к замене аргументов в (4.6) по следующему правилу <sup>31</sup>:

$$\frac{\partial}{\partial t} \to c u_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \gamma \left[ (\mathbf{u} \nabla) + \frac{\partial}{\partial t} \right],$$

$$\nabla \to \nabla + \frac{\mathbf{u}}{u^2} \gamma \left[ (1 - \gamma) (\mathbf{u} \nabla) + \beta^2 \frac{\partial}{\partial t} \right],$$
(4.7)

тде принято обозначение

$$\sqrt[4]{\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}}, \quad \beta = \frac{u}{c}.$$
(4.8)

Здесь и в дальнейшем мы предполагаем, что все поля могут быть разложены по волнам вида  $\exp \left[i\left(\mathbf{kr}-\omega t\right)\right]$ .

Из приведенных соотношений вытекает одно любопытное следствие. Предположим, что в системе покоя среда имела только временную дисперсию. Это означает, что  $\varepsilon$  и  $\mu$  в (4.6) зависели только от аргумента  $\partial/\partial t$ :

$$\varepsilon = \varepsilon \left( i \frac{\partial}{\partial t} \right), \quad \mu = \mu \left( i \frac{\partial}{\partial t} \right).$$
 (4.9)

В фурье-представлении это соответствует тому случаю, когда є и µ зависят только от частоты волны  $\omega$  и не зависят от волнового вектора **k**. Если такая среда перемещается со скоростью **u**, в аргументах є и µ следует произвести замену по формуле (4.7), в результате чего диэлектрическая и магнитная пронидаемости движущейся среды будут иметь вид

$$\varepsilon = \varepsilon \left[ i \gamma \frac{\partial}{\partial t} + i \gamma \left( \mathbf{u} \nabla \right) \right], \quad \mu = \mu \left[ i \gamma \frac{\partial}{\partial t} + i \gamma \left( \mathbf{u} \nabla \right) \right]. \tag{4.10}$$

Появление в аргументе производных по пространственным координатам означает, что в движущейся среде появилась пространственная дисперсия. Таким образом, если в покоящейся среде в ряде случаев можно не учитывать пространственную дисперсию, в движущейся среде учет пространственной дисперсии принципиально необходим. Физическая причина этого заключается в следующем. Пространственная дисперсия возникает при пелокальной связи между полем и индукций, когда, например, значение пидукции в данной точке пространства определяется значениями поля в некоторой области, окружающей данную точку, а не только в той же самой точке. В движущейся среде такая нелокальность возникает всегда из-за увлечения поля средой. Грубо говоря, зпачение поля в данной точке движущейся среды связано со значением поля в точке, которая находится «выше по течению». Пространственную дисперсию такого вида можно определить как конвективную пространственную дисперсию 32.

Рассмотрим случай, когда поле в среде описывается волнами вида  $\exp[(i \ (\mathbf{kr} - \omega t))]$ . Тогда аргументы  $\varepsilon$  и  $\mu$  в (4.10) будут выражаться через частоту  $\omega$  и волновой вектор  $\mathbf{k}$ :

$$\varepsilon = \varepsilon \left( \frac{\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}}{\sqrt{1 - (u^2/c^2)}} \right), \quad \mu = \mu \left( \frac{\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}}{\sqrt{1 - (u^2/c^2)}} \right). \tag{4.11}$$

Отсюда видно, что значения  $\epsilon$  и  $\mu$  зависят от направления распространения волны по отношению к направлению движения среды. Движение нарумает изотропию среды.

Анизотропия вызывается не только указанной выше причиной, но также и тензорным характером связи между амплитудами полей и индукцией в движущейся среде. Последнее обстоятельство обусловлено специфическим видом материальных уравнений (1.2) в движущейся изотропной среде.

# 5. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛОВ В ДВИЖУЩЕЙСЯ СРЕДЕ

Мы рассмотрим решение уравнения для потенциалов на примере урав нения (3.9). Разложим потенциалы и токи в интегралы Фурье по всем частотам ω и волновым векторам k:

$$A_{\alpha}(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{k} \int d\omega A_{\alpha}(\omega, \mathbf{k}) \exp \left[i \left(\mathbf{kr} - \omega t\right)\right],$$

$$j_{i}(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{k} \int d\omega j_{i}(\omega, \mathbf{k}) \exp \left[i \left(\mathbf{kr} - \omega t\right)\right],$$
(5.1)

где интегрирование ведется в бесконечных пределах. Подстановка этих разложений в систему (3.9) позволяет выразить компоненты Фурье четырехмерного потенциала  $A_{\alpha}$  ( $\omega$ , **k**) через компоненту Фурье токов  $j_i$  ( $\omega$ , **k**)<sup>26</sup>:

$$A_{\alpha}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{4\pi\mu \ (\omega, \mathbf{k})}{c} \frac{\{\delta_{\alpha i} + [\varkappa/(1+\varkappa)] \ u_{\alpha}u_{i}\} \ j_{i} \ (\omega, \mathbf{k})}{\mathbf{k}^{2} - (\omega^{2}/c^{2}) - \varkappa \ (\omega, \mathbf{k}) \ \gamma^{2}c^{-2} \ (\omega - \mathbf{k}\mathbf{u})^{2}}.$$
 (5.2)

Напомним, что в данной формуле  $\varkappa$  ( $\omega$ ,  $\mathbf{k}$ ) =  $\epsilon$  ( $\omega$ ,  $\mathbf{k}$ )  $\mu$  ( $\omega$ ,  $\mathbf{k}$ ) — 1, а  $\gamma^{-2}=1$  —  $(u^2/c^2)$ .

Если в среде отсутствуют токи и заряды, то, как нетрудно видеть из формул (5.2), числитель выражений для  $A_{\alpha}$  ( $\omega$ , **k**) обращается в нуль. В этом случае  $A_{\alpha}$  ( $\omega$ , **k**) отличны от нуля только при выполнении условия <sup>26</sup>

$$\Delta (\omega, \mathbf{k}) = \mathbf{k}^2 - (\omega^2/c^2) - \varkappa (\omega, \mathbf{k}) \gamma^2 c^{-2} (\omega - \mathbf{k} \mathbf{u})^2 = 0.$$
 (5.3)

Уравнение (5.3) определяет, таким образом, закон распространения свободных электромагнитных волн в движущейся среде. Это уравнение может быть также получено с помощью преобразования Лоренца дисперсионного уравнения

$$\mathbf{k}^2 - \varepsilon \mu \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \tag{5.4}$$

для покоящейся среды. Действительно, запишем (5.4) в виде

$$\left(\mathbf{k}^{2} - \frac{\omega^{2}}{c^{2}}\right) - (\varepsilon\mu - 1)\frac{\omega^{2}}{c^{2}} = 0.$$
 (5.5)

Первые два слагаемых образуют релятивистски-инвариантное выражение и не меняются при преобразовании Лоренца. Последнее слагаемое в результате преобразования Лоренца приобретает тот же вид, что и последнее слагаемое в левой части уравнения (5.3).

Равенство (5.2) можно записать в виде

$$A_{\alpha}(\omega, \mathbf{k}) = G_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) j_{\beta}(\omega, \mathbf{k}), \tag{5.6}$$

где

$$G_{\alpha\beta} = \frac{4\pi\mu}{c} \frac{\delta_{\alpha\beta} + \left[\kappa \left(1 + \kappa\right)^{-1}\right] u_{\alpha} u_{\beta}}{\Delta \left(\omega, \mathbf{k}\right)} = \frac{4\pi\mu}{c\Delta \left(\omega, \mathbf{k}\right)} \left(\delta_{\alpha\beta} + \frac{\kappa}{1 + \kappa} u_{\alpha} u_{\beta}\right)$$
(5.7)

— тензор, являющийся фурье-образом тензорной функции Грина псходного уравнения (3.9). Переходя от равенства (5.6) к соответствующему равенству в координатном представлении, получим

$$A_{\alpha}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int G_{\alpha\beta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') j_{\beta}(\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}' dt', \qquad (5.8)$$

где тензор  $G_{\alpha\beta}$  ( ${\bf r}-{\bf r}',\ t-t'$ ) получается из  $G_{\alpha\beta}$  ( $\omega,\ {\bf k}$ ) в (5.7) с помощью обратного преобразования Фурье и называется тензорной функцией Грина. Вид этой функции для ряда частных случаев (безграничная среда, отсутствие дисперсии, нерелятивистские скорости, сверхсветовое и досветовое движение среды) вычислялся в работах  $^{28}, ^{33-36}$ .

Аналогичным образом можно записать выражение для фурье-компонент  $\Pi_{ij}$  ( $\omega$ , **k**) тензорного потенциала Герца  $\Pi_{ij}$ , удовлетворяющего уравнению (3.12):

$$\Pi_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = -\frac{4\pi\mu}{\Delta(\omega, \mathbf{k})} P_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = G_0(\omega, \mathbf{k}) P_{ij}(\omega, \mathbf{k}),$$
 (5.9)

где  $G_0$  ( $\omega$ ,  $\mathbf{k}$ ) — фурье-компонента функции Грина уравнения (3.12). Легко видеть, что в данном случае функция Грина является скалярной величиной. Переходя в равенстве (5.9) к координатному и временному представлению, аналогично (5.8) получаем

$$\Pi_{ij}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') P_{ij}(\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}' dt', \qquad (5.10)$$

где  $G_0$  ( $\mathbf{r}-\mathbf{r}',\ t-t'$ ) получается пз  $G_0$  ( $\omega,\ \mathbf{k}$ ) обратным фурье-преобравованием.

Тензорная функция Грина  $G_{lpha eta}$  связана со скалярной функцией Грина  $G_{f 0}$  соотношением

$$G_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{c} \left( \delta_{\alpha\beta} + \frac{\kappa}{1 - \kappa} u_{\alpha} u_{\beta} \right) G_0(\omega, \mathbf{k}). \tag{5.11}$$

В этом легко убедиться, сравнивая равенства (5.7) и (5.9). В случае, когда в среде нет дисперсии, из соотношения (5.11) следует, что

$$G_{\alpha\beta}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t')=c^{-1}\left(\delta_{\alpha\beta}+\frac{\varkappa}{1-\varkappa}u_{\alpha}u_{\beta}\right)G_{0}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t').$$
 (5.12)

# 6. ПРИНЦИП ИЗЛУЧЕНИЯ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ ДВИЖУЩИХСЯ СРЕД

Запишем выражение для скалярной функции Грина  $G_0$  в координатном пространстве:

$$G_{0}(\mathbf{r},t) = 4\pi \int \frac{\mu(\omega,\mathbf{k}) \exp\left[\iota\left(\mathbf{kr} - \omega t\right)\right]}{\Delta(\omega,\mathbf{k})} d\mathbf{k} d\omega = 4\pi \int \frac{\mu(\omega,\mathbf{k}) \exp\left[\iota\left(\mathbf{kr} - \omega t\right)\right] d\mathbf{k} d\omega}{\mathbf{k}^{2} - (\omega^{2}/c^{2}) - \varkappa(\omega,\mathbf{k}) \left[(\omega - \mathbf{ku})^{2}/(c^{2} - u^{2})\right]}.$$
 (6.1)

Интегрирование по к и о проводится в бесконечных пределах.

Функция Грина  $G_0$  (r, t), определяемая выражением (6.1), является формальным решением уравнения

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_k^2} - \varkappa \left(u_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right)^2\right] G_0(\mathbf{r}, t) = 4\pi\mu (2\pi)^4 \delta(\mathbf{r}) \delta(t)$$
 (6.2)

Для вычисления интеграла (6.1) необходимо задать способ обхода полюсов, лежащих на пути интегрирования. Полюсы имеют место при тех значениях **k** и ю, для которых выполняется дисперсионное уравнение (5.3). Таким образом, эти полюсы соответствуют реально существующим в движущейся среде свободным электромагнитным волнам. Ниже мы будем предполагать, что полюсы подынтегрального выражения в (6.1) лежат на действительной оси, что соответствует незатухающим волнам.

Поскольку уравнение (6.2) для функции Грина  $G_0$  (r, t) является дифференциальным уравнением в частных производных порядка выше первого, оно имеет несколько линейно независимых решений. Из интегральной записи  $G_0$  (r, t) в (6.1) можно получить все эти решения соответствующим выбором обхода полюсов. Обычно в электродинамике для выделения физического решения пользуются принципом излучения Зоммерфельда, который эквивалентен требованию, чтобы на бесконечном расстоянии от источника поле представлялось в виде суперпозиции расходящихся волн. Это требование, как было показано впервые Мандельштамом <sup>37</sup>, не является достаточным даже в электродинамике покоящихся сред. Причину легко понять, если рассмотреть излучение какого-пибудь источника, например, осциллятора, помещенного в преломляющую среду. Если источник излучает энергию, то на большом расстоянии от источника групповая скорость излучаемых волн должна иметь положительную проекцию на радиус-вектор, проведенный из области, занятой источником, в точку наблюдения. В преломляющей среде направление групповой скорости, вообще говоря, не совпадает с направлением фазовой \*). Поэтому возможен такой случай, когда проекция групповой скорости на радиус-вектор точки наблюдения положительна (т. е. энергия распространяется от источника к точке наблюдения), а проекция фазовой скорости на те же направления отрицательна. Это означает, что поле излучения представляет собой суперпозицию сходящихся волн. Таким образом, принцип излучения Зоммерфельда в рассмотренном примере не соблюдается, так как физическим требованием является требование, чтобы поток энергии (а не фазовая скорость) был направлен от источника <sup>38</sup>. Отметим, однако, что в движущейся среде требование, чтобы энергия уходила от источника, является недостаточным. Можно указать, например, на рассмотренный еще Таммом <sup>39</sup> случай обращения черенковских потерь, когда излучение Вавилова — Черенкова рассматривается в системе координат, в которой заряд покоится. В этом случае движущаяся среда ускоряет заряд. Это означает, что энергия передается от движущейся среды источнику поля.

В электродинамике равновесных сред существует несколько принципов, позволяющих выделить физические решения уравнений поля. К числу этих принципов относятся:

- 1) принцип излучения Зоммерфельда (требование, чтобы поле на бесконечности разлагалось только по расходящимся волнам);
- 2) принцип излучения Мандельштама (требование, чтобы поток энергии на бесконечности был направлен от источника);
- 3) метод введения бесконечно малого затухания (полюсы смещаются с действительной оси на бесконечно малое расстояние «вверх» или «вниз» и из полученных таким образом решений выбираются те, которые экспоненциально затухают по мере удаления от источника);
- 4) решение задачи Коши (т. е. нахождение решений, удовлетворяющих заданным начальным условиям).

<sup>\*)</sup> В качестве примера укажем на изотропную среду с одновременно отрицательными значениями диэлектрической є и магнитной и проницаемостей. В этом случае поток энергии направлен противоположно фазовой скорости.

Ниже мы будем определять правила обхода полюсов, исходя из задания начальных условий. Функция Грина  $G_0$  удовлетворяет уравнению (6.2), т. е. описывает поле, возникающее в результате действия мгновенного точечного источника, расположенного в начале координат. Естественно потребовать, чтобы до момента включения источника поле было тождественно равно нулю. Это требование определяет правила обхода полюсов при интегрировании выражения (6.1) для функции Грипа. Действительно, для того чтобы функция  $G_0$  обращалась в нуль при t < 0, необходимо при интегрировании по частоте  $\omega$  все полюсы, возникающие на пути интегрирования, обходить сверху. Этому требованию можно удовлетворить, записав выражение (6.1) в виде

$$G_0 = 4\pi \lim_{v \to 0} \int \frac{\mu \exp\left[i \left(\mathbf{k}r - \omega t\right)\right]}{\Delta\left(\omega + i\gamma, \mathbf{k}\right)} d\mathbf{k} d\omega. \tag{6.3}$$

где  $\gamma$  — малая положительная величина. В дальнейшем мы для краткости будем иногда опускать знак предельного перехода. Выражение (6.3) можно переписать, разложив знаменатель  $\Delta$  по степеням  $\gamma$  и ограничившись членами первого порядка:

$$G_0 = 4\pi \int \frac{\mu \exp\left[i\left(\mathbf{k}r - \omega t\right)\right]}{\Delta + i\left(\gamma\theta\Delta/\partial\omega\right)} d\mathbf{k} d\omega. \tag{6.4}$$

Воспользуемся соотношением

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{x + i\alpha} = \frac{PV}{x} - i\pi \operatorname{sgn} \alpha \cdot \delta(x), \tag{6.5}$$

где PV озпачает главное значение, а знаковая функция имеет вид

$$\operatorname{sgn} \alpha = \frac{\alpha}{|\alpha|} = \begin{cases} +1, & \text{если } \alpha > 0, \\ -1, & \text{если } \alpha < 0. \end{cases}$$
 (6.6)

С помощью этих соотношений выражение для функции Грина можно записать в виде

$$G_{0}(\mathbf{r}, t) = 4\pi \int d\mathbf{k} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) \int \mu \exp(-i\omega t) d\omega \times \left[ \frac{PV}{\Delta(\omega, \mathbf{k})} - i\pi \operatorname{sgn}\left(\frac{\partial \Delta}{\partial \omega}\right) \delta(\Delta(\omega, \mathbf{k})) \right].$$
(6.7)

В дальнейшем мы будем опускать символ главного значения PV, имея в виду, что все интегралы будут вычисляться в смысле главного значения. Выражение (6.7) было получено Чугуновым <sup>40, 41</sup>. Для случая движущейся среды без дисперсии оно было получено ранее в работе <sup>42</sup>.

Можно показать, что функция Грина  $G_0$  ( $\mathbf{r}$ , t) в (6.3) или (6.4), удовлетворяющая поставленным нами начальным условиям, обладает тем свойством, что функция

$$G_{\omega}(\mathbf{r}) = \int \frac{d\mathbf{k} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})}{\Delta(\omega, \mathbf{k}) + i(\gamma \partial \Delta/\partial \omega)}$$
(6.8)

экспоненциально затухает с ростом расстояния от источника (т. е. от пачала координат). Это означает, что решение задачи Коши, полученное выше, удовлетворяет тем же требованиям, что и решение, полученное с помощью введения бесконечно малого затухания в среде. Таким образом, способы 3) и 4) выделения физических решений оказываются эквивалентными. Можно показать, далее, что оба эти способа эквивалентны принципу излучения Мандельштама <sup>38</sup>. Что же касается принципа излучения Зоммерфельда, то он сводится к остальным трем способам выделения физического решения только в том случае, если среда не обладает дисперсией.

Действительно, принцип излучения Зоммерфельда накладывает условие на фазовую скорость волн, в то время как принцип излучения Мандельштама и эквивалентные ему остальные два принципа накладывают условие на групповую скорость.

# 7. СВОБОДНЫЕ ВОЛНЫ В ДВИЖУЩЕЙСЯ СРЕДЕ

Закон распространения свободных электромагнитных волн в движущейся среде можно получить из системы уравнений (3.9) для потенциалов  $A_{\alpha}$ , если положить в них четырехмерный ток  $j_i$  равным нулю. Тогда мы получим уравнение для потенциалов поля в отсутствие токов и зарядов:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x_h^2} - \varkappa \left(u_h \frac{\partial}{\partial x_h}\right)^2\right] A_\alpha = 0. \tag{7.1}$$

Будем искать решение этого уравнения в виде

$$A_{\alpha}(\mathbf{r}, t) = A_{0\alpha} \exp\left[i\left(\mathbf{kr} - \omega t\right)\right],\tag{7.2}$$

где амплитуда  $A_{0\alpha}$  не зависит от координат и времени. Подставляя это выражение в (7.1), получим следующее уравнение:

$$\left[\mathbf{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} - \varkappa \gamma^2 c^{-2} \left(\omega - \mathbf{k} \mathbf{u}\right)^2\right] A_{0\alpha} = 0, \tag{7.3}$$

где и — трехмерная скорость переноса среды  $\varkappa=\epsilon\mu-1$ , а  $\gamma^{-2}=1$  —  $(u^2/c^2)$ . Из (7.3) видно, что отличные от нуля решения существуют только при выполнении условия

$$\Delta(\omega, \mathbf{k}) = \mathbf{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} - \varkappa \gamma^2 c^{-2} (\omega - \mathbf{k} \mathbf{u})^2 = 0,$$
 (7.4)

представляющего собой дисперсионное уравнение для плоских монохроматических электромагнитных волн в движущейся среде.

Как видно из предыдущего, дисперсионное уравнение (7.4) эквивалентно условию обращения в нуль знаменателя в разложении Фурье для функции Грина (6.1). Напомним здесь, что величина  $\kappa$  является функцией частоты  $\omega$  и волнового вектора  $\kappa$ , т. е.  $\kappa = \kappa$   $(\omega, \kappa)$ .

Как видно из дисперсионного уравнения (7.4), в него входит скалярное произведение (**ku**) волнового вектора **k** на скорость перемещения среды **u**. Это означает, что закон распространения волны в движущейся среде зависит от угла между направлениями волнового вектора и скорости среды. В этом смысле движущаяся среда обладает анизотропией даже в том случае, если в системе покоя она изотропна.

Ниже мы рассмотрим особенности распространения свободных электромагнитных волн в движущейся среде.

Определим фазовую скорость волны, распространяющейся под углом  $\vartheta$  к направлению движения среды. Для этого положим

$$(\mathbf{k}\mathbf{u}) = ku \cos \vartheta_{\mathbf{z}}$$
$$k = \frac{\omega n (\mathbf{k})}{c},$$

где n (k) — показатель преломления среды в направлении k. Подставив соотношения (7.5) в дисперсионное уравнение (7.4), мы получим уравнение, определяющее фазовую скорость  $v_{ph}=c/n$  (k) для волны, распространяющейся под углом  $\vartheta$  к направлению движения среды:

$$\left(\frac{c}{n}\right)^2 - c^2 + \eta \left(\frac{c}{n} - u \cos \vartheta\right)^2 = 0, \tag{7.6}$$

где

$$\eta = \frac{\varkappa}{1 - u^2/c^2} = \frac{\varepsilon \mu - 1}{1 - (u^2/c^2)}.$$
 (7.7)

Поскольку при наличии дисперсии коэффициент  $\eta$  (7.7) в уравнении (7.6) зависит от  $\mathbf{k}$  и  $\omega$  и, следовательно, от n, то решение уравнения (7.6) в общем случае затруднительно. Однако если рассмотреть среду без дисперсии, для которой коэффициент  $\eta$  не зависит от n, уравнение (7.6) можно легко решить. Мы получаем  $^{26}$ 

Формула (7.8) определяет фазовую скорость c/n ( $\vartheta$ ) для электромагнитной волны в движущейся среде без дисперсии, распространяющейся под углом  $\vartheta$  к скорости перемещения среды. На первый взгляд из формулы (7.8) можно вывести заключение, что знаки плюс и минус соответствуют двум различным решениям. Однако это не так. Действительно, два решения,  $c/n_1$  и  $c/n_2$ , связаны между собой соотношением

$$\frac{c}{n_1(\pi - \vartheta)} = -\frac{c}{n_2(\vartheta)}. \tag{7.9}$$

Если в каждом данном направлении, составляющем угол  $\vartheta$  со скоростью среды, отложить величину c/n ( $\vartheta$ ), мы получим так называемую поверхность нормалей.

Поверхность нормалей является поверхностью вращения с осью, направленной по скорости движения среды. Из сказанного выше следует, что два решения (7.8) описывают одну поверхность нормалей. Таким образом, анизотропия движущейся среды имеет иной характер, чем анизотропия кристалла. В обоих случаях показатели преломления для волны заданной частоты зависят от направления. Но в кристалле (без пространственной дисперсии) в каждом заданном направлении могут распространяться две волны определенной частоты с разными фазовыми скоростями, причем каждому из двух возможных значений фазовой скорости отвечает своя поляризация.

 $\hat{\mathbf{B}}$  движущейся же среде имеет место вырождение по поляризации, т. е. волна, обладающая одним из возможных значений фазовой скорости, может иметь произвольную поляризацию, совместимую с дополнительным условием (3.7). Для свободных электромагнитных волн можно считать  $A_4 = i \varphi = 0$ . В этом случае условие (3.7) принимает вид

$$\operatorname{div} \mathbf{A} - \frac{\eta}{c^2} \left( \mathbf{u} \nabla + \frac{\partial}{\partial t} \right) (\mathbf{u} \mathbf{A}) = 0. \tag{7.10}$$

Для плоской электромагнитной волны (7.2) получаем

$$\left(\mathbf{k} - \frac{\eta!}{c^2} (\mathbf{u}\mathbf{k} - \omega) \mathbf{u}, \mathbf{A}_0\right) = 0, \tag{7.11}$$

т. е. вектор поляризации  $\mathbf{A}_0$  перпендикулярен к вектору

$$k - \eta (uk - \omega) uc^{-2}$$
,

который представляет собой линейную комбинацию скорости среды и волнового вектора.

Посмотрим, какой вид имеет поверхность нормалей при различных скоростях движения среды (рис. 1). В досветовом случае ( $\varepsilon \mu u^2/c^2 < 1$  или  $u < c/\sqrt{\varepsilon \mu}$ ) из формулы (7.8) получаем, что поверхность нормалей имеет вид гладкой замкнутой поверхности, содержащей внутри себя начало координат (см. рис. 1, a). Эта поверхность смещена по направлению

движения среды, т. е. фазовая скорость волны, направление распространения которой составляет острый угол со скоростью среды, оказывается больше, чем фазовая скорость волны, распространяющейся под тупым углом к скорости среды (см. рис. 1, a и b).

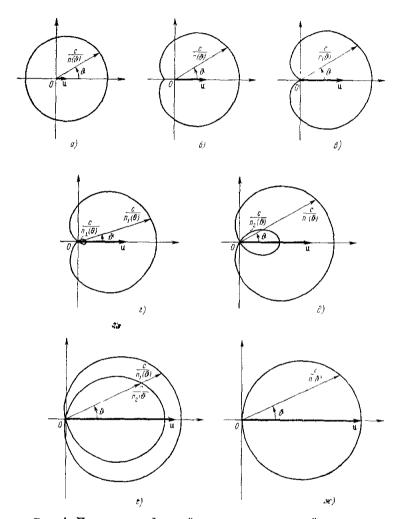


Рис. 1. Поверхность фазовой скорости в движущейся среде.

 ${f 0}$  — угол между направлением волнового вектора и скоростью движения среды и. Длина вектора, отложенного от точки O под углом  ${f 0}$ , пропорциональна фазовой скорости волны c/n ( ${f 0}$ ). Повазалель препомления среды в системе покоя равен 3 (V = U = 3). Среда не обладает дисперсией в системе покоя u =

Если скорость перемещения среды равна фазовой скорости срета  $(u=c/\sqrt{\epsilon\mu})$ , поверхность нормалей имеет характерный вид, изображенный на рис. 1, в. На этой поверхности нет точек самопересечения, т. е. в каждом заданном направлении величина c/n ( $\vartheta$ ) имеет одно положительное и одно отрицательное значение. В сверхсветовом случае  $(u>c/\sqrt{\epsilon\mu})$ , как видно из рис. 1, e-e, поверхность нормалей становится самопересекающейся, причем точка самопересечения находится в начале коогди-

нат. В точке самопересечения поверхность пормалей касается конуса, угол раствора которого определяется равенством

$$\operatorname{tg} \vartheta_0 = \pm \sqrt{\left(\epsilon \mu \frac{u^2}{c^2} - 1\right) \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1}}.$$
(7.12)

Если теперь выбрать направление, лежащее внутри указанного выше конуса, то такому направлению будут соответствовать два возможных значения фазовой скорости c/n ( $\vartheta$ ). При этом для направлений, составляющих острый угол с направлением движения среды, эти два значения фазовой скорости оказываются положительными, а для направлений, составляющих тупой угол, — отрицательными. Направлениям же, лежащим вне конуса, соответствуют два значения фазовой скорости, имеющие разные знаки.

Наконец, если скорость перемещения среды равна скорости света (u=c), поверхность нормалей принимает вид сферы (см. рис. 1, ж). Эта сфера построена как на диаметре на отрезке длиной c, отложенном от начала координат в направлении движения среды.

От поверхности нормалей можно перейти к поверхности показателя преломления n ( $\theta$ ) (рис. 2). Эта поверхность при  $\varepsilon \mu u^2/c^2 < 1$  является эллипсоидом, при  $\varepsilon \mu u^2/c^2 = 1$  — параболоидом, а при  $\varepsilon \mu u^2/c^2 > 1$  — гиперболоидом вращения. На рис. 2 стрелками обозначены направления групповой скорости, которые определялись с помощью (7.15).

Как видно из рис. 2, a и b, в досветовом случае возможны любые направления групповой скорости. В случае  $u=c/\sqrt{\epsilon\mu}$  групповая скорость может составлять со скоростью среды только острый угол (см. рис. 2, b). В сверхсветовом случае (см. рис. 2, 2 — b) векторы групповой скорости лежат внутри конуса с углом раствора  $\theta_g$ , где

$$tg \vartheta_g = ctg \vartheta_0 = \sqrt{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \left(\epsilon \mu \frac{u^2}{c^2} - 1\right)^{-1}}.$$
(7.13)

Образующие этого конуса перпендикулярны к аєимптотам гиперболы на рис.  $2, \, c = e$ .

При стремлении скорости перемещения среды к скорости света  $(u \to c)$  поверхность показателя преломления вырождается в плоскость, расположенную па единичном расстоянии от начала координат и перпендикулярную к скорости и (см. рис.  $2, \mathfrak{m}$ ).

Выражение (7.8) дает величину фазовой скорости волны в движущейся среде без дисперсии в направлении, составляющем угол  $\vartheta$  с направлением движения среды. Выражение для групповой скорости волны в движущейся среде без дисперсии можно получить из дисперсионного уравнения (7.4) <sup>43</sup>:

$$\mathbf{v}_{g} = \frac{d\omega}{d\mathbf{k}} = c \frac{\mathbf{k} + \varkappa \gamma^{2} c^{-2} \mathbf{u} \left(\omega - \mathbf{k} \mathbf{u}\right)_{s}^{*}}{\left(\omega/c\right) + \varkappa \gamma^{2} c^{-1} \left(\omega - \mathbf{k} \mathbf{u}\right)}.$$
 (7.14)

При этом пужно иметь в виду, что при получении явного выражения для групповой скорости как функции частоты, скорости движения среды и направления распространения волны в формуле (7.14) величину волнового вектора **k** следует выразить через эти аргументы с помощью дисперсионного уравнения (7.4). Эти соображения применимы в дальнейшем ко всем выражениям для фазовой и групповой скоростям.

Отметим, что хотя в системе покоя среда изотроина и в ней групповая скорость совпадает с фазовой по величине и направлению, движение среды вызывает своеобразную анизотропию и приводит к различию между фазовой и групповой скоростями, как по величине, так и по направлению. Действительно, можно показать, что групповая скорость волны с волновым

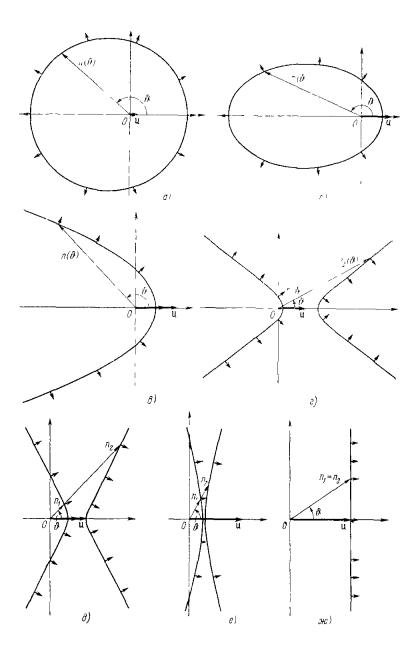


Рис. 2. Поверхность показателя преломления в движущейся среде.

Рис. 2. Поверхность показателя преломления в движущейся среде. 
Длина вектора, отложенного под углом  $\vartheta$  к скорости движения среды  $\mathbf u$ , пропорщиональна показателю преломления в данном направлении. Нормальные к поверхности стремки указывают направление групповой скорости волны. Показатель преломления среды в системе покоя равен 3 ( $\sqrt{s_L}=3$ ). Среда не обладает дисперсией в системе покоя. a) u/c=0,1 (досветовая скорость движения среды бливка к фазовой скорость света в покоящейся среде); a) u/c=1/3 (скорость движения среды равна фазовой скорость света в покоящейся среде); a) u/c=0,4 (скорость движения среды равна фазовой скорость света в покоящейся среде); a) u/c=0,4 (скорость движения среды немного превышает фазовую скорость света в ней); a) u/c=0,6 (скорость движения среды заметно превышает фазовую скорость света в ней); a) u/c=0,9 (скорость движения среды близка к скорости света в вакууме); x0) u=c0.

вектором  ${\bf k}$  совпадает по направлению с нормалью к поверхности волновых векторов  ${}^{44}$  k=k ( $\omega$ ,  $\vartheta$ ,  $\varphi$ ). В случае изотронной среды поверхность волновых векторов вырождается в сферу и групповая скорость параллельна фазовой.

В движущейся среде без дисперсии имеет место следующее соотношение между фазовой и групповой скоростями:

$$(\mathbf{v}_{ph\bullet} \mathbf{v}_g) = v_{ph}^2$$
 или  $v_{ph} = v_g \cos(\mathbf{v}_{ph\bullet} \mathbf{v}_g),$  (7.15)

т. е. проекция групповой скорости на фазовую равна фазовой скорости. Аналогичное соотношение имеет место в анизотропных покоящихся средах  $^{45}$ . С помощью этого соотношения можно обосновать выбор направлений групповой скорости на рис. 2.

При нерелятивистских скоростях движения среды фазовая и групповая скорости волны в среде без дисперсии принимают вид

$$\mathbf{v}_{ph} \approx \left[ \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}} + \left( 1 - \frac{1}{\epsilon \mu} \right) u \cos \vartheta \right] \frac{\mathbf{k}}{k},$$

$$\mathbf{v}_{g} \approx \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}} \frac{\mathbf{k}}{k} + \left( 1 - \frac{1}{\epsilon \mu} \right) \mathbf{u},$$
(7.16)

где  $\vartheta$  — угол между векторами **k** и и. При этом отброшены члены порядка  $u^2/c^2$  и более высокого порядка малости.

Фазовая скорость направлена по волновому вектору  $\mathbf{k}$ , групповая же скорость имеет составляющие как вдоль волнового вектора  $\mathbf{k}$ , так и по скорости среды  $\mathbf{u}$ . Последнее обстоятельство указывает на увлечение энергии электромагнитной волны движущейся средой. Множитель  $1 - (1/\epsilon\mu)$  в формулах (7.16) называется коэффициентом увлечения света движущейся средой. Выражение для этого коэффициента было впервые получено Френелем (см.  $^5$ ).

Рассмотрим теперь свободные волны в движущейся изотропной среде при наличии дисперсии. При этом мы будем считать, что в системе покоя среда обладает только частотной дисперсией, т. е. є и µ в системе покоя среды зависят от частоты  $\omega$ . Тогда в движущейся системе постоянные є и µ будут зависеть от частоты

$$\omega' = \frac{\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}}{\sqrt{1 - (u^2/c^2)}} \tag{7.17}$$

(см. формулу (4.11)).

В этом случае, как уже было сказано выше, выражение (7.8) определяет фазовую скорость распространения электромагнитных воли в движущейся среде неявным образом, поскольку величина  $\eta$ , которая входит в выражение (7.8) для c/n, сама зависит от  $\omega$  и k, т. е. в конечном счете и от величины n. Аналогичная ситуация будет иметь место и в более общем случае, когда изотропная среда в системе покоя обладает не только частотной, но и пространственной дисперсией, т. е. когда функции  $\varepsilon$  и  $\mu$  в системе покоя зависят от частоты волны  $\omega$  и волнового вектора k. В этом случае в системе координат, где среда движется со скоростью u, величины  $\varepsilon$  и  $\mu$  будут зависеть от аргументов

$$\mathbf{k}' = \mathbf{k} + \mathbf{u} \left[ (\mathbf{u}\mathbf{k}) \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \right) - \omega \frac{u^2}{c^2} \right] \left( u^2 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \right)^{-1},$$

$$\omega' = \frac{\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}}{\sqrt{1 - (u^2/c^2)}}.$$
(7.17')

Если фазовая скорость волн в общем случае определяется лишь неявно из выражения (7.8), то для групповой скорости нетрудно получить

явное выражение. Из дисперсионного уравнения (7.4) получаем

$$\mathbf{v}_{g} = \frac{d\omega}{d\mathbf{k}} = c \frac{\mathbf{k} + \varkappa c^{-2}\gamma^{2} \left(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}\right) \mathbf{u} - (1/2) \left(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}\right)^{2} c^{-2}\gamma^{2} \left(\partial \varkappa / \partial \mathbf{k}\right)}{\left(\omega / c\right) + \varkappa c^{-1} \left(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}\right) \gamma^{2} + (1/2) c^{-1}\gamma^{2} \left(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}\right)^{2} \left(\partial \varkappa / \partial \omega\right)}, \quad (7.18)$$

где  $\gamma^2 = 1/\sqrt{1 - (u^2/c^2)}$ .

Следует иметь в виду, что функция  $\kappa$  ( $\omega'$ ,  $\mathbf{k}'$ ) =  $\epsilon$  ( $\omega'$ ,  $\mathbf{k}'$ )  $\mu$  ( $\omega'$ ,  $\mathbf{k}'$ ) — 1 зависит от  $\mathbf{k}$  и  $\omega$  через аргументы (7.17').

Как видно из формулы (7.18), групповая скорость волны в движущейся среде с пространственной дисперсией имеет три слагаемых. Одно из них направлено по волновому вектору k, второе — по скорости движения среды u, третье — по градиенту функции и. Легко видеть, что третье слагаемое, градиент и, может иметь составляющие только по направлениям k и u, ибо имеются только два выделенных направления, k и u. Таким образом, и в общем случае изотропной движущейся среды с произвольной дисперсией справедлив вывод, что групповая скорость имеет составляющие по направлениям волнового вектора k и скорости переноса среды u.

Если пространственная дисперсия в системе покоя отсутствует, то градиент  $\varkappa$  направлен только по скорости  ${\bf u}$ , и тогда групповая скорость принимает вид  $^{43}$ 

$$\mathbf{v}_{g} = c \frac{\mathbf{k} + \mathbf{u} \left(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}\right) \gamma^{2} c^{-2} \left[\varkappa + \left(\frac{1}{2}\right) \varkappa' \gamma \left(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}\right)\right]}{\left(\omega/c\right) + \left(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}\right) c^{-1} \gamma^{2} \left[\varkappa + \left(\frac{1}{2}\right) \varkappa' \gamma \left(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}\right)\right]},$$
(7.19)

где  $\varkappa' = \partial \varkappa (\omega')/\partial \omega'$ .

В случае нерелятивистских скоростей последнее выражение для групповой скорости сильно упрощается и принимает вид

$$\mathbf{v}_{g} = v_{0g} \frac{\mathbf{k}}{k} + \left(1 - \frac{v_{0g}}{cn_{0}}\right) \mathbf{u} + \frac{v_{0g}^{2}}{c^{2}} \left(\frac{\mathbf{k}}{k}, \mathbf{u}\right) \omega \frac{n_{0}^{2} \left[\partial^{2} \left(\omega n_{0}\right)/\partial \omega^{2}\right] + \left(\partial n_{0}/\partial \omega\right)}{n_{0}} \frac{\mathbf{k}}{k}, \qquad (7.20)$$

где  $v_{0\,g}=c/[d\ (\omega n_0)/d\omega]$  есть групповая скорость волн в покоящейся среде, а величина  $n_0=\sqrt{\epsilon\mu}$  совпадает с показателем преломления в покоящейся среде.

Приведем также выражение для фазовой скорости волн в медленно движущейся среде в отсутствие пространственной дисперсии:

$$\mathbf{v}_{ph} \approx \left\{ \frac{c}{n_0} + \left[ \left( 1 - \frac{1}{n_0^2} \right) + \frac{\omega}{n_0} \frac{dn_0}{d\omega} \right] u \cos \vartheta \right\} \frac{\mathbf{k}}{k}, \tag{7.21}$$

где  $\vartheta$  есть угол между направлением распространения волны  ${\bf k}$  и скорости переноса среды  ${\bf u}.$ 

В формуле (7.21) член с производной по частоте получен Лоренцом в 1895 г. и экспериментально подтвержден Зееманом в 1905 г. 3.

В заключение этого раздела остановимся на особенностях распространения волн в такой движущейся среде, которая в системе покоя имеет диэлектрическую процицаемость вида

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{\text{const}}{\omega^2}, \qquad (7.22)$$

причем постоянная в формуле (7.22) может быть как положительной, так и отрицательной. В последнем случае диэлектрическая проницаемость (7.22) описывает электромагнитные свойства холодной электронной плазмы в длинноволновом приближении.

Для таких сред дисперсионное уравнение (7.4) принимает вид

$$\mathbf{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = \text{const.} \tag{7.23}$$

Как видно из формулы (7.23), в этом случае в дисперсионное уравнение не входит скорость переноса среды **u**, т. е. оно имеет один и тот же вид при любой скорости перемещения среды <sup>26</sup>.

Если приравнять нулю постоянную в правой части уравнения (7.23), то мы получим дисперсионное уравнение для свободных волн в вакууме.

Из дисперсионного уравнения (7.23) получаем следующие выражения для фазовой и групповой скорости волн:

$$\mathbf{v}_{ph} = \frac{\omega}{\sqrt{\operatorname{const} + (\omega^{2}/c^{2})}} \frac{\mathbf{k}}{k},$$

$$\mathbf{v}_{g} = \frac{c^{2}}{\omega} \sqrt{\operatorname{const} + \frac{\omega^{2}}{c^{2}}} \frac{\mathbf{k}}{k}.$$
(7.24)

В этом случае произведение фазовой скорости на групповую равно квадрату скорости света. Разумеется, выражения (7.24) могут быть получены из ранее выведенных общих формул (7.8) и (7.19).

Соотношения (7.23) и (7.24) в точности апалогичны соотношениям между энергией и импульсом частицы, обладающей конечной массой. В данном случае эта масса пропорциональна входящей в уравнение (7.23) постоянной.

#### 8. ФУНКЦИЯ ГРИНА В ДВИЖУЩЕЙСЯ СРЕДЕ БЕЗ ДИСПЕРСИИ

Для движущейся среды, не обладающей дисперсией, функция Грина (6.1) может быть вычислена точно. Введем цилиндрическую систему координат, ось z которой направлена по скорости переноса среды. Компоненту волнового вектора  $\mathbf{k}$  по оси z обозначим через  $k_z$ , а его проекцию на плоскость, перпендикулярную к оси z, — через  $k_\rho$ . Аналогичные проекции радиуса-вектора  $\mathbf{r}$  обозначим соответственно через z и  $\rho$ . Проводя  $\mathbf{s}$  (6.1) интегрирование по азимутальному углу между векторами  $\mathbf{k}_\rho$  и  $\rho$ , получим

$$G_0(\mathbf{r},t) = 8\pi^2 \mu \int \frac{J_0(k_\rho \rho) \exp\left[i (k_z z - \omega t)\right] k_\rho dk_\rho dk_z d\omega}{k_\rho^2 + \frac{\epsilon \mu - \beta^2}{4 - \beta^2} \frac{\omega^2}{c^2} + 2 \frac{\epsilon \mu - 1}{4 - \beta^2} \beta \frac{\omega}{c} k_z + \frac{1 - \epsilon \mu \beta^2}{4 - \beta^2} k_z^2}, \quad (8.1)$$

где  $J_0\left(k_{
ho}
ho\right)$  — функция Бесселя первого рода нулевого порядка, а eta=u/c. С помощью известной формулы  $^{46}$ 

$$\int_{0}^{\infty} \frac{J_{0}(k_{\rho}\rho) k_{\rho} dk_{\rho}}{k_{\rho}^{2} + a^{2}} = K_{0}(a\rho)$$
 (8.2)

 $(K_0$  — функция Макдональда) интеграл (8.1) приводится к виду

$$G_{0}(\mathbf{r}, t) = 8\pi^{2}\mu \int K_{0}\left(\gamma\rho \sqrt{(\beta^{2} - \epsilon\mu)\frac{\omega^{2}}{c^{2}} + 2(\epsilon\mu - 1)\beta\frac{\omega}{c}k_{z} - (\beta^{2}\epsilon\mu - 1)k_{z}^{2}}\right) \times \exp\left[i\left(k_{z}z - \omega t\right)\right]dk_{z}d\omega, \quad (8.3)$$

где  $\gamma^{-2}=1-\beta^2$ ,  $\beta=u/c$ . При этом необходимо выбирать такую ветвь аргумента функции  $K_0$ , чтобы было

$$\operatorname{Re}\sqrt{(\beta^{2}-\epsilon\mu)\frac{\omega^{2}}{c^{2}}+2(\epsilon\mu-1)\beta k_{z}\frac{\omega}{c}-(\beta^{2}\epsilon\mu-1)k_{z}^{2}}>0.$$
 (8.4)

Это требование эквивалентно принципу излучения, сформулированному в виде (6.3).

Представление функции Грина в виде разложения (8.3) оказывается удобным для задач с цилиндрической симметрией. Вычисление интеграла

в (8.3) удобно провести, введя вместо о новую переменную

$$\omega' = \omega - \frac{(\varepsilon \mu - 1) \beta c k_z}{\varepsilon \mu - \beta^2}.$$
 (8.5)

Тогда формула (8.3) запишется в виде

$$G_{0}(\mathbf{r}, t) = 4\pi^{3}\mu i \int H_{0}^{(1)} \left(\rho \sqrt{\frac{\epsilon\mu - \beta^{2}}{c^{2}(1-\beta^{2})}} \omega'^{2} - \epsilon\mu \frac{1-\beta^{2}}{\epsilon\mu - \beta^{2}} k_{z}^{2}\right) \times \exp\left(-i\omega' t\right) \exp\left[ik_{z}\left(z - \frac{\epsilon\mu - 1}{\epsilon\mu - \beta^{2}} ut\right)\right] dk_{z} d\omega', \tag{8.6}$$

где  $H_0^{\text{co}}$  — функция Ганкеля. Здесь мы воспользовались известным соотношением из теории бесселевых функций <sup>46</sup>

$$K_0(z) = \frac{\pi i}{2} H_0^{(i)}(z).$$

Естественно, что в этом случае условие (8.4) удобно записать несколько иначе:

Im 
$$\sqrt{\frac{\varepsilon\mu - \beta^2}{c^2(1 - \beta^2)}} \omega'^2 - \varepsilon\mu \frac{1 - \beta^2}{\varepsilon\mu - \beta^2} k_z^2 > 0.$$
 (8.7)

Проведя в формуле (8.6) интегрирование по переменной  $k_z$  с помощью формулы 46

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} H_0^{(1)} \left( r \sqrt{\alpha^2 - t^2} \right) dt = -2i \frac{\exp\left(i\alpha \sqrt{r^2 + x^2}\right)}{\sqrt{r^2 + x^2}}$$
(8.8)
$$(\operatorname{Im} \sqrt{\alpha^2 - t^2} > 0, \operatorname{Im} \alpha > 0),$$

получим следующее выражение для функции Грина:

$$G_{0}(\mathbf{r},t) = 8\pi^{3}\mu \left[ \rho^{2} \frac{\varepsilon\mu (1-\beta^{2})}{\varepsilon\mu - \beta^{2}} + \left(z - \frac{\varepsilon\mu - 1}{\varepsilon\mu - \beta^{2}} ut\right)^{2} \right]^{-1/2} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \exp \left\{ -i\omega' \left[ t - \frac{(\varepsilon\mu - \beta^{2})c^{-1}}{(1-\beta^{2})\sqrt{\varepsilon\mu}} \sqrt{\rho^{2} \frac{\varepsilon\mu (1-\beta^{2})}{\varepsilon\mu - \beta^{2}} + \left(z - \frac{\varepsilon\mu - 1}{\varepsilon\mu - \beta^{2}} ut\right)^{2}} \right] \right\}.$$

$$(8.9)$$

Интегрируя по  $d\omega'$ , получаем окончательное выражение для функции Грина в среде, движущейся со скоростью и вдоль оси z:

$$G_{0}(\mathbf{r}, t) = 16\pi^{4}\mu \left[ \rho^{2} \frac{\varepsilon\mu (1-\beta^{2})}{\varepsilon\mu - \beta^{2}} + \left(z - \frac{\varepsilon\mu - 1}{\varepsilon\mu - \beta^{2}}ut\right)^{2} \right]^{-1/2} \times \left(t - \frac{1}{c} \frac{\varepsilon\mu - \beta^{2}}{(1-\beta^{2})\sqrt{\varepsilon\mu}} \sqrt{\rho^{2} \frac{\varepsilon\mu (1-\beta^{2})}{\varepsilon\mu - \beta^{2}} + \left(z - \frac{\varepsilon\mu - 1}{\varepsilon\mu - \beta^{2}}ut\right)^{2}} \right). \quad (8.10)$$

Это выражение другим путем получил Комптон <sup>33</sup>.

Как видно из решения (8.10), функция Грина отлична от нуля только для тех значений переменных  $\rho$ , z и t, для которых аргумент  $\delta$ -функции обращается в нуль. При этом в соответствии с принципом излучения (6.3) в решении (8.10) следует учитывать лишь положительные значения времени t (при t < 0  $G_0$  ( $\mathbf{r}$ , t)  $\equiv 0$ ).

ни t (при t < 0  $G_0$   $(\mathbf{r}, t) \equiv 0$ ). Функция Грина  $G_0$   $(\mathbf{r}, t)$  описывает поле точечного мгновенного источника, расположенного в начале координат  $\mathbf{r} = 0$  и включенного в момент времени t = 0. Если источник расположен в точке  $\mathbf{r}_0$  и включается в момент времени  $t_0$ , то аргументами функций Грина будут величины  $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$  и  $(t - t_0)$ , и мы соответственно получим  $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, t - t_0)$ , где  $(\mathbf{r}_0, t_0)$  — координаты источника, а  $(\mathbf{r}, t)$  — координаты точки наблюдения.

Функция  $G(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0,\ t-t_0)$  обладает следующим свойством симметрии, которое можно рассматривать как обобщение теоремы взаимности \*) на случай движущихся сред. Если поменять местами точку наблюдения  $\mathbf{r}$  и точку  $\mathbf{r}_0$ , где расположен источник, и одновременно изменить знак скорости среды (т. е. перейти к рассмотрению среды, движущейся с той же скоростью в противоположном направлении), то функция Грина останется без изменения:

$$G_0 (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, t - t_0, \mathbf{u}) = G_0 (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}, t - t_0, -\mathbf{u}).$$

При  $\beta=u/c=0$  или при  $\epsilon\mu=1$  функция Грина (8.10) переходит в хорошо известное выражение для функции Грина в покоящейся среде без дисперсии:

 $G_0(\mathbf{r}, t)|_{\mathbf{u}=0} = \frac{16\pi^4\mu}{R} \delta\left(t - \frac{R}{c/\sqrt{\epsilon\mu}}\right),$  (8.11)

где  $R = \sqrt{\overline{
ho^2 + z^2}}$  есть расстояние от точки источника до точки наблюдения.

С помощью соотношения

$$\delta(f(t)) = \sum_{s} \frac{\delta(t - t_s)}{|f'(t_s)|}, \qquad (8.11')$$

где f'(t) = df/dt, а  $t_s$  — s-корень уравнения f(t) = 0, функцию Грина (8.10) можно преобразовать к более удобному виду:

$$G_0(\mathbf{r}, t) = 16\pi^4 \mu \frac{(1/2) (1 + \operatorname{sgn} t_1) \delta(t - t_1) + (1/2) (1 + \operatorname{sgn} t_2) \delta(t - t_2)}{\sqrt{z^2 + [(1 - \varepsilon \mu \beta^2)/(1 - \beta^2)] \rho^2}}, \quad (8.12)$$

где

$$t_{1,2} = \frac{1}{c} \frac{-(\varepsilon\mu - 1)\beta z \pm \sqrt{\varepsilon\mu} (1 - \beta^2) \sqrt{z^2 + [(1 - \varepsilon\mu\beta^2)/(1 - \beta^2)]\rho^2}}{1 - \varepsilon\mu\beta^2}$$
(8.13)

— те значения времени t, для которых аргумент  $\delta$ -функции в (8.10) обращается в нуль, а sgn  $t_{1,2}$  — знаковая функция (см. (6.6)). Естественно, что в выражениях (8.12) и (8.13) следует учитывать только действительные значения величин  $t_1$  и  $t_2$ .

Сомножители перед  $\delta$ -функциями в (8.12) вида (1 + sgn  $t_1$ , 2)/2 «выключают»  $\delta$ -функцию, у которой значение  $t_1$  (или  $t_2$ ) становится отрицательным.

Функция Грина (8.12) записывается по-разному, в зависимости от того, какова скорость перемещения среды и по сравнению с фазовой скоростью света  $c/\sqrt{\epsilon\mu}$ . Рассмотрим три случая:

1. Скорость движения среды меньше фазовой скорости света в покоящейся среде ( $u < c/\sqrt{\epsilon\mu}$ ). В этом случае из двух корней  $t_{1,2}$  в (8.13) корень  $t_1$  оказывается положительным, а корень  $t_2$  отрицательным. Поэтому функция Грина принимает вид

$$G_0(\mathbf{r}, t) = 16\pi^4 \mu \delta(t - t_1) \left(z^2 + \frac{1 - \epsilon \mu \beta^2}{1 - \beta^2} \rho^2\right)^{-1/2},$$
 (8.14)

где

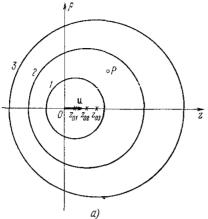
$$t_1 = \frac{1}{c} \frac{-(\varepsilon\mu - 1)\beta z + \sqrt{\varepsilon\mu} (1 - \beta^2)\sqrt{z^2 + [(1 - \varepsilon\mu\beta^2)/(1 - \beta^2)]\rho^2}}{1 - \varepsilon\mu\beta^2}.$$

Функция Грина (8.14) отлична от нуля на поверхности, уравнением которой в каждый фиксированный момент времени t является

$$t = \frac{1}{c} \frac{\varepsilon \mu - \beta^2}{\sqrt{\varepsilon \mu} (1 - \beta^2)} \sqrt{\rho^2 \frac{\varepsilon \mu (1 - \beta^2)}{\varepsilon \mu - \beta^2} + \left(z - \frac{\varepsilon \mu - 1}{\varepsilon \mu - \beta^2} ut\right)^2}. \tag{8.15}$$

<sup>\*)</sup> Формулировку теоремы взаимности в анизотроиных покоящихся средах см., например, в монографии Гинзбурга <sup>47</sup>, а для изотропных сред в книге Вайнштейна <sup>48</sup>.

Это — эллипсоид вращения, ось симметрии которого совпадает со скоростью движения среды (рис.



стью движения среды (рис. 3, a). Уравнение эллицсоида имеет вид;

$$\frac{\rho^2}{a^2} + \frac{(z - z_0)^2}{b^2} = 1, \quad (8.16)$$

где полуоси эллипса равны

$$a = ct \sqrt{\frac{1-\beta^{2}}{\epsilon\mu - \beta^{2}}},$$

$$b = \frac{ct \sqrt{\epsilon\mu} (1-\beta^{2})}{\epsilon\mu - \beta^{2}}$$
(8.17)

(при  $\epsilon\mu > 1$  a > b), а положение центра эллипса  $z_0$  определяется соотношением

$$z_0 = \frac{ut \left(\varepsilon \mu - 1\right)}{\varepsilon \mu - \beta^2}. \quad (8.18)$$

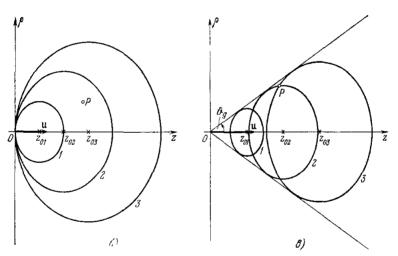


Рис. 3. Распространение мгновенного возмущения от точечного источника в движущейся среде (поверхность, на которой функция Грина отлична от нуля).

Цифры 1-3 обозначают соответствующие поверхности в три последовательных момента времени, разделенных равными промежутками. P — точка наблюдения. Митювенное возмущение создано точечным источником в начале ноординат и в начальный момент времени. Среда не обладает дисперсией в системе покоя. Показатель препомления среды в системе покоя равен  $2\left(\sqrt[3]{\epsilon\mu}=2\right)$ . a u/c=0.25 (досветовая скорость движения среды); b u/c=0.5 (скорость движения среды); a a0 a0.7 (скорость движения среды больше фазовой скорости света в покоящейся среде); a0 a0.7 (скорость движения среды больше фазовой скорости света в покоящейся среде); a0.7 (скорость движения среды больше фазовой скорости света в покоящейся среде); a0.7 (скорость движения среды больше фазовой скорости света в покоящейся среде); a0.7 (скорость движения среды больше фазовой скорости света в покоящейся среде); a0.7 (скорость движения среды больше фазовой скорость света в покоящейся среде); a0.7 (скорость движения среды больше фазовой скорость света в покоящейся среде); a1.7 (скорость движения среды больше фазовой скорость движения среды больше б

Как видно из приведенных формул, поверхность, на которой функция Грина отлична от нуля, расширяется в пространстве, а центр ее перемещается в направлении движения среды со скоростью

$$u_0 = \frac{dz_0}{dt} = \frac{u \left( \epsilon \mu - 1 \right)}{\epsilon \mu - \beta^2}. \tag{8.19}$$

Эта скорость отлична от скорости перемещения среды u. При нерелятивистских скоростях среды

$$u_0 = u \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon \mu} \right), \tag{8.20}$$

т е скорость, с которой «сносится» центр эллипсоида, равна скорости перемещения среды, умпоженной на коэффициент увлечения Френеля (см. формулы (7.16))

Поверхность, несущая сигнал, расширяется во все стороны от точки, где находится единичный мгновенный точечный источник ( $\rho=0, z=0, t=0$ ), лотя скорость этого расширения, как видно из формул (8 15) — (8 18) и из рис 3, a, различна в разных направлениях. Поэтому рано или поздно сигнал дойдет до наблюдателя, находящегося в любой точке пространства Иными словами, наблюдатель, который до прихода сигнала налодился вне поверхности, после приема сигнала окажется внутри этой расширяющейся поверхности и в дальнейшем будет всегда оставаться внутри нее

2. Скорость движения среды больще фазовой скорости света в системе покоя среды  $(u>c/\sqrt{\epsilon\mu})$  В этом случае в области z>0 оба корня,  $t_1$  и  $t_2$ , в формуле (8–13) положительны и функция Грина имеет вид

$$G_0(\mathbf{r}, t) = 16\pi^4\mu \left[\delta(t-t_1) + \delta(t-t_2)\right] \left(z^2 - \frac{\epsilon\mu\beta^2 - 1}{1-\beta^2}\rho^2\right)^{-1/2},$$
 (8.21)

где

$$ct_{1} = \left[ (\epsilon \mu - 1) \beta z - V \overline{\epsilon \mu} (1 - \beta^{2}) \sqrt{z^{2} - \frac{\epsilon \mu \beta^{2} - 1}{1 - \beta^{2}} \rho^{2}} \right] (\epsilon \mu \beta^{2} - 1)^{-1},$$

$$ct_{2} = \left[ (\epsilon \mu - 1) \beta z + V \overline{\epsilon \mu} (1 - \beta^{2}) \sqrt{z^{2} - \frac{\epsilon \mu \beta^{2} - 1}{1 - \beta^{2}} \rho^{2}} \right] (\epsilon \mu \beta^{2} - 1)^{-1}.$$

$$(8.22)$$

В области  $z \leqslant 0$  оба корня  $t_{1-2}$  в формулах (8.22) становятся отрицательными и, следовательно, функция Грина  $G_0$  ( $\mathbf{r},\ t$ ) тождественно обращается в нуль.

Функция  $G_0$  ( $\mathbf{r}$ , t) тождественно обращается в нуль также в той области пространства, где

$$z^2 < \frac{\varepsilon \mu \beta^2 - 1}{1 - \beta^2} \rho^2,$$

так как в этой области значения  $t_1$  и  $t_2$  в формуле (8.22) становятся комплексными

При сверхсветовом движении среды, как и в досветовом случае, функция Грина отлична от нуля на поверхности, уравнение которой в фиксированный момент времени имеет вид (8 15). Эта поверхность является эллипсоидом вращения, ось которого направлена по скорости движения среды. Уравнение этого эллипсоида по-прежнему имеет вид (8 16). Однако распространение сигнала в сверхсветовом случае существенно отличается от распространения сигнала в среде, движущейся со скоростью, меньшей фазовой скорости света Действительно, в досветовом случае источник всегда находится внутри расширяющейся поверхности, несущей сигнал. Это видно из того факта, что при  $\varepsilon \mu \beta^2 < 1$  длина малой полуоси эллипсоида b в выражении (8 17) больше, чем координата  $z_0$  центра эллипсоида, определяемая выражением (8 18)

В сверхсветовом случае ( $\epsilon \mu \beta^2 > 1$ ) длина b малой полуоси эллипсоида вращения становится меньше, чем расстояние  $z_0$  центра эллипсоида от начала координат В этом случае источник всегда находится вне поверхности, на которой функция Грина отлична от нуля (см рис 3,  $\theta$ ) Вся эта поверхность «сносится» движущейся средой так, что она оказывается по одну сторону от источника, т. е в области z > 0 (напомним, что скорость среды направлена по оси z). Из уравнения эллипсоида (8.16) видно, что на оси z (при  $\rho = 0$ ) поверхность занимает область значений z, определяемую

неравенством

$$z_0 - b < z < z_0 + b. (8.23)$$

В случае сверхсветового движения среды обе границы неравенства положительны и растут со временем.

Рассмотрим положение расширяющейся поверхности в несколько последовательных моментов времени (см. рис. 3, в). Все они расположены внутри конуса

$$z = \sqrt{\frac{\epsilon \mu \beta^2 - 1}{1 - \beta^2}} \rho = \sqrt{\frac{\epsilon \mu \beta^2 - 1}{1 - \beta^2}} \sqrt{x^2 + y^2},$$
 (8.24)

угол раствора которого равен (см. формулу (7.13))

$$tg \theta_0 = \sqrt{\frac{1-\beta^2}{\epsilon\mu\beta^2 - 1}} = tg \vartheta_g. \tag{8.25}$$

Образующие этого конуса являются касательными ко всем поверхностям семейства (8.16).

Пусть теперь наблюдатель расположен в некоторой точке P с координатами  $(z, \rho = \sqrt{x^2 + y^2})$ , и в момент времени t = 0 в начале координат «вспыхивает» мгновенный источник. Если наблюдатель находится вне конуса (8.24), то поле источника для него все время тождественно равно нулю. Если же выбранная точка находится внутри конуса (8.24), т. е. в области

$$\rho < \sqrt{\frac{1-\beta^2}{\epsilon\mu\beta^2 - 1}} z, \tag{8.26}$$

то сигнал от мгновенного источника дважды пройдет через эту точку. Сначала в момент времени  $t_1$  передняя часть поверхности пройдет через точку P, а затем в момент времени  $t_2 > t_1$  задняя часть поверхности пройдет через точку P. Эта картина изображена на рис. 3,  $\epsilon$ .

Мы видим, что в сверхсветовом случае сигнал от мгновенного точечного источника, расположенного в начале координат, воспринимается в точке наблюдения P как два разделенных во времени сигнала. Временной интервал  $\Delta t = (t_2 - t_1)$  между этими сигналами определяется с помощью формул (8.22),

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 2 \frac{\sqrt{\varepsilon \mu} (1 - \beta^2)}{\varepsilon \mu \beta^2 - 1} \frac{1}{c} \sqrt{z^2 - \frac{\varepsilon \mu \beta^2 - 1}{1 - \beta^2} \rho^2}.$$
 (8.27)

Из этой формулы видно, что только на поверхности конуса (8.24) эти два сигнала «сливаются» в один. Это видно и из рис. 3,  $\epsilon$ : если точка наблюдения P находится на поверхности конуса, то сигнал проходит через нее только один раз.

3. Представляет интерес также случай, когда скорость движения среды совпадает с фазовой скоростью света в системе покоя среды  $(u=c/\sqrt{\epsilon\mu})$ .

В этом случае из формул (8.13) в области z>0 можно получить следующие выражения для  $t_1$  и  $t_2$ :

$$t_1 = \frac{\sqrt{\varepsilon_{\mu}}}{2c_1} \left[ \left( 1 + \frac{1}{\varepsilon_{\mu}} \right) z + \frac{\rho^2}{z} \right], \quad t_2 = \infty.$$
 (8.28)

Функция Грина (8.12) в этом случае принимает вид

$$G_0(\mathbf{r}, t) = \frac{16\pi^4 \mu}{\pi} \delta(t - t_1).$$
 (8.29)

Поскольку в области z < 0 величина  $t_1$  в (8.28) становится отрицательной, то в этой области функция Грина тождественно обращается в нуль.

Поверхность, на которой функция Грина в выражении (8.29) отлична от нуля, является эллипсоидом вращения вида (8.16), у которого  $z_0 = b$  (см. рис. 3,  $\delta$ ). Это означает, что поверхность эллипсоида расширяется таким образом, что в любой момент времени касается плоскости z = 0. Точкой касания является начало координат, где расположен точечный источник.

### 9. ФУНКЦИЯ ГРИНА ДЛЯ МОНОХРОМАТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

В практических задачах часто бывает необходимо знать не сами поля, а их спектральные компоненты, соответствующие определенной частоте  $\omega$ . Для их вычисления полезно знать спектральную компоненту  $G_{0,\,\omega}$  (r) функции Грина  $G_0$  (r, t), отвечающую заданному значению частоты  $\omega$ . Очевидно, функция  $G_{0,\,\omega}$  (r) может быть получена из  $G_0$  (r, t) с помощью преобразования Фурье по времени:

$$G_0(\mathbf{r}, t) = \int G_{0,\omega}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t) d\omega,$$
 (9.1)

$$G_{0,\omega}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int G_0(\mathbf{r}, t) \exp(i\omega t) dt.$$
 (9.2)

С помощью равенства (9.1) функция  $G_{0,\omega}$  (r) может быть вычислена, если в интегральном выражении (6.1) для  $G_0$  (r, t) провести интегрирование по  $dk_x$ ,  $dk_y$ ,  $dk_z$ , не вычисляя интеграл по частотам. Однако этот путь является довольно утомительным и для отыскания функции  $G_{0,\omega}$  (r) проще воспользоваться определением (9.2) и найденным ранее выражением (8.12) для  $G_0$  (r, t). Это дает

$$G_{0,\omega}(\mathbf{r}) = 8\pi^{3}\mu \left( \frac{1 + \operatorname{sgn} t_{1}}{2} e^{i\omega t_{1}} + \frac{1 + \operatorname{sgn} t_{2}}{2} e^{i\omega t_{2}} \right) \left( z^{2} + \frac{1 - \varepsilon\mu\beta^{2}}{1 - \beta^{2}} \rho^{2} \right)^{-1/2}, \tag{9.3}$$

где  $t_1$  и  $t_2$  — функции координат, определяемые равепством (8.13). Напомним, что если  $t_1$  или  $t_2$  принимают комплексные значения, то соответствующие члены в (9.3) следует считать равными нулю.

Посмотрим, какой вид принимает выражение (9.3) для функции  $G_{0, \omega}$  (r) в различных предположениях относительно скорости движения среды.

1) Досветовая скорость перемещения среды, т. е.  $u < c/\sqrt{\epsilon \mu}$ . В этом случае 33, 35,36, 49

$$G_{0, \omega}(\mathbf{r}) = 8\pi^{3}\mu \exp(i\omega t_{1}) \left(z^{2} + \frac{1 - \epsilon\mu\beta^{2}}{1 - \beta^{2}}\rho^{2}\right)^{-1/2} = 8\pi^{3}\mu \left(z^{2} + \frac{1 - \epsilon\mu\beta^{2}}{1 - \beta^{2}}\rho^{2}\right)^{-1/2} \times \exp\left[i\frac{\omega}{c} \frac{\sqrt{\epsilon\mu} (1 - \beta^{2}) \sqrt{z^{2} + \left[(1 - \epsilon\mu\beta^{2})/(1 - \beta^{2})\right]\rho^{2} - (\epsilon\mu - 1)\beta^{2}}}{1 - \epsilon\mu\beta^{2}}\right].$$
(9.4)

Рассмотрим точку, находящуюся на расстоянии R от начала координат, так что

$$z = R \cos \theta, \quad \rho = R \sin \theta.$$
 (9.5)

Подстановка координат z и  $\rho$  в виде (9.5) в выражение (9.4) для функции Грина  $G_{0,\omega}$  (r) дает

$$G_{0,\omega}(\mathbf{r}) = \frac{8\pi^{3}\mu \exp\left[i \left(\omega/c\right) R n_{0\phi\phi}(\theta)\right]}{R \sqrt{1 - \varkappa \beta^{2} v^{2} \sin^{2}\theta}},$$
(9.6)

где величина и определена формулой (3.3), у — формулой (4.8), а «эффективный показатель преломления»  $n_{\text{эфф}}(\theta)$  записывается в виде

$$n_{a\phi\phi}(\theta) = \left[\sqrt{1+\kappa}\sqrt{1-\kappa\beta^2\gamma^2\sin^2\theta} - \kappa\beta\gamma^2\cos\theta\right](1-\kappa\beta^2\gamma^2)^{-1}.$$
 (9.7)

Легко убедиться в том, что величина  $n_{\partial \Phi \Phi}$  ( $\theta$ ) не равна показателю преломления n ( $\vartheta$ ) движущейся среды в направлении наблюдения  $\theta$ . Это видно из сравнения с формулой (7.8) для величины 1/n ( $\vartheta$ ). Более подробное рассмотрение <sup>44</sup> показывает, что величина  $n_{\partial \Phi \Phi}$  ( $\theta$ ) действительно совпадает со значением показателя преломления n ( $\vartheta$ ') в некотором направлении  $\vartheta$ ',

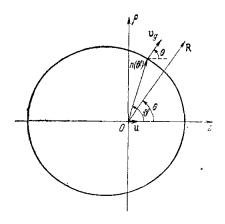


Рис. 4. Связь между направлением в точку наблюдения и направлениями фазовой и групповой скоростей излучаемых волн.

Вектор R направлен в точку наблюдении. Вектор  $\mathbf{v}_g$  перпендикулярен к поверхности n ( $\mathbf{o}$ ) и параллелен вектору R. Вектор n ( $\mathbf{o}$ ) дает направление распространения излучаемой волны (направление волнового вектора). Показатель преломления среды в системе покоя равен 3 ( $\sqrt{\mathbf{e}\mu} = 3$ ). Среда не обладает дисперсией в системе покоя. Досветовая скорость движения среды (u = 0.1 с).

не совпадающем с направлением  $\theta$ . Это направление  $\vartheta'$  определяется следующим образом.

Построим поверхность показателей преломления  $n(\vartheta)$ , т. е. в каждом задапном направлении, составляющем угол в с направлением скорости перемещения среды (ось z), будем откладывать от начала координат отрезки, длина которых равна  $n(\vartheta)$  (рис. 4). Концы отложенных отрезков лежат на некоторой поверхности, которая в рассматриваемом нами случае является поверхностью вращения с осью симметрии вдоль скорости движения среды и. Полученная таким образом поверхность обладает следующим свойством. Проведем от начала координат отрезок длиной  $n(\vartheta')$  в направлении  $\vartheta'$ . Конец отрезка определит некоторую точку поверхности показателя преломления. Через эту точку проведем внешнюю нормаль к поверхности (см., например, рис. 2). Эта нормаль будет составлять с осью z угол  $\theta$ , отличный от угла  $\vartheta'$ . Известно <sup>13</sup>, что если угол  $\vartheta'$  определяет направление фазовой скорости

волны в рассматриваемой среде, то направление пормали к поверхности показателя преломления, задаваемое углом  $\theta$ , определяет направление групповой скорости той же волны. Как показано в <sup>44</sup>, величина  $n_{2\Phi\Phi}$  ( $\theta$ ) следующим образом связана с показателем преломления:

$$n_{\partial \Phi \Phi}(\theta) = n(\theta') \cos(\theta - \theta'),$$
 (9.8)

где  $\vartheta'$  — направление фазовой скорости, если направление групповой скорости определяется углом  $\theta$ . Соотношение (9.8) при заданном угле наблюдения  $\theta$  представляет собой уравнение относительно угла  $\vartheta'$ . Как видно из рис. 2, a, в случае досветовой скорости перемещения среды каждому направлению  $\theta$  отвечает одна определенная точка поверхности показателя преломления (та, в которой внешняя нормаль к поверхности составляет угол  $\theta$  со скоростью среды).

В покоящейся изотропной среде направление фазовой и групповой скоростей совпадают друг с другом и формула (9.7) дает

$$n_{\partial\Phi\Phi}\left(\theta\right)|_{\beta=0}=\sqrt{\epsilon\mu}.$$

Функция Грина  $G_{0. \, \omega}$  (r), определяемая формулой (9.6), представляет собой волну, расходящуюся во все стороны от начала координат. Это следует из того, что величина  $n_{\partial \Phi}$  ( $\theta$ ) R/c равна величине  $t_1$  в (8.14), т. е. всегда положительна.

2) Сверхсветовой случай движения среды <sup>33</sup>, т. е. случай u>c/V  $\varepsilon\mu$ . В этом случае величины  $t_1$  и  $t_2$  положительны и поэтому в формуле (9.3)

необходимо учитывать оба слагаемых. В результате получим следующее выражение для функции  $G_{0,\omega}$  (r):

$$G_{0,\omega}(\mathbf{r}) = 8\pi^{3}\mu \left(z^{2} - \frac{\epsilon\mu\beta^{2} - 1}{1 - \beta^{2}}\rho^{2}\right)^{-1/2} \left[\exp\left(i\omega t_{1}\right) + \exp\left(i\omega t_{2}\right)\right],$$
 (9.9)

в котором величины  $t_1$  и  $t_2$  определяются формулами (8.22). Напомним, что функция  $G_{0,\omega}(\mathbf{r})$  в сверхсветовом случае отлична от нуля только в области

$$z > \rho \sqrt{\frac{\overline{\epsilon\mu\beta^2-1}}{1-\beta^2}}$$
.

Как и в досветовом случае, введем вместо координат z и  $\rho$  координаты R и  $\theta$ , определяемые формулой (9.5). Тогда формула (9.9) запишется в виде

$$G_{0, \omega}(\mathbf{r}) = 8\pi^{3}\mu \left[ \exp\left(i\frac{\omega}{c}Rn_{1\partial\Phi\Phi}(\theta)\right) + \exp\left(i\frac{\omega}{c}Rn_{2\partial\Phi\Phi}(\theta)\right) \right] \times R^{-1}(1-\varkappa\beta^{2}\gamma^{2}\sin^{2}\theta)^{-1/2}, \quad (9.10)$$

где

$$(n_{3\Phi\Phi} (\theta))_{1, 2} = [\kappa \beta \gamma^{2} \cos \theta \mp \frac{1}{1 + \kappa} \sqrt{1 - \kappa \beta^{2} \gamma^{2} \sin^{2} \theta}] (\kappa \beta^{2} \gamma^{2} - 1)^{-1}.$$
(9.11)

Как видно из формулы (9.10), в сверхсветовом случае функция Грина  $G_{0, \omega}$  (r) представляет собой сумму двух расходящихся волн, поскольку оба значения  $(n_{3\Phi\Phi})_{1, 2}$  положительны. Эти два значения  $n_{3\Phi\Phi}(\theta)$  представляют собой значения показателя преломления для тех направлений  $\vartheta'$  волнового вектора, для которых групповая скорость направлена по радиусу-вектору точки наблюдения  $(R, \theta)$  (см. рис. 5).

В записи (9.10) и (9.11) функция Грина отлична от нуля только в той области углов  $\theta$ , для которой выполняется неравенство

$$\sin^2 \theta < (\varkappa \beta^2 \gamma^2)^{-1}$$
, или  $tg^2 \theta < \frac{1-\beta^2}{\varepsilon \mu \beta^2 - 1} = tg^2 \vartheta_g$ ,

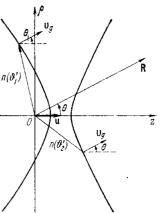


Рис. 5. Связь между направлением в точку наблюдения и направлениями фазовой и групповой скоростей излучаемых волн.

Вектор R направлен в точку наблюдения. Вектор  $\mathbf{v}_{\mathbf{g}}$  перпендикулярен к поверхности  $\hat{n}$  ( $\hat{\mathbf{v}}$ ) и параллелен вектору R. Вектор  $\mathbf{n}$  ( $\hat{\mathbf{v}}$ ) и параллелен вектору R. Вектор  $\mathbf{n}$  ( $\hat{\mathbf{v}}$ ) дает направление распространения излучаемой волны (паправление волного вектора). Показатель преломления среды в системе покоя равен 3 ( $\sqrt{\epsilon_{\mathbf{p}}}=3$ ). Среда не обладает дисперсией в системе покоя. Сверхсветовая скорость движения среды (u=0,6 c).

где  $\vartheta_g$  — угол раствора конуса, в котором заключены все допустимые значения групповой скорости (см. рис. 5).

Выражение (9.10) для функции Грина в сверхсветовом случае можно записать также в следующем виде:

$$G_{0, \omega}(\mathbf{r}) = \frac{16\pi^{3}\mu}{R} \cos\left(\frac{\sqrt{1+\varkappa}\sqrt{1-\varkappa\beta^{2}\gamma^{2}\sin^{2}\theta}}{\varkappa\beta^{2}\gamma^{2}-1}\frac{\omega R}{c}\right) \times \left(1-\varkappa\beta^{2}\gamma^{2}\sin^{2}\theta\right)^{-1/2} \exp\left(i\frac{\omega R}{c}\frac{\varkappa\beta\gamma^{2}\cos\theta}{\varkappa\beta^{2}\gamma^{2}-1}\right). \quad (9.13)$$

Как видно из этой формулы в направлении наблюдения θ, определясмом предельным углом θ<sub>g</sub> в (9.12), функция Грина (9.13) представляст одну расходящуюся волну. При остальных значениях угла θ, как уже было отмечено раньше, функция Грина в сверхсветовом случае представляет сумму двух расходящихся от начала координат волн.

3) Световая скорость перемещения среды, т. е.  $u=c/\sqrt{\, \epsilon \mu}$ . В этом случае, воспользовавшись фурье-преобразованием (9.2) для формулы (8.29), получаем

$$G_{0, \omega}(\mathbf{r}) = \frac{8\pi^{3}\mu}{z} \exp(i\omega t_{1}), \qquad (9.14)$$

где  $t_1$  определяется формулой (8.28).

Вместо цилиндрических координат (р, г) введем, как и раньше, сферические координаты  $(R, \theta)$  по формулам (9.5). Тогда для функции Грина  $G_{0, \omega}$  (r) (9.14) получим

$$G_{0,\omega}(\mathbf{r}) = \frac{8\pi^{3}\mu}{R\cos\theta} \exp\left[i\frac{\omega R}{c} \frac{\sqrt{\epsilon\mu}}{2\cos\theta} \left(1 + \frac{\cos^{2}\theta}{\epsilon\mu}\right)\right]. \tag{9.15}$$

Эта формула описывает расходящуюся волну. При этом условие  $t_1>0$ (т. е. z > 0) соответствует условию  $\theta < \pi/2$ .

Световой случай, когда  $u=c/\sqrt{|\epsilon\mu|}$ , может быть получен предельным переходом при  $u \to c/\sqrt{\epsilon \mu}$  из досветового или сверхсветового случая.

## 10. ФУНКЦИЯ ГРИНА В ДВИЖУЩЕЙСЯ СРЕДЕ С ДИСПЕРСИЕЙ

Если среда обладает дисперсией (частотной и пространственной), то диэлектрическая є и магнитная и проницаемости, а также и величина  $\varkappa = (\varepsilon \mu - 1)$ , входящая в дисперсионное уравнение (5.3), зависят от частоты о и от волнового вектора к. В этом случае коэффициент, стоящий перед функцией  $G_0$  ( $\omega$ , **k**) в формуле (5.11), является функцией от  $\omega$  и **k**. Поэтому функция Грина не может быть выражена через одну скалярную функдию  $G_0$  (r, t) (6.1).

При наличии дисперсии тензорная функция Грина может быть выражена через две скалярные функции:

$$G_{\alpha\beta}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{c} [G_0(\mathbf{r},t) \delta_{\alpha\beta} + u_{\alpha}u_{\beta}G_1(\mathbf{r},t)], \qquad (10.1)$$

где  $G_0$  (r, t) определяется формулой (6.1), а

$$G_1(\mathbf{r}, t) = 4\pi \int \frac{\mu \kappa}{1 + \kappa} \frac{\exp[i (\mathbf{kr} - \omega t)] d\mathbf{k} d\omega}{\mathbf{k}^2 - (\omega^2/c^2) - \kappa [(\omega - \mathbf{ku})^2/(c^2 - u^2)]}.$$
 (10.2)

Как видно из сравнения  $G_0$  и  $G_1$ , эти две функции отличаются друг от друга только множителем

$$\frac{\varkappa}{1+\varkappa} = 1 - \frac{1}{\epsilon\mu}$$

под знаком интеграла в выражении (10.2).

Точное вычисление  $G_0$  и  $G_1$  при наличии дисперсии зависит от кон-

кретного вида функций  $\varepsilon$  ( $\omega$ ,  $\mathbf{k}$ ) и  $\mu$  ( $\omega$ ,  $\mathbf{k}$ ).

В ряде случаев с помощью метода стационарной фазы удается получить асимптотические выражения для функции Грина, пригодные на больших расстояниях от источника. Для случая, когда є и и в системе покоя зависят только от частоты ю, такие выражения были получены в работах <sup>28, 49</sup>. В частности, в работе <sup>49</sup> вычислена функция Грина для случая движущейся электронной плазмы, диэлектрическая проницаемость которой в системе покоя имеет вид (7.22)

$$\varepsilon\left(\omega\right)=1-\frac{4\pi e^{2}N}{m\omega^{2}},$$

где e и m — заряд и масса электронов, а N — их концентрация.

Полученные для функции Грина в движущейся среде формулы позводяют находить потенциалы и поля различных источников поля в движущейся среде.

#### приложение

### поля простейших источников в движущейся среде

Знание функции Грина дает возможность достаточно простым образом вычислять поля источников различного вида (точечный заряд, электрический диполь, магнитный поля источников различного вида (точечный заряд, электрический диполь, магнитный диполь и т. д.). Для того чтобы определить источник, необходимо задать в правой части уравнений (3.9) для потенциалов  $A_i$  четырехмерный ток  $j_i$ . Если поля определяются через тензор Герца  $\Pi_{ij}$  в согласии с формулами (3.10), то в правой части уравнения (3.12) для  $\Pi_{ij}$  необходимо задать компоненты тензора моментов  $P_{ij}$  (см., например, (3.13)). Источник может быть как статический (это означает, что  $j_i$  или  $P_{ij}$  не зависят от времени), так и переменный во времени.

В Приложении будут рассмотрены поля источников простейшего вида. При этом

мы ограничимся случаем среды без дисперсии. Это ограничение не всегда является существенным, так как в ряде случаев можно довольно просто обобщить полученный результат на случай среды с дисперсией в системе покоя. Для этого достаточно разложить полученное выражение для статического поля по плоским волнам и затем считать, что каждая такая парциальная волна характеризуется своими значениями диэлектрической и магнитной проницаемостей. Может возникнуть вопрос, почему для статического поля оказывается существенной дисперсия. Дело в том, что статическое поле в движущейся среде, вообще говоря, не является статическим в системе ее покоя. Поэтому в движущейся среде дисперсия может оказаться существенной и для статического поля. Это видно хотя бы из того, что дисперсионное уравнение (5.3) для статического случая ( $\omega = 0$ ) принимает вид

$$k^2 - \varkappa (k) \gamma^2 c^{-2} (ku)^2 = 0.$$
 (II.1)

Это уравнение определяет закон дисперсии статических волн в движущейся среде. Отметим, что в покоящейся среде статическое волновое решение невозможно, ибо из уравнения (П.1) при u=0 получаем, что  $\mathbf{k}^2=0$ . Это означает, что в покоящейся среде волна вида  $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$  обязательно должна затухать, так как уравнение  $\mathbf{k}^2=k_x^2+k_y^2+k_z^2=0$  имеет решение только при комплексных значениях компонент волнового вектора.

Перейдем теперь к конкретным примерам.

а) Поле покоящегося точечного заряда в движущейся среде. Пусть точечный заряд величины q расположен в начале координат. Как обычно, считаем, что среда движется вдоль оси z со скоростью и. Плотность четырехмерного тока в этом случае выражается следующим образом:

$$j_1 = j_2 = j_3 = 0, \ j_4 = icq \ \delta \ (\mathbf{r}) = icq \ \delta \ (x) \ \delta \ (y) \ \delta \ (z).$$
 (II.2)

Тогда с помощью формул (5.8) и (5.12) получаем

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -\frac{q}{(2\pi)^4 c} \frac{\varepsilon \mu - 1}{\varepsilon \mu (1 - \beta^2)} \mathbf{u} \int G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \, \delta(\mathbf{r}') \, d\mathbf{r}' \, dt',$$

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{(2\pi)^4} \frac{1 - \varepsilon \mu \beta^2}{\varepsilon \mu (1 - \beta^2)} \int G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \, \delta(\mathbf{r}') \, d\mathbf{r}' \, dt'$$
(II.3)

при  $\beta = u/c$ .

Интегрирование по пространственным координатам проводится без труда, а для интегрирования по времени следует вспомнить выражение (8.12) для функции Грина  $G_0$ . Результат интегрирования по времени зависит от соотношения между скоростью движения среды и и фазовой скоростью света в системе покоя среды  $c/\sqrt{\epsilon \mu}$ . В досветовом случае, когда  $u < c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ , в числителе выражения (8.12) только одно слагаемое отлично от нуля (см. формулу (8.14)). В сверхсветовом случае, когда  $u>c/\sqrt{\epsilon\mu}$ , оба слагаемые в числителе выражения (8.12) отличны от нуля (см. формулу (8.21)), но не во всем пространстве, а только там, где выполняется неравенство

$$z > \sqrt{\frac{\epsilon \mu \beta^2 - 1}{1 - \beta^2}} \rho = \sqrt{\frac{\epsilon \mu \beta^2 - 1}{1 - \beta^2}} \sqrt{x^2 + y^2}.$$
 (II.4)

С учетом высказанных соображений результат интегрирования может быть представлен в виде

$$\varphi(\mathbf{r}) = q \frac{1 - \varepsilon \mu \beta^2}{\varepsilon (1 - \beta^2)} f\left(z^2 + \frac{1 - \varepsilon \mu \beta^2}{1 - \beta^2} \rho^2\right)^{-1/2},$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -q \frac{\varepsilon \mu - 1}{\varepsilon (1 - \beta^2)} \frac{\mathbf{u}}{c} f\left(z^2 + \frac{1 - \varepsilon \mu \beta^2}{1 - \beta^2} \rho^2\right)^{-1/2} = -\frac{\varepsilon \mu - 1}{1 - \varepsilon \mu \beta^2} \frac{\mathbf{u}}{c} \varphi(\mathbf{r}),$$
(II.5)

где в досветовом случае ( $\epsilon\mu\beta^2<1$ ) f=1, а в сверхсветовом случае ( $\epsilon\mu\beta^2>1$ ) \*)

$$f = \begin{cases} 2 & \text{при } z > \sqrt{\frac{\epsilon \mu \beta^2 - 1}{1 - \beta^2}} \sqrt{x^2 + y^2}, \\ 0 & \text{при } z < \sqrt{\frac{\epsilon \mu \beta^2 - 1}{1 - \beta^2}} \sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases}$$
(II.6)

Как и следовало ожидать, потенциалы в этом случае не зависят от времени. Характерно, что оказывается отличным от нуля вектор-потенциал A покоящегося заряда, который пропорционален скорости движения среды u.

рый пропорционален скорости движения среды u.
Приведем выражения для электрического поля E и магнитной индукции B.
С помощью (2.1), (3.1) и (П.5) получаем

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r})}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi(\mathbf{r}) = -\operatorname{grad} \varphi(\mathbf{r}),$$

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\varepsilon \mu - 1}{1 - \varepsilon \mu \beta^2} \left[ \mathbf{E}(\mathbf{r}), \frac{\mathbf{u}}{c} \right].$$
(II.7)

Зная выражения для E и B, можно записать выражения для магнитного поля H и электрической индукции D. Для этого можно воспользоваться материальными уравнениями Минковского (1.2), рассматривая их как уравнения для D и H при заданных E и B. Еще проще воспользоваться гензорной связью (2.8), где материальный тензор  $\varepsilon_{ihst}$  определяется соотношением (3.2). B результате получим  $^{3},^{53}$ 

$$\begin{split} D &= \epsilon E + \frac{\kappa \gamma^2}{\mu} \left\{ \beta^2 E - \beta \left( \beta_{\bullet} E \right) + [\beta, B] \right\}, \\ H &= \frac{1}{\mu} B - \frac{\kappa \gamma^2}{\mu} \left\{ \beta^2 B - \beta \left( \beta_{\bullet} B \right) - [\beta, E] \right\}, \end{split} \tag{II.8}$$

где  $\varkappa=(\varepsilon\mu-1),\ \gamma^{-2}=(1-\beta^2),\ a\ \beta=u/c.$  Подстановка в эти формулы выражений (П.7) дает

$$\mathbf{D} = \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon \mu \beta^2} [(1 - \beta^2) \mathbf{E} - (\varepsilon \mu - 1) \beta (\beta \mathbf{E})], \quad \mathbf{H} = 0. \tag{II.9}$$

Своеобразие движущейся среды заключается в том, что вектор магнитной индукции В покоящегося заряда отличен от нуля. Магнитное поле, как и в случае покоящейся среды, по-прежнему равно нулю.

Выражения (П.5) позволяют определить поверхности, на которых потенциалы имеют постоянное значение (эквипотенциальные поверхности). При досветовых скоростях движения среды ( $\gamma \mu \beta^2 < 1$ ) эти поверхности представляют семейство элипсоидов вращения с осью, направленной вдоль скорости движения среды и:

$$\frac{z^2}{l_z^2} + \frac{\rho^2}{l_\rho^2} = 1, \tag{II.10}$$

причем отвошение полуосей  $l_0$  и  $l_z$  равно

$$\frac{l_{\rho}}{l_{z}} = \sqrt{\frac{1-\beta^{2}}{1-\epsilon\mu\beta^{2}}}.$$
 (II.11)

В сверхсветовом случае ( $\epsilon\mu\beta^2>1$ ) эти поверхности представляют собой семейство гиперболоидов вращения с той же осью симметрии, что и в досветовом случае:

$$\frac{z^2}{m_z^2} - \frac{\rho^2}{m_\rho^2} = 1 \qquad (z > 0). \tag{\Pi.12}$$

<sup>\*)</sup> Для сверхсветового случая эту задачу впервые рассмотрел И. Е. Тамм <sup>39</sup>.

Асимптотической поверхностью этого семейства гиперболоидов является коническая поверхность, уравнение которой имеет вид

$$z = \sqrt{\frac{\epsilon \mu \beta^2 - 1}{1 - \beta^2}} \rho = \sqrt{\frac{\epsilon \mu \beta^2 - 1}{1 - \beta^2}} \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{II.13}$$

Вектор электрического поля **E** в (П.7) перпендикулярен к эквипотенциальным поверхностям. При нерелятивистских скоростях эквипотенциальные эллипсоиды вырождаются в сферы. В этом случае вектор **E** направлен вдоль радиуса-вектора, соединяющего заряд с точкой наблюдения. При релятивистских скоростях вектор **E** уже не направлен вдоль радиуса-вектора. Вектор электрической индукции **D**, как видно из формул (П.9), не совпадает по направлению с вектором **E**, отличаясь от него слагаемыми, квадратичными по u/c и направленными вдоль скорости движения среды.

мыми, квадратичными по u/c и направленными вдоль скорости движения среды. Всктор магнитной индукции В (П.7) по величине пропорционален скорости движения среды, а по направлению перпендикулярен к вектору электрического поля Е и скорости движения среды и. Если изображать В с помощью силовых линий, то эти липии представляют собой окружности с центром на оси z, плоскость которых перпендикулярна к этой оси. Наконец, вектор магнитного поля Н можно считать направленным по желанию читателя, поскольку этот вектор в данном случае тождественно равен нулю.

Поле покоящегося заряда вызывает поляризацию движущейся среды. Вектор электрической поляризации Р легко определить с помощью соотношения

$$P = \frac{1}{4\pi} (D - E),$$
 (II.14)

которое вытекает из равенства (2.9). Подставляя в эту формулу выражения для  ${\bf D}$  из ( $\Pi$ .9), получим

$$\mathbf{P} = \frac{1}{4\pi \left(1 - \epsilon \mu \beta^2\right)} \left\{ \left[ (\epsilon - 1) + \epsilon \beta^2 \left(\mu - 1\right) \right] \mathbf{E} - \epsilon \left(\epsilon \mu - 1\right) \beta \left(\beta \mathbf{E}\right) \right\}, \tag{\Pi.15}$$

где E — поле покоящегося заряда в движущейся среде, определяемое по формулам (П.5) и (П.7).

При нерелятивистских скоростях движения среды получаем хорошо известное соотношение

$$\mathbf{P} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \mathbf{E}.\tag{II.16}$$

Аналогичным образом мы можем найти намагничение движущейся среды М (магнитный момент единицы объема)

$$\mathbf{M} = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{B} - \mathbf{H}). \tag{II.17}$$

Поскольку в рассматриваемой нами задаче магнитное поле  ${\bf H}=0$ , а магнитная индукция  ${\bf B}$  отлична от нуля, с помощью (П.7) получаем

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{B}}{4\pi} = \frac{\varepsilon \mu - 1}{4\pi \left(1 - \varepsilon \mu \beta^2\right)} \left[ \mathbf{E}, \frac{\mathbf{u}}{c} \right]. \tag{II.18}$$

В нерелятивистском случае

$$\mathbf{M} = \frac{\varepsilon \mu - 1}{4\pi} \left[ \mathbf{E}, \frac{\mathbf{u}}{c} \right]. \tag{II.19}$$

Сравнивая (П.16) и (П.19), видим, что в нерелятивистском случае М и Р связаны следующим соотношением:

$$\mathbf{M} = \frac{\varepsilon \mu - 1}{\varepsilon - 1} \left[ \mathbf{P}, \ \frac{\mathbf{u}}{c} \right]. \tag{II.20}$$

Эта формула представляет собой частный случай более общего нерелятивистского соотношения между намагничением M и поляризацией P, которое нетрудно получить из формул ( $\Pi$ .8) с помощью ( $\Pi$ .14) и ( $\Pi$ .17):

$$\mathbf{M} = \frac{\mu - 1}{4\pi} \mathbf{H} + \frac{\varepsilon \mu - 1}{\varepsilon - 1} \left[ \mathbf{P}, \frac{\mathbf{u}}{c} \right]. \tag{II.21}$$

В рассматриваемой нами задаче H=0, и формула (П.21) переходит в (П.20).

Формулы (П.20) и (П.21) дают связь между электрической поляризацией и намагничением в движущейся среде. Эту связь качественно можно понять следующим образом. При электрической поляризации среды возникают связанные заряды, плотность

которых  $\rho_{\text{CB}}$  определяется формулой  $\rho_{\text{CB}}=-\operatorname{div}\mathbf{P}$ . При движении среды эти связанные заряды приводят к появлению тока, который является причиной намагничения среды. Соотношения (П.20) и (П.21) для  $\mu=1$  были экспериментально подтверждены в опытах Рентгена и Эйхенвальда  $^5$ .

б) Поле покоящегося точечного магнитного диполя. Рассмотрим точечный магнитный диполь  $m_0$ , расположенный в начале координат. Как обычно, предполагается, что среда движется в рассматриваемой системе координат со скоростью и вдоль оси z. Как и выше, дисперсией среды в системе покоя пренебрегаем.

Поле в рассматриваемой задаче оказывается удобным выражать через тензор Герца  $\Pi_{ij}$  — антисимметричный тензор второго ранга, в котором отличны от нуля шесть независимых компонент. Эти компоненты можно рассматривать как проекции на оси координат двух векторов — электрического вектора Герца II и магнитного вектора Герца П \*:

$$\Pi_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \Pi_x^* & -\Pi_y^* & i\Pi_x \\ -\Pi_x^* & 0 & \Pi_x^* & i\Pi_y \\ \Pi_y^* & -\Pi_x^* & 0 & i\Pi_z \\ -i\Pi_x & -i\Pi_x & -i\Pi_z & 0 \end{pmatrix}. \tag{H.22}$$

Потенциалы  $A_i$  выражаются через тензор Герца  $\Pi_{ij}$  по формуле (3.10), которая

$$\mathbf{A} = \operatorname{rot} \mathbf{\Pi}^* + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{\Pi}}{\partial t} + \frac{\varkappa \gamma^2 c^{-2}}{1 + \varkappa} \mathbf{u} \left[ c \operatorname{div} \mathbf{\Pi} + (\mathbf{u} \operatorname{rot} \mathbf{\Pi}^*) + \left( \frac{\mathbf{u}}{c} \frac{\partial \mathbf{\Pi}}{\partial t} \right) \right],$$

$$\mathbf{\Phi} = -\left( \mathbf{1} - \frac{\varkappa \gamma^2}{1 + \varkappa} \right) \operatorname{div} \mathbf{\Pi} + \frac{\varkappa \gamma^2}{1 + \varkappa} \left[ \left( \frac{\mathbf{u}}{c} \operatorname{rot} \mathbf{\Pi}^* \right) + \left( \frac{\mathbf{u}}{c^2} \frac{\partial \mathbf{\Pi}}{\partial t} \right) \right],$$
(II.23)

где  $\varkappa=(\epsilon\mu-1),\,\gamma^{-2}=(1-\beta^2),\,$ а  $\beta=u/c.$  Тензор Герца  $\Pi_{ij}$  удовлетворяет уравнению (3.12), в правой части которого стоит антисимметричный тензор моментов  $P_{ij}$  второго ранга, описывающий внешние источники:

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & m_z & -m_y & ip_x \\ -m_z & 0 & m_x & ip_y \\ m_y & -m_x & 0 & ip_z \\ -ip_x & -ip_y & -ip_z & 0 \end{pmatrix}. \tag{II.24}$$

Тензор источников  $P_{ij}$  составлен из компонент сторонних электрического момента  ${\bf p}$  и магнитного момента  ${\bf m}$ , создающих поле в среде. С помощью (П.22) и (П.24) получаем из (5.10)

$$\Pi (\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int G_0 (\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \mathbf{p} (\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}' dt',$$

$$\Pi^* (\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int G_0 (\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \mathbf{m} (\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}' dt'.$$
(II.25)

Эти формулы выражают электрический и магнитный векторы Герца через заданные распределения сторонних электрического и магнитного моментов. Выражение для функции Грина  $G_0$  подробно рассмотрено в последних главах обзора. С помощью этих формул для нашего случая (m (r', t') =  $m_0$   $\delta$  (r') и p=0) нетрудно получить

$$\Pi^* (\mathbf{r}) = \mu f \left( z^2 + \frac{1 - \epsilon \mu \beta^2}{1 - \beta^2} \rho^2 \right)^{-1/2} \mathbf{m}_0 = \psi (\mathbf{r}) \mathbf{m}_0, \ \mathbf{\Pi} (\mathbf{r}) = 0.$$
(II.26)

Величина f определяется точно так же, как и в ранее рассмотренной задаче о поле точечного заряда (см. формулу (П.6)).

Воспользовавшись этими выражениями для векторов Герца и соответствующими им выражениями для потенциалов (П.23), можно найти электрическое поле Е и маг-

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \phi = -\operatorname{grad} \phi = -\frac{\kappa \gamma^{2}}{1+\kappa} \operatorname{grad} \left( \frac{\mathbf{u}}{c}, [\operatorname{grad} \psi(\mathbf{r}), \mathbf{m}_{0}] \right),$$

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{B}_{0}(\mathbf{r}) + \left[ \frac{\mathbf{u}}{c}, \mathbf{E}(\mathbf{r}) \right],$$

$$\mathbf{B}_{0}(\mathbf{r}) = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H}^{*}(\mathbf{r}),$$
(II.28)

где **В**<sub>0</sub> — вклад от первого слагаемого в выражении для **А** (П.23).

Как видно из этих формул, у покоящегося магнитного диполя в движущейся среде возникают отличное от нуля электрическое поле, пропорциональное скорости движения среды и. Заметим здесь, что если рассмотреть электрическое поле от точечного электрического диполя с моментом  $\{\mathbf{u}/c, \mathbf{m}_0\}$ , помещенного в пачале координат, то его направление во всех точках совпадает с направлением электрического поля в  $(\Pi.27)$ , т. е. с электрическим полем магнитного диполя  $\mathbf{m}_0$ . Это утверждение нетрудно доказать с помощью формул  $(\Pi.25)$  и  $(\Pi.23)$ .

Приведем также выражения для магнитного поля Н и электрической индук-

ции **D**:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B}_{0} (\mathbf{r}) + \left[ \frac{\mathbf{u}}{c}, \ \varepsilon \mathbf{E} (\mathbf{r}) + \frac{\varepsilon \mu - 1}{\mu} \gamma^{2} \left[ \frac{\mathbf{u}}{c}, \ \mathbf{B}_{0} (\mathbf{r}) \right] \right],$$

$$\mathbf{D} (\mathbf{r}) = \varepsilon \mathbf{E} (\mathbf{r}) + \frac{\varepsilon \mu - 1}{\mu} \gamma^{2} \left[ \frac{\mathbf{u}}{c}, \ \mathbf{B}_{0} (\mathbf{r}) \right].$$
(II.29)

Эти формулы получены из соотношений ( $\Pi$ .8), куда подставлены выражения для E и B, определенные формулами ( $\Pi$ .28).

Выражения для векторов поляризации Р и намагничения М при этом примут вид

$$\mathbf{P} = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{D} - \mathbf{E}) = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \mathbf{E} + \frac{\varepsilon \mu - 1}{4\pi \mu} \gamma^2 \left[ \frac{\mathbf{u}}{c}, \mathbf{B}_0 \right],$$

$$\mathbf{M} = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{B} - \mathbf{H}) = \frac{\mu - 1}{4\pi \mu} \mathbf{B}_0 - \frac{\varepsilon \mu - 1}{4\pi \mu} \gamma^2 \left[ \frac{\mathbf{u}}{c}, \left[ \frac{\mathbf{u}}{c}, \mathbf{B}_0 \right] \right] - \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \left[ \frac{\mathbf{u}}{c}, \mathbf{E} \right].$$
(II.30)

При нерелятивистских скоростях движения среды отсюда получаем

$$\mathbf{P} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \mathbf{E} + \frac{\varepsilon \mu - 1}{.\pi \mu} \left[ \frac{\mathbf{u}}{c} , \mathbf{B}_0 \right],$$

$$\mathbf{M} = \frac{\mu - 1}{4\pi \mu} \mathbf{B}_0.$$
(II.31)

Второе слагаемое в выражении для  ${\bf P}$  дает электрическую поляризацию, возникающую за счет движения среды. Если это слагаемое обозначить через  ${\bf P}'$ , то видно, что

$$\mathbf{P}' = \frac{\varepsilon \mu - 1}{\mu - 1} \left[ \frac{\mathbf{u}}{c}, \mathbf{M} \right]. \tag{II.32}$$

Это соотношение может быть получено как нерелятивистский предел общих формул (П.8). Физический смысл его заключается в том, что при движении среды через магнитное поле появляется электрическая поляризация, пропорциональная скорости движения. Эффект возникает из-за того, что на движущиеся в магнитном поле заряды действует сила Лоренца. Эта сила смещает заряды разных знаков в противоположных направлениях, что и приводит к возникновению электрической поляризации в нейтральной среде. Эти соотношения впервые были экспериментально проверены в опытах Вильсона 5. Не составляет труда из полученных формул найти поле покоящегося электрического диполя.

в) Потенциалы Льенара — Вихерта в движ ущейся среде. Рассмотрим точечную заряженную частицу с зарядом q, которая может перемещаться в движущейся среде. Закон движения частицы зададим в виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \ \mathbf{v} = \mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}.$$
 (II.33)

Плотность заряда и плотность тока, связанные с движением этой частицы, можно записать следующим образом:

$$\rho (\mathbf{r}, t) = q\delta (\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)), \ \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = q\mathbf{v}(t) \delta (\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)). \tag{II.34}$$

Потепциалы  $A_{\alpha}$  ( $\mathbf{r}$ , t) определяются формулой (5.8), которую мы можем записать в трехмерных обозначениях:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{4} c} \int G_{0}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \times \left\{ \mathbf{j}(\mathbf{r}', t') - \frac{\kappa \gamma^{2}}{1 + \kappa} \mathbf{u} \left[ \rho(\mathbf{r}', t') - \frac{\mathbf{u} \mathbf{j}(\mathbf{r}', t')}{c^{2}} \right] \right\} d\mathbf{r}' dt',$$

$$\mathbf{\phi}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{4}} \int G_{0}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \left[ \left( 1 - \frac{\kappa \gamma^{2}}{1 - \kappa} \right) \rho(\mathbf{r}', t') + \frac{\kappa \gamma^{2} c^{-2}}{1 + \kappa} (\mathbf{u} \mathbf{j}(\mathbf{r}', t')) \right] d\mathbf{r}' dt'.$$
(II.35)

В этих формулах интегрирование по г' проводится легко с помощью формул (П.34),

$$\mathbf{A} (\mathbf{r}, t) = \frac{q}{(2\pi)^4 c} \int G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t'), t - t') \left[ \mathbf{v}(t') - \frac{\kappa \gamma^2}{1 + \kappa} \mathbf{u} \left( 1 - \frac{\mathbf{u} \mathbf{v}(t')}{c^2} \right) \right] dt',$$

$$\mathbf{\phi} (\mathbf{r}, t) = \frac{q}{(2\pi)^4} \int G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t'), t - t') \left[ 1 - \frac{\kappa \gamma^2}{1 + \kappa} + \frac{\kappa \gamma^2 c^{-2}}{1 + \kappa} (\mathbf{u} \mathbf{v}(t')) \right] dt'.$$
(II.36)

 $\phi$  ( $\mathbf{r}$ , t) =  $\frac{q}{(2\pi)^4}\int G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}(t'),\ t-t')\left[1-\frac{\kappa\gamma^2}{1+\kappa}+\frac{\kappa\gamma^2\,c^{-2}}{1+\kappa}\left(\mathbf{uv}(t')\right)\right]dt'$ . Подставим в эти выражения функцию Грина из формулы (8.10) и проведем интегрирование по t'. Как видно из выражения (8.10) для функции Грина  $G_0$ , она имеет особенности в точках, в которых выполняется равенство

$$T = \frac{1}{c} \frac{\varepsilon \mu - \beta^2}{\sqrt{\varepsilon \mu} (1 - \beta^2)} \sqrt{\frac{\varepsilon \mu (1 - \beta^2)}{\varepsilon \mu - \beta^2} (X^2 + Y^2) + \left(Z - \frac{\varepsilon \mu - 1}{\varepsilon \mu - \beta^2} uT\right)^2}, \quad (\Pi.37)$$

где  $T=(t-t'),\,X=x-x\,(t'),\,Y=y-y\,(t'),\,Z=z-z\,(t'),\,\beta=u/c$  и (x,y,z,t) координаты точки наблюдения, а  $(x\,(t'),\,y\,(t'),\,z\,(t'))$  — координаты точки, где находится заряд в момент времени t'.

Если рассматривать движения заряженной частицы в пустоте, то уравнение (П.37) принимает хорошо знакомый вид

$$t - t' = \frac{R(t')}{c}, \tag{II.38}$$

где  $R(t') = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ . Для каждого данного момента времени t существует лишь одна точка в пространстве, где удовлетворяется это уравнение  $^{51}$ . Это объясняется тем, что в каждой точке своего пути заряд создает возмущение, которое отлично от нуля на сферической поверхности, расходящейся во все стороны со скоростью света. Эта поверхность доходит до точки наблюдения в момент времени, определяемый соотношением (П.38). В движущейся среде положение иное. В каждой точке своего пути заряд создает возмущение, отличное от нуля не на расширяющейся сфере, а на эллипсоиде, уравнение которого имеет вид (8.16). Величина полуосей этого эллипсоида линейно растет со временем по закону (8.17), а центр эллипсоида увлекается в направлении движения среды со скоростью (8.18). Поэтому в движущейся среде уравнение (П.37) может иметь ни одного, одно или несколько решений в зависимости от положения наблюдателя по отношению к траектории заряда, от величины и направления скорости перемещения среды и от закона движения заряда. Приведем простой пример. Пусть скорость среды и превышает фазовую скорость света  $c/\sqrt{\epsilon\mu}$  ( $\epsilon\mu\beta^2>1$ ). В этом случае возмущение, созданное в любой точке, «сносится» движущейся средой так, что поле возмущения может быть отлично от нуля только по одну сторону от источника (в полупространстве, где  $(\mathbf{r},\mathbf{u})>0$ ). Тогда до наблюдателя, находящегося в полупространстве  $(\mathbf{r},\mathbf{u})<$ < 0, вообще не дойдет никакого сигнала. Наблюдатель же, находящийся в полупространстве (r, u) > 0, будет получать сигнал от движущегося источника (будет «видеть» заряд) только в течение конечного промежутка времени, отвечающего конечному участку траектории заряда.

Приведем теперь окончательные выражения для потенциалов Льенара — Вихерта в движущейся среде без дисперсин

$$\begin{split} \mathbf{A} &= \frac{\mu q}{c} \left[ \mathbf{v} + \frac{\varepsilon \mu - 1}{\varepsilon \mu} \, \gamma^2 \mathbf{u} \, \left( \frac{\mathbf{u} \mathbf{v}}{c^2} - 1 \right) \right] \left\{ \sqrt{\frac{\varepsilon \mu \, \left( 1 - \beta^2 \right)}{\varepsilon \mu - \beta^2} \, \left( X^2 + Y^2 \right) + \left( Z - \frac{\varepsilon \mu - 1}{\varepsilon \mu - \beta^2} \, u T \right)^2 - \frac{V \varepsilon \mu}{c} \, \left( X v_x + Y v_y \right) - \frac{\varepsilon \mu - \beta^2}{c \, V \varepsilon \mu} \, \left( Z - \frac{\varepsilon \mu - 1}{\varepsilon \mu - \beta^2} \, u T \right) \left( v_z - \frac{\varepsilon \mu - 1}{\varepsilon \mu - \beta^2} \, u \right) \right\}^{-1} \,, \\ \varphi &= \mu q \left[ 1 + \frac{\varepsilon \mu - 1}{\varepsilon \mu} \, \gamma^2 \left( \frac{\mathbf{u} \mathbf{v}}{c^2} - 1 \right) \right] \left\{ \sqrt{\frac{\varepsilon \mu \, \left( 1 - \beta^2 \right)}{\varepsilon \mu - \beta^2} \, \left( X^2 + Y^2 \right) + \left( Z - \frac{\varepsilon \mu - 1}{\varepsilon \mu - \beta^2} \, u T \right)^2 - \frac{V \varepsilon \mu}{c} \, \left( X v_x + Y v_y \right) - \frac{\varepsilon \mu - \beta^2}{c \, V \varepsilon \mu} \, \left( Z - \frac{\varepsilon \mu - 1}{\varepsilon \mu - \beta^2} \, u T \right) \left( v_z - \frac{\varepsilon \mu - 1}{\varepsilon \mu - \beta^2} \, u \right) \right\}^{-1} \,. \end{split}$$
 (II.39)

В этих формулах положение и скорость заряда берутся в момент времени t', определяемый уравнением (П.37). Если это уравнение имеет несколько решений, то следует просуммировать полученные выражения для  ${f A}$  и  ${f \phi}$  по всем таким моментам времени t' .

Как видно из выражений (П.39) для потенциалов Льенара — Вихерта, в движущейся среде в случае покоящегося заряда вектор-потенциал  ${\bf A}$  отличен от нуля и направлен вдоль скорости движения среды  ${\bf u}$ . Этот результат находится в согласии с формулами ( $\Pi$ .5) и противоречит результатам работы  $^{52}$ , в которой автор без должных оснований предположил, что вектор-потенциал заряда в движущейся среде пропорционален только скорости движения заряда.

Физический институт им. П. Н. Лебедева АН СССР

# ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА\*)

1. Г. А. Лорентц, Теория электронов, М., Гостехиздат, 1956. 2. А. Эйнштейн, Собрание научных трудов, т. 1, М., «Наука», 1965. 3. В. Паули, Теория относительности, М.— Л., Гостехиздат, 1947.

4. У. И. Франкфурт, А. М. Френк, Оптика движущихся тел, М., «Наука», 1972; см. также: У. И. Франкфурт, Специальная и общая теории относительности, М., «Наука», 1968.

ности, М., «Наука», 1968.
5. Р. Беккер, Электронная теория, М.— Л., ОНТИ, 1936.
6. И. Е. Тамм, Основы теории электричества, М.— Л., Гостехиадат, 1946.
7. Г. Валлис, К. Зауэр, Д. Зюндер, С. Е. Росинский, А. А. Рухадзе, В. Г. Рухлин, УФН 113, 435 (1974).
8. И. Е. Тамм, ЖРФХО, сер. физ. 56 (2), 248 (1924); 57 (3/4), 209 (1925); см. также: Л. И. Мандельштам, Полное собрание трудов, т. 1, М.— Л., Изд-во АН СССР, 1948, стр. 273; Маth. Ann. 95 (1), 154 (1925).
9. А. М. Глуцюк, Указатель литературы по электродинамике движущихся сред, Х., ИРЭ АН УССР, 1967.

X., ИРЭ АН УССР, 1967. 10. Д. В. Скобельцын, УФН 110, 253 (1973).

- 11. В. Л. Гинзбург, ibid., стр. 309.
  12. Н. Міпкоwsky, Gött. Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen, II. Math. Phys. Kl. 2, 53 (1908); то же: Math. Ann. 78, 472 (1910).
  13. Л. Д. Ландау. Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, М.,
- Гостехиздат, 1957.
- 14. Л. А. Островский, Б. А. Соломин, Изв. вузов (Радиофизика) 10, 1183

15. Л. А. Островский, ЖЭТФ 61, 551 (1971).

16. Ю. А. Кравцов, Докт. диссертация (Горький, ГГУ, 1968).
17. Ю. А. Кравцов, Н. С. Степанов, ЖЭТФ 57, 1730 (1969).
18. В. Г. Гавриленко, Канд. диссертация (Горький, ГГУ, 1973).
19. А. N. Kaufman, Ann. Phys. (N.Y.) 18, 264 (1962).
20. Е. R. Morgenthaler, IRE Trans. Microwave Theory and Techniques MTT-

- 6, 167 (1958).
  21. В. Л. Гинзбург, Изв. вузов (Радиофизика) 16, 512 (1973).
  22. С. Н. Столяров, Б. М. Болотовский, А. И. Плис, В. Е. Рок, А. Р. Чигирев, сборник «Тезисы докладов VI Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн», кн. II, Москва — Ереван (Цахкадзор), 1973, стр. 417.

  23. М. И. Рязанов, ЖЭТФ 32, 1244 (1957); сборник «Некоторые вопросы теорети—

- ческой физики», М., Атомиздат, 1958, стр. 75.

  24. J. M. Jauch, K. M. Watson, Phys. Rev. 74, 950 (1948).

  25. J. M. Jauch, K. M. Watson, ibid., p. 1485.

  26. Б. М. Болотовский, А. А. Рухадзе, ЖЭТФ 37, 1346 (1959).

  27. С. H. Рараs, Theory of Electromagnetic Wave Propagation, N.Y., McGraw-Hill,
- 28. С. Н. Столяров, Автореферат канд. диссертации, М., ФИАН СССР, 1963. 29. С. Н. Столяров, Изв. вузов (Радиофизика) 9, 631 (1966).

- 30. В. М. Агранович, В. Л. Гинзбург, Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов, М., «Наука», 1965.
- странственной дисперсий и теория экситонов, М., «Наука», 1965.

  31. В. П. С и л и н. А. А. Р у х а д з е, Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред, М., Госатомиздат, 1961.

  32. С. Н. С т о л я р о в, ЖТФ 33, 565 (1963).

  33. R. Т. С о m p t o n, Jr., J. Math. Phys. 7, 2145 (1966).

  34. К. S. H. L e e, C. H. P a p a s, ibid. 5, 1668 (1964).

  35. К. S. H. L e e, C. H. P a p a s, IEEE Trans. Antennas and Propagation AP-13,

799 (1965).

- 36. С. Т. Таі, ibid., р. 322. 37. Л. И. Мандельштам, ЖЭТФ 15, 475 (1954); Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике, М., «Наука», 1971.
- 38. Б. М. Болотовский, С. Н. Столяров, сборник «Проблемы теоретической физики» (памяти И. Е. Тамма), М., «Наука», 1972, стр. 267.
  39. І. Е. Тамм, J. Phys. USSR 1 (5/6), 439 (1939).

40. Ю. В. Чугунов, Изв. вузов (Радиофизика) 12, 108 (1969). 41. Ю. В. Чугунов, Автореферат канд. диссертации, Горький, ГГУ, 1970.

<sup>\*)</sup> Здесь приведена литература, необходимая лишь при чтении данного обзора. Полный список литературы по электродинамике движущихся сред, включающий работы до 1973 г. и содержащий более 460 названий, будет опубликован авторами вместе с краткими аннотациями отдельно.

42. Б. М. Болотовский, С. Н. Столяров, Изв. вузов (Радиофизика) 7, 442 (1964).
 43. С. Н. Столяров, ibid. 5, 671 (1962).
 44. Б. М. Болотовский, О. С. Мергелян, С. Н. Столяров, Изв. А Н. А РИ, ССР, сор. «Физика» (4), 203, (4069).

- 43. м. в олотовскии, О. С. мергелян, С. Н. Столяров, Изв. АН Арм. ССР, сер. «Физика» 4 (4), 203 (1969).
  45. м. Борн, Э. Вольф, Основы оптики, М., «Наука», 1970.
  46. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М., «Наука», 1971.
  47. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, М., «Наука», 1967.
- «Наука», 1967. 48. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, М., «Сов. радио», 1957.

А. Вайнштейн, электромагнитные волны, м., «Сов. радко», 1957.
 С. Н. Столяров, Изв. вузов (Радиофизика) 6, 1268 (1963).
 А. Меерович, методы релятивистской электродинамики в электротехнике, м.— Л., «Энергия», 1966.
 Д. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, М., «Наука», 1973.
 N. L. Ваlаzs, Amer. J. Phys. 24, 185 (1956) (см. перевод в сборнике «Миллиметровые и субмиллиметровые волны», М., ИЛ, 1959, стр. 56.
 В. А. Угаров, Специальная теория отвосительности, М. «Наука», 1969.