1974 г. Январь *Том 112, вып. 1*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

539.126.34

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА π-МЕЗОНОВ ПРИ НИЗКИХ ЭНЕРГИЯХ

М. В. Терентьев

СОДЕРЖАНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ

В обзоре рассматриваются свойства амплитуд взаимодействия π-мезонов и фотонов. Ряд простейших амплитуд такого сорта изображен на рис. 1—7. На этих рисунках волнистая линия обозначает фотон, штриховая — π-мезон.

Экспериментальное и теоретическое исследование электромагнитной вершины π-мезона (рис. 1) и распада $\pi^0 \to 2\gamma$ (рис. 2) имеет многолетнюю историю. Интерес к более сложным процессам усилился в последнее время в связи с развитием техники встречных пучков. Очевидно, что имеется принципиальная возможность изучения амплитуд $\gamma \to (n)\,\pi$ ($n = 2, 3\ldots$) в опытах на ускорителях со встречными пучками ($e^+e^- \to \gamma \to (n)\,\pi$). Неоднократно обсуждалась также возможность изучения процессов $\gamma\gamma \to (n)\,\pi$

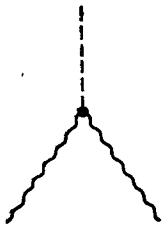
Рис. 1.

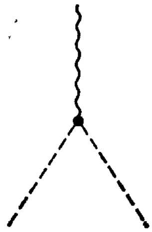
Рис. 2.

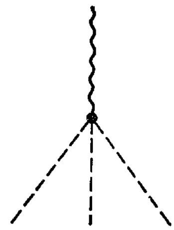
Рис. 3.

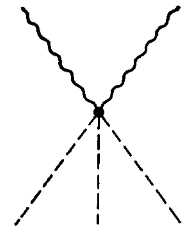
Рис. 4.

($n = 1, 2\ldots$) в реакциях $e^{\pm}e^- \to e^{\pm}e^-\,(n)\,\pi$ в тех случаях, когда определяющим является механизм двухфотонного рождения, соответствующий диаграмме на рис. 8. Такой механизм впервые был рассмотрен в старой

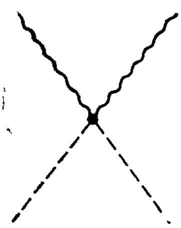
Рис. 5.

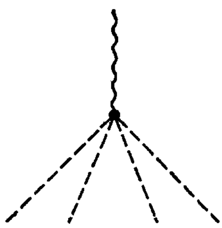
Рис. 6.

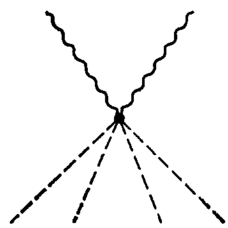
Рис. 7.

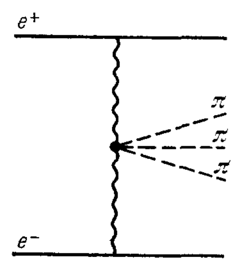

Рис. 8.

работе [1] (см. также [2], стр. 471). Различные аспекты двухфотонного механизма рождения во встречных пучках в последние годы рассматривались в большом числе работ (см., например, [3-13]).

Следует отметить также, в связи с возможностью экспериментального исследования взаимодействия π-мезонов и фотонов, реальную перспективу создания в ближайшие годы интенсивных мезонных пучков средних энергий («π-мезонные фабрики»). С введением в эксплуатацию «мезонных фабрик» станет возможным изучение с высокой точностью ряда из рассматриваемых амплитуд в кулоновском рассеянии π-мезонов на нуклонах и атомных ядрах (рис. 9). Экспериментальное изучение процессов кулоновского рождения на ядрах, по-видимому, достаточно реально и в настоящее время.

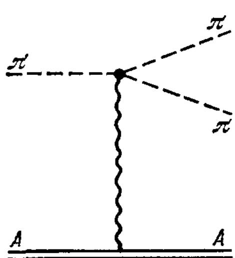

Рис. 9.

Амплитуды на рис. 2, 4, 5, 7 можно исследовать также в реакциях фоторождения π-мезонов в кулоновском поле ядра. Так, эффект Примакова [14] — фоторождение одиночного π-мезона в кулоновском поле — в настоящее время является основным методом измерения времени жизни π^0-мезона (см. [15]).

Процессы на рис. 1—7 представляют собой богатый и интересный объект изучения с теоретической точки зрения. Градиентная инвариантность и низкоэнергетическая π-мезонная техника позволяют установить связи между рассматриваемыми амплитудами и сделать ряд утверждений, имеющих весьма высокую точность. Некоторые особенности этих амплитуд отражают глубокие динамические свойства сильных взаимодействий.

Отмеченные обстоятельства послужили причиной появления обширной литературы. Результаты ряда авторов в значительной степени перекрываются. К сожалению, в этом потоке имеется также большое число ошибочных работ. Словом, налицо обычная картина, являющаяся следствием спешки и толчеи, хотя в этом смысле ситуация не является столь напряженной, как в некоторых других, более «модных» областях.

К настоящему моменту вопрос, по-видимому, в большой степени исчерпан, и можно привести теоретические результаты, относящиеся к каждому из процессов на рис. 1—7. Это, а также качественное обсуждение в ряде случаев возможностей экспериментального измерения является основным содержанием настоящего обзора.

Поскольку многие из рассматриваемых процессов связаны с амплитудой $\pi\pi$-рассеяния, мы обсуждаем также (весьма кратко) современную теоретическую и экспериментальную информацию о $\pi\pi$-взаимодействии.

Следует подчеркнуть, что взаимодействия фотонов и π-мезонов при низких энергиях являются в каком-то смысле замкнутой областью физики. Все рассматриваемые амплитуды могут быть вычислены с использованием ограниченного набора исходных гипотез. Эти гипотезы не являются произвольными. В их пользу говорит целый ряд теоретических соображений и экспериментальных фактов.

Теоретические результаты, которые будут далее обсуждаться, состоят в основном в получении формул, выражающих все пион-фотонные амплитуды через небольшое число исходных параметров: радиус π-мезона, его поляризуемость, константу распада $\pi^0 \to 2\gamma$ и, в ряде случаев, параметры, характеризующие $\pi\pi$-рассеяние. Все эти исходные параметры могут быть независимо измерены в других процессах. Таким образом, низкоэнергетическая физика π-мезонов и фотонов определена весьма жестко. Поэтому экспериментальные данные в этой области должны иметь однозначную интерпретацию. К сожалению, в настоящий момент они практически отсутствуют, но в ближайшие годы, по-видимому, можно ожидать здесь накопления большой экспериментальной информации.

В обзоре используются следующие обозначения. Система единиц: $\hbar = c = 1$, $e^2 = 4\pi\alpha = 4\pi/137$. Метрика: $a_\nu b_\nu = a_0 b_0 - \mathbf{ab}$. Нормировка состояний соответствует выбору фазового объема частицы в виде $(2\pi)^{-3}\, d^3p/2p_0$. Матрицы:

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3, \qquad \gamma_0^+ = \gamma_0,\ \gamma_j^+ = -\gamma_j \qquad (j = 1,\ 2,\ 3).$$

Матричный элемент каждого процесса T_{fi} определяется исходя из соотношения

$$S_{fi} = \delta_{fi} + i\,(2\pi)^4\,\delta\,(p_f - p_i)\,T_{fi}, \tag{1.1}$$

где S — матрица рассеяния.

Если в конце или начале процесса имеется фотон, то рассматривается вектор T_ν (соответственно тензор $T_{\nu\mu}$ для двух фотонов), определенный из соотношения

$$T_{fi} = \xi_\nu T_\nu, \tag{1.2}$$

где либо ξ_ν — 4-вектор поляризации фотона, либо $\xi_\nu = A_\nu\,(q)/(2\pi)^4$, где $A_\nu\,(q)$ — внешнее поле.

2. ОСНОВНЫЕ ГИПОТЕЗЫ

а) Мы будем обсуждать в основном следствия, вытекающие из градиентной инвариантности и следующих предположений:

А. Сохранение векторного тока:

$$\partial_\nu v_\nu^k (x) = 0. \tag{2.1}$$

Б. Частичное сохранение аксиально-векторного тока (PCAC):

$$\partial_\nu a_\nu^k (x) = \mu^2 F_\pi \varphi^k (x). \tag{2.2}$$

В (2.1) и (2.2) v_ν^k и a_ν^k — векторный и аксиальный адронные токи, $k = 1, 2, 3$ — изотопические индексы, φ^k — π-мезонное поле, μ — масса π-мезона, F_π — константа распада $\pi \to e\nu$.

В. Алгебра токов *):

$$[v_0^k (x), \; v_\nu^n (x')] \, \delta (x_0 - x_0') = i\varepsilon_{knm} v_\nu^m (x) \, \delta^{(4)} (x - x'), \tag{2.3}$$

$$[a_0^k (x), \; a_\nu^n (x')] \, \delta (x_0' - x_0) = i\varepsilon_{knm} v_\nu^m (x) \, \delta^{(4)} (x - x'), \tag{2.4}$$

$$[a_0^k (x), \; v_\nu^n (x')] \, \delta (x_0 - x_0') = i\varepsilon_{knm} a_\nu^m (x) \, \delta^{(4)} (x - x'), \tag{2.5}$$

$$[v_0^k (x), \; a_\nu^n (x')] \, \delta (x_0 - x_0') = i\varepsilon_{knm} a_\nu^m (x) \, \delta^{(4)} (x - x'). \tag{2.6}$$

Г. Структура электромагнитного тока $j_\mu (x)$:

$$j_\mu (x) = e \, (v_\mu^0 + v_\mu^3), \tag{2.7}$$

где v_μ^0 — изоскалярный ток (в рамках SU (3)-симметрии — восьмая компонента октета). Токи v_μ^0 и v_μ^3 имеют противоположную G-четность ($G v_\mu^0 G^{-1} = -v_\mu^0$, $G v_\mu^3 G^{-1} = v_\mu^3$; отметим также, что $G a_\mu^k G^{-1} = -a_\mu^k$), ток v_μ^0 коммутирует с изовекторными токами v_μ^k и a_μ^k.

Далее мы кратко обсудим существо сформулированных гипотез.

Равенство (2.1) есть следствие изотопической инвариантности сильных взаимодействий.

Соотношение (2.2) является тождеством на массовой поверхности π-мезона (здесь любой оператор пропорционален π-мезонному полю). Вне массовой поверхности оно служит фактически определением поля $\varphi^k (x)$ и содержательно только в том случае, если неполюсные вклады в матричные элементы от оператора $\partial_\nu a_\nu^k (x)$ являются медленно меняющимися функциями импульсов и допускают при малых ($\sim\mu$) импульсах разложение в ряд. Матричные элементы от оператора $\partial_\nu a_\nu^k (x) \cdot \exp (ipx)$, как правило, могут быть вычислены при импульсе $p \to 0$ с использованием алгебры токов. Гипотеза о возможности разложения в ряд позволяет продолжить результат в точку $p^2 = \mu^2$, где, в соответствии с (2.2), рассматриваемый матричный элемент связан с амплитудой испускания π-мезона. Таким образом, вычисляя матричные элементы от дивергенции аксиального тока при $p \to 0$, мы получаем информацию об амплитудах испускания π-мезона.

*) В правой части соотношений (2.3) — (2.6) содержатся, вообще говоря, не выписанные нами швингеровские члены, которые пропорциональны пространственным производным от δ-функции. Детальная структура этих членов зависит от модели сильного взаимодействия и выбранного формализма. При получении физических результатов эти члены, как правило, несущественны. Их роль сводится к дополнению до ковариантной структуры выражений для матричных элементов через T-произведения токов. Такое дополнение, однако, однозначно воспроизводится при феноменологической записи матричных элементов. Чаще всего эти члены просто не входят в рассмотрение, поскольку большая часть физических результатов определяется формулами (2.3) —(2.6), проинтегрированными по одной из координат x или x'.

Можно сказать в результате, что соотношение (2.2) есть условное обозначение гипотезы о медленности изменения ряда адронных амплитуд в масштабах порядка массы π-мезона. Более детальное обсуждение физического содержания гипотезы (2.2) см. в [16, 17].

Алгебра токов (2.3) — (2.6) была предложена Гелл-Манном. Она реализуется в теории свободных фермионных полей (здесь $v_\nu^k = (1/2)\,\overline{\psi}\gamma_\nu\tau^k\psi$, $a_\nu^k = (1/2)\,\overline{\psi}\gamma_\nu\gamma_5\tau^k\psi$), модели кварков, σ-модели [18]. Обоснованием ее применимости в реальной теории сильных взаимодействий может служить только соответствие экспериментальным данным предсказаний, основанных на ее использовании.

Из (2.3) — (2.6) следуют простые коммутационные соотношения для операторов зарядов $Q_j = \int d^3x v_0^j(\mathbf{x}, 0)$ и $Q_{5j} = \int d^3x a_0^j(\mathbf{x}, 0)$. «Левая» ($L_j = Q_j - Q_{5j}$) и «правая» ($R_j = Q_j + Q_{5j}$) комбинации зарядов генерируют две независимые (левую и правую) алгебры $SU(2)$. При $\mu^2 = 0$ аксиальный ток a_μ^j сохраняется, поэтому Q_{5j}, так же как и Q_j, не зависит от времени, а величины L_j и R_j являются генераторами соответственно «левой» и «правой» групп $SU(2)$. Поэтому гипотезы А, Б, В сводятся к предположению о существовании $SU(2) \times SU(2)$-симметрии сильных взаимодействий при $\mu^2 = 0$. Удобно представлять гамильтониан сильных взаимодействий в виде $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \varepsilon\mathcal{H}_1$, где $\mathcal{H}_0$ инвариантен относительно группы $SU(2) \times SU(2)$, $\mathcal{H}_1$ — нарушение симметрии, ε — численный параметр, характеризующий масштаб нарушения. Легко показать при этом, что $\int d^3x\, \partial a_\mu^j(x)/\partial x_\mu = -i\varepsilon\,[Q_{5j}(t), \mathcal{H}_1]$.

Обсуждавшаяся выше возможность продолжения матричных элементов по импульсам на интервалах порядка μ означает, что масса π-мезона мала в масштабах сильных взаимодействий. Это означает в свою очередь, что нарушение симметрии $SU(2) \times SU(2)$ является малым ($\varepsilon \ll 1$). Детальное обсуждение связи гипотез А — В с проблемой симметрии $SU(2) \times SU(2)$ содержится в работе [19].

Гипотеза (2.7) о структуре электромагнитного тока в том виде, как она сформулирована в Г (2.7), содержит, по существу, два утверждения. Первое: электромагнитный ток не содержит изотензорной компоненты; второе и более частного характера: ток имеет октетную структуру. Большая часть результатов, которые мы предполагаем обсуждать, основана на первом, более слабом предположении.

К сожалению, оба предположения, являясь весьма правдоподобными с теоретической точки зрения, имеют немного прямых экспериментальных подтверждений (см., например, [20]).

Гипотезы А — Г в совокупности составляют основу низкоэнергетической π-мезонной техники и приводят к большому числу следствий, хорошо согласующихся с опытом (см. [16, 17]).

Для константы F_π в (2.2) мы будем использовать значение

$$F_\pi = \frac{0{,}83\mu}{\sqrt{2}}\,, \tag{2.8}$$

которое следует из соотношения Голдбергера — Треймана [16, 17]

$$F_\pi = \frac{G_A m_N}{G_V g_{\pi N}}\,; \tag{2.9}$$

здесь G_V и G_A — константы при векторном и аксиальном токе в β-распаде, m_N — масса нуклона, $g_{\pi N}$ — постоянная πN-связи. Значение (2.8) немного ($\sim 10\%$) отличается от величины $F_\pi^{\text{эксп}} \approx 0{,}93\ \mu/\sqrt{2}$, которая может быть получена из данных о вероятности $\pi \to e\nu$-распада. Основанием для выбора (2.8) может служить то обстоятельство, что соотношение (2.2) применяется обычно не в π-мезонном полюсе ($p^2 = \mu^2$), где оно является точным, если $F_\pi = F_\pi^{\text{эксп}}$, а в точке $p = 0$, где оно является приближенным. Соотношение (2.9) следует из (2.2) именно при $p = 0$, но при выборе (2.8) оно выполняется точно. Поэтому можно думать, что выбор (2.8) «подправляет» соотношение (2.2) в точке $p = 0$ и в других процессах. Однако с «высокой» теоретической точки зрения мы не должны различать (2.8) и значение $F_\pi = F_\pi^{\text{эксп}}$. Это различие лежит в пределах точности низкоэнергетической π-мезонной техники. Возможную $\sim 10\%$ неопределенность в выборе значения константы F_π в (2.2) следует иметь в виду.

б) Большие успехи, связанные с применением низкоэнергетической π-мезонной техники выглядят на первый взгляд достаточно странно, если учесть, что гипотеза (2.2) находится в противоречии с фактом распада $\pi^0 \to 2\gamma$. (Из (2.2) следует, что распад $\pi^0 \to 2\gamma$ должен быть сильно подавлен, чего не наблюдается на опыте.)

Должны быть какие-то теоретические основания полагать, что соотношение (2.2) не может быть применимо к амплитуде $\pi^0 \to 2\gamma$.

В этой связи в работе [21] было показано, что в присутствии электромагнитного поля условие (2.2) для нейтральных компонент ($k = 3$) следует переписать в виде

$$\partial_\nu a_\nu^3(x) = \mu^2 F_\pi \varphi^3(x) + c\,\frac{\alpha}{8\pi}\,\varepsilon_{\nu\mu\alpha\beta} F_{\nu\mu}(x) F_{\alpha\beta}(x), \tag{2.10}$$

где $F_{\nu\mu}(x)$ — тензор электромагнитного поля, c — произвольная константа. Такая модификация условия PCAC не проявляется во всех следствиях низкоэнергетической техники, обсуждаемых в [16,17], но снимает противоречие в распаде $\pi^0 \to 2\gamma$.

Соотношения для $\partial_\nu a_\nu^3(x)$, отличные от (2.2), мы будем называть аномальными условиями PCAC. В рамках гипотезы (2.10) распад $\pi^0 \to 2\gamma$ разрешен, однако соответствующая константа распада $f(0)$ не может быть вычислена, поскольку параметр c в (2.10) нельзя определить, не привлекая дополнительных модельных предположений. Мы будем использовать константу $f(0)$ в качестве «входного» феноменологического параметра, который, как окажется, будет определять величину амплитуд с нечетным числом π-мезонов на рис. 3, 4. Это равносильно предположению о существовании для ряда амплитуд аномального условия PCAC. Явная форма (2.10) при этом не будет использоваться. Существенна лишь гипотеза, что обычная форма PCAC претерпевает какие-то изменения в присутствии электромагнитного поля, так что $f(0) \neq 0$. Более детально этот вопрос обсуждается в гл. 5.

в) Как отмечалось в гл. 1, ряд результатов, которые мы предполагаем обсуждать, зависит от амплитуды $\pi\pi$-рассеяния. Эта величина не может быть вычислена до конца в рамках гипотез А, Б и В и содержит один произвольный параметр γ (см. [17]). В работе [22] амплитуда была тем не менее вычислена и было получено значение $\gamma = 0$. При этом, однако, использовалась дополнительная гипотеза о структуре коммутатора:

$$\left[\partial_\nu a_\nu^k(x), \int d^3x' a_0^n(0, \mathbf{x}')\right] \sim \mu^2 \delta_{kn}. \tag{2.11}$$

Предположение фактически состоит в том, что правая часть (2.11) пропорциональна δ_{kn}. Это довольно естественно и находит оправдание в ряде моделей теории поля.

Как отмечалось ранее, при обсуждении содержания гипотез Б и В, дивергенция аксиального тока пропорциональна члену $\varepsilon\mathscr{H}_1$, нарушающему $SU(2) \times SU(2)$-симметрию. Изотопическая инвариантность требует, чтобы $\mathscr{H}_1$ был изоскаляром. Это означает, что $\mathscr{H}_1$ должен преобразовываться по какому-либо представлению типа (n, n) группы $SU(2) \times SU(2)$. Предполагая, что $\mathscr{H}_1$ принадлежит простейшему представлению (1/2, 1/2), можно легко воспроизвести результат (2.11). Некоторые теоретические соображения в пользу выбора представления (1/2, 1/2) были приведены, в частности, в работе [23] и обсуждались далее в большом числе работ.

Следует все-таки подчеркнуть, что соотношение (2.11) выходит за рамки гипотез В, Б и определяет изотопические свойства взаимодействия, нарушающего симметрию $SU(2) \times SU(2)$.

Мы обсуждаем основные результаты, по возможности не используя (2.11), но в ряде случаев будем отмечать упрощения, возникающие при выполнении условия (2.11).

3. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ВЕРШИНА π-МЕЗОНА

а) Феноменологическая структура. Определим вершинную функцию π-мезона $\mathscr{T}_\nu(k_1, k_2)$, исходя из соотношения

$$\langle \pi^a(k_1), \pi^b(k_2) \mid j_\nu(0) \mid 0 \rangle = -ie\varepsilon_{3ab}\mathscr{T}_\nu(k_1, k_2), \tag{3.1}$$

где j_ν — электромагнитный ток (2.7). Правила отбора по G-четности исключают вклад v_ν^0 в (3.1). Функция $\mathscr{T}_\nu(k_1, k_2)$ имеет при $k_1^2 = k_2^2 = \mu^2$ вид

$$\mathscr{T}_\nu(k_1, k_2) = (k_1 - k_2)_\nu F(q^2), \tag{3.2}$$

где $q = k_1 + k_2$, $F(q^2)$ — электромагнитный форм-фактор. При малых q^2 имеем

$$F(q^2) \approx 1 + \frac{\langle r^2 \rangle}{6} q^2, \tag{3.3}$$

где $\langle r^2 \rangle^{1/2}$ — электромагнитный радиус π-мезона.

Общая структура вершинной функции $\mathscr{T}_\nu(k_1, k_2)$ вне массовой поверхности ($k_1^2 \neq \mu^2$, $k_2^2 \neq \mu^2$) имеет вид

$$(k_1 - k_2)_\nu F_1(q^2, k_1^2, k_2^2) + q_\nu F_2(q^2, k_1^2, k_2^2). \tag{3.4}$$

Используя сохранение векторного тока, можно стандартными методами (см., например, [18]) вывести тождество Уорда для $\mathscr{T}_\nu(k_1, k_2)$:

$$q_\nu \mathscr{T}_\nu(k_1, k_2) = (k_1^2 - \mu^2)(k_2^2 - \mu^2)[\Delta(k_2) - \Delta(k_1)]; \tag{3.5}$$

здесь $\Delta(k)$ — перенормированная функция Грина π-мезона, имеющая спектральное представление в виде

$$\Delta(k) = \frac{1}{k^2 - \mu^2} + \int_{9\mu^2}^{\infty} \frac{\rho(\varkappa^2)\, d\varkappa^2}{k^2 - \varkappa^2}, \quad \rho > 0. \tag{3.6}$$

Если $k^2 \sim \mu^2$, то интегральный член в (3.6) можно разложить в ряд по параметру $k^2/\varkappa^2_{\text{эфф}} \ll 1$. При этом из (3.6) следует

$$(k_1^2 - \mu^2)(k_2^2 - \mu^2)[\Delta(k_2) - \Delta(k_1)] \approx k_1^2 - k_2^2 + O(k^6/\varkappa^4_{\text{эфф}}). \tag{3.7}$$

Существенно, что в (3.7) сокращаются члены $\sim k^4$. Это обстоятельство позволяет определить функции F_1 и F_2 в (3.4) с точностью до членов второго порядка по импульсам. При этом оказывается, что вершинная функция вне массовой поверхности по-прежнему определяется при малых импульсах одним параметром $\langle r^2 \rangle$ и имеет вид

$$\mathscr{T}_\nu(k_1, k_2) = (k_1 - k_2)_\nu \left(1 + \frac{\langle r^2 \rangle}{6} q^2\right) + q_\nu \frac{\langle r^2 \rangle}{6}(k_2^2 - k_1^2). \tag{3.8}$$

Заметим, что модель векторной доминантности дает $\langle r^2\rangle/6 = 1/m_\rho^2$, где m_ρ — масса ρ-мезона. При этом $\langle r^2\rangle^{1/2} \approx 0{,}63$ *ф*. Такая величина довольно хорошо согласуется с экспериментальными данными. Это означает, что характерным масштабом изменения форм-фактора $F(q^2)$ (вне резонансной области), по-видимому, является m_ρ и разложение в (3.8) фактически производится по параметру p^2/m_ρ^2, где p — один из импульсов q, k_1 или k_2.

б) Возможные способы определения $\langle r^2\rangle$. Параметр $\langle r^2\rangle$, а также и весь форм-фактор $F(q^2)$ являются фундаментальными величинами, измерение которых представляет большой интерес.

Наиболее прямым способом (в области $q^2 > 4\mu^2$) функция $F(q^2)$ может изучаться в реакции $e^+e^- \to \pi^+\pi^-$ на встречных пучках. К настоящему моменту измерения выполнены лишь в резонансной области при $q \sim m_\rho^2$ [24, 25], а также в области $q^2 \geqslant 1$ *Гэв*^{2} [26, 27].

В области $q^2 < 0$ наиболее прямым способом является изучение рассеяния π-мезонов на электронах. Здесь при достижимых энергиях речь может идти пока только об области малых q^2. Соответствующие эксперименты [28, 29] имеют пока небольшую точность.

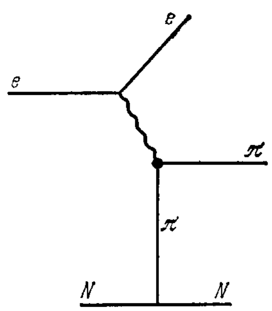

Рис. 10.

Ряд опытов (см., например, [30, 31]) был проведен с целью определения $\langle r^2\rangle$ из рассеяния π-мезонов на He. Такая возможность была указана в [32]. Интерпретация данных по π—He-рассеянию встречается со значительными теоретическими неопределенностями, и метод в целом, по-видимому, не является надежным.

Наиболее успешными до сих пор были попытки измерения форм-фактора в области $0 < -q^2 \leqslant 0{,}5$ *Гэв*^{2} в опытах по электророждению π-мезонов на нуклоне [33–35]. Соответствующая теоретическая возможность была отмечена в [36, 37]. Проблема состоит в необходимости выделять в полной амплитуде вклад диаграммы на рис. 10, которая содержит электромагнитную вершину π-мезона.

При теоретической интерпретации данных по электророждению используются обычно результаты работ [38–40], в которых амплитуда фоторождения π-мезона виртуальным квантом восстанавливается из дисперсионных соотношений. В результате применения такой процедуры форм-фактор был найден в виде (см., например, [34])

$$F(q^2) = \left(1 - \frac{q^2}{0{,}56 \pm 0{,}08}\right)^{-1} \tag{3.9}$$

(q^2 измеряется в единицах *Гэв*$^2/c^2$), при этом $\langle r^2\rangle^{1/2} = 0{,}65$ *ф*.

В недавней работе [41] была сделана попытка извлечения данных о форм-факторе во времениподобной области при изучении реакции $\pi^-p \to e^+e^-n$. Здесь также необходимо выделить вклад диаграммы на рис. 10, но теперь уже с времениподобным квантом. Результаты, полученные в [41], соответствуют значению $\langle r^2\rangle^{1/2} \sim 0{,}7$ *ф*, что не противоречит (3.9).

В литературе имеется также ряд других предложений по измерению форм-фактора. Их осуществление требует более сложных опытов, однако теоретическая интерпретация экспериментальных данных была бы более непосредственной. В работе [42] предлагалось изучать πe—рассеяние при взаимодействии в конечном состоянии в слабых распадах мезонов и гиперонов. Этот эффект может быть выделен при измерении T-нечетных спиновых корреляций. В работе [43] отмечалась возможность измерения форм-фактора при изучении спиновых эффектов в πe-рассеянии. В работе [44] обсуждалась возможность измерения $F(q^2)$ в реакции рождения пары e^+e^- или $\mu^+\mu^-$ π-мезоном на ядрах. Далее (см. гл. 8) мы обсудим возможность измерения $\langle r^2 \rangle$ в распаде $\pi \to e\nu e^+e^-$.

4. ππ-РАССЕЯНИЕ

Как уже отмечалось, амплитуда $\pi\pi$-рассеяния будет использоваться в качестве «входного» параметра для вычисления более сложных амплитуд на рис. 3, 4, 6, 7.

Общая структура амплитуды $\pi\pi$-рассеяния имеет вид (обозначения импульсов и соответствующие изотопические индексы см. на рис. 11)

$$T_{\pi\pi} = \delta_{ab}\delta_{cd}M(p_1, p_2, p_3, p_4) + \delta_{ac}\delta_{bd}M(p_1, p_3, p_2, p_4) + \\ + \delta_{ad}\delta_{bc}M(p_1, p_4, p_3, p_2). \quad (4.1)$$

При малых импульсах функция M может быть представлена в виде [17,22]

$$M(p_1, p_2, p_3, p_4) = \alpha + \beta[(p_1+p_2)^2 - \mu^2] + \gamma(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 - 3\mu^2). \quad (4.2)$$

В работе [22] было получено

$$\alpha = 0, \quad \beta = F_\pi^{-2}, \quad \gamma = 0. \quad (4.3)$$

Равенство $\alpha = 0$ вытекает из условия самосогласованности Адлера: $M(0, p_2, p_3, p_4) = 0$ при $p_2^2 = p_3^2 = p_4^2 = \mu^2$. Это условие является прямым следствием соотношения (2.2).

Равенство $\beta = F_\pi^{-2}$ вытекает из (2.2) и коммутационных соотношений (2.5), (2.4).

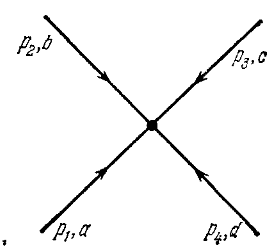

Рис. 11.

Условие $\gamma = 0$ является следствием предположения о структуре коммутатора (2.11). Главным аргументом в пользу (2.11) является рассмотрение в σ-модели. Соотношение (2.11) не вытекает из основных гипотез А, Б, В в гл. 2. Поэтому мы будем вместе с (4.3) использовать более общую возможность

$$\alpha = 0, \quad \beta = F_\pi^{-2}, \quad \gamma \text{ произвольно.} \quad (4.4)$$

Длины $\pi\pi$-рассеяния в качестве параметров входят в большое число процессов (см. [45]). Наиболее эффективными до сих пор были попытки измерения $T_{\pi\pi}$ в периферическом рассеянии π-мезонов на нуклонах, в $K \to 3\pi$-распадах и K_{e4}-распаде.

Длины рассеяния, вычисленные с использованием параметров α, β, γ, имеют вид

$$a_0 = \frac{\mu}{32\pi}(7\beta + 5g), \quad a_2 = \frac{\mu}{16\pi}(-\beta + g), \quad (4.5)$$

где a_I — длина рассеяния с изотопическим спином I, $g = \gamma + \alpha\mu^{-2}$ (см. [17]). Из (4.3) следует

$$\mu a_0 = 0{,}2, \quad \mu a_2 = -0{,}06. \quad (4.6)$$

Из рис. 12 можно оценить существующую ситуацию с определением значений длин $\pi\pi$-рассеяния. Прямая линия $2a_0 - 5a_2 = 0{,}7\mu^{-1}$ — это теоретически ожидаемые значения, следующие из (4.4). Точка W соответствует набору параметров (4.3). Заштрихованные области A, B, C, D — данные (с учетом ошибок) периферических опытов [45], область E — данные, полученные из обработки $K \to 3\pi$-распадов [46], полоса F — данные из K_{e4}-распада [47]. По-видимому, из рис. 12 преждевременно делать категорический вывод о существовании противоречия между (4.3) и экспериментальными данными.

При обработке периферических опытов с самого начала делается предположение, что $\alpha \neq 0$, $\beta \approx 0$, $\gamma \approx 0$, т. е. считается, что функция M в (4.2) является практически константой в масштабах $\sim\mu^2$. После этого определяется α и соответствующие длины рассеяния. Только такая процедура позволяет при небольшой статистике однозначно выполнить экстраполяцию из физической области переданных импульсов ($t < 0$) в π-мезонный полюс ($t = \mu^2$). Ясно, что если реализуется в действительности один из наборов параметров (4.3), (4.4), то полученные таким способом длины рассеяния (области A, B, C, D на рис. 12) не имеют отношения к реальным значениям.

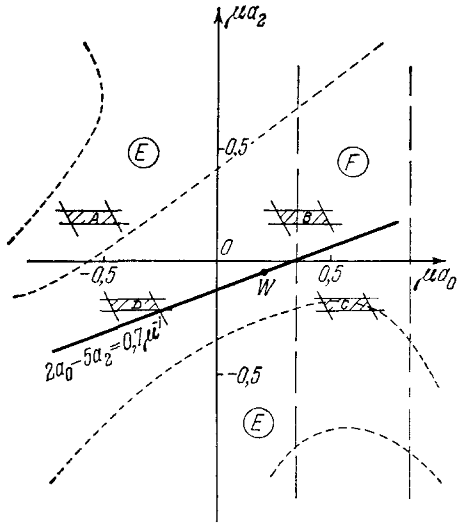

Рис. 12.

В распадах $K^{\pm} \to \pi^{\pm}\pi^{+}\pi^{-}$ информация о длинах $\pi\pi$-рассеяния может быть получена при анализе спектров π-мезонов и распределения на плоскости Далитца. Однако при этом требуется анализировать спектры в узкой области на краях плоскости Далитца, где статистика до последнего времени была недостаточна. Результаты работы [48], где было зарегистрировано $\sim 10^6$ распадов, еще не анализировались таким способом. Область E на рис. 12 получена из анализа комбинации отношений вероятностей $K^{\pm} \to 3\pi$- и $K^0 \to 3\pi$-распадов [46]:

$$\xi = \frac{1}{4}\frac{\Gamma(K^+ \to \pi^+\pi^+\pi^-)}{\Gamma(K^+ \to \pi^0\pi^0\pi^+)} - \frac{3}{2}\frac{\Gamma(K^0 \to \pi^+\pi^-\pi^0)}{\Gamma(K^0 \to \pi^0\pi^0\pi^0)}. \tag{4.7}$$

Величина ξ пропорциональна $(a_0 - a_2)^2$, где a_0, a_2 — длины $\pi\pi$-рассеяния. Недавние результаты [49] по уточнению вероятностей нейтральных мод распада K-мезонов позволяют еще несколько сузить область E. Тем не менее ошибки все еще очень велики и не позволяют категорически исключить значения (4.3) и (4.4).

Область F (данные из K_{e4}-распада) основана на результатах единственной работы [47]. Эти результаты из-за больших ошибок не сильно противоречат значению $\mu a_0 = 0{,}2$, следующему из (4.3), и совсем не противоречат (4.4).

Совокупность всех данных указывает тем не менее, что значения длин (4.6) и соответствующий набор параметров (4.3) маловероятны. Однако значения (4.3) и тем более значения (4.4) (прямая $\mu\,(2a_0 - 5a_2) = 0{,}7$ на рис. 12) пока нельзя надежно исключить *).

*) После того, как настоящий обзор был направлен в печать, появилась работа [139], где при сравнительно большой статистике анализировались спектры в K_{e4}-распаде. Было получено $\mu a_0 = 0{,}17 \pm 0{,}13$, что в пределах ошибок согласуется с предсказанием Вайнберга [22] (см. (4.6)).

С другой стороны, в работах [140,141] выполнен анализ спектров $K \to 3\pi$-распадов, полученных в работе [48]. Результаты соответственно: $\mu a_0 = 0{,}72 \pm 0{,}07$, $\mu a_2 = 0{,}09 \pm$

Для прояснения ситуации с длинами ππ-рассеяния требуются дальнейшие измерения, причем процессы на рис. 3, 4, 6, 7 могут служить источником важной дополнительной информации о структуре амплитуды $T_{\pi\pi}$.

5. РАСПАД $\pi^0 \to 2\gamma$

а) Феноменологическая структура. Амплитуда процесса $\pi^0 \to 2\gamma$ (см. рис. 2) имеет вид

$$T_{\nu\mu} = f\,(p^2,\ q_1^2,\ q_2^2)\,\varepsilon_{\nu\mu\alpha\beta}q_{1\alpha}q_{2\beta}, \tag{5.1}$$

где p — импульс π^0-мезона, q_1, q_2 — импульсы квантов, ν, μ — соответствующие поляризационные индексы, $\varepsilon_{\nu\mu\alpha\beta}$ — антисимметричный тензор ($\varepsilon_{0123} = 1$) *). Константа

$$f \equiv f\,(\mu^2,\ 0,\ 0) \tag{5.2}$$

определяет время жизни π^0-мезона:

$$\tau\,(\pi^0) = \frac{64\pi}{f^2\mu^3}\,. \tag{5.3}$$

Естественно принять предположение, что $f\,(p^2,\ q_1^2,\ q_2^2)$ медленно меняется в масштабах, малых по сравнению с $\sim m_\rho^2$ (также и вершинная функция в п. а) гл. 3). При этом можно считать

$$f \approx f\,(0), \tag{5.4}$$

где f определено в (5.2), а $f\,(0) \equiv f\,(0,\ 0,\ 0)$. Это предположение будет крайне существенным при рассмотрении более сложных амплитуд с нечетным числом π-мезонов. Медленность изменения функции $f\,(p^2,\ q_1^2,\ q_2^2)$ в принципе можно проверить экспериментально, изучая распределение по эффективной массе p^2 системы двух фотонов вблизи массы π^0-мезона **), а также рассматривая распределение по массе q_1^2 далитцевских пар в реакции $X \to X' + e^+e^- + \gamma$. Зависимость от переменных q_1^2, q_2^2 может быть исследована при рождении π^0-мезонов на встречных e^+e^--пучках с помощью двухфотонного механизма (см. [4, 9]).

$\pm\,0{,}09$ [140] и $\mu a_0 = 0{,}6^{+0{,}1}_{-0{,}2}$, $\mu a_2 = -0{,}1 \pm 0{,}1$ или $\mu a_0 = -0{,}5^{+0{,}3}_{-0{,}1}$, $\mu a_2 = 0 \pm 0{,}1$ [141]. Это противоречит (4.6). Однако, как отмечают, в частности, Волковицкий и Дахно [141], малые значения μa_0 из данных [48] получить можно на уровне достоверности $\leqslant 30\%$. Кроме того, экспериментальные результаты [48] не включают систематических ошибок, вероятность которых особенно велика в области вблизи краев плоскости Далитца, наиболее существенной для анализа ππ-рассеяния.

Таким образом, впечатление таково, что ситуация с длинами ππ-рассеяния по-прежнему не ясна.

*) Как правило, мы не заботимся о положении (верхнем или нижнем) векторных индексов. Однако в связи с выражением (5.1) следует подчеркнуть (что́ важно для последующего обсуждения знака константы f), что свертка с тензором $\varepsilon_{\nu\mu\alpha\beta}$ должна пониматься как $\varepsilon_{\nu\mu\alpha\beta}q_1^\alpha q_2^\beta$. И везде в дальнейшем свертки с тензором ε нужно понимать так, чтобы входили только нижние индексы в тензоре $\varepsilon_{\nu\mu\alpha\beta}$.

**) Предполагается рассматривать процесс $X \to X' + 2\gamma$. Резкое изменение функции $f\,(p^2)$ в масштабах $p^2 \sim \mu^2$, малых по сравнению с характерным масштабом сильных взаимодействий, могло бы привести к резкому изменению нерезонансного фона под пиком, соответствующим рождению и распаду реального π-мезона. Резкое изменение функции $f\,(p^2)$ отразилось бы на поведении фона, если механизм $X \to X' + \pi^0 \to X' + 2\gamma$ дает существенный вклад в фоновую часть амплитуды $X \to X' + 2\gamma$. Выделенность такого механизма следует ожидать из-за малой массы π-мезона и, соответственно, большой величины резонансного фактора $(p^2 - \mu^2)^{-1}$ при $p^2 \sim \mu^2$.

б) Численное значение константы f. Современное значение $\tau(\pi^0)$ равно $(0{,}84 \pm 0{,}1)\cdot 10^{-16}$ *сек* (см. [15]). При этом

$$f \approx \frac{0{,}45\alpha}{\mu}. \tag{5.5}$$

Однако имеются данные [50] (одни из последних), откуда следует значение $\tau(\pi^0) \approx 0{,}56\cdot 10^{-16}$ *сек*. При этом $f \approx 0{,}57\alpha/\mu$. Мы будем использовать значение (5.5), но, учитывая значительную вариацию $\tau(\pi^0)$ в экспериментальных данных последних лет, следует иметь в виду возможную неопределенность в выборе константы f.

Для дальнейшего существенно подчеркнуть, что константа в (5.5) не мала и скорее имеет «нормальный» порядок величины, поскольку отвечает разумному значению радиуса взаимодействия $\sim\mu^{-1}$.

в) Противоречие с гипотезой PCAC. В работах [51, 52] было отмечено, что гипотеза (5.4) находится в противоречии с соотношением (2.2). В самом деле, матричный элемент (5.1) может быть записан в виде (мы рассматриваем для простоты случай реальных квантов)

$$\varepsilon_\nu(q_1)\,T_{\nu\mu}\varepsilon_\mu(q_2) = -(p^2-\mu^2)\,\langle q_1,\, q_2 \mid \varphi^3(0) \mid 0\rangle, \quad p = q_1 + q_2. \tag{5.6}$$

Используя (2.2), получим

$$\langle q_1,\, q_2 \mid \varphi^3(0) \mid 0\rangle = \frac{ip_\alpha}{\mu^2 F_\pi}\langle q_1,\, q_2 \mid a_\alpha^3(0) \mid 0\rangle = \frac{p_\alpha A_{\alpha\nu\mu}}{\mu^2 F_\pi}\,\varepsilon_\nu(q_1)\,\varepsilon_\mu(q_2). \tag{5.7}$$

Предположим, что в (5.7) возможно разложение в ряд по импульсам. Тогда псевдотензор $A_{\alpha\nu\mu}$ с учетом требования бозе-симметрии можно записать в виде

$$A_{\alpha\nu\mu} = k\varepsilon_{\alpha\nu\mu\beta}(q_1-q_2)_\beta + \varepsilon_{\alpha\nu\beta\sigma}T^{(1)}_{\mu\beta\sigma} + \varepsilon_{\alpha\beta\mu\sigma}T^{(2)}_{\nu\beta\sigma} + \varepsilon_{\beta\nu\mu\sigma}T^{(3)}_{\alpha\beta\sigma} + O(p^4), \tag{5.8}$$

где тензоры $T^{(j)}_{\alpha\beta\gamma}$ должны быть составлены из импульсов и имеют по крайней мере третий порядок. Градиентная инвариантность требует выполнения условий $q_{1\nu}A_{\alpha\nu\mu} = A_{\alpha\nu\mu}\,q_{2\mu} = 0$, откуда следует, что $k = 0$. Таким образом, все выражение (5.6) оказывается четвертого порядка по импульсам, что противоречит гипотезе $f(p^2, 0, 0) \approx \mathrm{const}$ в (5.1). Легко убедиться, что из (5.6) и (5.7), (5.8) следует, что $f(p^2, 0, 0) \sim p^2$, т. е. $f(0) = 0$ и соотношение (5.4) не может быть выполнено.

В качестве разрешения возникшей проблемы имеет смысл рассматривать две возможности: 1) либо на самом деле $f(0) = 0$, тогда соотношение (5.4) неверно, а функция $f(p^2, 0, 0)$ быстро меняется в масштабах $\sim\mu^2$, 2) либо (5.4) выполняется, но в применении к рассматриваемому распаду неправильна гипотеза (2.2).

Мы будем в дальнейшем исходить из второй возможности, но при этом следует подчеркнуть, что сейчас однозначно обосновать этот выбор нельзя, используя только теоретические аргументы. Пока критерием здесь являются соображения эстетического порядка, связанные во многом с результатом исследования этой проблемы в σ-модели.

г) Распад $\pi^0 \to 2\gamma$ в σ-модели. Лагранжиан σ-модели имеет вид [53]

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_{\psi\varphi} + \mathscr{L}_{\varphi\sigma}, \tag{5.9}$$

где $\mathscr{L}_0$ — свободный лагранжиан,

$$\mathscr{L}_{\psi\varphi} = g_0\overline{\psi}_0\,(i\gamma_5\tau_a\varphi_0^a + \sigma_0)\,\psi_0, \tag{5.10}$$

$$\mathscr{L}_{\varphi\sigma} = -\frac{\varkappa_0^2-\mu_0^2}{8m_0^2}\,g_0^2\left[(\varphi_0^2+\sigma_0^2)^2 - \frac{4m_0}{g_0}\,\sigma_0\,(\varphi_0^2+\sigma_0^2)\right]. \tag{5.11}$$

Здесь m_0, μ_0, $\varkappa_0$ — массы нуклона, π-мезона и σ-частицы соответственно. Индексом нуль обозначаются «голые», неперенормированные величины. Векторный и аксиальный токи имеют вид

$$v_\nu^k = \frac{1}{2}\bar{\psi}_0\gamma_\nu\tau^k\psi_0 - i\frac{\partial\varphi_0^a}{\partial x_\nu}T_k^{ab}\varphi_0^b, \quad T_k^{cd} = -i\varepsilon_{kcd}, \tag{5.12}$$

$$a_\nu^k = \frac{1}{2}\bar{\psi}_0\gamma_\nu\gamma_5\tau^k\psi_0 - \frac{m_0}{g_0}\frac{\partial\varphi_0^k}{\partial x_\nu} + \left(\frac{\partial\varphi_0^k}{\partial x_\nu}\sigma_0 - \frac{\partial\sigma_0}{\partial x_\nu}\varphi_0^k\right). \tag{5.13}$$

Их дивергенция равна соответственно

$$\partial_\nu v_\nu^k = 0, \tag{5.14}$$

$$\partial_\nu a_\nu^k = \mu_0^2\frac{m_0}{g_0}\varphi_0^k. \tag{5.15}$$

Таким образом, соотношение (2.2) выполнено в σ-модели как точное операторное равенство. При этом «голая» константа распада $\pi \to e\nu$ равна $F_{\pi 0} = m_0/g_0$.

Включая в (5.9) взаимодействие заряженных частиц с электромагнитным полем с помощью обычной замены $\partial_\nu \to \partial_\nu + ieA_\nu$ и наивно используя уравнения движения, получим

$$\partial_\nu v_\nu^k = -ieT_3^{kn}v_\nu^n A_\nu, \tag{5.14'}$$

$$\partial_\nu a_\nu^k = \mu_0^2\frac{m_0}{g_0}\varphi_0^k - ieT_3^{kn}a_\nu^n A_\nu. \tag{5.15'}$$

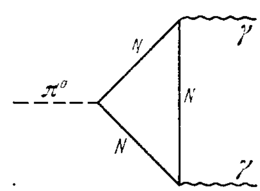

Рис. 13.

Таким образом, условие (5.15) для нейтральных компонент ($k = 3$) сохранилось и в присутствии электромагнитного поля. Применяя далее аргументацию п. в) этой главы к распаду $\pi^0 \to 2\gamma$, мы сразу получаем, что $f(0) = 0$ в каждом порядке теории возмущений в σ-модели.

С другой стороны, в низшем порядке по g_0 распад $\pi^0 \to 2\gamma$ описывается вкладом треугольной диаграммы на рис. 13. Отметим, что в низшем приближении амплитуда $\pi^0 \to 2\gamma$ в σ-модели выглядит так же, как и в обычной теории с псевдоскалярной πN-связью. Прямое вычисление диаграммы на рис. 13 дает ненулевой результат [54, 55]

$$f(0) = -\frac{e^2}{4\pi^2}\frac{g_0}{m_0}, \tag{5.16}$$

что противоречит условию (5.15), поскольку из него следует, что $f(0) = 0$.

Этот парадокс был сформулирован в работе [55]. Его происхождение связано с недостаточно быстрой сходимостью диаграммы на рис. 13. Это видно из следующих рассуждений.

Из условий сохранения в σ-модели могут быть стандартными методами выведены тождества Уорда для вершины векторного и аксиального токов[56]:

$$ip_\nu\Gamma_\nu^a(k', k) = \frac{1}{2}\tau^a(S^{-1}(k) - S^{-1}(k')), \tag{5.17}$$

$$ip_\nu\Gamma_{5\nu}^a(k', k) = \frac{1}{2}\tau^a(S^{-1}(k)\gamma_5 + \gamma_5S^{-1}(k')) + \frac{m_0\mu_0^2}{g_0}\frac{\Gamma_5^a(k', k)}{p^2 - \mu_0^2 - \Sigma_0(p^2)}, \tag{5.18}$$

где $p = k' - k$, $\Gamma_5^a(k', k)$ — псевдоскалярная вершина испускания π-мезона, $\Sigma_0(p^2)$ — массовый оператор π-мезона, $S(k)$ — функция Грина фермиона. В низшем порядке теории возмущений и при $p \to 0$

$$\Gamma_{5\nu}^a = \frac{1}{2}\tau^a\gamma_\nu\gamma_5, \quad \Gamma_\nu^a = \frac{1}{2}\tau^a\gamma_\nu, \quad \Gamma_5^a = ig_0\tau^a\gamma_5, \quad S^{-1}(k) = -i(\hat{k} - m_0),$$

и условия (5.17), (5.18) тривиально выполняются.

Из соотношения (5.7) следует (если оно справедливо), что диаграмма на рис. 13 должна получаться домножением на $ip_\alpha g_0/m_0\mu_0^2$ графика на рис. 14, где плюсом обозначена вершина аксиального тока. Это свойство должно быть следствием тождества Уорда для аксиальной вершины.

Диаграмма рис. 14 является тензором третьего ранга. Она сходится и в низшем порядке по импульсам равна $-(ie^2/8\pi^2)\,\varepsilon_{\alpha\nu\mu\sigma}\,(q_1-q_2)_\sigma$. Однако такая структура не поперечна по импульсам квантов q_1, q_2. Свойство поперечности обычно является следствием тождества Уорда (5.17). В данном случае это не так, поскольку при применении тождества (5.17) к векторным вершинам ухудшается степень сходимости диаграммы и возникает разность двух линейно расходящихся интегралов. Таким образом, несмотря на то, что график на рис. 14 сходится, он сходится недостаточно быстро и в нем необходимо сделать вычитание (регуляризацию), доопределяя его до градиентно-инвариантной структуры. В низшем порядке по импульсам форма вычитательного члена определяется однозначно, поскольку он должен сократить недопустимую структуру $\sim\varepsilon_{\alpha\nu\mu\sigma}(q_1-q_2)_\sigma$. При такой регуляризации теряется свойство PCAC и соотношение (5.7) оказывается невыполненным, если под $\langle q_1, q_2\,|\,a_\alpha^3(0)\,|\,0\rangle$ понимать регуляризованный и градиентно инвариантный матричный элемент.

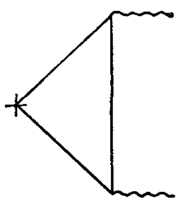

Рис. 14.

Изменение в соотношении (5.7) связано с появлением вычитательного члена $\sim\varepsilon_{\alpha\nu\mu\sigma}\,(q_1-q_2)$, который необходимо выделить из матричного элемента аксиального тока. После умножения на $p_\alpha=(q_1+q_2)_\alpha$ в (5.7) вычитательный член принимает вид $\sim\varepsilon_{\nu\mu\alpha\beta}\,q_{1\alpha}\,q_{2\beta}$. Мы получаем в результате, что вместо (5.7) следует записать соотношение, которое является формальным следствием аномального условия PCAC (2.10) $\left(\text{если выбрать в (2.10) } c=F_{\pi0}\dfrac{g_0}{m_0}=1\right)$:

$$\langle q_1, q_2\,|\,\varphi_0^3(0)\,|\,0\rangle=\frac{ip_\alpha}{\mu_0^2F_{\pi0}}\langle q_1, q_2\,|\,a_\alpha^3(0)\,|\,0\rangle_{\text{рег}}-\frac{e^2g_0}{4\pi^2m_0\mu_0^2}\,\varepsilon_{\nu\mu\alpha\beta}\varepsilon_\nu(q_1)\,\varepsilon_\mu(q_2)\,q_{1\alpha}q_{2\beta},\tag{5.19}$$

где $\langle q_1,\ q_2\,|\,a_\alpha^3(0)\,|\,0\rangle_{\text{рег}}$ — градиентно инвариантный (регуляризованный) матричный элемент аксиального тока, и по определению (см. (5.6), (5.1))

$$\mu_0^2\langle q_1, q_2\,|\,\varphi_0^3(0)\,|\,0\rangle=f(0)\,\varepsilon_{\nu\mu\alpha\beta}\varepsilon_\nu(q_1)\,\varepsilon_\mu(q_2)\,q_{1\alpha}q_{2\beta}.$$

Первое слагаемое в правой части равенства (5.19) четвертого порядка по импульсам (см. п. в) гл. 5), поэтому величина $f(0)$ связана целиком со вкладом второго слагаемого в (5.19) и определяется формулой (5.16). Таким образом, парадокс [55] разрешился в пользу второй из двух возможностей, отмеченных в конце п. в) гл. 5. Такое решение проблемы впервые было предложено в [21].

Из приведенных рассуждений видно, что возникновение парадокса и нарушение условия PCAC связано исключительно с плохой сходимостью треугольной диаграммы на рис. 14, содержащей вершину аксиального тока. В работе [57] была проведена полная классификация диаграмм с фермионными петлями, включающих вершины векторного и аксиального токов, в которых, аналогично графику на рис. 14, не выполняются одновременно формальные следствия PCAC и сохранения векторного тока. Все возможные аномальные диаграммы приведены на рис. 15. Видно, что они содержат нечетное число вершин аксиального тока. Поэтому мы могли бы ожидать проявления аномальных условий PCAC в амплитудах с нечетным числом π-мезонов.

Отметим, что условие (2.10) может быть получено в σ-модели с помощью уравнений движения для полей, входящих в определение a_ν^k в (5.13). При этом необходимо использовать градиентно инвариантный способ доопределения сингулярных произведений операторов поля в одной точке (см., например, [58, 59]). Необходимость такого доопределения и возможность появления при этом аномальных членов впервые были указаны в работе [60].

Треугольная диаграмма на рис. 14 проявляется также в появлении аномальных членов в соотношениях коммутации векторных и аксиальных

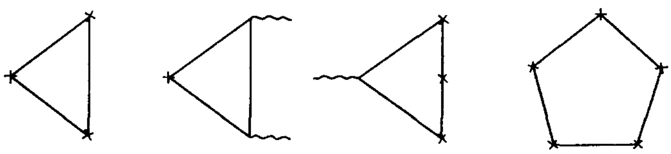

Рис. 15.

токов. Используя коммутаторы токов, согласованные с аномальным условием (2.10), можно дополнительным способом убедиться в отсутствии запрета на распад $\pi^0 \to 2\gamma$ в σ-модели (см. [61]).

Подробный анализ аномальностей, связанных с плохой сходимостью диаграмм с фермионными петлями в теории возмущений, а также ссылки на большое число статей по данному вопросу см. в [62]. Интересно, что амплитуда распада $\pi^0 \to 2\gamma$ может быть вычислена в σ-модели с учетом всех приближений по константе связи g_0 [63]. Графики, более сложные, чем треугольная диаграмма на рис. 13, лучше сходятся. Соответствующие диаграммы с вершинами аксиального тока не требуют вычитаний и допускают одновременное применение тождества Уорда (5.17) и (5.18). Таким образом, нормальное условие PCAC оказывается выполненным для вклада высших приближений в амплитуде $\pi^0 \to 2\gamma$. Поэтому более сложные диаграммы не дают самостоятельного вклада в $f(0)$ и сводятся только к перенормировке констант и масс в скелетной диаграмме на рис. 13. Окончательный результат имеет вид

$$f(0) = -\frac{e^2}{4\pi^2}\frac{1}{g_a}\frac{g_{\pi N}}{m}, \tag{5.20}$$

где g_a — перенормированная константа аксиального тока (входящая в β-распад нейтрона), $g_{\pi N}$ — физическая константа πN-связи, m — масса нуклона. Примечательно, что величина (5.20) с процентной точностью совпадает с физической константой распада $\pi^0 \to 2\gamma$ в (5.5).

Необходимо подчеркнуть в заключение, что все перечисленные факты не являются тем не менее доказательством существования аномального условия PCAC в σ-модели. Это обстоятельство было подчеркнуто в работе [64]. Возможны и другие способы разрешения парадокса, сформулированного в конце п. в) этой главы.

Один из них рассматривался в [55]. Такая неоднозначность связана со следующим обстоятельством.

Мы уже убедились, что матричные элементы теории возмущений без подходящей регуляризации и доопределения, вообще говоря, могут не обладать симметрией, формально заложенной в лагранжиане. (Так, например, матричный элемент на рис. 14, вычисленный по обычным фейнмановским правилам, не поперечен, в то время как сохранение векторного тока, конечно, содержится в (5.9). Другим примером является рассеяние света на свете в обычной электродинамике, которое описывается сходящейся четырехугольной диаграммой, которая не поперечна и требует вычитания, если мы хотим сохранить градиентную инвариантность в матричных элементах.) Рассмотренный нами в связи с проблемой $\pi^0 \to 2\gamma$ вариант регуляризации является в каком-то смысле минимальным. При этом мы сохранили градиентную инвариантность, но разрушили PCAC. Однако, в принципе, можно навязать матричным элементам свойство PCAC (5.15), делая дополнительное вычитание в хорошо сходящейся диаграмме с псевдоскалярной вершиной на рис. 13. (Вычитательный член нужно выбрать равным $+ (e^2 g_0/4\pi^2 m_0)\, \varepsilon_{\nu\mu\alpha\beta} q_{1\alpha} q_{2\beta}$ так, чтобы сократить вклад второго порядка по импульсам в распаде $\pi^0 \to 2\gamma$. Таким способом мы получим $f(0) = 0$, но при этом, правда, нарушится перенормируемость σ-модели.) При таком вычитании (во всяком случае в низшем порядке по g_0) соотношение (5.15) снова окажется выполненным. В этом смысле результат оказывается зависящим от выбора методики расчета петлевых диаграмм в рамках лагранжиана (5.9).

Таким образом, рассмотрение в σ-модели показывает, что, вообще говоря, есть различные возможности решения проблемы распада $\pi^0 \to 2\gamma$.

Наиболее естественным и простым кажется введение аномального условия PCAC (2.10). При этом распад $\pi^0 \to 2\gamma$ разрешен и условие (5.4) выполнено. Другие из обсуждавшихся возможностей приводят к появлению неперенормируемых бесконечностей в высших приближениях σ-модели.

Отвлекаясь, наконец, от σ-модели, следует подчеркнуть, что условие PCAC в виде (2.2) не является строгим законом. Распад $\pi^0 \to 2\gamma$ оказывается чувствительным к поправкам в этом соотношении. Нет никаких оснований полагать, что физическое условие PCAC (в применении к матричным элементам) не может модифицироваться, если для этого есть физическое основание. Мы, как уже отмечалось, исходим из предположения, что такая модификация действительно происходит, так что распад $\pi^0 \to 2\gamma$ разрешен в том смысле, что $f(0) \neq 0$ и соотношение (5.4) выполнено. Как конкретно могла бы происходить такая модификация, показывает рассмотрение в σ-модели. Однако явная форма аномального (модифицированного) условия PCAC не будет в дальнейшем существенна.

д) Связь с аннигиляцией $e^+e^- \to$ адроны. В связи с обсуждением в п. г) этой главы кажется интересным обсудить возможную связь амплитуды распада $\pi^0 \to 2\gamma$ с асимптотикой полного сечения аннигиляции $e^+e^- \to$ адроны, хотя это и выводит нас далеко за пределы основных гипотез гл. 2. Возникновение этой связи удобно проследить в наивной модели кварков.

Если бы мы рассматривали распад $\pi^0 \to 2\gamma$ в модели кварков, где π-мезон — составная частица, и по-прежнему предполагали, что для интерполирующего π-мезонного поля выполнено условие PCAC (что, казалось бы, необходимо), то для константы $f(0)$ за счет вклада треугольного графика получилось бы выражение (5.20) с заменой

$$e^2 \to Le^2, \tag{5.21}$$

где

$$L = \sum_i (Q_{pi}^2 - Q_{ni}^2); \tag{5.22}$$

здесь Q_p, Q_n — заряды протонного и нейтронного кварков. ($Q_p = 2/3$, $Q_n = -1/3$. Отметим, что $Q_p^2 - Q_n^2 = Q_p + Q_n$. Величина Q_n^2 входит со знаком минус в (5.22), так как связь нейтронного кварка с π^0-мезоном в треугольной диаграмме имеет отрицательный знак.) Суммирование $\sum_i$ в (5.22) происходит по числу кварков нейтронного и протонного типа.

В обычной кварковой модели ($i = 1$) мы получим $L = 1/3$, что дает в девять раз меньшую ширину распада $\pi^0 \to 2\gamma$ по сравнению с тем, что требуется экспериментом (или формулой (5.20)).

Существуют модели (см., например, [65]), где число кварков утраивается в соответствии со значениями нового квантового числа («цвета» кварка в [65]). При этом $L = 1$, что является весьма удовлетворительным с точки зрения эксперимента.

Перейдем теперь к аннигиляции $e^+e^- \to$ адроны. Сечение этого процесса определяется мнимой частью диаграммы поляризации вакуума, соответствующей реальным переходам $\gamma \to q\bar{q} \to \gamma$. Эта диаграмма содержит вклады, включающие перерассеяние кварков в промежуточном состоянии, и вклады без перерассеяния, содержащие только мнимые части точных функций Грина кварков.

Предположим, что при больших q^2 (q — импульс кванта) все вклады, содержащие перерассеяния, убывают. Такая ситуация должна возникнуть в теории с конечными перенормировочными константами, а также в теории с каким-то (внешним) обрезанием по поперечным импульсам частиц. Нет ни одной модели теории поля, в которой подобную картину можно было бы последовательно получить с помощью суммирования графиков теории возмущений. Однако «скейлинг», или автомодельность, наблюдающаяся в сечениях глубоконеупругих процессов, показывает, что истинная ситуация, возможно, каким-то образом соответствует моделям с конечной перенормировкой.

После выбрасывания вкладов с перерассеянием кварков сечение процесса $e^+e^- \to$ адроны (мнимая часть поляризации вакуума) будет определяться интегралом

$$\int \operatorname{Im} G(k_1) \operatorname{Im} G(k_2)\, \theta(k_{10})\, \theta(k_{20})\, \delta(q-k_1-k_2)\, d^4k_1 d^4k_2 = \pi^2 \int d\varkappa_1^2 \rho(\varkappa_1^2) \int d\varkappa_2^2 \rho(\varkappa_2^2)\, J(\varkappa_1^2, \varkappa_2^2, q^2),$$

где

$$J(\varkappa_1^2, \varkappa_2^2, q^2) = \int \theta(k_{10})\, \theta(k_{20})\, \delta(k_1^2-\varkappa_1^2)\, \delta(k_2^2-\varkappa_2^2)\, \delta(q-k_1-k_2)\, d^4k_1\, d^4k_2.$$

При $q^2 \to \infty$ (но $\varkappa^2_{1\text{эфф}} \sim \varkappa^2_{2\text{эфф}} \sim \text{const}$, что соответствует теории с конечной перенормировкой) мы получим, что $J \to \text{const}$ (интеграл J есть фактически фазовый объем двух частиц с массами $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ и с суммарным 4-импульсом q). При этом интегралы по $\varkappa_i^2$ вычисляются благодаря условию унитарности для спектральной функции $\int \rho(\varkappa^2)\, d\varkappa^2 = 1$ и весь эффект сильных взаимодействий исчезает.

Окончательно полное сечение аннигиляции $e^+e^- \to$ адроны при больших q^2 оказывается связанным с простейшей кварковой диаграммой, соответствующей переходу $\gamma \to q\bar{q} \to \gamma$ с двумя свободными кварками в промежуточном состоянии. При этом отношение сечений аннигиляции в адроны и в пару $\mu^+\mu^-$ пропорционально сумме квадратов зарядов кварков:

$$R \equiv \frac{\sigma(e^+e^- \to \text{адроны})}{\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)} = \sum_i (Q_{pi}^2 + Q_{ni}^2 + Q_{\lambda i}^2). \tag{5.23}$$

В обычной трехкварковой модели $R = 2L = 2/3$ (L определено в (5.22)). В модели с девятью кварками [65] $R = 2L = 2$. Таким образом, некоторые кварковые модели, хорошо описывающие распад $\pi^0 \to 2\gamma$ ($L = 1$), приводят к отношению $R = 2$, которое удовлетворительно согласуется с последними экспериментальными данными об аннигиляции $e^+e^- \to$ адроны (см. [66]).

Приведенные выше простые, хотя и вопиюще нестрогие, соображения были формализованы в недавней работе Крюзера [67], которому удалось получить соотношение

$$R = 2L \tag{5.24}$$

независимо от конкретной кварковой модели *). Используя теперь экспериментальное значение константы $f(0)$ (что соответствует $L_{\text{эксп}} \approx 1$), можно получить ожидаемое значение асимптотики отношения $\sigma(e^+e^- \to$ адроны$)/\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)$.

В работе [67] вместо наивных предположений, содержащихся в кварковой модели, используется гипотеза о поведении произведений операторов токов на малых расстояниях [68] **). Возможно, однако, что эти подходы эквивалентны.

То, что константа низкоэнергетического распада $\pi^0 \to 2\gamma$ может определять асимптотику (при $q^2 \to \infty$) отношения (5.23), является сильным и волнующим утверждением. К сожалению, физические предпосылки, лежащие в основе этого факта, пока не ясны.

6. ПРОЦЕССЫ $\gamma \to 3\pi$ И $\gamma\gamma \to 3\pi$ [69-72]

а) Феноменологическая структура. Амплитуда $\gamma \to 3\pi$ имеет вид

$$T_\nu^{abc} = -ih(s_{12}, s_{13}, s_{23})\,\varepsilon_{abc}\varepsilon_{\nu\alpha\beta\gamma}p_{1\alpha}p_{2\beta}p_{3\gamma}. \tag{6.1}$$

Форм-фактор $h(s_{12}, s_{13}, s_{23})$ зависит от инвариантных переменных $s_{ij} = (p_i + p_j)^2$ и (вне массовой поверхности) от виртуальных масс π-мезонов p_j^2.

Матричный элемент T_ν^{abc} должен быть псевдовектором и тензором третьего ранга по изотопическим переменным (γ-квант в процессе $\gamma \to 3\pi$ является изоскалярным и не несет изотопического индекса). Эти требования однозначно определяют структуру T_ν^{abc}. Бозе-симметрия определяет очевидные свойства симметрии функции h.

Мы начнем с предположения, что h является медленно меняющейся функцией и может быть разложена в ряд по импульсам π-мезонов. В нулевом приближении

$$h(s_{12}, s_{13}, s_{23}) \approx h(0). \tag{6.2}$$

В дальнейшем мы обсудим законность этого предположения и укажем область изменения импульсов, где разложение (6.2), по-видимому, имеет смысл.

Рассмотрим параллельно амплитуду процесса $\gamma\gamma \to 3\pi$. Ее общая структура довольно сложна. Мы предположим, что неполюсные члены этой амплитуды являются медленными функциями импульсов и допускают разложение в ряд. В низшем приближении по импульсам матричный

---

*) В работе [67] получено фактически более общее соотношение $(3/2)L = KR'$, где R' — вклад изовекторной части тока в процессе $e^+e^- \to$ адроны, K — константа в коммутационных соотношениях пространственных компонент электромагнитного тока, которая может быть измерена независимо. Соотношение (5.24) получается при дополнительных предположениях: а) обычная кварковая структура коммутаторов токов (ей соответствует $K = 1$), б) октетный характер электромагнитного тока (при этом $R' = {}^3/_4 R$).

**) В п. г) было показано, что распад $\pi^0 \to 2\gamma$ определяется фактически вкладом высоких энергий в треугольной диаграмме с двумя векторными и одной аксиальной вершинами. Константа $f(0)$ оказалась равной вычитательному члену, подправляющему вклад больших импульсов до градиентно инвариантной структуры. Это позволяет (см. [68]) связать $f(0)$ с матричным элементом токов на малых расстояниях. С другой стороны, процесс $e^+e^- \to$ адроны при $q^2 \to \infty$, как хорошо известно, также определяется вкладом малых расстояний.

элемент процесса $\gamma\gamma \to 3\pi$ имеет простой вид:

$$T^{abc3}_{\nu\mu} = P^{abc3}_{\nu\mu} + \varepsilon_{\nu\mu\alpha\beta}\,[Bq_{1\alpha}q_{2\beta}\,(\delta_{3a}\delta_{bc} + \delta_{3b}\delta_{ac} + \delta_{3c}\delta_{ab}) - $$
$$- A\,(q_1 - q_2)_\alpha\,(p_{1\beta}\delta_{3a}\delta_{bc} + p_{2\beta}\delta_{3b}\delta_{ac} + p_{3\beta}\delta_{3c}\delta_{ac})], \quad (6.3)$$

где A и B — постоянные, $P^{abc3}_{\nu\mu}$ — вклад полюсных членов на рис. 16. Из соображений, связанных с сохранением G-четности, следует, что в процессе $\gamma\gamma \to 3\pi$ один γ-квант изоскалярный, другой изовекторный. Поэтому амплитуда $T^{abc3}_{\nu\mu}$ оказывается тензором четвертого ранга по изотопическим переменным. В остальном ее структура определяется требованиями сохранения пространственной четности и бозе-симметрии.

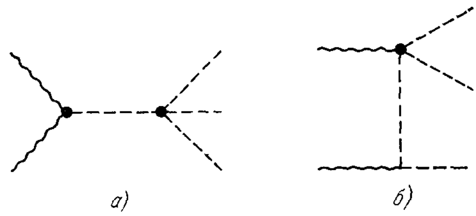

Рис. 16.

Полюсный график на рис. 16, *а* содержит блок $\pi\pi$-рассеяния (см. (4.1)) и вершину распада $\pi^0 \to 2\gamma$ (см. (5.1)). Вклад этого графика имеет порядок $\sim p^2$ (так же как и контактного члена) и равен

$$-f(0)\frac{\varepsilon_{\nu\mu\alpha\beta}q_{1\alpha}q_{2\beta}}{Q^2-\mu^2}\,[\delta_{3a}\delta_{bc}M\,(p_2, p_3, p, -Q) +$$
$$+ \delta_{3b}\delta_{ac}M\,(p_1, p_3, p_2, -Q) + \delta_{3c}\delta_{ab}M\,(p_1, p_2, p_3, -Q)], \quad (6.4)$$
$$Q = q_1 + q_2 = p_1 + p_2 + p_3.$$

График на рис. 16, *б* содержит амплитуду $\gamma \to 3\pi$. Вклад его также порядка $\sim p^2$ и равен

$$\left[-eh(0)\,\varepsilon_{abj}\varepsilon_{3cj}\frac{(2p_3-q_2)_\mu}{(p_3-q_2)^2-\mu^2}\,\varepsilon_{\nu\alpha\beta\gamma}p_{1\alpha}p_{2\beta}\,(p_3-q_2)_\gamma + \right.$$
$$\left. + \text{перестановка } \begin{matrix} p_1 \to p_2 \to p_3 \\ a \to b \to c \end{matrix}\right] + \text{перестановка } \begin{matrix} q_1 \to q_2 \\ \nu \to \mu \end{matrix}. \quad (6.5)$$

Здесь существенно предположение, что функции $f\,(p^2, q_1^2, q_2^2)$ (см. (5.1)) и $h\,(s_{12}, s_{13}, s_{23})$ (см. (6.1)) медленно меняются. Отличие, скажем, $f\,(0)$ в (6.4) от $f\,(\mu^2, 0, 0)$ существенно фактически в членах порядка $\sim p^4$ (если все $p_i \sim q_i \sim \mu$), которые не учитываются в (6.3).

Градиентная инвариантность $(q_{1\nu}T^{abc3}_{\nu\mu} = 0)$ требует, чтобы выполнялось соотношение

$$A = eh\,(0). \quad (6.6)$$

б) Вычисление параметров A, B и $h\,(0)$. Для получения дополнительных ограничений на параметры A, B, h следует рассмотреть порознь две амплитуды в (6.3): $T^{3113}_{\nu\mu}$ (описывает процесс $\gamma\gamma \to \pi^0\pi^+\pi^-$) и $T^{3333}_{\nu\mu}$ (описывает процесс $\gamma\gamma \to 3\pi^0$).

Амплитуда $\gamma\gamma \to \pi^0\pi^+\pi^-$ пропорциональна интегралу

$$\int dx\, e^{-iq_2x}\langle\pi^0(p_1), \pi^+(p_2), \pi^-(p_3)\,|\,T\,(j_\nu(0)\,j_\mu(x))\,|\,0\rangle. \quad (6.7)$$

В σ-модели она описывается суммой диаграмм на рис. 17. В этой амплитуде мы можем воспользоваться нормальным условием PCAC в виде (2.2) для нейтрального мезона. Действительно, используя (2.2) и редукционные формулы при $p_1^2 \neq \mu^2$, мы получаем вместо (6.7)

$$\frac{i(\mu^2-p_1^2)}{\mu^2 F_\pi}\int dx\, e^{-iq_2x}\int dx_1 e^{ip_1x_1}\langle\pi^+(p_2),\ \pi^-(p_3)\,|\,T(\partial_\alpha a_\alpha^3(x_1)\,j_\nu(0)\,j_\mu(x))\,|\,0\rangle =$$
$$=\frac{\mu^2-p_1^2}{\mu^2 F_\pi}\int dx\,dx_1 e^{-iq_2x}e^{ip_1x_1}p_{1\alpha}\langle\pi^+(p_2),\ \pi^-(p_3)\,|\,T(a_\alpha^3(x_1)\,j_\nu(0)\,j_\mu(x))\,|\,0\rangle, \quad (6.8)$$

где было использовано, что a_α^3 коммутирует с электромагнитным током, что позволяет вынести операцию дифференцирования из-под знака T-произведения.

Формула (6.8) означает, что амплитуда $\gamma\gamma \to \pi^0\pi^+\pi^-$ должна получаться домножением на $p_{1\alpha}$ диаграмм, в которых вершина испускания

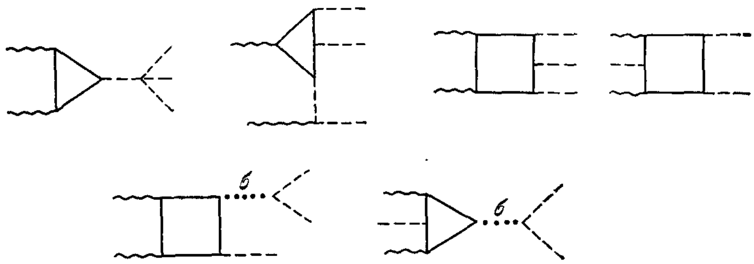

Рис. 17.

только одного, нейтрального π-мезона заменена на вершину аксиального тока. Такая замена в графиках на рис. 17 в σ-модели не приводит к появлению «опасных» диаграмм (см. рис. 15), которые плохо сходятся и требуют доопределения. Эти соображения служат основанием возможности применения PCAC в виде (2.2) для одного π-мезона, если другие находятся на массовой поверхности.

Подчеркнем, что сход с массовой поверхности для трех π-мезонов одновременно и последовательное применение PCAC для каждого из них приводит (после вычисления коммутаторов токов) к появлению опасных диаграмм. Это означает, что структура амплитуды $T_{\nu\mu}$ и значения констант A, B, $h(0)$ на самом деле связаны с аномальным условием PCAC. Мы, однако, используем такой способ рассуждений, при котором не требуется конкретного рассмотрения структуры аномальных членов. Они учитываются феноменологически в том пункте, где мы предполагаем, что $f(0) \neq 0$ и распад $\pi^0 \to 2\gamma$ не запрещен (см. гл. 5).

Гипотеза PCAC (2.2) в применении к нейтральному π-мезону с импульсом p_1 приводит к условию $T_{\nu\mu}^{3113} = 0$ при $p_1 \to 0$ (при $p_2^2 = p_3^2 = \mu^2$) Это позволяет выразить константу B в (6.3) через вклад диаграммы на рис. 16, *а* при $p_1 \to 0$. (Вклад диаграммы на рис. 16, *б* сам по себе обращается в нуль при $p_1 \to 0$.) При этом оказывается

$$B=\frac{f(0)}{F_\pi^2}(1+\gamma F_\pi^2). \quad (6.9)$$

(Мы используем амплитуду $\pi\pi$-рассеяния в параметризации (4.2), (4.4).)

Таким образом, амплитуда $T_{\nu\mu}$ уже выражена через параметры $f(0)$ и $h(0)$. Используя, далее, условие PCAC (2.2) для одного из нейтральных мезонов в амплитуде $T_{\nu\mu}^{3333}$, мы получим: $T_{\nu\mu}^{3333} \to 0$, если $p_1 \to 0$ (при $p_2^2 = p_3^2 = \mu^2$). Это условие приводит к дополнительному соотношению

$$-2A+3B=\frac{f(0)}{F_\pi^2}(1+3\gamma F_\pi^2). \quad (6.10)$$

Из (6.6), (6.9) и (6.10) следует [69-72]

$$h(0)=\frac{f(0)}{eF_\pi^2}\approx\frac{f}{eF_\pi^2}. \qquad (6.11)$$

Численное значение h (0) оказывается при этом равным

$$h(0)\approx\frac{0{,}1e}{\mu^3}. \qquad (6.12)$$

Отметим, что если f (0) = 0 и распад $\pi^0 \to 2\gamma$ запрещен в рамках PCAC, то амплитуда (6.3) оказывается фактически четвертого порядка по импульсам (а (6.1) — пятого порядка) и никаких предсказаний относительно значений параметров в этих амплитудах получить не удается. В этом смысле экспериментальная проверка условия (6.11) важна как способ подтвердить правильность гипотезы о существовании аномальных условий PCAC.

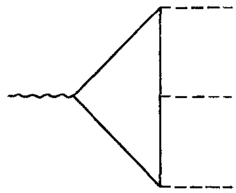

Рис. 18.

Соотношения (6.9)—(6.11) могут быть проверены прямыми вычислениями в σ-модели [70, 71, 73]. В низшем приближении процесс $\gamma\gamma \to 3\pi$ описывается диаграммами на рис. 17, процесс $\gamma \to 3\pi$ — диаграммой на рис. 18. Так же как в случае $\pi^0 \to 2\gamma$ (см. обсуждение в п. г) гл. 5), можно показать, что в низшем приближении по импульсам диаграммы следующих приближений по константе связи несущественны и амплитуды $\gamma\gamma \to 3\pi$ и $\gamma \to 3\pi$ определяются в σ-модели только графиками на рис. 17 и 18 соответственно.

Мы выпишем в заключение амплитуду $\gamma\gamma \to 3\pi$ при $p_i^2 = \mu^2$ для различных зарядовых состояний с учетом (6.6), (6.9) и (6.11).

Процесс $\gamma\gamma \to 3\pi^0$:

$$T_{\nu\mu}^{000}=-\frac{f(0)}{F_\pi^2}(1+3\gamma F_\pi^2)\frac{\mu^2}{Q^2-\mu^2}\varepsilon_{\nu\mu\alpha\beta}q_{1\alpha}q_{2\beta}. \qquad (6.13)$$

Процесс $\gamma\gamma \to \pi^0(p_1)\,\pi^+(p_2)\,\pi^-(p_3)$:

$$T_{\nu\mu}^{0+-}=\frac{f(0)}{F_\pi^2}\left\{\frac{Qp_1-(1/2)\mu^2(1+\gamma F_\pi^2)}{Q^2-\mu^2}\varepsilon_{\nu\mu\alpha\beta}q_{1\alpha}q_{2\beta}+\right.$$

$$\left.+\left[\delta_{\mu\sigma}+\frac{(2p_3-q_2)_\mu\, p_{2\sigma}}{q_2^2-2q_2p_3}+\frac{(2p_2-q_2)_\mu\, p_{3\sigma}}{q_2^2-2q_2p_2}\right]\varepsilon_{\nu\sigma\beta\alpha}p_{1\beta}q_{1\alpha}\right\}+\begin{pmatrix}\nu\to\mu\\ q_1\to q_2\end{pmatrix}. \qquad (6.14)$$

Видно, что (6.13) (при $\gamma = 0$) в результате сокращений оказывается величиной, пропорциональной $\sim\mu^2$, и в том случае, когда $q_i \sim p_i \sim \mu$, $Q^2 \sim 9\mu^2$, $(1 + 3\gamma F_\pi^2) \sim 1$, она весьма мала. Таким образом, $T_{\nu\mu}$ $(\gamma\gamma \to 3\pi^0)$ вряд ли может быть корретно вычислена в рамках используемых приближений. Это обстоятельство было отмечено в [74, 75].

В работе [74] впервые было получено правильное выражение для амплитуды $\gamma\gamma \to 3\pi^0$, однако амплитуда $\gamma\gamma \to \pi^+\pi^-\pi^0$ вычислена неверно.

Амплитуда $\gamma\gamma \to 3\pi$ использовалась рядом авторов для оценки вклада 3π-промежуточного состояния в мнимую часть амплитуды распада $K_L \to \mu^+\mu^-$ (см. [76, 77]).

в) Оценка точности приближения (6.2). Для сравнения (6.11) с экспериментом необходимо подробнее обсудить связь h (0) с величиной h (s_{12}, s_{13}, s_{23}), определенной при значении инвариантов в физической области.

Наше обсуждение опиралось на предположение (6.2). Соотношение (6.2) можно пытаться уточнить, учтя возможную зависимость функции h от инвариантов, благодаря вкладу резонансных графиков в амплитуду (6.1). Причем резонансные графики следует дополнить вкладом нерезонансной (фоновой) части амплитуды так, чтобы суммарный вклад при

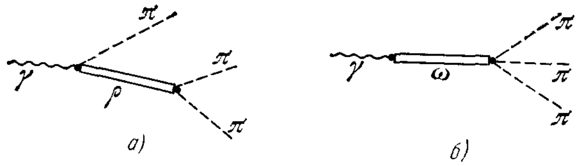

Рис. 19.

нулевых импульсах приводил к правильному пределу (6.11). Учет диаграмм с ρ- и ω-обменом (рис. 19) приводит, вместо (6.2), к следующей экстраполяционной формуле [78]:

$$h(s_{12}, s_{13}, s_{23}) = h(0)\left[1+\Delta_\rho\left(\frac{s_{12}}{m_\rho^2-s_{12}}+\frac{s_{13}}{m_\rho^2-s_{13}}+\frac{s_{23}}{m_\rho^2-s_{23}}\right)+\Delta_\omega\frac{Q^2}{m_\omega^2-Q^2}\right], \tag{6.15}$$

$$\Delta_\rho = \frac{2f_{\rho\pi\gamma}f_{\rho\pi\pi}}{m_\rho^2 h(0)}, \quad \Delta_\omega = \frac{e\lambda_\omega h_\omega}{m_\omega^2 h(0)},$$

где по-прежнему $h(0) = f/eF_\pi^2$, $Q^2 = (p_1+p_2+p_3)^2$, $s_{ij} = (p_i+p_j)^2$; m_ρ, m_ω — массы ρ- и ω-мезонов, $f_{\rho\pi j}$, $f_{\rho\pi\pi}$, h_ω^2 — константы связи, которые выражаются через парциальные ширины распадов ρ- и ω-мезонов [79]:

$$\left.\begin{aligned}
\Gamma(\rho\to\pi^+\pi^-) &\approx \frac{f_{\rho\pi\pi}^2 m_\rho}{48\pi},\\
\Gamma(\rho\to\pi\gamma) &\approx \frac{f_{\rho\pi\gamma}^2 m_\rho^3}{96\pi},\\
\Gamma(\omega\to 3\pi) &= \frac{h_\omega^2 m_\omega^7}{2^{12}\cdot 90\pi^3}x, \quad x\approx 0{,}23,
\end{aligned}\right\} \tag{6.16}$$

$-ie\lambda_\omega$ — вершина перехода $\gamma\to\omega$, связанная с шириной распада $\omega\to e^+e^-$:

$$\Gamma(\omega\to e^+e^-) = \frac{4\pi}{3}\frac{\alpha^2\lambda_\omega^2}{m_\omega^3}. \tag{6.17}$$

Используя данные [15], получаем

$$\left.\begin{aligned}
f_{\rho\pi\pi} &\approx 5{,}5,\\
f_{\rho\pi\gamma} &\leqslant \frac{3{,}5\sqrt{\alpha}}{m_\rho},\\
h_\omega &\approx \frac{4{,}9}{\mu^3},\\
\lambda_\omega &\approx 6{,}7\cdot 10^{-2}m_\omega^2.
\end{aligned}\right\} \tag{6.18}$$

Это дает

$$\Delta_\rho \leqslant 0{,}5, \quad \Delta_\omega \approx 3. \tag{6.19}$$

Полагая $s_{ij}\sim 4\mu^2$, $Q^2\sim 9\mu^2$ в процессе $\gamma\to 3\pi$, мы получаем для поправочного члена, пропорционального Δ_ρ, в (6.15) величину $\lesssim 25\%$; поправка от члена, пропорционального Δ_ω, составляет $\sim 100\%$. Большая величина поправки от Δ_ω связана с аномально большой шириной распада $\omega\to 3\pi$:

константа h_ω почти в 10^3 раз больше ожидаемого «естественного» значения $\sim 1/m_\omega^3$. В этом смысле можно надеяться, что график на рис. 19, *б* выделен и передает главную зависимость от Q^2 функции h.

В процессе $\gamma\pi \to \pi\pi$ (с реальным γ-квантом, т. е. при $Q^2 = 0$) мы получим (при $s_{ij} \lesssim 4\mu^2$) поправку от Δ_ρ меньше чем 10%, член $\sim \Delta_\omega$ в этом случае вообще не дает вклада.

Таким образом, мы приходим к выводу, что в процессе $\gamma\pi \to \pi\pi$ (точнее, при описании реакции $\pi \to 2\pi$ в кулоновском поле ядра) можно использовать (6.2), (6.11); в процессе $e^+e^- \to \gamma \to 3\pi$ необходимо пользоваться уточненной формулой (6.15). Эти утверждения могут быть проверены экспериментально. Отметим, что поправки в (6.15) зависят от знака произведения ряда констант.

г) Оценка величины сечений. Сечение процесса $\pi \to 2\pi$ в кулоновском поле ядра вычислялось в [80-82], сечение реакции $e^+e^- \to \gamma \to 3\pi$ вычислялось в [83-85].

Используя (6.12), можно получить

$$\frac{d\sigma(\pi \to 2\pi)}{dq_\perp^2} \sim \frac{(Z\alpha)^2}{q_\perp^2} \cdot 10^{-29}\ \text{см}^2, \tag{6.20}$$

где Z — заряд ядра, $q_\perp^2$ — квадрат импульса, переданного ядру.

Дифференциальное сечение процесса $\pi \to 2\pi$ на ядрах стандартными формулами метода эквивалентных фотонов (см., например, [2], стр. 464) связано с сечением $\sigma_{\gamma\pi\to\pi\pi}$ процесса $\gamma\pi^\pm \to \pi^0\pi^\pm$. Дифференциальное сечение процесса $\gamma\pi^\pm \to \pi^0\pi^\pm$ имеет вид

$$\frac{d\sigma_{\gamma\pi\to\pi\pi}}{dt} = \frac{h^2}{128\pi} k^2 \sin^2\theta, \tag{6.21}$$

где k — импульс конечных мезонов, θ — угол рассеяния $\pi^\pm$-мезона в СЦИ;

$$k^2 = \frac{1}{4}(s - 4\mu^2), \quad k^2\cos^2\theta = \frac{s}{4}\frac{(t-u)^2}{(s-\mu^2)^2},$$

где s, t, u — обычные инварианты, характеризующие двухчастичный процесс $\gamma\pi \to \pi\pi$. С учетом (6.11) мы получим $h^2/128\pi \approx (1{,}5 \cdot 10^{-3}/\mu^6)\,\alpha/\pi$, что определяет масштаб сечения (6.21) и (6.20).

Полное сечение реакции $e^+e^- \to 3\pi$ на встречных пучках 250×250 *Мэв* оказывается порядка 10^{-35} *см*^{2}.

Аналитическая формула для дифференциального сечения имеет вид

$$d\sigma = \frac{\alpha}{\pi}\frac{h^2}{64\pi}\frac{1}{Q^2}[\mathbf{p}_+, \mathbf{p}_-]^2 \sin^2\theta\, d\omega_+ d\omega_- d\cos\theta; \tag{6.22}$$

здесь $Q^2 = 4E^2$ — квадрат полной энергии в СЦИ, $\omega_\pm$, $\mathbf{p}_\pm$ — энергии и импульсы $\pi^\pm$-мезонов, θ — угол между вектором $[\mathbf{p}_+, \mathbf{p}_-]$ и направлением столкновения. В качестве h следует использовать (6.15) при $\Delta_\rho = 0$.

В работах [84, 85] интегрированием формулы (6.22) было получено следующее выражение для сечения процесса $e^+e^- \to \pi^+\pi^-\pi^0$:

$$\sigma_{ee\to 3\pi} \approx 3{,}7 \cdot 10^{-10}\mu^{-2}\left(\frac{\sqrt{Q^2} - 3\mu}{\mu}\right)^4.$$

Подробный анализ сечения процесса $\gamma\gamma \to 3\pi$, а также вычисление по методу эквивалентных фотонов сечения $\gamma \to 3\pi$ на ядрах с зарядом Z были проведены в [86]. При суммарной энергии $W = 0{,}5$ *Гэв* в СЦИ $(W = \sqrt{Q^2})$ мы получим оценку $\sigma_{\gamma\gamma\to 3\pi}(W) \sim 10^{-33}$ *см*^{2}.

Кроме фоторождения на ядрах, сечение $\gamma\gamma \to 3\pi$ может быть измерено в реакции $ee \to ee + 3\pi$ (см. рис. 8) при больших энергиях встречных пучков. Соответствующие вычисления содержатся в [86,87]. Для оценки сечения процесса на рис. 8 можно воспользоваться формулой [9]

$$\frac{d\sigma}{dW^2} \approx \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \frac{\sigma_{\gamma\gamma\to 3\pi}(W)}{W^2}\left(\ln\frac{4E^2}{W^2}\ln^2\frac{4E^2\mu^2}{W^2m_e^2} - \frac{1}{3}\ln^3\frac{4E^2}{W^2}\right); \tag{6.23}$$

$2E$ — суммарная энергия e^+ и e^- в СЦИ, m_e — масса электрона.

д) Другие методы вычисления амплитуды $\gamma \to 3\pi$. Модель векторной доминантности (VDM), в которой предполагается, что $h(0)$ определяется вкладом диаграммы с ω-обменом (см. рис. 19, *б*), дает

$$h_{\mathrm{VDM}}(0) = \frac{e\lambda_\omega h_\omega}{m_\omega^2}. \tag{6.24}$$

Будем записывать $h(0)$ в виде

$$h(0) \equiv \frac{\Lambda e}{\mu^3}. \tag{6.25}$$

Тогда из (6.24) следует

$$\Lambda_{\mathrm{VDM}} \approx 0{,}33. \tag{6.26}$$

Это примерно в три раза превышает значение Λ, следующее из (6.12).

Отметим, что из анализа данных по фоторождению с использованием дисперсионных соотношений в работе [88] было получено $\Lambda = 0{,}04 \pm 0{,}15$. Это значение не противоречит (6.12).

Λ	Литература
0,03	89
~ 1	90, 91, 92
0,12	93
0,15	94
0,16—0,24	95

Амплитуда $\gamma \to 3\pi$ вычислялась теоретически рядом авторов в различных моделях. В таблице представлены значения Λ, полученные в ряде последних работ.

В работе [89] используется алгебра токов и векторная доминантность, в работах [90–93] используются модификации модели Венециано, дополненные предположениями о значении ряда параметров редженвских траекторий, в работе [94] используется техника жестких π-мезонов и векторная доминантность, в [95] — аномальные тождества Уорда и снова векторная доминантность.

Интересно, что значения Λ в таблице сильно различаются. Нам кажется, что значение $\Lambda \approx 0{,}1$, следующее из соотношения (6.11), является с теоретической точки зрения наиболее обоснованным. Во всяком случае, теоретические предположения, лежащие в его основе, сформулированы наиболее ясно.

Прямое измерение Λ было бы очень интересным. Косвенная информация о Λ может быть получена из оценки вклада вершины $\gamma \to 3\pi$ в процессе $\pi N \to \pi N\gamma$. При этом оказывается [96, 97] $\Lambda \approx 3$. Это находится в резком противоречии с (6.11), так же как и с любыми другими значениями Λ из таблицы. Было бы весьма интересно заново и более тщательно проанализировать данные по реакции $\pi N \to \pi N\gamma$.

е) Следствия из (6.11) в рамках $SU(3)$-симметрии

1) Используя $SU(3)$-симметрию, можно связать $h(0)$ с константой $h_{\eta\pi\pi\gamma}$, входящей в матричный элемент распада $\eta \to \pi\pi\gamma$:

$$T_\nu(\eta \to \pi^+(p_2)\,\pi^-(p_3)\,\gamma(p_1)) = -ih_{\eta\pi\pi\gamma}\varepsilon_{\nu\alpha\beta\sigma}p_{1\alpha}p_{2\beta}p_{3\sigma}. \tag{6.27}$$

Эта связь имеет вид $h_{\eta\pi\pi\gamma} = h/\sqrt{3}$ [72, 98, 99].

Аналогичным соотношением связаны также константы распадов $\pi \to 2\gamma$ и $\eta \to 2\gamma$: $f_{\eta\gamma\gamma} = (1/\sqrt{3}) f$ [18].

Известно, однако, что SU (3)-симметрия плохо «работает» при описании распада $\eta \to 2\gamma$. Учет X — η-смешивания поправляет ситуацию, если соответствующим образом подобрать ширину распада $X \to 2\gamma$ [18]. (Мы не обсуждаем возможность того, что экспериментальные данные о вероятности распада $\eta \to 2\gamma$ могут измениться, как это уже происходило на протяжении последних лет.)

С учетом X — η-смешивания в рамках SU (3)-симметрии из (6.11) следует соотношение [99]

$$h_{\eta\pi\pi\gamma} = \frac{f_{\eta\gamma\gamma}}{eF_\pi^2}(1-\Delta), \tag{6.28}$$

где $f_{\eta\gamma\gamma}$ — константа распада $\eta \to 2\gamma$, определенная так же, как f в (5.1). Параметр Δ учитывает смешивание:

$$\Delta = -\operatorname{tg}\theta\,\frac{(f_{X\gamma\gamma}/f_{\eta\gamma\gamma})-(h_{X\pi\pi\gamma}/h_{\eta\pi\pi\gamma})}{1+\operatorname{tg}\theta\,(h_{X\pi\pi\gamma}/h_{\eta\pi\pi\gamma})}, \tag{6.29}$$

где θ — угол смешивания. Используя значение $\theta \approx \pm 10°$, следующее из массовых формул в псевдоскалярном октете, выбирая отношение $f_{X\gamma\gamma}/f_{\eta\gamma\gamma} = \mp 2{,}7$, что требуется для правильного описания распада $\eta \to 2\gamma$ в SU (3)-симметрии, и используя ограничения на вероятность распада $X \to \pi\pi\gamma$, можно оценить значение Δ:

$$0{,}1 \leqslant \Delta \leqslant 0{,}5. \tag{6.30}$$

С учетом (6.30) соотношение (6.28) довольно хорошо согласуется с экспериментальными данными. Если ввести отношение $R = h_{\eta\pi\pi\gamma}/f_{\eta\gamma\gamma}$, то из (6.28) и [15] следует

$$\frac{R_{\text{эксп}}}{R_{\text{теор}}} \approx \frac{85}{1-\Delta} \approx 1. \tag{6.31}$$

2) В рамках SU (3) связаны также вершина $\gamma \to 3\pi$ и форм-фактор векторного тока в K_{e4}-распаде.

Матричный элемент слабого векторного тока в K_{e4}-распаде имеет вид

$$\frac{G}{\sqrt{2}}\langle\pi^+(p_1), \pi^-(p_2)\,|\,j_\nu^W(0)\,|\,K^+(p)\rangle = \frac{G}{\sqrt{2}} f_4 \varepsilon_{\nu\alpha\beta\sigma} p_\alpha p_{1\beta} p_{2\sigma}. \tag{6.32}$$

Обсуждаемое соотношение имеет вид

$$f_4 = \frac{\sqrt{2}}{e} h. \tag{6.33}$$

Из (6.33) с учетом (6.11) следует [72, 99]

$$f_4 = \frac{\sqrt{2} f}{e^2 F_\pi^2} \approx \frac{6}{m_K^3}, \tag{6.34}$$

где m_K — масса K-мезона.

Экспериментальная информация о величине f_4 следует из изучения P-нечетной асимметрии вылета позитронов в K_{e4}-распаде, при этом оказывается [47] $f_4 \approx (9 \pm 3{,}6)/m_K^3$. Таким образом, (6.34) очень хорошо согласуется с опытом.

Отметим, что в [100] обсуждалось соотношение между f_4 и константой распада $\eta \to \pi\pi\gamma$. Этим соотношением с учетом (6.28) тоже можно воспользоваться для оценки f_4. (Необходимо, однако, учесть пропущенный в [100] множитель $\sqrt{4\pi}$; см. [99].)

3) Интересно, что знак константы f также можно определить, используя данные по спектрам K_{e4}-распада. Этот вопрос обсуждается ниже.

Согласованность всего подхода, основанного на использовании аномальностей простейших диаграмм с фермионными петлями, требует, чтобы знак f соответствовал вкладу треугольной диаграммы. График с нуклонной петлей приводит к результатам (5.16), (5.20), откуда следует, что

$$fg_{\pi N} < 0, \tag{6.35}$$

поскольку $g_a = 1{,}18 > 0$.

В общем случае (произвольная кварковая фермионная петля) в правой части (5.20) появится дополнительный множитель $2\bar{Q}$, где $\bar{Q}$ — средний заряд фундаментального фермионного изомультиплета. Таким образом, знак f, согласно (5.20), зависит от квантовых чисел фундаментальных фермионов и различен в различных моделях теории поля.

Существует ряд экспериментальных (см. [101, 102]) и теоретических (см. [103–105]) аргументов в пользу того, что знак f соответствует диаграмме на рис. 13 с фермионной (нуклонной) петлей. Однако теоретические аргументы основаны на модельных соображениях. Экспериментальные данные по фоторождению [101], на основании которых в [105] сделан вывод о знаке f, допускают при нынешнем уровне статистики различную интерпретацию (см. [106]). Информация о знаке f, следующая из данных по эффекту Комптона на нуклоне при низких энергиях [102], также основана на бедной статистике и опирается на анализ амплитуды комптон-эффекта, выполненный в [107], где, по-видимому, содержатся предположения, нуждающиеся в более прочном обосновании. Однако в принципе (при большей статистике) из данных по реакциям $\gamma p \to p\pi^0$ и $\gamma p \to \gamma p$ возможно извлечение однозначной информации о знаке f. Как отмечалось в [108], этот знак может быть определен также в реакции $\pi^- p \to n\gamma\gamma$.

Экспериментальное выяснение знака f являлось бы своеобразной, хотя и слабой, формой проверки основных соотношений, обсуждавшихся в этой главе, поскольку из (6.34) непосредственно вытекает утверждение о знаке f (см. [109]), а именно оказывается, что выполнено условие (6.35).

Если параметризовать вклад аксиального тока в K_{e4}-распаде в виде (ср. (6.32))

$$i\frac{G}{\sqrt{2}}[f_1(p_1+p_2)_\nu + f_2(p_1-p_2)_\nu + f_3(p-p_1-p_2)_\nu], \tag{6.36}$$

то из данных [47] следует, что $f_1 \approx -(4{,}91 \pm 0{,}2)/m_K$, если $f_4 > 0$ в (6.32). Таким образом, $f_1/f_4 < 0$. Константа f_1 связана с форм-фактором векторного тока f_+ в K_{e3}-распаде [110]. Эта связь имеет вид $f_1 = f_+/\sqrt{2}F_\pi$, причем $f_+ = 1$ в рамках SU (3)-симметрии.

Таким образом, мы получаем

$$\frac{f_4}{F_\pi} < 0. \tag{6.37}$$

Используя (6.37) и (6.34), получим $f/F_\pi < 0$, откуда, с учетом соотношения Гольдбергера — Треймана (2.9), вытекает условие (6.35).

7. ПРОЦЕССЫ $\gamma \to (2n+1)\,\pi$ и $\gamma\gamma \to (2n+1)\,\pi$ $(n \geqslant 1)$

а) Феноменологический лагранжиан. Для получения соотношений между амплитудами процессов $\gamma \to (2n+1)\,\pi$ и $\gamma\gamma \to (2n+1)\,\pi$ с произвольным числом π-мезонов удобно воспользоваться техникой феноменологических лагранжианов. Основная идея такого рассмотрения основана на следующем предположении. В σ-модели после включения электромагнитного взаимодействия минимальным способом ($\partial_\nu \to \partial_\nu + ieA_\nu$) рассматриваемые амплитуды вычисляются в низшем порядке по импульсам входящих частиц и в низшем порядке по константе сильного взаимодействия. Далее, считается, что вклад следующих приближений по сильному взаимодействию приводит только к переопределению констант связи (перенормировке) в полученном выражении. При этом отношение констант не меняется, так как оно определяется симметрией. Таким образом, соотношения между амплитудами, полученные в низшем приближении, объявляются справедливыми с учетом всех порядков по сильному взаимодействию.

Такая процедура имеет обоснование, основанное на требовании $SU(2) \times SU(2)$-симметрии, при рассмотрении взаимодействий в πN-системе. В присутствии электромагнитного поля ситуация является не столь ясной, поскольку пока отсутствует строгое доказательство того, что результат не зависит от детальной структуры σ-модели.

Тем не менее для простейших процессов $\pi \to 2\gamma$, $\gamma\gamma \to 3\pi$, $\gamma \to 3\pi$ мы уже убедились, что соотношения, которые возникают при описанной выше процедуре, в σ-модели действительно воспроизводятся и при феноменологическом рассмотрении. В σ-модели в низшем порядке эти процессы описываются вкладом диаграмм на рис. 13, 17, 18 соответственно. Причем, как ранее отмечалось, вклады высших приближений по константе связи описываются диаграммами, которые лучше сходятся и допускают применение условия PCAC по всем π-мезонам одновременно и поэтому не дают вклад в низший порядок по импульсам. Весь результат оказывается связанным с аномальными свойствами простейших диаграмм с фермионными петлями. Таким образом, эти примеры оправдывают использование техники феноменологических лагранжианов в указанном выше смысле.

Переходя к более сложным процессам, мы видим, что количество диаграмм в σ-модели начинает быстро возрастать (уже для процесса $\gamma\gamma \to 3\pi$ их число довольно велико; см. рис. 17). При этом существенный вклад низшего порядка по импульсам возникает в результате нетривиальных сокращений между различными диаграммами. Поэтому (так же как и при рассмотрении πN-взаимодействий) удобно начинать с нелинейной модификации σ-модели [111]. Соответствующий лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_N + \mathcal{L}_\pi + \mathcal{L}_{NN\pi} + \mathcal{L}_{NN\pi\pi}, \tag{7.1}$$

где

$$\mathcal{L}_N = \bar{\psi}(i\hat{\partial} - m)\psi, \tag{7.2}$$

$$\mathcal{L}_\pi = \frac{1}{2} D_\mu \pi^a D_\mu \pi^a - \frac{1}{2} \mu^2 \pi^2, \tag{7.3}$$

$$\mathcal{L}_{NN\pi} = \lambda \frac{G_A}{G_V} \bar{\psi}\chi_\mu \gamma_5 \tau^a \psi D_\mu \pi^a, \tag{7.4}$$

$$\mathcal{L}_{NN\pi\pi} = -\lambda^2 \bar{\psi}\gamma_\mu \tau^a \psi \varepsilon_{abc} \pi^b D_\mu \pi^c, \tag{7.5}$$

причем

$$D_\mu \pi^a = \frac{\partial_\mu \pi^a}{1+\lambda^2\pi^2}, \qquad \lambda = \frac{1}{2} F_\pi. \tag{7.6}$$

Включение электромагнитного поля:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \psi &\to \left(\partial_\mu + \frac{ie}{2}(1+\tau_3) A_\mu\right)\psi, \\ \partial_\mu \pi^a &\to (\partial_\mu \pi^a + e\varepsilon_{3ab}\pi^b A_\mu), \end{aligned} \tag{7.7}$$

приводит к появлению дополнительного взаимодействия:

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \mathcal{L}(\psi\psi A) + \mathcal{L}(\pi\pi A) + \mathcal{L}(\psi\psi\pi A) + \mathcal{L}(\psi\psi\pi\pi A), \tag{7.8}$$

где

$$\mathcal{L}(\bar{\psi}\psi A) = -e\bar{\psi}\cdot\frac{1}{2}(1+\tau_3)\,\gamma_\mu\psi A_\mu, \tag{7.9}$$

$$\mathcal{L}(\pi\pi A) = -\frac{e\varepsilon_{3ab}\pi^a\partial_\mu\pi^b A_\mu}{(1+\lambda^2\pi^2)^2} + \frac{e^2}{2}A_\mu^2\frac{\pi^2-\pi_3^2}{(1+\lambda^2\pi^2)^2}, \tag{7.10}$$

$$\mathcal{L}(\bar{\psi}\psi\pi A) = \lambda e\frac{G_A}{G_V}\,\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\tau^a\psi\,\frac{\varepsilon_{3ab}\pi^b A_\mu}{(1+\lambda^2\pi^2)}, \tag{7.11}$$

$$L(\bar{\psi}\psi\pi\pi A) = -e\lambda^2\bar{\psi}\gamma_\mu\tau_a\psi\varepsilon_{abc}\varepsilon_{3cd}\frac{\pi^b\pi^d}{1+\lambda^2\pi^2}A_\mu. \tag{7.12}$$

Поскольку лагранжиан (7.1) явно неперенормируем, то не вполне ясно, является ли процедура минимального включения электромагнитного поля в (7.1) эквивалентной включению поля в исходный лагранжиан линейной σ-модели. (Заметим, что отсутствует даже строгое доказательство эквивалентности (7.1) и лагранжиана исходной линейной σ-модели.) Однако прямые вычисления простейших процессов в низшем приближении показывают, что такая эквивалентность, если речь идет о низкоэнергетическом приближении, по-видимому, существует.

б) Вершина $\gamma \to (2n+1)\,\pi$. Рассмотрим в рамках лагранжиана $\mathcal{L} + \mathcal{L}_{\text{int}}$ (см. (7.1), (7.8)) процессы $\gamma \to (2n+1)\,\pi$. Мы будем строить соответствующие амплитуды в низшем, в данном случае третьем, порядке по импульсам. Возможные диаграммы указаны на рис. 20 и 21. Причем одномезонная адронная вершина соответствует взаимодействию (7.4)

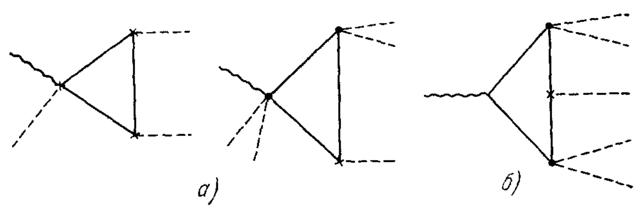

Рис. 20.

и содержит фактически совокупность вершин с испусканием из одной точки одного трех и т. д. π-мезонов. Двухмезонная адронная вершина соответствует взаимодействию (7.5) и описывает испускание двух, четырех и т. д. π-мезонов. Существенно, что квант в процессах $\gamma \to (2n+1)\,\pi$ является изоскалярным, что следует из сохранения G-четности. Поэтому не нужно учитывать диаграммы, где γ-квант испускается из π-мезонной линии.

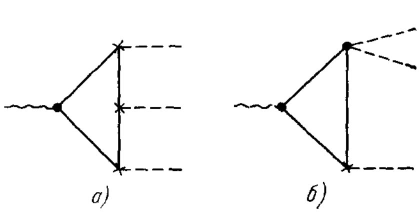

Рис. 21.

Поскольку каждая мезонная вершина (7.4) и (7.5) содержит внешний импульс, в рассматриваемом приближении не нужно учитывать диаграмм, содержащих более чем три π-мезонные вершины.

Далее, отметим, что диаграммы на рис. 20 фактически вклада не дают. Диаграммы на рис. 20, *а* отсутствуют, поскольку двойная вершина $\mathcal{L}(\bar{\psi}\psi\pi A)$ и $\mathcal{L}(\bar{\psi}\psi\pi\pi A)$ имеется только для изовекторного кванта. Диаграмма на рис. 20, *б* имеет по крайней мере пятый порядок по импульсам. Действительно, эта диаграмма содержит три векторных и одну аксиально-векторную вершины (мы обозначаем крестиком на фермионной линии аксиальную вершину $\gamma_\mu\gamma_5$ и кружочком — векторную вершину γ_μ). Поэтому она не относится к числу аномальных диаграмм (см. рис. 15), в которых не выполнены формальные следствия условий сохранения, заложенные в лагранжиане. В данном случае интеграл по фермионной петле должен быть поперечен из условия сохранения изоскалярного адронного тока и поэтому содержит внешние импульсы. Наличие трех дополнительных внешних импульсов в трех мезонных вершинах делает эту диаграмму несущественной.

Таким образом, мы получаем эффективный лагранжиан системы $\gamma \to (2n+1)\,\pi$, рассматривая вклады только диаграмм на рис. 21:

$$\mathcal{L}\,(\gamma \to (2n+1)\,\pi) = c_1\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}A_\sigma\varepsilon_{abc}D_\mu\pi^a D_\nu\pi^b D_\rho\pi^c + \\ + c_2\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}D_\mu\pi^a\varepsilon_{abc}\,[\partial_\nu A_\rho\pi^b D_\sigma\pi^c + A_\sigma\partial_\nu\,(\pi^b D_\rho\pi^c)]. \quad (7.13)$$

Здесь c_1 — константа, которая возникает из интеграла по фермионной петле на рис. 21, *а*, c_2 — соответствующая константа в диаграмме на рис. 21, *б*. Эти константы будут определены ниже.

в) Вершины $\gamma\gamma \to (2n+1)\,\pi$. В процессах $\gamma\gamma \to (2n+1)\,\pi$ из сохранения G-четности следует, что один квант является изоскалярным, другой — изовекторным. Поэтому для получения физических амплитуд

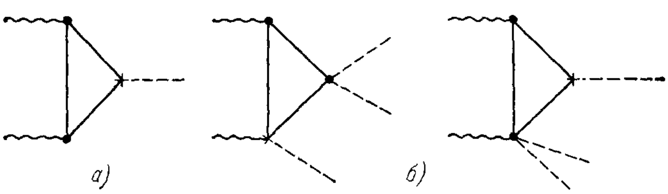

Рис. 22.

следует рассматривать как контактные члены, которые возникают из-за фермионных петель, так и всевозможные π-мезонные полюсные графики, где фотон испускается π-мезоном.

Простые рассуждения, основанные на подсчете количества внешних импульсов в диаграмме (ср. анализ в п. б) этой главы), показывает, что в низшем, в данном случае втором, порядке по импульсам контактные члены определяются вкладом только трех диаграмм на рис. 22.

Отметим, что графики на рис. 22 содержат одинаковые интегралы по фермионной петле. С другой стороны, график на рис. 22, *а* определяет амплитуду распада $\pi^0 \to 2\gamma$. Это позволяет выразить соответствующий интеграл через константу f, определенную согласно (5.1). Окончательный результат для вклада контактных членов в $\gamma\gamma \to (2n+1)\,\pi$ имеет вид

$$\mathcal{L}\,(2\gamma \to (2n+1)\,\pi) = \frac{f}{4}\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_{\nu\rho}A_\sigma\,\frac{\pi^0\partial_\mu\,(\lambda^2\pi^2)+(1-\lambda^2\pi^2)\,\partial_\mu\pi^0}{(1+\lambda^2\pi^2)^2}\,; \quad (7.14)$$

здесь $F_{\nu\mu} = -\partial_\nu A_\mu + \partial_\mu A_\nu$.

Далее заметим, что график 21, *б* содержит такой же интеграл, как и диаграмма на рис. 22, *а*. Поэтому c_2 в (7.13) может быть определена и оказывается равной

$$c_2 = -\frac{f\lambda^2}{2e}\,. \quad (7.15)$$

Константу c_1 в (7.13) можно определить, исходя из условия градиентной инвариантности амплитуды $\gamma\gamma \to \pi^+\pi^-\pi^0$, которая описывается вкладом диаграмм на рис. 23. При этом мы получим

$$c_1 = \frac{1}{3e} f\lambda^2. \tag{7.16}$$

Таким образом, $\mathscr{L}(\gamma \to (2n+1)\pi)$ в (7.13) и $\mathscr{L}(\gamma\gamma \to (2n+1)\pi)$ в (7.14) выражены через один параметр f — постоянную распада $\pi^0 \to 2\gamma$.

Для вычисления амплитуд $\gamma\gamma \to (2n+1)\pi$ в (7.13) и (7.14), как отмечалось, следует добавить вклад полюсных членов, если они существуют. Это эквивалентно введению полного лагранжиана

$$\mathscr{L}_{\text{tot}} = \mathscr{L}(\gamma \to (2n+1)\pi) + \mathscr{L}(\gamma\gamma \to (2n+1)\pi) + \mathscr{L}(\pi\pi A), \tag{7.17}$$

где $\mathscr{L}(\pi\pi A)$, $\mathscr{L}(\gamma \to (2n+1)\pi)$ и $\mathscr{L}(\gamma\gamma \to (2n+1)\pi)$ определены в (7.10), (7.13) и (7.14) (см. также (7.15) и (7.16)).

После алгебраических преобразований $\mathscr{L}_{\text{tot}}$ может быть представлен в виде

$$\mathscr{L}_{\text{tot}} = -e\frac{\varepsilon_{3ab}(\pi^a\partial_\mu\pi^b)A_\mu}{(1+\lambda^2\pi^2)^2} + \frac{2f\lambda^2}{3e}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}A_\mu\varepsilon_{abc}D_\nu\pi^a D_\rho\pi^b D_\sigma\pi^c -$$

$$-\frac{f}{8}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}\frac{\pi^0}{1+\lambda^2\pi^2} + \frac{f}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_{\nu\rho}A_\sigma\frac{(\partial_\mu\pi^0)}{(1+\lambda^2\pi^2)^2}. \tag{7.18}$$

При этом (7.18) следует дополнить предписанием: амплитуды процессов определяются из $\mathscr{L}_{\text{tot}}$ диаграммами в «древесном» (полюсном) приближении.

Выражения (7.13) — (7.18) были получены в работе [112]. Для процессов с нейтральными π-мезонами соответствующий лагранжиан был правильно получен в [74].

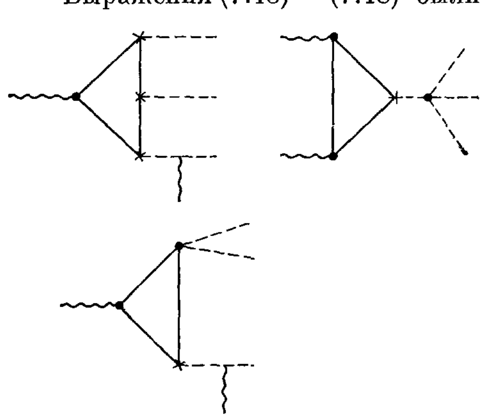

Рис. 23.

В работе [113] полный феноменологический лагранжиан был построен исходя из свойств преобразований относительно группы $SU(2) \times SU(2)$. При включении электромагнитного поля в феноменологический π-мезонный лагранжиан нелинейной σ-модели группа симметрии $SU(2) \times SU(2)$ нарушается вполне определенным образом, что позволяет вычислить вариацию полного лагранжиана при киральном преобразовании (преобразовании из группы $SU(2)\times SU(2)$). Лагранжиан работы [113] совпадает с (7.18) с точностью до канонического преобразования π-мезонного поля. Общая задача рождения мягких π-мезонов внешними аксиальными и векторными токами была решена в [72], где, в частности, был получен лагранжиан для процессов $\gamma \to (2n+1)\pi$ и $\gamma\gamma \to (2n+1)n$, отличающийся от (7.18) унитарным преобразованием над π-мезонным полем.

г) Подавленность процессов $\gamma\gamma \to (2n+1)\pi^0$ при $n \geqslant 1$. Мы уже отмечали (см. гл. 6), что амплитуда $\gamma\gamma \to 3\pi^0$ обращается в нуль при $\mu^2 = 0$. Это утверждение, однако, имеет более общий характер и относится ко всем процессам $\gamma\gamma \to (2n+1)\pi^0$, $n \geqslant 1$ [75]. (Отметим, что процессы $\gamma \to (2n+1)\pi^0$ тоже запрещены. Этот запрет является строгим и связан с сохранением зарядовой четности.)

Лагранжиан (7.1) для нейтральных π-мезонов ($\pi^a = \delta_{3a}\pi^0$) и при $\mu^2 = 0$ может быть переписан в виде

$$\bar{\psi}(i\hat{\partial} - m)\psi + \frac{G_A}{G_V}\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\tau_3\psi\partial_\mu \operatorname{arctg} \lambda\pi^0 + \frac{1}{2\lambda^2}(\partial_\mu \operatorname{arctg} \lambda\pi^0)^2. \tag{7.19}$$

Переопределяя π^0-мезонное поле:

$$\tilde{\pi}^0 = \frac{1}{\lambda} \operatorname{arctg} \lambda\pi^0, \tag{7.20}$$

мы приходим к лагранжиану

$$\bar{\psi}(i\hat{\partial} - m)\psi + \lambda\frac{G_A}{G_V}\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\tau_3\psi\partial_\mu\tilde{\pi}^0 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\tilde{\pi}^0)^2. \tag{7.21}$$

Очевидно, что лагранжиан (7.21) после включения электромагнитного поля приводит в низшем (втором) порядке по импульсам к единственной неисчезающей амплитуде $\pi^0 \to 2\gamma$, которая описывается диаграммой на рис. 22, *а*.

8. АМПЛИТУДА $\gamma\gamma \to \pi\pi$

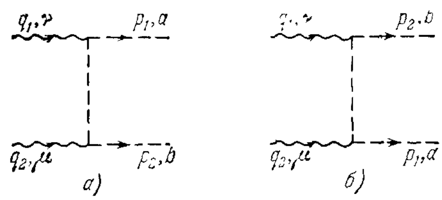

Рис. 24.

а) Феноменологическая структура. Амплитуда $\gamma\gamma \to \pi\pi$ содержит вклад π-мезонных полюсных диаграмм (рис. 24) и неполюсную (контактную) часть. При малых импульсах частиц $q_i \sim p_i \sim \mu$ можно ожидать, что контактная часть меняется медленно и может быть разложена в ряд. Мы сохраним в ней главные члены (нулевого порядка по импульсам) и первую поправку (члены второго порядка по импульсам). При этом в полюсных диаграммах также необходимо учесть следующую поправку по импульсам в электромагнитной вершине π-мезона (см. гл. 3). С учетом сказанного амплитуда процесса может быть записана в виде [111]

$$T^{ab}_{\nu\mu}(p_1, p_2; q_1, q_2) = P^{ab}_{\nu\mu} + K^{ab}_{\nu\mu} + R^{ab}_{\nu\mu}, \tag{8.1}$$

где $P^{ab}_{\nu\mu}$ — вклад полюсных диаграмм на рис. 24:

$$P^{ab}_{\nu\mu} = -e^2(\delta_{ab} - \delta_{3a}\delta_{3b})\left[\frac{\mathcal{T}_\nu(p_1, q_1 - p_1)\mathcal{T}_\mu(q_2 - p_2, p_2)}{(p_1 - q_1)^2 - \mu^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{\mathcal{T}_\mu(p_1, q_2 - p_1)\mathcal{T}_\nu(q_1 - p_2, p_2)}{(p_1 - q_2)^2 - \mu^2}\right] \tag{8.2}$$

Вершинные функции $\mathcal{T}_\nu(p, p')$ определены в (3.8).

В формуле (8.1) $K_{\nu\mu}$ и $R_{\nu\mu}$ — контактные члены, причем $K_{\nu\mu}$ выбирается так, чтобы доопределить вклад полюсных диаграмм до градиентно инвариантной структуры, а $R^{ab}_{\nu\mu}$ — явно поперечная функция по импульсам γ-квантов ($q_{1\nu}R^{ab}_{\nu\mu} = R^{ab}_{\nu\mu}q_{2\mu} = 0$). Во втором порядке по импульсам единственная поперечная структура имеет вид

$$R^{ab}_{\nu\mu} = 2e^2[\beta(\delta_{ab} - \delta_{3a}\delta_{3b}) + \beta_0\delta_{3a}\delta_{3b}](q_1q_2\delta_{\nu\mu} - q_{1\mu}q_{2\nu}); \tag{8.3}$$

здесь β и β_0 — произвольные постоянные. Изотопическая структура $R^{ab}_{\nu\mu}$ определяется сохранением G-четности, откуда следует, что в процессе $\gamma\gamma \to \pi\pi$ оба γ-кванта либо изоскалярные, либо изовекторные.

Тензор $K^{ab}_{\nu\mu}$ в (8.1) с точностью до второго порядка по импульсам однозначно определяется тождествами Уорда:

$$q_{1\nu}T^{ab}_{\nu\mu}(p_1, p_2; q_1, q_2) = -e^2(\delta_{ab}-\delta_{3a}\delta_{3b})\left[\frac{p_1^2-\mu^2}{(p_1-q_1)^2-\mu^2}\mathcal{T}_\mu(q_2-p_2, p_2)+\right.$$
$$\left.+\frac{p_2^2-\mu^2}{(p_2-q_1)^2-\mu^2}\mathcal{T}_\mu(q_2-p_1, p_1)\right]. \quad (8.4)$$

Тождество (8.4) является следствием сохранения электромагнитного тока. Из (8.4) следует, что $K^{ab}_{\nu\mu}$ должен быть выбран в виде

$$K^{ab}_{\nu\mu}=2e^2(\delta_{ab}-\delta_{3a}\delta_{3b})\left\{\delta_{\nu\mu}+\frac{\langle r^2\rangle}{6}[(q_1^2+q_2^2)\delta_{\nu\mu}-q_{1\nu}q_{1\mu}-q_{2\mu}q_{2\nu}]\right\}. \quad (8.5)$$

При этом сумма $P_{\nu\mu}+K_{\nu\mu}+R_{\nu\mu}$ в (8.1) будет удовлетворять соотношению (8.4).

Окончательный результат для $T_{\nu\mu}$ в (8.1) при $p_i^2=\mu^2$ можно после перегруппировки членов представить в виде

$$T^{ab}_{\nu\mu}=e^2(\delta_{ab}-\delta_{3a}\delta_{3b})F(q_1^2)F(q_2^2)\times$$
$$\times\left[\frac{(2p_1-q_1)_\nu(2p_2-q_2)_\mu}{(p_1-q_1)^2-\mu^2}+\frac{(2p_1-q_2)_\mu(2p_2-q_1)_\nu}{(p_1-q_2)^2-\mu^2}+2\delta_{\nu\mu}\right]+R^{ab}_{\nu\mu}, \quad (8.6)$$

где $F(q^2)$ — форм-фактор (3.3), $R^{ab}_{\nu\mu}$ определена в (8.3).

б) Связь с поляризуемостью π-мезона [114, 115]. Рассмотрим амплитуду $\gamma\gamma\to\pi\pi$ при малых q_i^2 и $p_i^2=\mu^2$ ($q_1^2\sim q_2^2\ll\mu^2$). В этой области она примет более простой вид:

$$e^2(\delta_{ab}-\delta_{3a}\delta_{3b})\left[-\frac{(2p_1-q_1)_\nu(2p_2-q_2)_\mu}{2p_1q_1}-\frac{(2p_2-q_1)_\nu(2p_1-q_2)_\mu}{2p_1q_2}+2\delta_{\nu\mu}\right]+R^{ab}_{\nu\mu}. \quad (8.7)$$

Выражение (8.7) отвечает следующему феноменологическому лагранжиану взаимодействия π-мезона с внешним полем:

$$\mathcal{L}=-ieA_\mu\left(\frac{\partial\varphi^*}{\partial x_\mu}\varphi-\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\varphi^*\right)+2e^2A_\mu^2\varphi^*\varphi-\frac{e^2}{2}\left(\beta\varphi^*\varphi+\frac{1}{2}\beta_0\varphi_0\varphi_0\right). \quad (8.8)$$

Здесь φ и φ_0 — квантованные поля π^-- и π^0-мезона. В нерелятивистском приближении выражению (8.8) соответствует следующий эффективный одночастичный гамильтониан для π^--мезона в электромагнитном поле:

$$\mathcal{H}(\pi^-)=\frac{(p-eA)^2}{2\mu}-\frac{1}{2}\alpha_\pi E^2, \quad (8.9)$$

где

$$\frac{1}{2}\alpha_\pi=\frac{e^2\beta}{2\mu}. \quad (8.10)$$

Параметр α_π называется поляризуемостью π-мезона (дипольный момент π-мезона во внешнем электрическом поле $\mathbf{E}$ равен $\alpha_\pi\mathbf{E}$).

Для нейтрального π-мезона мы получим соответственно

$$\mathcal{H}(\pi^0)=\frac{p^2}{2\mu}-\frac{1}{2}\alpha_\pi^0E^2, \quad (8.11)$$

где

$$\frac{1}{2}\alpha_\pi^0=\frac{e^2\beta_0}{2\mu} \quad (8.12)$$

— поляризуемость π^0-мезона.

Отметим, что связь между поляризуемостью нуклона и параметрами, характеризующими амплитуду комптоновского рассеяния при малых энергиях, обсуждалась в работах [116–118]. В работах [118] детально исследовалась задача о поляризуемости нуклона.

в) Поляризуемость π^0-мезона. Рассмотрим $T^{ab}_{\nu\mu}(p_1, p_2; q_1, q_2)$ при $p_1 \to 0$. Соответствующий предел может быть вычислен с использованием редукционных формул и условия PCAC (2.2):

$$T^{ab}_{\nu\mu}(0,\ p_2;\ q_1,\ q_2) = -\frac{e^2\varepsilon_{3ac}}{F_\pi}\left[\tau^{bc}_{\nu\mu}(p_2,\ q_2) + \tau^{bc}_{\mu\nu}(p_2,\ q_1)\right], \tag{8.13}$$

где

$$\tau^{bc}_{\nu\mu}(p,\ q) = i\int dx\, e^{-iqx}\langle\pi^b(p)\,|\,T\,(a^c_\nu(0)\,v^3_\mu(x))\,|\,0\rangle. \tag{8.14}$$

Формула (8.13) (при $p_2^2 = \mu^2$) следует из цепочки равенств

$$\begin{aligned}
&T^{ab}_{\nu\mu}(p_1,\ p_2;\ q_1,\ q_2) = \\
&= \frac{-p_1^2+\mu^2}{\mu^2 F_\pi}\int dx\,dy\, e^{-iq_2x}e^{ip_1y}\langle\pi^b(p_2)\,|\,T\,(\partial_\alpha a^a_\alpha(y)\, j_\nu(0)\, j_\mu(x))\,|\,0\rangle = \\
&= \frac{-p_1^2+\mu^2}{\mu^2 F_\pi}\left\{-ip_{1\alpha}\int dx\,dy\, e^{-iq_2x}e^{ip_1y}\langle\pi^b(p_2)\,|\,T\,(a^a_\alpha(y)\, j_\nu(0)\, j_\mu(x))\,|\,0\rangle -\right.\\
&\quad - \int dx\,dy\, e^{-iq_2x}e^{ip_1y}\langle\pi^b(p_2)\,|\,T\,(\delta(y_0)\,[a^a_0(y),\ j_\nu(0)]\, j_\mu(x) + \\
&\quad \left. + \delta(y_0 - x_0)\,[a^a_0(y),\ j_\mu(x)]\, j_\nu(0))\,|\,0\rangle\right\}.
\end{aligned} \tag{8.15}$$

Полагая в (8.15) $p_1 = 0$ и вычисляя коммутаторы токов, мы придем к соотношению (8.13), если учесть, что $\langle\pi^b|\,(T\,(a^c_\nu j_\mu)\,|\,0\rangle = e\langle\pi^b\,|\,T\,(a^c_\nu v^3_\mu)\,|\,0\rangle$ из сохранения G-четности.

Общее феноменологическое выражение для $\tau_{\nu\mu}(p, q)$ при $q^2 = 0$, $p^2 = \mu^2$ с точностью до второго порядка по импульсам имеет вид

$$\tau^{bc}_{\nu\mu}(p,\ q) = \varepsilon_{3bc}\left[F_\pi\frac{2p_\mu(p-q)_\nu}{(p-q)^2-\mu^2} - F_\pi\delta_{\mu\nu} - h_A(pq\delta_{\mu\nu} - p_\mu q_\nu)\right]. \tag{8.16}$$

(Имеется в виду, что при $q^2 = 0$ матричный элемент $\tau_{\nu\mu}$ умножается на вектор поляризации кванта $\varepsilon_\mu(q)$, поэтому в (8.16) не выписываются члены, пропорциональные q_μ.) Явно выделен вклад π-мезонного полюсного графика (см. рис. 25, где крестиком обозначена вершина аксиального тока: $\langle\pi^a(p)|\,a^b_\mu(0)|\,0\rangle = -ip_\mu\delta_{ab}F_\pi$). Контактный член $-F_\pi\delta_{\mu\nu}$ в (8.16) дополняет вклад полюсного графика до градиентно инвариантной структуры и обеспечивает выполнение равенства $q_\mu\tau^{bc}_{\nu\mu}(p,\ q) = -\varepsilon_{3bc}F_\pi p_\nu$, которое является следствием сохранения векторного тока и коммутационного соотношения (2.6).

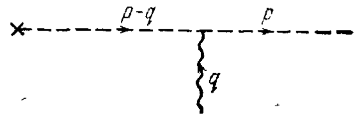

Рис. 25.

Из (8.13), (8.16) следует, в частности, что $T^{ab}_{\nu\mu} \sim \delta_{ab} - \delta_{3a}\delta_{3b}$, откуда вытекает, с учетом (8.3), что $\beta_0 = 0$. Равенство (8.12) означает при этом, что

$$\alpha^0_\pi = 0. \tag{8.17}$$

Условие (8.17) означает, что поляризуемость π^0-мезона отсутствует в рамках второго приближения по импульсам в $T^{ab}_{\nu\mu}$, т. е. $\alpha^0_\pi \sim \alpha_\pi\mu^2/m_\rho^2 \ll \alpha_\pi$, где $m_\rho \gg \mu$ — характерный масштаб изменения адронных амплитуд.

г) Связь с распадом $\pi \to e\nu\gamma$. Вычисление поляризуемости π^--мезона [114, 115]. Амплитуда распада $\pi^- \to e\nu\gamma$ имеет вид

$$T_\mu = ieG_V \cos\theta \,[M_{\mu\nu} l_\nu + F_\pi \bar{u}_e (k_e) \gamma_\mu (\hat{k}_e + \hat{q} - m_e)^{-1} \hat{p} (1-\gamma_5) u_\nu (k_\nu)], \quad (8.18)$$

$$M_{\mu\nu} = ih_V \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p_\alpha q_\beta - F_\pi \left(\delta_{\mu\nu} + \frac{p_\mu (p-q)_\nu}{pq}\right) - h_A (pq\delta_{\mu\nu} - p_\mu q_\nu), \quad (8.19)$$

где G_V — константа слабого взаимодействия, θ — угол Кабиббо, $l_\nu = \bar{u}_e \gamma_\nu (1-\gamma_5) u_\nu$ — лептонный ток, p и q — импульсы π-мезона и фотона. Матричный элемент $M_{\mu\nu}$ может быть записан в виде (ср. [119])

$$\sqrt{2}\, eM_{\mu\nu} = -\int dx\, e^{iqx} \langle 0 \,|\, T\,(j_\mu(x),\ v_\nu^{(+)}(0) - a_\nu^{(+)}(0)) \,|\, \pi^-(p)\rangle. \quad (8.20)$$

Вклад слабого векторного тока в (8.20) после изотопического поворота может быть сведен к амплитуде распада $\pi^0 \to 2\gamma$ [120]. При этом определяется параметр h_V в (8.19):

$$h_V = -f/2e^2, \quad (8.21)$$

где f определена в (5.1).

Вклад слабого аксиального тока в (8.20) после изотопического поворота сводится к величине $e\tau^{12}_{\nu\mu}(p, q)$ (см. формулы (8.14), (8.16)). Это обстоятельство и послужило основанием выбрать единую константу h_A в (8.19) и (8.16).

Из соотношения (8.13) при $q_1^2 = q_2^2 = 0$ следует, с учетом (8.16) и (8.1),

$$\beta = \frac{1}{F_\pi} h_A. \quad (8.22)$$

Используя (8.10), мы получаем выражение для поляризуемости π^--мезона:

$$\alpha_\pi = \frac{e^2}{\mu F_\pi} h_A. \quad (8.23)$$

Параметр h_A может быть получен при измерении дифференциальной вероятности распада $\pi \to e\nu\gamma$ [121]. В работе [121] из данных о полной вероятности были получены два решения для отношения $\gamma = h_A/h_V$:

$$\gamma = 0{,}4 \text{ или } -2{,}1. \quad (8.24)$$

Используя значение $\gamma = 0{,}4$ (эта величина ближе к предсказанию модели векторной доминантности [119]: $\gamma_{VDM} = F_\pi/2m_\rho^2 h_V \approx 0{,}55$) и формулы (8.21), (8.23), получим

$$\alpha_\pi \approx \frac{0{,}2\alpha}{\mu^3} \approx 4\cdot 10^{-42}\ \text{см}^3 = 4\cdot 10^{-3}\ \text{ф}^3. \quad (8.25)$$

Поляризуемость π-мезона оказалась почти в 5 раз больше значения соответствующей величины для протона [122] *). (Поляризуемость протона, определенная, аналогично α_π, исходя из выражения для эффективной энергии взаимодействия с внешним полем $\mathscr{H}_{\text{int}} = -\frac{1}{2}\alpha_p E^2$, равна $\alpha_p = 0{,}9\cdot 10^{-3}$ ф^3.) Следует, однако, подчеркнуть большую чувствительность

*) Такое различие кажется естественным по следующей причине. Можно ожидать, что константа β в (8.3) или (8.8) должна быть одного порядка для π-мезона и нуклона, поскольку она является коэффициентом в ковариантной контактной амплитуде, которой как для $\gamma\pi$-, так и для γp-рассеяния соответствуют однотипные фейнмановские графики. Законность этого утверждения вряд ли может существенно поколебаться тем фактом, что во втором порядке по q_j в γp-амплитуде есть еще дополнительные структуры, кроме $q_1 q_2 \delta_{\nu\mu} - q_{1\mu} q_{2\nu}$. Отметим, далее, что выражение для поляризуемости через константу β (см. (8.10)) содержит дополнительный фактор μ^{-1} — комптоновский размер частицы. Поэтому мы могли бы ожидать, что поляризуемость π-мезона будет больше поляризуемости нуклона на фактор $m_p/\mu \approx 7$.

значений γ в (8.24) к изменениям константы h_V [114]. В этом смысле изменение экспериментальных данных о времени жизни π-мезона или, скажем, отсутствие связи (8.21) между h_V и f *) могло бы существенно изменить нашу оценку величины α_π в (8.25).

Интересная принципиальная возможность непосредственного измерения поляризуемости π^--мезона рассматривалась в [123–125]. Предлагалось изучать сдвиг уровней в π-мезоатомах, обязанный вкладу взаимодействия — (1/2) $\alpha_\pi E^2$, где $E = -Ze/r^2$ — напряженность поля ядра на π-мезонной орбите. Значение поляризуемости (8.25) приводит к сдвигу энергии ~ 2 *эв* в переходе $6h - 5g$ в ^{81}Tl. Измерение таких эффектов требует относительной точности $\sim 10^{-5}$ в определении энергии перехода. В настоящее время в этом же переходе уже достигнута точность $\sim 6\cdot 10^{-5}$ (см. [126]) **).

Отметим, что из (8.23) может следовать информация о знаке α_π. Действительно, выражая α_π с помощью (8.21), (8.23) непосредственно через константу распада $\pi^0 \to 2\gamma$, мы получим

$$\alpha_\pi = -\gamma \frac{f}{2\mu F_\pi}.$$

Поскольку $f/F_\pi < 0$ (см. (6.34), (6.37)), то $\alpha_\pi > 0$ при $\gamma = 0{,}4 > 0$. Это соответствует увеличению расстояния между уровнями в π-мезоатомах.

Подчеркнем, что в релятивистской теории знак поляризуемости нельзя установить из априорных соображений. В нерелятивистской квантовой механике поляризуемость частицы может быть представлена в виде

$$\alpha_\pi = \frac{e^2}{\mu}\frac{\langle r^2\rangle}{3} + \sum_{n,\,j} \frac{1}{3}\frac{|\langle \pi^-(0)|\int j_0(\mathbf{x},0)\,x_j\,d^3x\,|n\rangle|^2}{E_n-\mu},$$

где сумма $\sum\limits_n$ распространяется на состояния с нулевым импульсом $p = 0$ и $E_n > \mu$, $\langle r^2\rangle^{1/2}$ — радиус π-мезона. Из этой формулы следует, что $\alpha_\pi > 0$. Однако учет релятивистских эффектов (рождения пар) меняет картину. Сумма $\sum\limits_n$ должна быть заменена выражением

$$\sum_n{}' = \sum_n - S_{\text{вак}},$$

где $S_{\text{вак}}$ — вклад несвязанных вакуумных диаграмм, которому соответствуют суммы вида

$$S_{\text{вак}} \sim \sum_{n,\,n'} \frac{|\langle \pi^-|n\rangle|^2\,|\langle 0|\int j_0(\mathbf{x},0)\,x_j\,d^3x\,|n'\rangle|^2}{E_n+E_{n'}-\mu}.$$

Пусть $|n\rangle$ и $|n'\rangle$ — состояния, включающие нуклон-антинуклонную пару ($|n\rangle = |p, \bar{p}\rangle$, $|n'\rangle = |p', \bar{p}'\rangle$, где p, p' — импульсы частиц, $\bar{p}$, $\bar{p}'$ — импульсы античастиц). Если $p \neq p'$, то вклад, соответствующий $S_{\text{вак}}$, содержится также и в $\sum\limits_n$ и компенсируется в разности $\sum\limits_n - S_{\text{вак}}$. Если же $p = p'$, то соответствующий вклад содержится в $S_{\text{вак}}$, но отсутствует в $\sum\limits_n$ из-за принципа Паули. В результате нескомпенсированный

*) Такая возможность обсуждалась недавно Д. Бардиным и С. Биленьким (частное сообщение); см. также [127].

**) После того, как настоящий обзор был направлен в печать, появилась работа [142], где имерялась поляризуемость K-мезона при изучении переходов в K-мезоатомах. Результат: $\alpha_K = -(4 \pm 11)\cdot 10^{-3} \mathcal{f}^3$. В рамках SU(3)-симметрии можно показать, что константа β (см. (8.3)) одинакова для $\gamma\pi$- и γK-рассеяний и определяется, в частности, выражением (8.32) (см. ниже). Поэтому поляризуемость K-мезона должна быть меньше поляризуемости π-мезона на фактор $m_K/\mu \approx 3{,}5$ (см. формулу (8.10)). Из (8.25) мы получаем при этом оценку $\alpha_K^{\text{теор}} \approx 1{,}2\cdot 10^{-43}\,\mathcal{f}^3$.

вклад состояний с $p = p'$ в $S_{\text{вак}}$ приводит к появлению отрицательной добавки в выражении для поляризуемости по сравнению с явно положительным выражением, соответствующем нерелятивистской механике.

Непосредственное рассмотрение в релятивистской теории возмущений (в теории с γ_5-связью) показывает, что поляризуемость π^0-мезона отрицательна, а в σ-модели равна нулю. Поляризуемость π^--мезона положительна за счет члена $\langle r^2\rangle/3$. Вклад, соответствующий отдельно $\sum\limits_n - S_{\text{вак}}$, также оказывается отрицательным.

д) Распад $\pi \to e\nu e^+e^-$. Мы видим, что распад $\pi \to e\nu\gamma$ представляет интерес с точки зрения измерения поляризуемости π-мезона. Существенно, что при изучении спектров электрона и фотона в этом распаде можно определить значение константы h_A и тем самым сделать выбор между двумя решениями в (8.24) (см. [127]).

Отметим, в связи с обсуждением в гл. 3, что процесс $\pi \to e\nu\gamma$ с виртуальным γ-квантом (распад $\pi \to e\nu e^+e^-$) интересен также в связи с возможностью измерения радиуса π-мезона [128]. Амплитуда распада $\pi \to e\nu e^+e^-$ имеет вид

$$T = \frac{e}{q^2}\,\bar{u}_e\gamma_\mu u_e T_\mu \text{ — перестановка электронов,} \tag{8.26}$$

где T_μ определена в (8.18), причем в качестве $M_{\mu\nu}$ следует использовать выражение (8.20) при $q^2 \neq 0$. Используя в (8.20) условие сохранения векторного тока и частичного сохранения аксиального тока, а также коммутационные соотношения (2.5), получим

$$q_\mu M_{\mu\nu} = -F_\pi p_\nu, \tag{8.27}$$

$$(p-q)_\nu M_{\mu\nu} = F_\pi\left[p_\mu + \frac{\mu^2}{(p-q)^2-\mu^2}\mathscr{T}_\mu(p, q-p)\right], \tag{8.28}$$

где $\mathscr{T}_\mu$ — вершинная функция (3.8). Из (8.27) и (8.28) с точностью до второго порядка по импульсам следует [119, 128]

$$M_{\mu\nu} = ih_V\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}p_\alpha q_\beta - F_\pi\left[\frac{(p-q)_\nu(2p-q)_\mu}{2pq-q^2}\left(1+\frac{\langle r^2\rangle}{6}q^2\right)+\delta_{\mu\nu}\right] -$$
$$- h_A\left[q(p-q)\,\delta_{\mu\nu} - q_\nu(p-q)_\mu\right] - \frac{\langle r^2\rangle}{6}F_\pi\left(2q^2\delta_{\mu\nu} - (p-q)_\nu q_\mu - 2q_\nu q_\mu\right). \tag{8.29}$$

Таким образом, амплитуда распада $\pi \to e\nu e^+e^-$ полностью определяется заданием константы распада $\pi^0 \to 2\gamma$ (см. (8.21)), поляризуемости π-мезона (см. (8.23)) и радиуса π-мезона $\langle r^2\rangle$.

е) Связь со спектральными функциями токов. Отметим связь между параметром β в (8.3) и спектральными функциями векторных и аксиальных токов. Эта связь возникает при рассмотрении величины $T^{ab}_{\nu\mu}(p_1, p_2; q_1, q_2)$ при $p_1 \to 0$, $p_2 \to 0$. Использование условия PCAC (2.2) и коммутационных соотношений (2.3) — (2.5) позволяет (аналогично тому, как вычислялась амплитуда $T_{\nu\mu}(0, p_2; q_1, q_2)$ в (8.15)) получить выражение [129,130] *)

$$T^{ab}_{\nu\mu}(0, 0; q, -q) =$$
$$= \frac{2ie^2}{F_\pi^2}(\delta_{ab} - \delta_{3a}\delta_{3b})\int e^{iqx}\langle 0|T(a^3_\nu(0)\,a^3_\mu(x) - v^3_\nu(0)\,v^3_\mu(x))|0\rangle\,dx. \tag{8.30}$$

*) В работах [129, 130] формула (8.30) используется фактически как представление амплитуды $T_{\nu\mu}$ в области $p_i \sim q_i \sim \mu$, что, конечно, совершенно неправильно, так как в общей феноменологической структуре (8.1) содержатся быстро меняющиеся члены.

Используя для функций Грина токов в (8.30) спектральное представление [131], а также учитывая соотношение

$$T^{ab}_{\nu\mu}(0, 0; q, -q) = $$
$$= 2e^2(\delta_{ab} - \delta_{3a}\delta_{3b})\left[\delta_{\nu\mu} - \frac{q_\nu q_\mu}{q^2-\mu^2} + \left(\frac{\langle r^2\rangle}{3} - \beta\right)(q^2\delta_{\nu\mu} - q_\nu q_\mu)\right], \quad (8.31)$$

которое следует из представления (8.1) (при $\beta_0 = 0$), получим

$$\beta = \frac{\langle r^2\rangle}{3} + \frac{1}{F_\pi^2}\int \frac{\rho^A(\varkappa^2) - \rho^V(\varkappa^2)}{\varkappa^4}\,d\varkappa^2, \quad (8.32)$$

где ρ^A и ρ^V — спектральные функции токов:

$$\rho^V(p^2) = -\frac{(2\pi)^3}{3}\sum_n \delta(p_n - p)\,|\langle 0\,|\,v^3_\nu(0)\,|\,n\rangle|^2, \quad (8.33)$$

$$\rho^A(p^2) = -\frac{(2\pi)^3}{3}\sum_n \delta(p_n - p)\,|\langle 0\,|\,a^3_\nu(0)\,|\,n\rangle|^2, \quad (8.34)$$

причем $\sum_n$ в (8.34) не включает состояние с одним π-мезоном.

Функции ρ^V и ρ^A в принципе могут быть измерены в реакциях $e^+e^- \to 2\pi +$ (все остальное) и $e^+e^- \to \pi +$ (все остальное) [132].

Из (8.32) и (8.22) следует выражение для параметра h_A через спектральные функции токов, которое было впервые получено в [119]. Использование VDM в выражении (8.32) приводит к значению

$$\beta = \frac{1}{2m_\rho^2}, \quad (8.35)$$

где m_ρ — масса ρ-мезона.

ж) Количественные оценки. Дифференциальное сечение. Из (8.22) и (8.24) при $\gamma = 0{,}4$ следует значение параметра β:

$$\beta \approx \frac{1{,}2\cdot 10^{-2}}{\mu^2}. \quad (8.36)$$

Отметим, что $\beta \sim 1/m_\rho^2$, где m_ρ — масса ρ-мезона. При этом относительный вклад члена второго порядка по импульсам в (8.1) оказывается порядка $\sim \mu^2/m_\rho^2$, что является подтверждением ожидаемого масштаба эффективного параметра разложения в (8.1). Оценка членов четвертого порядка по импульсам в амплитуде $T^{ab}_{\nu\mu}$, которые связаны с обменом ρ-мезоном, показывает, что их масштаб $\sim 10^{-3} \sim (\mu^2/m_\rho^2)^2$ (см. [114]). Таким образом, можно ожидать, что формула (8.1) при значении β из (8.22) определяет амплитуду процесса $\gamma\gamma \to \pi\pi$ фактически с точностью до радиационных поправок.

Из (8.1) и (8.36) следует, что при малых импульсах амплитуда $T^{ab}_{\nu\mu}$ определяется вкладом полюсных графиков с точностью порядка нескольких процентов. Этот факт отмечался в ряде работ (см., например, [133, 134]) *).

---

*) Отметим, что амплитуда $\gamma\gamma \to \pi\pi$ исследовалась в ряде работ (см., например, [133, 135]) в рамках дисперсионных соотношений. Фактически такие исследования интересны в области средних энергий (~ 1 *Гэв*), поскольку при малых энергиях, как отмечалось, доминирует полюсная диаграмма. Мы не обсуждаем здесь результаты дисперсионного подхода, поскольку это направление включает ряд приближений, не входящих в круг основных гипотез гл. 2, в котором мы хотели бы находиться.

Полное сечение процесса $\gamma\gamma \to \pi^+\pi^-$ (сечение $\gamma\gamma \to 2\pi^0$ равно нулю, как следует из (8.1), поскольку $\beta_0 = 0$) с реальными квантами имеет вид

$$\sigma = \sigma_B + \sigma', \tag{8.37}$$

где σ_B — вклад членов (8.2) и (8.5) (см. [136], стр. 644; этот вклад соответствует борновскому приближению), σ' — поправка, связанная с членом (8.3):

$$\sigma' = \frac{4\pi\alpha^2}{s}(\mu^2\beta)\ln\frac{1+R(s)}{1-R(s)}, \quad R(s) = \sqrt{1-\frac{4\mu^2}{s}}; \tag{8.38}$$

здесь $s = (q_1 + q_2)^2$.

При $4\mu^2/s \sim 1$ сечение σ_B имеет порядок 10^{-29}—10^{-30} *см*^{2}. Для значения β из (8.36) получаем

$$\frac{\sigma'}{\sigma_B} \sim 2\cdot 10^{-2}. \tag{8.39}$$

Сечение процесса $\gamma\gamma \to \pi^+\pi^-$ в области $s \sim t \sim \mu^2$ может быть измерено в реакции $e^+e^- \to e^+e^-\pi^+\pi^-$ на встречных пучках больших энергий, когда доминирует диаграмма на рис. 26. Расчеты вклада диаграммы на рис. 26 с блоком $\gamma\gamma \to \pi\pi$ в полюсном приближении были выполнены в [10, 133]. В главном, логарифмическом, приближении сечение реакции $e^+e^- \to e^+e^-\pi^+\pi^-$ имеет простой вид (ср. [9]):

$$\frac{d\sigma}{ds} = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \frac{\sigma_{\gamma\gamma\to\pi\pi}(s)}{s}\left(\ln\frac{4E^2}{s}\ln^2\frac{4E^2\mu^2}{sm_e^2} - \frac{1}{3}\ln^3\frac{4E^2}{s}\right); \tag{8.40}$$

$2E$ — суммарная энергия в СЦИ, m_e — масса электрона, $\sigma_{\gamma\gamma\to\pi\pi}$ — сечение процесса $\gamma\gamma \to \pi^+\pi^-$ с реальными квантами. Оценивая сечение (8.40) при $s \sim 4\mu^2$, $2E \approx 7$ *Гэв*, получим $\sigma \sim 10^{-33} \div 10^{-34}$ *см*^{2}. Формула (8.40) справедлива в асимптотической области, где $\ln\frac{4E^2}{s} \gg 1$, и при $2E \sim 7$ *Гэв* имеет точность $\sim 30\%$.

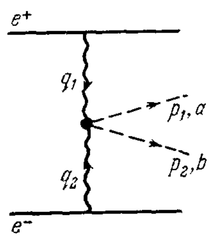

Рис. 26.

В ряде работ (см. [12, 133, 137]) реакцию $\gamma\gamma \to \pi\pi$ при малых и средних энергиях предлагалось изучать в связи с извлечением информации о фазах $\pi\pi$-рассеяния. Отметим, что в рамках гипотез гл. 2 (см. также гл. 4) перерассеяние π-мезонов дает вклад второго порядка по импульсам в мнимой части амплитуды $\gamma\gamma \to 2\pi$ и соответственно вклад четвертого порядка в полное сечение (см. [114]). Поэтому при $s \sim 4\mu^2$ поправка σ' (см. (8.38)) должна давать больший вклад, чем $\pi\pi$-перерассеяние.

з) Процесс $\gamma\gamma \to \pi\pi$ с сильно виртуальными квантами. Формулу (8.30) можно использовать для получения выражения для амплитуды $T^{ab}_{\nu\mu}(p_1, p_2; q_1, q_2)$ в области $q_1^2 \sim q_2^2 \gg \mu^2$, $p_i \sim \mu$. Из (8.30) следует [70, 134], что в этой области

$$T^{ab}_{\nu\mu} \approx 2e^2(\delta_{ab} - \delta_{3a}\delta_{3b})\left(\delta_{\nu\mu} - \frac{q_\nu q_\mu}{q^2}\right)R(q^2), \tag{8.41}$$

где

$$R(q^2) = \frac{1}{F_\pi^2}\int\frac{d\varkappa^2}{\varkappa^2 - q^2}\left[\rho^V(\varkappa^2) - \rho^A(\varkappa^2)\right]. \tag{8.42}$$

Отметим, что амплитуда процесса $\gamma\gamma \to 2\pi^0$ равна нулю, как следует из (8.41). При больших q_i возможность пренебречь импульсами π-мезонов в $T^{ab}_{\nu\mu}$ далеко не очевидна. Во всяком случае, мы должны требовать выполнения условия $p_i q \ll m_\rho^2$, где m_ρ — характерный масштаб изменения адронных амплитуд. Поскольку одновременно $q_1^2 \sim q_2^2 \gg \mu^2$, то область применимости формулы (8.41) может быть довольно узкой.

Измерение амплитуды (8.41) возможно в принципе в реакции $e^+e^- \to e^+e^-\pi^+\pi^-$ (см. рис. 26). Тормозной (однофотонный) механизм рождения пары $\pi^+\pi^-$ может быть отделен, так как соответствующие графики не интерферируют с диаграммой на рис. 26 и легко вычисляются. Вклад графика на рис. 26 в дифференциальное сечение при больших энергиях лептонов ($\varepsilon^2 \gg q_i^2$) равен

$$d\sigma = \frac{16\alpha^4}{\pi}\frac{R^2(q^2)}{q^6}\frac{dq^2}{q^2}(\omega_+^2-\mu^2)^{1/2}(\omega_-^2-\mu^2)^{1/2}\,d\omega_+ d\omega_-, \qquad (8.43)$$

где $\omega_\pm$ — энергия мезонов. Полагая $dq^2 \sim q^2 \sim m_\rho^2$, $\omega_\pm \sim d\omega_\pm \sim \mu$ и аппроксимируя $R(q^2)$ вкладом ρ- и A_1-мезона (см., например, [138], при этом $\rho^V = g_\rho^2\delta(\varkappa^2 - m_\rho^2)$, $\rho^A = g_\rho^2\,\delta(\varkappa^2 - m_A^2)$, $m_A^2 = 2m_\rho^2$, $g_\rho^2 = 2F_\pi^2 m_\rho^2$ и и $R(q^2) \approx 2m_\rho^4\,[(q^2 - m_\rho^2)(q^2 - 2m_\rho^2)]^{-1}$), мы получаем $\sigma \sim 10^{-38}$ *см*^{2}. К сожалению, сечение весьма мало.

9. ПРОЦЕССЫ $\gamma \to (2n)\pi$ И $\gamma\gamma \to (2n)\pi$ $(n > 1)$

а) Феноменологический лагранжиан. Эти процессы в низшем приближении по импульсам описываются вкладом полюсных π-мезонных диаграмм. Их вычисление предполагает знание амплитуд $2\pi \to 2\pi$, $2\pi \to 4\pi$ и т. д., которые могут быть вычислены в рамках алгебры токов и не содержат произвольных параметров, если выполнено условие (2.11). Все они содержатся в феноменологическом лагранжиане (7.1). Все амплитуды $\gamma \to (2n)\,\pi$, $\gamma\gamma \to (2n)\,\pi$ в низшем порядке по импульсам описываются феноменологическим лагранжианом (7.18). Полученные на основе (7.18) выражения могут быть, однако, весьма далеки от истинных физических амплитуд, так как они справедливы только в пределе, когда импульс каждого из мезонов стремится к нулю. (Аналогичное замечание справедливо, конечно, и для процессов $\gamma \to (2n+1)\,\pi$, $\gamma\gamma \to (2n+1)\,\pi$ с большим числом π-мезонов.) Сравнение с экспериментом является здесь очень трудной задачей, поскольку предполагает предварительное исследование экстраполяционных формул, которые позволили бы продолжить в физическую область результаты, полученные при малых импульсах.

Мы рассмотрим несколько более подробно процессы $\gamma \to 4\pi$ и $\gamma\gamma \to 4\pi$, поскольку здесь еще можно надеяться, что учет низшего и следующего порядка в разложении по импульсам достаточен для продолжения амплитуды в физическую область.

б) Амплитуда $\gamma \to 4\pi$ *). Из сохранения G-четности следует, что γ-квант в рассматриваемом процессе является изовекторным. Поэтому

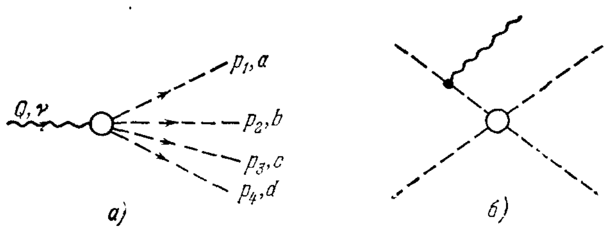

Рис. 27.

общая структура амплитуды имеет вид (рис. 27)

$$T_\nu^{3abcd} = -ie\delta_{ab}\varepsilon_{3cd}M_\nu(p_1, p_2, p_3, p_4) + \text{перестановки}. \qquad (9.1)$$

*) В. В. Соловьев, М. В. Терентьев (будет опубликовано).

Заметим, что изотопических структур типа $\delta_{3a}\varepsilon_{bcd}$ писать не надо, поскольку $\delta_{3b}\varepsilon_{acd} = \delta_{ab}\varepsilon_{3cd} + \delta_{bc}\varepsilon_{3da} + \delta_{bd}\ \varepsilon_{3ac}$.

Функция M_ν может быть записана в виде

$$M_\nu = P_\nu(p_1, p_2, p_3, p_4) + B_\nu(p_1, p_2, p_3, p_4), \tag{9.2}$$

где P_ν — полюсный член (см. рис. 27):

$$P_\nu(p_1, p_2, p_3, p_4) = \\ = \frac{\mathcal{T}_\nu(p_3, -p_3')}{p_3'^2-\mu^2} M(p_1, p_2, p_3', p_4) - \frac{\mathcal{T}_\nu(p_4, -p_4')}{p_4'^2-\mu^2} M(p_1, p_2, p_3, p_4'), \tag{9.3}$$

$$p_3' = -(p_1+p_2+p_4), \quad p_4' = -(p_1+p_2+p_3).$$

B_ν — контактный член, в котором мы сохраняем члены низшего порядка (линейные по импульсам) и следующего порядка (кубичные по импульсам). Функция $M(p_1, p_2, p_3, p_4)$ в (9.3) — это амплитуда $\pi\pi$-рассеяния, определенная согласно (4.2). В интересующем нас приближении мы должны учесть в $M(p_1, p_2, p_3, p_4)$ члены до четвертого порядка по импульсам включительно. Соответствующее выражение имеет вид

$$\left.\begin{aligned} &M(p_1, p_2, p_3, p_4) = \alpha - \left(\frac{\beta}{2}+\gamma\right)(\sigma_{13}+\sigma_{14}+\sigma_{23}+\sigma_{24}+2\mu^2) - \\ &\qquad\qquad - \gamma(\sigma_{12}+\sigma_{34}+\mu^2) + \sum_{j=1}^{6} c_j R_j, \\ &R_1 = \sigma_{12}^2+\sigma_{34}^2-\mu^4, \quad R_2 = \sigma_{13}^2+\sigma_{14}^2+\sigma_{23}^2+\sigma_{24}^2-2\mu^4, \\ &R_3 = \sigma_{12}\sigma_{34}, \quad R_4 = \sigma_{13}\sigma_{24}+\sigma_{14}\sigma_{23}, \\ &R_5 = (\sigma_{12}+\sigma_{34})(\sigma_{13}+\sigma_{14}+\sigma_{23}+\sigma_{24}) - 2\mu^4, \\ &R_6 = (\sigma_{14}+\sigma_{23})(\sigma_{13}+\sigma_{24}) - \mu^4; \end{aligned}\right\} \tag{9.4}$$

здесь $\sigma_{ij} = p_i p_j$, $i \neq j$,— независимые инвариантные переменные в амплитуде $M(p_1, p_2, p_3, p_4)$. (Мы не выписываем в (9.4) вклад мнимой части, обязанный $\pi\pi$-перерассеянию, который при $\alpha = 0$ также четвертого порядка по импульсам.)

Условие самосогласованности в амплитуде (9.4): $M(p_1, p_2, p_3, p_4) \to 0$ при $p_1 \to 0$, если $p_2^2 = p_3^2 = p_4^2 = \mu^2$,— приводит к условию

$$\alpha = 0. \tag{9.5}$$

При дополнительном предположении о структуре σ-коммутатора (2.11) мы получаем также $M(0, p_2, p_3, p_4) = 0$, если $p_2^2 = p_4^2 = \mu^2$, $p_3^2 \neq \mu^2$. Это приводит к условиям

$$c_1 + 2c_2 - c_6 = 0, \tag{9.6'}$$

$$\gamma = -2\mu^2(c_5 + c_6 - 2c_2). \tag{9.6''}$$

Мы далее кратко обсудим следствия предположений А, Б, В и (2.11) (см. гл. 2) для амплитуды (9.2).

Градиентная инвариантность (условие поперечности $Q_\nu M_\nu = 0$, где $Q = p_1 + p_2 + p_3 + p_4$) приводит к следующим ограничениям в контактном члене B_ν в (9.2). Контактный член содержит две произвольные постоянные a_1 и a_2, входящие в качестве коэффициентов при двух явно поперечных структурах, составленных из импульсов. В остальном структура B_ν полностью определяется заданием постоянных, входящих в амплитуду M в (9.3) и (9.4). Его функция состоит в дополнении до поперечной структуры (на массовой поверхности) выражения для полюсного члена (9.3).

Условие самосогласованности в применении к амплитуде (9.2) ($M_\nu(0, p_2, p_3, p_4) = 0$, если $p_2^2 = p_3^2 = p_4^2 = \mu^2$ при $a = b = 3$, $c \neq d \neq 3$) приводит к условию $a_1 = a_2 = 0$. Таким образом, что весьма важно, процесс $\gamma \to 4\pi$ до третьего порядка по импульсам полностью определяется структурой амплитуды $\pi\pi$-рассеяния и не содержит новых параметров.

Отметим, далее, что использование алгебры токов (2.3) — (2.5) в сочетании с условием (2.2) позволяет получить (при $a = b = 3$, $c \neq d \neq 3$)

$$T_\nu(0, p_2, p_3, p_4) \to 0 \text{ при } p_3 \to 0, \ p_2^2 = p_4^2 = \mu^2, \tag{9.7'}$$

$$T_\nu(p_1, p_2, 0, p_4) \to -\frac{ie}{F_\pi^2}\mathscr{T}_\nu(p_2, p_4) \text{ при } p_1 \to 0, \ p_2^2 = p_4^2 = \mu^2, \tag{9.7''}$$

где $T_\nu(p', p)$ — электромагнитная вершина (3.8). Из этих условий, с учетом (9.5), (9.6′) и (9.6″), следует

$$\beta = F_\pi^{-2} - 8\mu^2(c_6 - c_2). \tag{9.8}$$

Параметры α, β, γ полезно сравнить с (4.3), полученными в низшем приближении. Таким образом, из (9.6) и (9.8) следует, что $\pi\pi$-рассеяние вплоть до четвертого порядка по импульсам описывается пятью произвольными константами (в качестве которых можно выбрать c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) и те же постоянные входят в амплитуду $\gamma \to 4\pi$. Кроме того, как обычно в низкоэнергетической технике, предполагается, что относительный вклад членов $\sim c_j$ невелик ($\sim 4\mu^2/m_\rho^2$), так что в главном приближении амплитуда T_ν известна и определяется константой $\beta = F_\pi^{-2}$.

Если вообще не накладывать на амплитуду $\pi\pi$-рассеяния никаких ограничений, кроме возможности разложения в ряд по импульсам, то в главном приближении амплитуда процесса $\gamma \to 4\pi$ будет иметь вид (9.1) — (9.3), где в качестве амплитуды M в (9.3) следует использовать выражение (4.2), а контактный член B_ν в (9.2) при этом равен

$$B_\nu(p_1, p_2, p_3, p_4) = -2\gamma(p_3 - p_4)_\nu. \tag{9.9}$$

Таким образом, вершина $\gamma \to 4\pi$ интересна с точки зрения изучения параметров $\pi\pi$-рассеяния.

в) Процесс $\gamma\gamma \to 4\pi$. Амплитуда рассматриваемого процесса $T_{\nu\mu}^{abcd}(q_1, q_2; p_1, p_2, p_3, p_4)$ также может быть записана в виде суммы

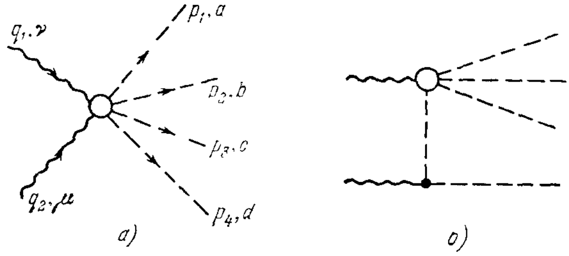

Рис. 28.

полюсного члена (рис. 28, б), который с точностью до второго порядка по импульсам определяется видом амплитуды $T_\nu(p_1, p_2, p_3, p_4)$ в (9.1), и контактного члена (рис. 28, а).

Контактный член с точностью до второго порядка по импульсам содержит одну явно поперечную структуру $\tilde{\beta}(q_1q_2\delta_{\nu\mu} - q_{1\mu}q_{2\nu})$, содержащую произвольный параметр $\tilde{\beta}$, а в остальном его вид однозначно определяется структурой полюсного графика, что следует из условий поперечности полной амплитуды: $q_{1\nu}T_{\nu\mu} = 0$, $p_1^2 = \mu^2$.

Использование алгебры токов (2.3) — (2.5) позволяет получить условие [129]

$$T_{\nu\mu}^{+-+-}(q, -q; 0, 0, 0, 0) = \\ = \frac{6ie^2}{F_\pi^4} \int e^{iqx} \langle 0 | T(v_\nu^3(x) v_\mu^3(0) - a_\nu^3(x) a_\mu^3(0)) | 0 \rangle dx, \quad (9.10)$$

которого достаточно для вычисления параметра $\tilde{\beta}$. Этот параметр оказывается связанным с радиусом и поляризуемостью π-мезона, если использовать спектральное представление [131, 138] для функции Грина токов в (9.10), а также формулу (8.32) для интегралов от спектральных функций (ср. аналогичные вычисления в связи с процессом $\gamma\gamma \to \pi\pi$ в гл. 8).

Таким образом, амплитуда $\gamma\gamma \to 4\pi$ также однозначно определяется во втором порядке по импульсам структурной амплитуды $\pi\pi$-рассеяния (которая входит через функцию T_ν (9.1) в полюсном графике), если известны радиус и поляризуемость π-мезона.

В главном приближении (нулевой порядок по импульсам) $T_{\nu\mu}^{abcd}$ определяется только вкладом полюсного графика, содержащего амплитуду $\pi\pi$-рассеяния в низшем приближении (4.2), (4.3).

Отметим, что амплитуда $\gamma\gamma \to 4\pi^0$ обращается в нуль в главном и следующем приближениях по импульсам (так же, как и амплитуда $\gamma\gamma \to 2\pi^0$, см. гл. 8).

10. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, большая совокупность процессов $\gamma \to (n)\pi$ $(n \geqslant 3)$ и $\gamma\gamma \to (n)\pi$ $(n \geqslant 2)$ может быть описана теоретически в рамках предположений, сформулированных в гл. 2, и выражена через небольшое число параметров, известных или измеримых в принципе в других явлениях. Причем при вычислении амплитуд $\gamma(2\gamma) \to (2n)\pi$ и $\gamma(2\gamma) \to (2n+1)\pi$ в различной степени используются предположения гл. 2. Так, структура амплитуд с нечетным числом π-мезонов связана с аномальными свойствами треугольной диаграммы (см. рис. 13) и гипотезой об отсутствии запрета на распад $\pi^0 \to 2\gamma$ в рамках PCAC. К сожалению, в настоящий момент нет ни одного опыта, который мог бы служить прямой проверкой полученных соотношений, хотя исходные гипотезы имеют экспериментальное обоснование.

Исследование амплитуд взаимодействия мягких фотонов и π-мезонов представляется заслуживающим особого внимания в связи с неопределенной ситуацией в определении параметров $\pi\pi$-рассеяния (см. гл. 4). Если длины $\pi\pi$-рассеяния правильно определены в периферических опытах, то мы сталкиваемся с серьезным противоречием, которое требует объяснения. В этих условиях важно иметь независимую информацию о $\pi\pi$-рассеянии, которая может быть получена при изучении взаимодействий фотонов и мезонов.

Мы перечислим ниже основные опыты, которые в первую очередь необходимы для проверки главных результатов в рассматриваемой области физики:

1) Уточнение данных о форм-факторе и радиусе π-мезона (см. гл. 3).

2) Уточнение данных об амплитуде $\pi\pi$-рассеяния в периферических опытах, в $K \to 3\pi$-распадах и K_{e4}-распаде (см. гл. 4).

3) Измерение сечения реакции $e^+e^- \to 3\pi$ (определение свойств вершины $\gamma \to 3\pi$, проверка основного соотношения (6.11), исследование

зависимости от импульсов амплитуды $\gamma \to 3\pi$ и проверка экстраполяционной формулы (6.15); см. гл. 6).

4) Измерение сечения реакции $e^+e^- \to e^+e^- + 3\pi$ (изучение амплитуды $\gamma\gamma \to 3\pi$, проверка формул (6.13), (6.14), определение параметра γ и исследование тем самым структуры коммутатора (2.11); см. гл. 6).

5) Измерение сечения реакции $\pi \to 2\pi$ в кулоновском поле ядра (независимое определение вершины $\gamma \to 3\pi$ и проверка формул (6.11), (6.15), (6.21); см. гл. 6).

6) Измерение амплитуды $\gamma\gamma \to \pi\pi$ либо в реакции $e^+e^- \to e^+e^-\pi^+\pi^-$, либо в процессе $\gamma \to \pi^+\pi^-$ в кулоновском поле ядра (проверка справедливости представления (8.1), определяющего амплитуду $\gamma\gamma \to \pi\pi$ с точностью порядка нескольких процентов, определение поляризуемости π-мезона; см. гл. 8, пп. а), б), ж)).

7) Измерение поляризуемости π-мезона по сдвигу уровней в π-мезоатомах (см. гл. 8, п. г)).

8) Измерение вкладов векторного и аксиального токов в распаде $\pi \to e\nu\gamma$ (независимое определение поляризуемости π-мезона, проверка формулы (8.23); см. гл. 8, п. г)).

9) Исследование распада $\pi \to e\nu e^+e^-$ для определения радиуса и поляризуемости π-мезона (см. гл. 8, п. д)).

10) Уточнение данных о вероятности распада $\pi^0 \to 2\gamma$ и исследование вершины $\pi^0 \to 2\gamma$ как функции виртуальных масс частиц (проверка основной гипотезы о медленности изменения вершины $\pi^0 \to 2\gamma$ как функции импульсов, уточнение величины константы f (см. (5.5)), которая в качестве основного параметра появляется во многих соотношениях; см. гл. 5, пп. а) — в)).

11) Измерение амплитуды $\pi \to 3\pi$ в кулоновском поле ядра (исследование свойств амплитуды $\gamma \to 4\pi$, проверка справедливости экстраполяционных формул (9.1) — (9.3), (9.9), исследование параметров $\pi\pi$-рассеяния; см. гл. 9, п. б)).

12) Измерение сечения реакции $e^+e^- \to e^+e^- + 4\pi$ (исследование свойств амплитуды $\gamma\gamma \to 4\pi$; см. гл. 9, п. в)).

13) Проверка факта подавленности амплитуд $\gamma\gamma \to (2n + 1)\,\pi^0$ и $\gamma\gamma \to (2n)\pi^0$, $n \geqslant 1$ (см. гл. 7, п. г), гл. 8, пп. в), ж), гл. 9).

14) Измерение знака константы f (см. гл. 6, п. е)).

Институт теоретической и экспериментальной физики,
Москва

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. L. D. Landau, E. M. Lifshitz, Sov. Phys. **6**, 244 (1934).
2. А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий, Квантовая электродинамика, 3-е изд, М., «Наука», 1969.
3. F. Calogero, C. Zemach, Phys. Rev. **120**, 1860 (1960).
4. F. Low, ibid., p. 582.
5. P. C. DeCelles, J. F. Goehl, ibid. **184**, 1617 (1969).
6. В. Е. Балакин, В. М. Буднев, И. Ф. Гинзбург, Письма ЖЭТФ **11**, 559 (1970); В. М. Буднев, И. Ф. Гинзбург, ЯФ **13**, 353 (1971).
7. S. Brodsky, T. Kinoshita, H. Terazawa, Phys. Rev. **D4**, 1532 (1971)
8. N. Arteaga-Romero, A. Jaccarini, P. Kessler, ibid. **D3**, 1569.
9. М. В. Терентьев, ЯФ **14**, 178 (1971).
10. В. Байер, В. Фадин, Письма ЖЭТФ **13**, 293 (1971).
11. Э. Чобан, В. Шехтер, ЯФ **14**, 190 (1971).
12. C. E. Carlson, W. K. Tung, Phys. Rev. **D4**, 2873 (1971).
13. В. М. Буднев, И. Ф. Гинзбург, Г. В. Меледин, В. Г. Сербо, Препринт ТФ-67, Новосибирск, 1972.
14. H. Primakoff, Phys. Rev. **81**, 899 (1951).

15. A. Rittenberg, A. Barbaro-Galtieri et al., Rev. Mod. Phys. **43** (2) (1971).
16. S. L. Adler, R. E. Dashen, Current Algebras, N.Y., W. A. Benjamin, Inc., 1968 (см. перевод: С. Адлер, Р. Дашен, Алгебры токов, М., «Мир», 1970).
17. А. И. Вайнштейн, В. И. Захаров, УФН **100**, 225 (1970).
18. J. Bernstein, Elementary Particles and Their Currents, N.Y., W. H. Freeman and Co., 1968 (см. перевод: Дж. Бернстейн, Элементарные частицы и их токи, М., «Мир», 1970).
19. R. Dashen, M. Weinstein, Phys. Rev. **183**, 1261 (1969).
20. В. Гришин, В. Любошиц, В. Огиевецкий, М. Подгорецкий, ЯФ **4**, 126 (1966); I. C. Aznauryan, A. N. Zaslavsky, Phys. Lett. **B39**, 226 (1972); Л. Б. Окунь, сборник «Проблемы современной физики», М., ВИНИТИ, 1965; T. Das, V. Mathur, S. Okubo, Phys. Rev. Lett. **19**, 470 (1967).
21. S. Adler, Phys. Rev. **177**, 2426 (1969).
22. S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **17**, 616 (1966).
23. M. Gell-Mann, R. Oakes, B. Renner, Phys. Rev. **175**, 2195 (1968).
24. В. Л. Ауслендер, и др., ЯФ **9**, 114 (1969).
25. J. E. Augustin et al., Phys. Rev. Lett. **20**, 126 (1968).
26. V. Balakin et al., Intern. Symp. on Electron and Photon Interaction, Cornell, 1971.
27. C. Bernardini et al., ibid.
28. F. Crowford, Phys. Rev. **117**, 1119 (1960).
29. В. Г. Гришин, Э. П. Кистенев, Му Цзюнь, ЯФ **2**, 886 (1965).
30. M. Block et al., Phys. Rev. **169**, 1074 (1968).
31. K. Crowe et al., ibid. **180**, 1349 (1969).
32. M. Sternheim, R. Hofstadter, Nuovo Cimento **38**, 1854 (1965).
33. C. Akerlof et al., Phys. Rev. **163**, 1482 (1967).
34. C. Mistretta et al., Phys. Rev. Lett. **20**, 1523 (1968); Phys. Rev. **184**, 1487 (1969).
36. C. N. Brown et al., Phys. Rev. Lett. **26**, 991 (1971).
36. S. Fubini, Y. Nambu, V. Wataghin, Phys. Rev. **111**, 329 (1958).
37. W. R. Frazer, ibid. **115**, 1763 (1959).
38. N. Zagury, ibid. **145**, 1112 (1966).
39. S. Adler, Ann. Phys. (N.Y.) **50**, 189 (1968).
40. F. A. Behrends, Phys. Rev. **D1**, 2590 (1970).
41. S. F. Berezhnev, A. V. Demyanov, A. V. Kulikov et al. (JINR, Dubna, USSR), Paper presented to XVI Intern. Conference on High Energy Physics, Batavia, 1972; С. Ф. Бережнев, и др., ЯФ **16**, 185 (1972).
42. Л. Б. Окунь, И. Б. Хриплович, ЯФ **6**, 821 (1971).
43. С. М. Биленький, В. Б. Семикоз, ЯФ **7**, 107 (1968).
44. Б. В. Гешкенбейн, М. В. Терентьев, ЯФ **14**, 1227 (1971).
45. Г. А. Лексин, УФН **102**, 387 (1970).
46. В. В. Анисович, П. Э. Волковицкий, ЯФ **14**, 1055 (1971).
47. A. Zylbersztejn, P. Basile et al., Phys. Lett. **B38**, 457 (1972).
48. W. T. Ford et al., Phys. Rev. Lett. **25**, 1370 (1970).
49. В. В. Бармин, В. Г. Брыкалов и др. ЯФ **15**, 1152 (1972).
50. G. Belletini, C. Bemporad, P. Braccini, Nuovo Cimento **A66**, 243 (1970).
51. A. Dolgov, A. Vainstein, V. Zakharov, Phys. Lett. **B24**, 425 (1967).
52. D. Sutherland, Nucl. Phys. **B2**, 433 (1967).
53. M. Gell-Mann, M. Levy, Nuovo Cimento **16**, 705 (1966).
54. J. Steinberger, Phys. Rev. **76**, 1180 (1949).
55. J. Bell, R. Jackiw, Nuovo Cimento **A60**, 47 (1969).
56. M. Gell-Mann, J. Bernstein, L. Michel, ibid. **16**, 560 (1960).
57. W. Bardeen, Phys. Rev. **184**, 1848 (1969).
58. B. Zumino, Proc. of the Topical Conference on Weak Interactions, CERN, 1969.
59. R. Jackiw, K. Johnson, Phys. Rev. **182**, 1455 (1969).
60. J. Schwinger, ibid. **82**, 664 (1951).
61. S. Adler, D. Boulware, ibid. **184**, 1740 (1969).
62. R. Jackiw, Lectures at the Brookhaven Summer School on Elementary Particle Physics. Preprint MIT, 1971; S. L. Adler, сборник «Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory», Cambridge, Mass., MIT Press, 1970.
63. S. Adler, W. Bardeen, Phys. Rev. **182**, 1517 (1969).
64. A. Dolgov, V. Zakharov, Nucl. Phys. **B27**, 525 (1971).
65. W. A. Bardeen, H. Fritzsch, M. Gell-Mann, Preprint TH-1538-CERH, July 1972.

66. F. Ceradini et al., Paper presented to XVI Intern. Conference on High Energy Physics, Batavia, 1972; R. Averill et al., Paper presented to XVI Intern. Conference on High Energy Physics, Batavia, 1972.
67. R. Crewther, Phys. Rev. Lett. **28**, 1421 (1972).
68. K. Wilson, Phys. Rev. **179**, 1499 (1969).
69. М. В. Терентьев, Письма ЖЭТФ **14**, 140 (1971).
70. М. В. Терентьев, ЯФ **15**, 1199 (1972).
71. S. Adler, B. Lee, S. Treiman, A. Zee, Phys. Rev. **D4**, 3497 (1971).
72. I. Wess, B. Zumino, Phys. Lett. **B37**, 95 (1971).
73. T. F. Wong, Phys. Rev. Lett. **27**, 1617 (1971).
74. R. Aviv, N. Dass, R. Sawyer, ibid. **26**, 591; R. Aviv, R. F. Sawyer, Phys. Rev. **D4**, 451 (1971).
75. E. Abers, S. Fels, Phys. Rev. Lett. **26**, 1512 (1971).
76. Е. Б. Богомольный, А. Д. Долгов и др., ЯФ **16**, 129 (1972).
77. S. Adler, G. Ferrar, S. Treiman, Phys. Rev. **D5**, 770 (1972).
78. M. V. Terent'ev, Phys. Lett. **B38**, 419 (1972).
79. В. М. Шехтер, сборник «Теоретическая физика и физика элементарных частиц» (серия «Итоги науки»), М., ВИНИТИ, 1965.
80. Г. С. Ирошников, Ю. П. Никитин, ЯФ **7**, 616 (1968).
81. Г. С. Ирошников, Канд. диссертация (МИФИ, 1970).
82. В. В. Анисович, В. М. Шехтер, ЯФ **13**, 369 (1971).
83. N. Cabibbo, R. Gatto, Phys. Rev. Lett. **4**, 313 (1960).
84. R. Aviv, A. Zee, Phys. Rev. **D5**, 2372 (1972).
85. A. Zee, ibid. **D6**, 900.
86. J. Smith, N. Stanko, ibid., p. 1332.
87. R. Köberle, Phys. Lett. **B38**, 169 (1972).
88. A. Donnachie, G. Shaw, Ann. Phys. (N.Y.) **37**, 333 (1966).
89. A. Chatterjee, Phys. Rev. **170**, 1578 (1968).
90. Г. С. Ирошников, Ю. П. Никитин, А. С. Чернов, Письма ЖЭТФ **10**, 150 (1969).
91. G. Murtaza, A. M. Harun-Ar-Rashid, Phys. Rev. **D2**, 236 (1970).
92. D. H. Schiller, I. O. Stamatescu, ibid. **D4**, 1569 (1971).
93. A. Sundaram, Progr. Theor. Phys. **43**, 843 (1970).
94. M. G. Miller, Phys. Rev. **D4**, 769 (1971).
95. A. Ali, F. Hussain, ibid. **D3**, 1206, 1214.
96. Т. Д. Блохинцева, А. В. Кравцов, С. Г. Шерман, ЯФ **8**, 928 (1968).
97. В. А. Мещеряков, Л. Л. Неменов, Л. Д. Соловьев и др., ЯФ **2**, 124 (1965).
98. S. Okubo, B. Sakita, Phys. Rev. Lett. **11**, 50 (1963).
99. В. В. Соловьев, М. В. Терентьев, ЯФ **16**, 153 (1972).
100. В. И. Захаров, ЯФ **1**, 1053 (1965).
101. M. Braunschwieg, Phys. Lett. **B26**, 405 (1968).
102. П. С. Баранов и др., ЯФ **5**, 1221 (1967).
103. S. Okubo, Phys. Rev. **179**, 1629 (1969).
104. Л. И. Лапидус, Чжоу Гуан-чжао, ЖЭТФ **41**, 294 (1961).
105. F. Gilman, Phys. Rev. **184**, 1964 (1965).
106. Н. П. Зотов, Ю. А. Раков, В. А. Царев, Кр. сообщ. физ. (ФИАН СССР), № 8, 37 (1970).
107. Л. В. Фильков, ЯФ **3**, 336 (1966).
108. Л. И. Лапидус, М. М. Мусаханов, ЯФ **15**, 1062 (1972).
109. М. В. Терентьев, ibid. **16**, 1044.
110. C. Callan, S. Treiman, Phys. Rev. Lett. **16**, 153 (1966).
111. S. Weinberg, ibid. **18**, 188 (1967); Phys. Rev. **166**, 1568 (1968).
112. Ю. П. Малакян, ЯФ **16**, 1035 (1972).
113. N. D. Hari Dass, Phys. Rev. **D5**, 1542 (1972).
114. М. В. Терентьев, ЯФ **16**, 162 (1972).
115. М. В. Терентьев, Письма ЖЭТФ **15**, 290 (1972).
116. A. Klein, Phys. Rev. **99**, 998 (1955).
117. A. M. Baldin, Nucl. Phys. **18**, 310 (1960).
118. В. А. Петрунькин ЖЭТФ **40**, 1148 (1961); Тр. ФИАН **41**, 165 (1968); Л. И. Лапидус, ЖЭТФ **43**, 1358 (1962); В. М. Шехтер, ЯФ **7**, 1272 (1968).
119. T. Das, V. Mathur, S. Okubo, Phys. Rev. Lett. **19**, 859 (1967).
120. V. G. Vaks, B. L. Ioffe, Nuovo Cimento **10**, 342 (1958).
121. P. Depomier et al., Phys. Lett. **7**, 285 (1963).
122. В. И. Гольданский, О. А. Карпухин, А. В. Куценко, В. В. Павловская, ЖЭТФ **38**, 1695 (1960).

123. F. Iachello, A. Lande, Phys. Lett. **B35**, 205 (1971).
124. T. Fricson, CERN Preprint No. 1410, Geneva, 1971.
125. T. Fricson, J. Hufner, Phys. Lett. **B40**, 459 (1972).
126. G. Backenstoss et al., ibid. **B36**, 403 (1971).
127. Д. Бардин, С. Биленький, ЯФ **16**, 557 (1972).
128. Д. Бардин, С. Биленький, Г. Мицельмахер, Н. Шумейко. ЯФ **14**, 427 (1971).
129. H. Terazawa, Phys. Rev. Lett. **26**, 1207 (1971).
130. Tsu Yao, Phys. Lett. **B35**, 225 (1971).
131. S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **18**, 507 (1967).
132. A. Pais, S. Treiman, ibid. **25**, 975 (1970).
133. D. H. Lyth, Nucl. Phys. **B30**, 195 (1971).
134. М. В. Терентьев, Письма ЖЭТФ **13**, 446 (1971).
135. П. С. Исаев, В. И. Хлесков, ЯФ **16**, 1012 (1972).
136. А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий, Квантовая электродинамика, 2-е изд., М., Физматгиз, 1959.
137. R. L. Goble, J. L. Rosner, Phys. Rev. **D5**, 2345 (1972).
138. T. Das et al., Phys. Rev. Lett. **18**, 759 (1967).
139. E. W. Beier et al., ibid. **30**, 399 (1973).
140. С. А. Бунятов и др., ЯФ **17**, 1307 (1973).
141. П. Э. Волковицкий, Л. Г. Дахно, ЯФ **19**, вып. 1 (1974).
142. G. Backenstoss et al., Phys. Lett. **B43**, 431 (1973).