

**УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК**

537.311.33

**МАГНИТОФОНОННЫЙ РЕЗОНАНС В ПОЛУПРОВОДНИКАХ**

**P. V. Парфеньев, Г. И. Харус, И. М. Цидильковский,  
С. С. Шалым**

**СОДЕРЖАНИЕ**

1. Введение . . . . .	3
2. Магнитофононные осцилляции поперечного магнитосопротивления . . . . .	5
а) Проводимость в поперечном магнитном поле (5). б) Характерные особенности МФ осцилляций (8). в) Амплитуды МФ осцилляций $\sigma_{xx}$ (10). г) Экспериментальные результаты для МФР $\sigma_{xx}$ (12).	
3. Магнитофононные осцилляции продольного магнитосопротивления . . . . .	15
а) Проводимость в продольном магнитном поле (15). б) Температурный сдвиг МФ экстремумов (17). в) Псевдорезонансы продольного магнитосопротивления (20). г) МФ осцилляции в вырожденных полупроводниках (21). д) МФ осцилляции при смешанном рассеянии (23).	
4. МФР в полупроводниках с нестандартной формой зон . . . . .	24
а) Неквадратичный изотропный закон дисперсии (24). б) Анизотропный квадратичный закон дисперсии (26). в) Анизотропный неквадратичный закон дисперсии (27).	
5. Магнитофононные осцилляции других кинетических коэффициентов . . . . .	29
а) Термомагнитные эффекты и эффект Холла (29). б) МФР на горячих электронах (30). в) МФ осцилляции фотомагнитного эффекта и фотопроводимости (32).	
6. Заключение . . . . .	33
Приложение . . . . .	33
Цитированная литература . . . . .	34

**1. ВВЕДЕНИЕ**

Сильные магнитные поля являются важнейшим инструментом исследования электронной системы твердых тел, в частности энергетического спектра электронов. Под сильными магнитными полями понимаются поля, удовлетворяющие условию

$$\Omega\tau \gg 1, \quad (1)$$

где  $\Omega = eH/mc$  — циклотронная частота,  $\tau$  — время релаксации.

При выполнении условия (1) эффекты, связанные с рассеянием, подавляются и наиболее ярко проявляются характерные особенности динамики электрона. Это открывает возможности изучать структуру изоэнергетических поверхностей электронов, исследуя различные кинетические и резонансные явления в сильном магнитном поле (магнитосопротивление, циклотронный резонанс, поглощение ультразвука и т. д.). Именно таким путем в последние годы были определены эффективные массы электронов в полупроводниках и формы поверхностей Ферми многих металлов и полуметаллов.

Квантовомеханическая задача о движении электрона в магнитном поле  $H = (0, 0, H)$  в случае квадратичного изотропного закона дисперсии

впервые была решена Ландау<sup>1</sup>. Собственные значения  $\varepsilon_v$  гамильтониана  $\hat{\mathcal{H}}_0$  при выборке калибровки, в которой векторный потенциал равен  $\mathbf{A} = (0, Hx, 0)$ , и волновые функции  $\psi_v$  имеют вид (без учета спина)

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = \frac{1}{2m} (\hat{p}_x^2 + \hat{p}_z^2) + \frac{1}{2m} (\hat{p}_y + m\Omega x)^2, \quad (2)$$

$$\varepsilon_v = \left( N + \frac{1}{2} \right) \hbar\Omega + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} \quad (N = 0, 1, 2, \dots), \quad (3)$$

$$\psi_v = \exp(i k_y y + i k_z z) \Phi_N \left( \frac{x - X_v}{L} \right); \quad (3a)$$

здесь  $v = (N, k_y, k_z)$  — полный набор квантовых чисел;  $\hbar k_y = p_y$ ,  $\hbar k_z = p_z$  — проекции квазимпульса электрона на оси  $y$ ,  $z$ ;  $X_v = -p_y/m\Omega$  есть  $x$ -координата центра ларморовой орбиты;  $L = (c\hbar/eH)^{1/2}$  — магнитная длина;  $\Phi_N$  — нормированная волновая функция осциллятора. Из записи гамильтониана (2) видно, что энергия электрона в магнитном поле квантуется и спектр представляет собой набор  $N$  подзон Ландау. Квантование энергии электрона имеет место не только для рассмотренного простого закона дисперсии, но и в более общем случае, когда электроны совершают финитное движение по замкнутой траектории в плоскости, перпендикулярной магнитному полю. Так как энергия электрона зависит, согласно (3), только от двух квантовых чисел  $N$  и  $k_z$ , каждая подзона Ландау является вырожденной, причем кратность вырождения пропорциональна магнитному полю. Магнитное поле как бы собирает состояния, равномерно распределенные по зоне, в дискретные подзоны. Вследствие этого существенным образом меняется и плотность состояний:

$$g(\varepsilon) = \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{1/2} \frac{1}{2\pi L^2} \sum_N (\varepsilon - \varepsilon_N)^{-1/2}, \quad \varepsilon_N = \left( N + \frac{1}{2} \right) \hbar\Omega. \quad (4)$$

Плотность состояний обращается в бесконечность на дне каждой подзоны Ландау, т. е. при  $p_z = 0$ . Уровни энергии с  $p_z = 0$  будем для краткости называть просто уровнями Ландау. Условие (1), которое можно переписать в виде

$$\hbar\Omega \gg \frac{\hbar}{\tau}, \quad (1a)$$

означает, что в сильном магнитном поле расстояние между уровнями Ландау значительно больше уширения уровней вследствие столкновений. Очевидно, что выполнение этого условия необходимо для наблюдения всех эффектов, связанных с квантованием электронного спектра. Учет размытия уровней Ландау приводит к сглаживанию особенностей в плотности состояний  $g(\varepsilon)$ <sup>2</sup>.

Немонотонная зависимость  $g(\varepsilon)$  является основной причиной осцилляций различных термодинамических величин (осцилляции де Гааза—ван Альфена) и кинетических коэффициентов (осцилляции Шубникова—де Гааза), которые наблюдались в металлах и полупроводниках с вырожденным электронным газом при низких температурах. Квантовым осцилляциям в полупроводниках посвящено большое количество экспериментальных и теоретических работ (см. обзор<sup>3</sup>).

Не менее важно другое следствие квантования энергии электрона — изменение характера рассеяния. Исследование полевой и температурной зависимостей магнитосопротивления в квантовом пределе  $\hbar\Omega > \bar{\varepsilon}$  ( $\bar{\varepsilon}$  — характерная энергия электрона, равная  $k_0 T$  в случае классической статистики, или энергия Ферми  $\zeta$  в случае вырождения) позволяет получить сведения о преобладающих механизмах рассеяния<sup>4</sup>. Влияние сильных

магнитных полей на характер упругого рассеяния демонстрирует также эффект отрицательного продольного магнитосопротивления <sup>5, 6</sup>. Таким образом, экспериментальные исследования в сильных магнитных полях не только оказываются плодотворными для изучения электронного спектра, но и дают информацию о взаимодействии электронов с фононами, примесями и т. д. Одним из эффектов, обусловленных электрон-фононным взаимодействием, является новый тип осцилляций кинетических коэффициентов, впервые предсказанный Гуревичем и Фирсовым <sup>7</sup> и Клингером <sup>8</sup>. Этот эффект получил название «магнитофононного резонанса» (МФР), так как он обусловлен неупругим резонансным рассеянием электронов на фонах определенной частоты, в частности — на оптических фонах, дисперсией которых можно пренебречь. Средняя вероятность рассеяния увеличивается, когда энергия оптического фона  $\hbar\omega_0$  совпадает с расстоянием между какими-либо двумя уровнями Ландау, что приводит к немонотонной зависимости кинетических коэффициентов от магнитного поля.

Магнитофононный резонанс — это первый известный в науке пример внутреннего резонанса в твердом теле, т. е. такого резонанса, когда возмущающим агентом являются внутренние колебания твердого тела, например оптические фононы. Этим МФР отличается от внешних резонансов — циклотронного, парамагнитного и др., где возмущающий агент — внешнее переменное электромагнитное поле.

Первое краткое сообщение о наблюдении нового резонансного эффекта в *n*-InSb принадлежит Пюри и Джеболлу <sup>9</sup>. Детальное экспериментальное исследование особенностей проявления МФР в поперечном и продольном магнитосопротивлении было выполнено в работах <sup>10, 11</sup> также на электронном антимониде индия, который оказался наиболее удобным материалом для изучения магнитофононных (МФ) осцилляций. Вследствие большой подвижности электронов критерий (1), или эквивалентный критерий  $iH/c \gg 1$ , хорошо выполняется уже в магнитных полях  $\sim 10^4$  э. В настоящее время в связи с развитием техники стационарных и импульсных магнитных полей вполне доступна область полей  $\sim 10^5$ — $10^6$  э и получены обширные экспериментальные данные о МФР в различных полупроводниках. Можно сказать, что МФР становится одним из важнейших методов изучения как энергетического спектра электронов, так и их взаимодействия с фононной системой.

### МАГНИТОФОНОННЫЕ ОСЦИЛЛАЦИИ ПОПЕРЕЧНОГО МАГНИТОСОПРОТИВЛЕНИЯ

а) Проводимость в поперечном магнитном поле. При экспериментальном изучении гальваномагнитных эффектов обычно измеряются компоненты тензора магнитосопротивления  $\rho_{ik}$  ( $H$ ). Однако в теории удобнее вычислять тензор проводимости  $\sigma_{ik}$  ( $H$ ) или плотность тока  $j$ :

$$j_i = \sigma_{ik} (H) E_k; \quad (5)$$

$E$  — напряженность электрического поля;  $i, k = x, y, z$ .

Выберем ось  $z$  вдоль направления магнитного поля. Тогда в случае изотропного закона дисперсии электронов тензор  $\sigma_{ik}$  ( $H$ ) имеет вид

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ -\sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{xx} = \sigma_{yy}. \quad (6)$$

Такой же вид имеет тензор  $\sigma$  в более общем случае, независимо от закона дисперсии электронов, когда ось  $z$  в кубическом кристалле является осью

симметрии 3-го, 4-го или 6-го порядка. Отличные от нуля компоненты тензора магнитосопротивления  $\rho_{ik}$  связаны с компонентами тензора  $\sigma_{ik}$  следующим образом:

$$\rho_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2} = \rho_{yy}, \quad \rho_{xy} = -\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2}, \quad \rho_{zz} = \frac{1}{\sigma_{zz}}. \quad (7)$$

Если изоэнергетическая поверхность электронов не содержит открытых орбит, то в магнитных полях, удовлетворяющих условию (1), компоненты  $\sigma_{ik}$  имеют, как известно, следующую асимптотику \*):

$$\sigma_{xx} \sim \sigma_0 (\Omega t)^{-2}, \quad \sigma_{xy} \sim \sigma_0 (\Omega t)^{-1}, \quad \sigma_{zz} \sim \sigma_0, \quad (8)$$

где  $\sigma_0$  — проводимость при  $H = 0$ . Таким образом, отношение  $\sigma_{xx}/\sigma_{xy} \sim \sim (\Omega t)^{-1} \ll 1$  является малым параметром, и в наимизшем приближении по этому параметру получим из (7)

$$\rho_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{xy}^2}, \quad \rho_{xy} = -\frac{1}{\sigma_{xy}}. \quad (7a)$$

Существенно, что в этом приближении для произвольного закона дисперсии холловская проводимость  $\sigma_{xy}$  не зависит от рассеяния:

$$\sigma_{xy} = \frac{enc}{H}; \quad (9)$$

$n$  — концентрация электронов. В то же время проводимость  $\sigma_{xx}$  пропорциональна, а  $\sigma_{zz}$  обратно пропорциональна вероятности рассеяния. Это связано с различным характером движения электрона параллельно и перпендикулярно магнитному полю. Проще всего это понять в случае квадратичного изотропного закона дисперсии, когда гамильтониан имеет вид (2). Матричные элементы оператора скорости  $\hat{v}$  равны

$$v_{NN'}^x = i \sqrt{\frac{\hbar \Omega}{2m}} (V \bar{N} \delta_{N', N-1} - V \bar{N+1} \delta_{N', N+1}) \delta_{k_y' k_y} \delta_{k_z' k_z}, \quad (10a)$$

$$v_{NN'}^y = V \sqrt{\frac{\hbar \Omega}{2m}} (V \bar{N} \delta_{N', N-1} - V \bar{N+1} \delta_{N', N+1}) \delta_{k_y' k_y} \delta_{k_z' k_z}, \\ v_{NN'}^z = \frac{\hbar k_z}{m} \delta_{NN'} \delta_{k_y' k_y} \delta_{k_z' k_z}. \quad (10b)$$

Поэтому для вычисления макроскопических средних значений плотности тока  $j_x$  вдоль электрического поля  $E = (E, 0, 0)$  и плотности холловского тока  $j_y$  необходимо знание недиагональных элементов матрицы плотности  $\rho_{\mu\nu}$ :

$$j_\alpha = \text{Sp}(\hat{\rho}, \hat{j}_\alpha) = \sum_{\mu, \nu} \rho_{\mu\nu} (j_\alpha)_{\nu\mu} \quad (\alpha = x, y). \quad (11)$$

Таким образом, задача о вычислении поперечной  $\sigma_{xx}$  и холловской  $\sigma_{xy}$  компонент тензора проводимости сводится к нахождению из уравнения движения для оператора матрицы плотности:

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = [\hat{\mathcal{H}}, \hat{\rho}]. \quad (12)$$

В этом уравнении  $\hat{\mathcal{H}}$  есть полный гамильтониан, включающий электрическое поле и взаимодействие электрона с рассеивателями. Эта задача была решена в работе Адамса и Холстейна<sup>4</sup> в наимизшем приближении

\*) Мы не рассматриваем случай двух типов носителей заряда разного знака с равными концентрациями, например чистые полуметаллы или собственные полупроводники. При равном количестве электронов и дырок в сильных магнитных полях  $\sigma_{xy} = 0$  и  $\rho_{xx} = 1/\sigma_{xx}$ .

по параметру  $(\Omega t)^{-1}$  для упругого рассеяния. Аргирес и Рот<sup>12</sup> получили аналогичным методом формулу для  $\sigma_{xy}$  в случае неупругого рассеяния.

В нулевом приближении по рассеивающему потенциалу

$$j_y = \frac{enc}{H} E, \quad (13)$$

что согласуется с классическим выражением для  $\sigma_{xy}$  (9). Холловский ток имеет недиссипативный характер и является следствием дрейфа электронов в скрещенных электрическом и магнитном полях со скоростью  $v_{dr} = cE/H$ . В этом приближении ток вдоль электрического поля  $j_x = 0$ . Вследствие взаимодействия электрона с нерегулярностями кристалла становятся возможными переходы электрона между различными состояниями с изменением квантового числа  $X_v$ . При этом число переходов в единицу времени против электрического поля оказывается больше, чем в направлении поля, что и приводит к электрическому току  $j_x$ , пропорциональному вероятности перехода. Учет рассеяния в борновском приближении приводит к следующему выражению для поперечной проводимости:

$$\sigma_{xx} = \frac{e^2}{k_0 T} \sum_{\mu, v} f_\mu^0 (1 - f_v^0) w_{\mu v} \frac{(X_\mu - X_v)^2}{2}, \quad (14)$$

где  $f_\mu^0 = f_0(\varepsilon_\mu)$  — равновесная функция распределения электронов,  $w_{\mu v}$  — вероятность перехода электрона из состояния  $\mu$  в состояние  $v$ . Для электрон-фононного взаимодействия

$$w_{\mu v} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_q |C_q|^2 |\langle \mu | e^{iqr} | v \rangle|^2 [(N_q + 1) \delta(\varepsilon_\mu - \varepsilon_v - \hbar\omega_q) + N_q \delta(\varepsilon_\mu - \varepsilon_v + \hbar\omega_q)], \quad (15)$$

где  $C_q$  — фурье-образ потенциала взаимодействия,  $N_q = [\exp(\hbar\omega_q/k_0 T) - 1]^{-1}$  — функция Планка,

$$\langle \mu | e^{iqr} | v \rangle = I_{NN'} \delta(k'_x - k_x - q_x) \delta(k'_y - k_y - q_y), \\ I_{NN'} = \int \varphi_{N'} e^{iq_x x} \varphi_N dx. \quad (16)$$

Переходя к интегрированию по энергии, можно выражение (14) представить в следующем виде:

$$\sigma_{xx} = \frac{e^2 N_0}{(2\pi)^4 \hbar^2 \Omega k_0 T} \int d\varepsilon \sum_{N, N'} G_{NN'}(\varepsilon) \frac{f_0(\varepsilon) [1 - f_0(\varepsilon + \hbar\omega_0)]}{\sqrt{\varepsilon - \varepsilon_N} \sqrt{\varepsilon - \varepsilon_{N'} + \hbar\omega_0}}; \quad (17)$$

здесь  $G_{NN'}(\varepsilon)$  есть некоторая плавная функция энергии и квантовых чисел  $N, N'$ :

$$G_{NN'}(\varepsilon) = \int dq_x dq_y |C_q|^2 q_y^2 |I_{NN'}|^2. \quad (18)$$

Дисперсией оптических фононов можно пренебречь, поэтому  $\hbar\omega_0$  и  $N_0$  не зависят от волнового вектора  $q$ .

Подынтегральное выражение в формуле (17) имеет особенности в точках  $\varepsilon = \varepsilon_N$  и  $\varepsilon = \varepsilon_{N'} - \hbar\omega_0$ , которые отражают особенности в плотности начальных и конечных состояний электрона. Каждая из этих особенностей интегрируемого типа, и, следовательно, при произвольном значении магнитного поля интеграл по энергии, вообще говоря, не имеет особенностей. Исключение составляют такие значения  $H$ , при которых особенности начальных и конечных состояний совпадают, т. е.

$$M\Omega = \omega_0 \quad (M = 1, 2, 3, \dots). \quad (19)$$

В этом случае интеграл по энергии логарифмически расходится и, следовательно, поперечное магнитосопротивление резко возрастает.

Подобное поведение  $\rho_{xx}(H)$  вблизи резонансных значений  $H$ , определяемых формулой (19), приводит к осцилляциям, периодическим по обратному магнитному полю, с периодом

$$\Delta \left( \frac{1}{H} \right) = \frac{e}{m\omega_0 c}. \quad (20)$$

Период осцилляций зависит от эффективной массы электрона  $m$  и предельной частоты оптических фононов  $\omega_0$ . Эти осцилляции называются магнитофононными. Физически МФ осцилляции обусловлены разрывным характером плотности состояний (4) в ее зависимости от энергии. Осцилляционные максимумы  $\rho_{xx}(H)$  должны иметь место тогда, когда возможны переходы электронов между двумя уровнями Ландау с поглощением или испусканием оптического фона  $\hbar\omega_0$ .

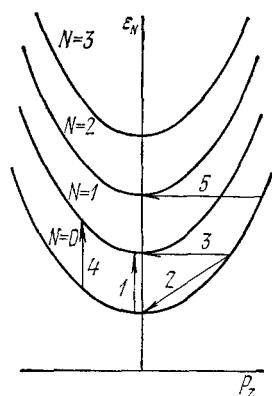


Рис. 1. Схема переходов электронов между подзонами Ландау.

Линии дают вклад горизонтальные переходы типа 3 и 5, связанные с упругим рассеянием на акустических фононах и примесях \*).

Поскольку в наименшем приближении по взаимодействию поперечная проводимость  $\sigma_{xx}$  пропорциональна вероятности рассеяния, различные механизмы рассеяния не интерферируют, т. е. вносят в  $\sigma_{xx}$  аддитивный вклад:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}^{\text{опт}} + \sigma_{xx}^{\text{упр}}, \quad (21)$$

где  $\sigma_{xx}^{\text{опт}}$  — немонотонная часть, обусловленная рассеянием электронов на оптических фононах (17), а  $\sigma_{xx}^{\text{упр}}$  — некоторая плавная функция магнитного поля, связанная с упругим рассеянием. Для  $\sigma_{xx}^{\text{упр}}$  справедлива общая формула (14), если в нее подставить соответствующее выражение для вероятности перехода  $w_{\mu\nu}$ . В квантовом пределе  $\hbar\Omega > \zeta$  или  $\hbar\Omega \gg k_B T$  поперечная проводимость  $\sigma_{xx}^{\text{упр}}$  есть] монотонная функция магнитного поля <sup>4</sup>.

б) Характерные особенности МФ осцилляций. Рассмотрим характерные черты МФ осцилляций, которые отличают их от квантовых осцилляций Шубникова—де Гааза (ШГ) и де Гааза—ван Альфена. Прежде всего заметим, что МФ резонанс связан с рассеянием электронов и поэтому не может проявляться в термодинамически равновесных

\*.) Неупругость рассеяния электронов на акустических фононах может оказаться существенной лишь в области очень низких температур или в сверхсильных магнитных полях. Однако эта неупругость не может привести к возникновению осцилляций, подобных МФР, ибо акустические фононы обладают сильной дисперсией  $\omega_q \sim q$ .

эффектах, т. е. эффектах недиссипативной природы. Как следует из (20), величина периода  $\Delta (1/H)$  не зависит от концентрации электронов в отличие от периода осцилляций ШГ. Простая зависимость  $\Delta (1/H)$  от эффективной массы  $m$  и предельной частоты  $\omega_0$  позволяет экспериментально определить одну из этих величин, если другая известна.

Из формулы (17) следует, что немонотонная зависимость  $\sigma_{xx}(H)$  не связана с видом функции распределения  $f_0(\varepsilon)$ . Это значит, что МФР должен иметь место независимо от статистики электронов. Случай статистики Ферми исследовал Эфрос<sup>13</sup>, который показал, что МФ осцилляции сохраняются и в квантовом пределе  $\hbar\Omega > \zeta$ , где осцилляции Шубникова—де Гааза невозможны.

Амплитуда МФ осцилляций  $\rho_{xx}$  имеет также своеобразную температурную зависимость. При низких температурах  $T \ll \theta_0$  ( $\theta_0 = \hbar\omega_0/k_0$  — характерная температура возбуждения оптических фононов) величина  $\sigma_{xx}^{\text{опт}}$  (17) пропорциональна  $\exp(-\theta_0/T)$  и основной вклад в проводимость вносят упругие процессы рассеяния. Возрастание температуры приводит к увеличению роли рассеяния электронов на оптических фононах, вследствие чего возрастает и амплитуда МФ осцилляций. Однако при температурах, сравнимых с температурой  $\theta_0$ , существенным становится тепловое размытие уровней Ландау, т. е. тепловой разброс электронов по подзоне Ландау. При этом в области магнитных полей  $\Omega \leq \omega_0$ , где возможны МФ осцилляции, средняя тепловая энергия электронов  $k_0 T \geq \hbar\Omega$ . Как показано в<sup>7</sup>, при  $k\Omega < k_0 T$  осциллирующая часть  $\sigma_{xx}^{\text{опт}}$  представляет собой малую поправку порядка  $\hbar\Omega/k_0 T$  к классическому значению  $\sigma_{xx}^{\text{опт}}$  в отсутствие магнитного поля. Таким образом, температурная зависимость амплитуды осцилляций немонотонна. Существует некоторая оптимальная температура, при которой амплитуда МФ осцилляций максимальна. Эта температура, меньшая  $\theta_0$ , зависит от вклада упругих процессов рассеяния в полную проводимость. Следует подчеркнуть, что амплитуда осцилляций ШГ возрастает с понижением температуры вплоть до таких температур, при которых уширение уровней Ландау за счет столкновений начинает играть основную роль в «зарезании» осцилляционных пиков.

Логарифмический рост  $\sigma_{xx}(H)$  вблизи резонансных значений  $H$  не зависит от вида функции  $G_{NN'}(\varepsilon)$  (18) и обусловлен лишь специфическим поведением плотности состояний. Как яствует из (18), вид функции  $G_{NN'}(\varepsilon)$  определяется характером зависимости  $C_q$  от волнового вектора фона  $q$ . В свою очередь зависимость  $C_q$  от  $q$  отражает характер взаимодействия электронов с оптическими фононами. Так, в кристаллах с ионной связью, где электроны взаимодействуют с поляризационными колебаниями,

$$|C_q|^2 = \frac{A}{q^2}, \quad A = 2\pi\hbar\omega_0 e^2 \left( \frac{1}{\kappa_\infty} - \frac{1}{\kappa_0} \right); \quad (22)$$

$\kappa_0$  и  $\kappa_\infty$  — статическая и динамическая диэлектрические постоянные. В кристаллах с ковалентной связью, где взаимодействие электронов с оптическими фононами имеет неполярный характер,  $C_q$  есть константа, не зависящая от волнового вектора  $q$ :

$$C_q = C_0. \quad (23)$$

Явная зависимость  $\sigma_{xx}(H)$  вблизи резонансов для случая взаимодействия электронов с поляризационными фононами была получена в<sup>7</sup> (невырожденный электронный газ) и в<sup>13</sup> (вырожденный газ). Введем величину  $\delta$ , которая служит мерой отклонения от резонанса:

$$\delta = \left| M - \frac{\omega_0}{\Omega} \right| \quad (M = 1, 2, \dots). \quad (24)$$

Тогда при  $\delta\hbar\Omega/k_0T \ll 1$  в случае статистики Больцмана

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}^B \left[ 1 + \frac{3}{4} \sqrt{\frac{\Omega}{\omega_0}} \sqrt{\frac{\hbar\Omega}{k_0T}} \ln \left( \frac{2k_0T}{\delta\hbar\Omega} \right) \right], \quad (25)$$

где  $\sigma_{xx}^B$  — монотонная часть проводимости:

$$\sigma_{xx}^B = \frac{4\alpha ne^2}{3m} \left( \frac{\omega_0}{\Omega} \right)^2 \frac{\hbar}{k_0T} \exp \left( -\frac{\hbar\omega_0}{k_0T} \right). \quad (25a)$$

В случае статистики Ферми

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}^F \left( 1 + \frac{3}{8} \frac{\hbar\Omega}{\zeta} \ln \frac{1}{\delta} \right), \quad (26)$$

$$\sigma_{xx}^F = \frac{4\alpha e^2}{3\pi^2\hbar} \frac{\zeta}{k_0T} \left( \frac{\omega_0}{\Omega} \right)^2 \sqrt{\frac{2m\omega_0}{\hbar}} \exp \left( -\frac{\hbar\omega_0}{k_0T} \right). \quad (26a)$$

В этих формулах  $\alpha$  — безразмерная константа связи электронов с оптическими фононами:

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar} \sqrt{\frac{m}{2\hbar\omega_0}} \left( \frac{1}{\kappa_\infty} - \frac{1}{\kappa_0} \right). \quad (27)$$

в) Амплитуды МФ осцилляций  $\sigma_{xx}$ . Выражения (25), (26) приводят к бесконечным значениям осцилляционных максимумов. Однако при достаточно малых  $\delta$  проводимость  $\sigma_{xx}$  перестает возрастать пропорционально  $\ln(1/\delta)$ . С физической точки зрения очевидно, что всегда существует тот или иной механизм зарезания, ограничивающий высоту осцилляционного пика. Введем величину  $\delta_0$  — минимальное значение  $\delta$ , определив ее таким образом, чтобы  $\ln(1/\delta)$  в (25) определял максимальное значение  $\sigma_{xx}$  в резонансе, вычисленное с учетом зарезания. Фактически такой подход, не учитывающий формы линии МФ резонанса, может дать лишь довольно грубую оценку амплитуды осцилляций. Среди возможных механизмов, устраивающих расходимость в (17), отметим следующие<sup>14</sup>:

1) Размытие уровней Ландау вследствие упругих столкновений, приводящее к сглаживанию особенностей в плотности состояний. В этом случае

$$\delta_0 \approx (\Omega\tau)^{-1}. \quad (28)$$

2) Размытие, обусловленное электрон-электронным взаимодействием. Роль кулоновского взаимодействия электронов проявляется в перенормировке электрон-фононного потенциала рассеяния. Как показано в работе<sup>14</sup>, экранирование электрон-фононного взаимодействия также ограничивает амплитуду резонансного пика, и соответствующее значение  $\delta_0$  равно

$$\delta_0 = \frac{3\sqrt{\pi^2 e_0^2 C}}{e_0^2} \frac{ne^2}{\kappa_0 m \omega_0^2}, \quad (29)$$

где  $e_0$  — основание натуральных логарифмов,  $C = 0,577$  — постоянная Эйлера.

3) Дисперсия оптических фононов. Пусть частота оптического фона  $\omega_q = \omega_0(1 - a^2q^2)$ ,

где  $a$  — величина порядка постоянной решетки. Тогда для  $\delta_0$  можно получить

$$\delta_0 = e_0 \left( \frac{a}{L} \right)^2. \quad (30)$$

Сравнение величин  $\delta_0$ , определяемых формулами (28) — (30), показывает, что учет дисперсии фононов практически никогда не может играть существенную роль. Столкновительное уширение уровней Ландау является определяющим фактором в условиях, когда упругое рассеяние является

доминирующим. Роль кулоновского взаимодействия может стать заметной лишь при достаточно высокой концентрации электронов.

Для корректного вычисления формы линии и амплитуды МФ резонанса необходимо более последовательно учесть взаимодействие электронов с оптическими фононами, не ограничиваясь позшим порядком теории возмущений. Достаточно сильное взаимодействие электрона с поляризационными колебаниями приводит к образованию полярона. При  $\alpha \ll 1$  энергия полярона равна<sup>15</sup>

$$\varepsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \left( 1 - \frac{\alpha}{6} \right) - \alpha \hbar \omega_0. \quad (31)$$

Из (31) видно, что полярный эффект приводит к увеличению эффективной массы электрона и понижению энергии на величину  $\alpha \hbar \omega_0$ . В слабых магнитных полях,  $\Omega \ll \omega_0$ , точный учет электрон-фононного взаимодействия также приводит лишь к перенормировке циклотронной массы<sup>16</sup>. Ситуация коренным образом меняется в области магнитных полей  $\Omega \approx \omega_0$ <sup>17,18</sup>. Вследствие резкого усиления электрон-фононного взаимодействия в магнитных полях, удовлетворяющих условию МФ резонанса (19), происходит перестройка энергетического спектра электрон-фононной системы. В частности, при  $\Omega = \omega_0$  энергия бесфононного состояния, в котором электрон находится на первом уровне Ландау ( $N = 1$ ), отличается от энергии состояния, когда электрон принадлежит нулевому уровню Ландау и имеется один оптический фонон с энергией  $\hbar \omega_0$ . Уровень энергии бесфононного состояния при этом оказывается сильно размытым за счет резонансного испускания оптических фононов. Эти особенности энергетического спектра проявляются при исследовании циклотронного резонанса<sup>19</sup>, междузонного магнитопоглощения<sup>18</sup>, примесного комбинированного резонанса в InSb<sup>20</sup>.

Уширение уровня Ландау  $N = 1$  приводит к зарезанию также и МФ максимума поперечной проводимости. С учетом уширения Дворин<sup>21</sup> рассчитал величину  $\sigma_{xx}$  в точке  $\Omega = \omega_0$ . Строгий учет взаимодействия электронов с оптическими фононами дает конечную величину проводимости в резонансной точке:

$$\sigma_{xx} = \frac{\alpha n e^2 \hbar}{m k_0 T} \exp \left( -\frac{\hbar \omega_0}{k_0 T} \right) \left[ 1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{\hbar \omega_0}{k_0 T} \right)^{1/2} F \left( \alpha^{2/3} \frac{\hbar \omega_0}{k_0 T} \right) \right], \quad (32)$$

где  $F$  — некоторая монотонная функция, вычисленная в<sup>21</sup>. При  $\alpha^{2/3} \hbar \omega_0 / k_0 T \ll 1$  эта функция близка к единице. Появление в аргументе  $F$  константы связи  $\alpha$  в степени 2/3 отражает тот факт, что выражение (32) не может быть получено в рамках теории возмущений. Накаяма<sup>22</sup> методом функций Грина вычислил спектр и плотность состояний электронов в условиях резонансного взаимодействия с оптическими фононами. Расчет поперечной проводимости в области магнитных полей  $\Omega \approx \omega_0$  показывает, что наряду с зарезанием пика МФР имеет место небольшой сдвиг положений МФ максимумов в сторону больших полей относительно резонансных значений (полярный сдвиг). Этот сдвиг можно интерпретировать как перенормировку массы электрона вследствие резонансного электрон-фононного взаимодействия. Перенормированная масса при  $\Omega \approx \omega_0$  больше полярной массы  $m_{\text{пол}} = m [1 + (\alpha/6)]$ , определяемой формулой (31).

Чтобы оценить роль полярного эффекта в зарезании магнитофононного пика, рассмотрим случай  $n$ -InSb ( $\alpha = 0,02$ ,  $u = 5 \cdot 10^5 \text{ см}^2/\text{сек}$ ) при  $T = 100 \text{ }^{\circ}\text{K}$ . В магнитном поле  $H = 34 \text{ кэ}$ , соответствующем первому МФ максимуму, значение  $\sigma_{xx}$ , даваемое выражением (32), примерно в семь раз меньше, чем полученное из (25) и (28). Таким образом, резонансное испускание оптических фононов является главным эффектом, определяющим амплитуду МФ осцилляций. Это тем более справедливо для

полупроводников с меньшей подвижностью и большей константой связи электронов, чем у  $n$ -InSb.

Баркер<sup>23</sup>, наряду с уширением, обусловленным резонансным испусканием оптических фононов, рассмотрел уширение уровней Ландау, связанное с многократным рассеянием медленных электронов с  $p_z \approx 0$  на примесных центрах<sup>26</sup>. Была получена формула для осциллирующей части поперечного магнитосопротивления:

$$\frac{\Delta\rho_{xx}^{osc}}{\rho_0} = \sum_{r=1} \frac{1}{r} \exp\left(-\frac{r\Gamma\omega_0}{\Omega}\right) \cos\left(2\pi r \frac{\omega_0}{\Omega}\right). \quad (33)$$

Величина  $\Gamma$ , определяющая амплитуду МФ пика, зависит от константы связи  $\alpha$  и амплитуды рассеяния на примесном центре и не зависит от магнитного поля. Согласно<sup>23</sup>, уширение, обусловленное взаимодействием электронов с примесными центрами, является определяющим для  $n$ -GaAs.

Формулы (25), (26) и (32) дают возможность оценить по порядку величины отношение осциллирующей части  $\sigma_{xx}$  к фону лишь в случае, когда рассеяние на оптических фононах является доминирующим. Если же преобладают упругие механизмы рассеяния, то, как видно из (24), фон определяется аддитивным вкладом  $\sigma_{xx}^{upr}$ . В квантовом пределе  $\hbar\Omega > > \zeta, k_0T$  зависимость  $\sigma_{xx}^{upr}$  от  $H$  имеет монотонный характер. Гуревич и др.<sup>24</sup> приводят следующие оценки для отношения  $\frac{\sigma_{xx}^{osc}}{\sigma_0}$  к величине проводимости  $\sigma_{xx}^{upr}$  в квазиклассическом пределе  $\hbar\Omega \ll k_0T$ . В случае статистики Больцмана

$$\frac{\sigma_{xx}^{osc}}{\sigma_0} \approx \alpha \exp\left(-\frac{\hbar\omega_0}{k_0T}\right) \left(\frac{\hbar\omega_0}{k_0T}\right)^{3/2} \frac{uH}{c} \left(\frac{k_0T}{\hbar\Omega}\right)^n. \quad (34)$$

Показатель степени  $n$  определяется механизмом рассеяния ( $n = 0$  при рассеянии на ионах примесей,  $n = 1$  при рассеянии на пьезоакустических колебаниях,  $n = 2$  при рассеянии на деформационном потенциале). В случае статистики Ферми

$$\frac{\sigma_{xx}^{osc}}{\sigma_0} \approx \alpha \exp\left(-\frac{\hbar\omega_0}{k_0T}\right) \frac{\hbar\omega_0}{k_0T} \frac{uH}{c} \left(\frac{\hbar\omega_0}{\zeta}\right)^{3/2}. \quad (35)$$

Из этих оценок следует, что для наблюдения МФ осцилляций предпочтительными должны быть полупроводники с большой подвижностью электронов, причем область температур не должна быть слишком низкой по сравнению с  $\theta_0$ , чтобы оптическая ветвь фононного спектра была в достаточной степени возбуждена. В приложении (стр. 33) приведены значения предельных частот  $\omega_0$  продольных оптических фононов и констант связи  $\alpha$  для ряда полупроводниковых соединений.

г) Экспериментальные результаты для МФР  $\sigma_{xx}$ . Как уже отмечалось,  $n$ -InSb является чрезвычайно удобным материалом для изучения МФР, так как большие подвижности электронов позволяют использовать легко доступные стационарные магнитные поля<sup>10, 11</sup>. Относительно простая структура зоны проводимости InSb обуславливает и простую экспериментальную картину осцилляций. Характеристическая температура  $\theta_0 = 275$  °К для InSb, поэтому при  $T \sim 100$  °К оптическая ветвь фононного спектра в достаточной степени возбуждена.

Экспериментальные данные по исследованию МФР в  $n$ -InSb подтвердили следующие основные выводы теории:

1) Экспериментальная зависимость поперечного магнитосопротивления для чистого образца  $n$ -InSb ( $n = 6,5 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$ ,  $u = 6,7 \cdot 10^5 \text{ см}^2/\text{э.сек}$ ), представленная на рис. 2, показывает, что система максимумов  $\rho_{xx}(H_{max} = 34; 17; 11,3 \text{ и } 8,5 \text{ кэ})$  периодична по обратному полю с перио-

дом  $\Delta(1/H) = (3,0 \pm 0,2) \cdot 10^{-5}$  э. Положения максимумов соответствуют условию МФР (19) для переходов электронов с уровня Ландау  $N = 0$  на уровне  $N = 1, 2, 3, 4$ .

По положению первого со стороны стороны сильных магнитных полей максимума  $H_1 = 34$  кэ при известном значении  $\omega_0 = 3,64 \cdot 10^{13}$  сек<sup>-1</sup> можно определить величину эффективной массы электрона  $m$ . Так как зона проводимости InSb является непараболичной, а при резонансном рассеянии

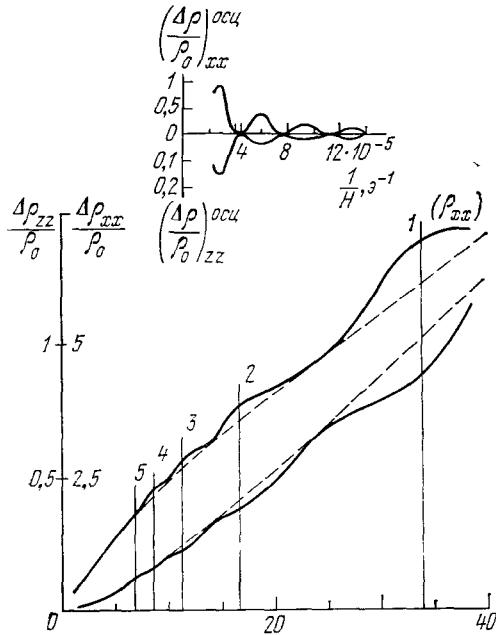


Рис. 2. Зависимость поперечного  $\Delta\rho_{xx}/\rho_0$  и продольного  $\Delta\rho_{zz}/\rho_0$  магнитосопротивлений от магнитного поля  $H$  (кэ) для  $n$ -InSb при  $T = 90$  °К.

Образец 1:  $n = 6,7 \cdot 10^{13}$  см<sup>-3</sup>,  $u = 6,7 \cdot 10^5$  см<sup>2</sup>/э.сек; образец 2:  $n = 4,1 \cdot 10^{13}$  см<sup>-3</sup>,  $u = 5,5 \cdot 10^5$  см<sup>2</sup>/э.сек<sup>11</sup>. Штриховые кривые представляют монотонный фон, на который налагаются осцилляции резонансной природы. В верхней части рисунка приведена осциллирующая часть магнитосопротивления как функция обратного магнитного поля. Вертикальные прямые соответствуют резонансным полям с  $M = 1, 2, 3, \dots$  согласно (19).

энергия электронов заметно изменяется (на  $\hbar\omega_0$ ), то вычисленное значение эффективной массы электронов  $m = 0,016m_0$  оказывается больше запасения  $m_n = 0,014m_0$  для массы на дне зоны проводимости ( $m_0$  — масса свободного электрона). Величина периода осцилляций, вычисленная по формуле (20) для  $m = 0,016m_0$ ,  $\Delta(1/H) = 2,96 \cdot 10^{-5}$  э<sup>-1</sup>, хорошо совпадает с экспериментальным значением  $\Delta(1/H) = 3 \cdot 10^{-5}$  э<sup>-1</sup>.

2) Как было показано, должна существовать оптимальная температура, при которой осциллирующая часть магнитосопротивления максимальна. Из приведенных в <sup>10</sup> экспериментальных кривых для  $\rho_{xx}(H)$ , измеренных на одном образце  $n$ -InSb в интервале температур 63—195 °К следует, что высота осцилляционных пиков максимальна при  $T = 104$  °К и составляет  $\approx 15\%$  от фона. Период и фаза осцилляций поперечного магнитосопротивления не зависят от температуры.

3) Как следует из теории, положение максимумов поперечного магнитосопротивления и период МФ осцилляций не должны зависеть от концентрации электронов. Приведенная на рис. 3 серия экспериментальных

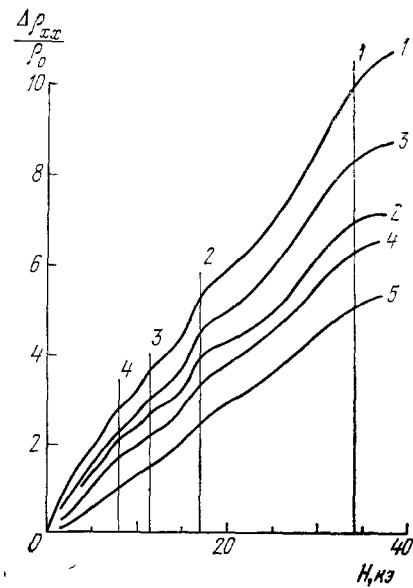


Рис. 3. Поперечное магнитосопротивление в функции от магнитного поля при  $T = 90$  °К для образцов  $n$ -InSb с различной концентрацией электронов.

$n$  (см<sup>-3</sup>) =  $5,2 \cdot 10^{13}$  (1),  $6,5 \cdot 10^{13}$  (2),  $8,3 \cdot 10^{13}$  (3),  $2,4 \cdot 10^{14}$  (4) и  $1,3 \cdot 10^{15}$  (5).

кривых, полученных для образцов  $n$ -InSb с различной концентрацией электронов (от  $5,2 \cdot 10^{13}$  до  $1,3 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$ ) при  $T = 90^\circ\text{K}$ , наглядно показывает отличие эффекта МФР от осцилляций ШГ. Амплитуда МФ осцилляций уменьшается по мере уменьшения подвижности с увеличением степени легирования образца.

Использование сильных импульсных магнитных полей позволило обнаружить МФ осцилляции поперечного магнитосопротивления в  $n$ -InAs<sup>25</sup>, где эффективная масса электронов больше и частота продольных оптических фононов выше, чем у InSb. Необходимо отметить, что из-за большой монотонной составляющей магнитосопротивления авторы<sup>26</sup> смогли наблюдать МФ осцилляции  $\rho_{xx}(H)$  только в результате существенного повышения

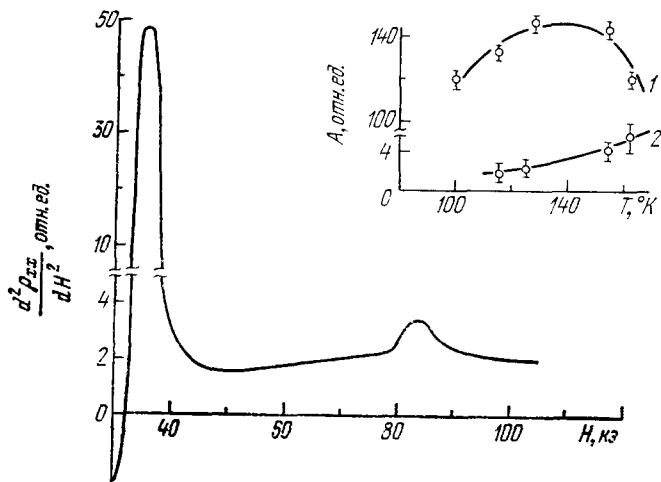


Рис. 4. Зависимость  $d^2\rho_{xx}/dH^2$  от  $H$  при  $T = 163^\circ\text{K}$ .  
Вверху справа изображена зависимость амплитуды  $A$  от температуры  
максимумов при  $H = 34 \text{ кэ}$  (кривая 1) и  $H = 82 \text{ кэ}$  (2)<sup>40</sup>.

разрешающей способности аппаратуры, используя методику двойного дифференцирования. У  $n$ -InAs при  $T = 300^\circ\text{K}$  обнаружены два максимума  $\rho_{xx}(H)$ , соответствующие резонансным переходам электронов между нулевым и первым ( $H_1 = 76 \text{ кэ}$ ) и нулевым и вторым ( $H_2 = 33 \text{ кэ}$ ) уровнями Ландау. Аналогичные результаты для МФ осцилляций поперечного магнитосопротивления в  $n$ -InAs были получены в работе<sup>27</sup>. Пользуясь формулой (19) и полагая  $\omega_0 = 4,6 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}$ , получаем для эффективной массы электронов значение  $m = 0,025m_0$ , которое из-за непарabolичности зоны отличается от значения массы на дне зоны  $m_n = 0,023m_0$ . Более детально влияние непарabolичности на положение МФ экстремумов рассмотрено в гл. 4.

МФ осцилляции поперечного магнитосопротивления изучались также на  $n$ -GaAs<sup>28, 28, 29</sup>,  $n$ -Ge<sup>30, 31</sup>,  $n$ -InP<sup>32, 33</sup>,  $n$ -CdTe<sup>34</sup>,  $n$ -CdSe<sup>35</sup>,  $p$ -Te<sup>36-38</sup>,  $p$ -Ge<sup>31</sup>,  $p$ -InSb и  $p$ -GaAs<sup>39</sup>. Исследования МФР в веществах с относительно большой константой связи  $\alpha$  ( $n$ -CdTe,  $n$ -CdSe,  $p$ -Te) показали, что в условиях резонанса  $\Omega = \omega_0$  перенормировка эффективной массы может быть описана эмпирической формулой

$$\tilde{m} = m \left( 1 + \frac{\alpha}{2} \right). \quad (36)$$

Авторы<sup>40</sup>, изучая температурную зависимость амплитуд МФ пиков  $\rho_{xx}(H)$  в  $n$ -InSb, обнаружили, что при  $T > 100^\circ\text{K}$ , помимо основных, появляется дополнительный максимум при  $H = 82 \text{ кэ}$  (рис. 4). Аномаль-

ная температурная зависимость его амплитуды, которая возрастает при  $T > 120$  °К, где амплитуды обычных МФ максимумов убывают, позволяют предположить, что этот пик вызван неупругим рассеянием с участием двух оптических фононов. Вероятность двухфононного процесса поглощения пропорциональна  $\exp(-2\theta_0/T)$ , тогда как вероятность однофононного пропорциональна  $\exp(-\theta_0/T)$ . Поэтому температура, при которой двухфононный пик должен достигать наибольшей величины, должна быть выше оптимальной температуры для однофононных пиков. Условие МФР для двухфононных процессов имеет вид

$$\varepsilon_{N'} - \varepsilon_N = 2\hbar\omega_0. \quad (37)$$

Из условия (37) с учетом непарabolicности зоны проводимости InSb (см. гл. 4) получено значение  $H = 83,5$  кэ в хорошем согласии с экспериментом.

Вклад многофононных процессов рассеяния при  $T < \theta_0$  в кинетические коэффициенты невелик, и практически его не удается выявить. Лишь резонансный характер рассеяния в условиях МФР позволяет явно обнаружить этот вклад.

Интенсивность пиков, вызванных двухфононными процессами, невелика. Амплитуда максимума  $\rho_{xx}$  при  $H = 82$  кэ составляет около 20% наиболее интенсивного максимума основной серии ( $H_1 = 34$  кэ), или около 1% всей величины  $\rho_{xx}$ . Некоторые из двухфононных экстремумов по положению близки к гораздо более интенсивным однофононным, и, вероятно, поэтому их не удалось обнаружить.

Резонансные пики, связанные с многофононными процессами, были обнаружены также при исследовании МФР в  $n$ -GaAs<sup>41</sup>.

### 3. МАГНИТОФОНОННЫЕ ОСЦИЛЛАЦИИ ПРОДОЛЬНОГО МАГНИТОСОПРОТИВЛЕНИЯ

а) Проводимость в продольном магнитном поле. Как следует из (106), только диагональные элементы оператора плотности тока в направлении магнитного поля ( $j_z$ ) отличны от нуля. Поэтому для описания продольных эффектов необходимы лишь диагональные элементы матрицы плотности. Уравнение движения для диагональных элементов матрицы плотности, т. е. для функции распределения, в линейном приближении по электрическому полю  $E = E_z$  имеет вид обычного кинетического уравнения Больцмана:

$$eE \frac{\hbar k_z}{m} \frac{df_\mu^0}{d\varepsilon_\mu} = \sum_v [w_{\mu v} f_\mu (1 - f_v) - w_{v\mu} f_v (1 - f_\mu)]; \quad (38)$$

здесь  $f_\mu = \rho_{\mu\mu}$  — неравновесная, а  $f_\mu^0 = f_0(\varepsilon_\mu)$  — равновесная функции распределения,  $w_{\mu v}$  — вероятность перехода (см. (15)).

Из выражения для плотности продольного тока

$$j_z = \frac{e\hbar}{m} \sum_\mu k_z f_\mu \quad (39)$$

следует, что отличный от нуля ток обусловлен нечетной по  $k_z$  частью функции распределения  $f_\mu$ . Решение уравнения (38) будем искать в обычной форме:

$$f_\mu = f_\mu^0 + \chi_\mu \frac{df_\mu^0}{d\varepsilon_\mu} eE, \quad (40)$$

где  $\chi_\mu$  — некоторая нечетная функция  $k_z$ . Тогда из (38) получается следующее уравнение для  $\chi_\mu$ :

$$\frac{\hbar k_z}{m} (1 - f_\mu^0) = \sum_v w_{\mu v} (1 - f_v^0) (\chi_\mu - \chi_v). \quad (41)$$

Если электронный газ не вырожден, то в (41) можно пренебречь  $f_\mu^0, f_v^0$  по сравнению с единицей.

Как правило, решение уравнения (41) представляет собой весьма сложную задачу. Имеются, однако, случаи, когда можно получить точное решение. Обратимся к выражению (15) для вероятности перехода. Если  $C_q = C_0$  и  $\omega_q = \omega_0$  не зависят от  $q$ , то суммирование по  $q$  в (15) выполняется просто, если воспользоваться соотношением

$$\int dq_x dq_y |\langle \mu | e^{iqr} | v \rangle|^2 = \frac{2\pi}{L^2},$$

которое является следствием нормировки волновых функций  $\psi_v$  (3). Тогда нетрудно показать, что  $w_{\mu v}$  зависит от  $k'_z$  только через энергию  $\varepsilon_v = (N' + 1/2) \hbar\Omega + (\hbar^2 k_z^2 / 2m)$  и является, таким образом, четной функцией  $k'_z$ . Поэтому члены прихода в уравнении (41), т. е. члены, содержащие  $\chi_v$ , в сумме дают нуль, и функция  $\chi_\mu$  имеет следующий вид:

$$\chi_\mu = \frac{\hbar k_z}{m} \tau_\mu, \quad (42)$$

где  $\tau_\mu$  — время релаксации,

$$\tau_\mu^{-1} = \frac{2\pi}{\hbar} C_0^2 [N_0 g(\varepsilon_\mu + \hbar\omega_0) + (N_0 + 1) \theta(\varepsilon_\mu - \hbar\omega_0) g(\varepsilon_\mu - \hbar\omega_0)]. \quad (43)$$

Здесь введена разрывная функция  $\theta(x)$ :

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases} \quad (44)$$

Аналогичным образом можно найти точное решение для  $\chi_\mu$  в случае упругого рассеяния электронов на акустических фононах и на примесях с  $\delta$ -образным потенциалом<sup>3</sup>.

Физической причиной магнитофононных осцилляций является неупругий характер рассеяния электронов на оптических фононах и немонотонная квазипериодическая зависимость плотности состояний от энергии в квантующем магнитном поле. Характер взаимодействия электронов с фононами, который определяет вид зависимости  $C_q$  от  $q$ , играет второстепенную роль. Поэтому, чтобы выяснить существенные особенности МФР продольной проводимости, удобно рассмотреть случай неполярного взаимодействия электронов с оптическими фононами  $C_q = C_0$ . Продольное магнитосопротивление в случае взаимодействия электронов с поляризационными колебаниями рассмотрено в работах<sup>42, 43</sup>. Частота столкновений  $\tau_\mu^{-1}$  имеет те же особенности, что и в рассматриваемом случае  $C_q = C_0$ . Продольная проводимость просто выражается через время релаксации:

$$\sigma_{zz} = \left( \frac{e\hbar}{m} \right)^2 \sum_\mu k_z^2 \tau_\mu \frac{df_\mu^0}{d\varepsilon_\mu}. \quad (45)$$

Из (43) видно, что частота столкновений  $\tau_\mu^{-1}$  обращается в бесконечность при  $\varepsilon_\mu \pm \hbar\omega_0 = \varepsilon_N$ , когда вследствие поглощения или испускания оптического фона на электрон попадает в конечное состояние на дне подзоны Ландау. Эта особенность  $\tau_\mu^{-1}$  появляется в результате суммирования по конечным состояниям в (41) и не зависит от вида функции  $C_q$ . При

этом не важно, из какого начального состояния электрон совершает переход, т. е. принадлежит ли начальное состояние одному из уровней Ландау. Если воспользоваться аналогией с оптическими межзонными переходами, можно сказать, что в релаксацию продольного импульса  $\hbar k_z$ , т. е. в величину  $\tau_\mu$ , вносят вклад лишь «непрямые» переходы с изменением  $k_z$ , тогда как в поперечную проводимость главный вклад вносят прямые переходы (переходы типа I на рис. 1) между уровнями Ландау. Это различие предопределяет специфические особенности МФ осцилляций  $\rho_{zz}$ .

Переходя в формуле (45) к интегрированию по энергии, получим

$$\frac{\sigma_{zz}}{\sigma_0} = \frac{1 - e^{-\gamma}}{\gamma} \frac{I(\gamma)}{I_0}, \quad (46)$$

$$I(\gamma) = \int_0^\infty \frac{p_0(x) e^{-x} dx}{p_1(x+\beta) + e^{\beta} \theta(x-\beta) p_1(x-\beta)}, \quad p_m(x) = \sum_N (x - N\gamma)^{(1/2)-m}, \quad (47)$$

$$I_0 = \frac{1}{3} \int_0^\infty \frac{x^{3/2} e^{-x} dx}{(x+\beta)^{1/2} + e^{\beta} \theta(x-\beta) (x-\beta)^{1/2}}; \quad (48)$$

здесь  $\sigma_0$  — проводимость при  $H = 0$ ;  $\gamma = \hbar\Omega/k_0 T$ ;  $\beta = \hbar\omega_0/k_0 T$ . Первый множитель в (46) представляет собой монотонную функцию магнитного поля, которая описывает поведение  $\sigma_{zz}$  в квантовом пределе  $\gamma > \beta \gg 1$  и определяет некоторый монотонный фон в области осцилляций  $\gamma \lesssim \beta$ . Интеграл  $I(\gamma)$  при  $\gamma \lesssim \beta$  является немонотонной функцией и описывает МФ осцилляции проводимости. В области низких температур,  $e^\beta \gg 1$ , можно опустить в знаменателях формул (47), (48) вторые слагаемые, поскольку основной вклад в проводимость вносят электроны с энергией  $\epsilon < \hbar\omega_0$ , которые рассеиваются только с поглощением оптического фонона. Вклад остальных электронов пропорционален малому параметру  $e^{-2\beta}$ . Преобразуя функции  $p_0(x)$  и  $p_1(x + \beta)$  с помощью формулы суммирования Пуассона и выделяя из  $I(\gamma)$  осциллирующую добавку  $\Delta I = I(\gamma) - I_0$ , получим при  $\gamma < \beta$  ( $\Omega < \omega_0$ )

$$\frac{\Delta\sigma_{zz}}{\sigma_0} = -\sqrt{\frac{\gamma}{3+2\beta}} \sum_{r=1} A_r \cos\left(2\pi r \frac{\omega_0}{\Omega} + \varphi_r\right), \quad (49)$$

$$A_r = \frac{1}{\sqrt{r} [1 + (2\pi r k_0 T / \hbar\Omega)^2]^{5/4}}, \quad (50)$$

$$\varphi_r = -\frac{\pi}{4} + \frac{5}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\pi r k_0 T}{\hbar\Omega}. \quad (51)$$

Выражение (49) вполне аналогично формуле (см., например, (71) в <sup>3</sup>), которая описывает осцилляции Шубникова — де Гааза при упругом рассеянии электронов. Однако фазы  $\varphi_r$  (51) существенно зависят от температуры. Это означает, что положения МФ экстремумов  $\rho_{zz}(H)$  должны зависеть от температуры. Непосредственное исследование этого эффекта исходя из (49) затруднительно, так как амплитуды  $A_r$  довольно медленно убывают с номером  $r$  и в сумме нужно учитывать большое число слагаемых. Поэтому мы рассмотрим детально поведение  $I(\gamma)$  вблизи резонансной точки  $\gamma = \beta$ <sup>44</sup>.

б) Температурный сдвиг МФ экстремумов. В области низких температур,  $\beta \gg 1$ , можно в выражениях (15) и (16) ограничиться интегрированием до  $x = \beta$ . Исследуем поведение  $I(\gamma)$  в области

$\gamma \approx \beta$  ( $\Omega \approx \omega_0$ ). При  $\gamma \leq \beta$  имеем

$$\begin{aligned} I(\gamma) = & \int_0^{2\gamma-\beta} \frac{e^{-x} x^{1/2} dx}{(x+\beta)^{-1/2} + (x+\beta-\gamma)^{-1/2}} + \\ & + \int_{2\gamma-\beta}^{\beta} \frac{e^{-x} x^{1/2} dx}{(x+\beta)^{-1/2} + (x+\beta-\gamma)^{-1/2} + (x+\beta-2\gamma)^{1/2}} + \\ & + \int_{\gamma}^{\beta} \frac{e^{-x} (x-\gamma)^{1/2} dx}{(x+\beta)^{-1/2} + (x+\beta-\gamma)^{-1/2} + (x+\beta-2\gamma)^{-1/2}}. \end{aligned} \quad (52)$$

Первый член в (52) описывает вклад в проводимость электронов нулевой подзоны Ландау с энергиями  $e \leq 2\hbar\Omega - \hbar\omega_0$ , которые при поглощении оптического фона на переходят в нулевую или первую подзону

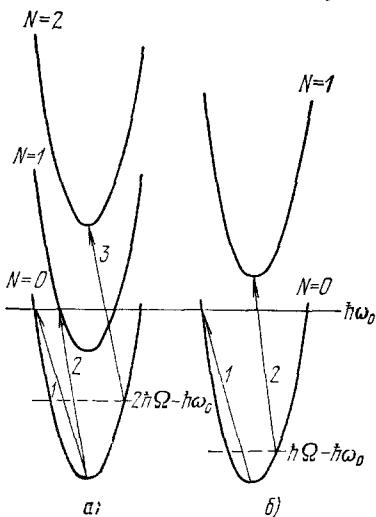


Рис. 5. Возможные типы переходов электронов при поглощении оптического фона.

a)  $\Omega < \omega_0$ ; б)  $\Omega > \omega_0$ .

уменьшение проводимости вследствие возрастания вероятности перехода в первую подзону. Эта вероятность, пропорциональная  $k_z^{-1}$ , возрастает, когда уровень  $\hbar\Omega$  приближается к  $\hbar\omega_0$  и переходы типа 2 совершаются в непосредственную окрестность точки  $k_z = 0$ . При  $\beta > 2$  интеграл в (53) приблизительно равен

$$\int_0^{\beta} e^{-x} \left[ 1 + \left( \frac{x}{x+\beta} \right)^{1/2} \right]^{-2} dx \approx [1 + (1+\beta)^{-1/2}]^{-2}.$$

Точность этой оценки тем выше, чем больше  $\beta$ . Отсюда видно, что при очень низких температурах,  $\beta \gg 1$ , производная  $(dI/d\gamma)_{\beta=0}$  отрицательна, т. е. слева от резонансной точки  $\gamma = \beta$  проводимость убывает. С повышением температуры абсолютная величина  $|dI/d\gamma|$  уменьшается, и при некотором значении  $2 < \beta_0 < 3$  эта производная становится положительной.

Первый член в (52) описывает вклад в проводимость электронов нулевой подзоны Ландау с энергиями  $e \leq 2\hbar\Omega - \hbar\omega_0$ , которые при поглощении оптического фона на переходят в нулевую или первую подзону Ландау (эти переходы изображены стрелками 1 и 2 на рис. 5, а). Второй член учитывает, кроме того, резонансные переходы во вторую подзону Ландау (переходы типа 3 на рис. 5, а). Наконец, третий член соответствует вкладу в проводимость электронов первой подзоны Ландау.

Производная  $dI/d\gamma$  по магнитному полю в точке  $\gamma = \beta_-$ , т. е. производная слева, равна

$$\begin{aligned} \left( \frac{dI}{d\gamma} \right)_{\beta_-} = & \frac{2\beta e^{-\beta}}{1 + \sqrt{2}} - \\ & - \frac{1}{2} \int_0^{\beta} e^{-x} \left[ 1 + \left( \frac{x}{x+\beta} \right)^{1/2} \right]^{-2} dx. \end{aligned} \quad (53)$$

Положительный член в (53) соответствует возрастанию проводимости с магнитным полем за счет увеличения вклада электронов, для которых невозможно резонансное рассеяние с переходом во вторую подзону Ландау, т. е. с переходом типа 3. Отрицательный член означает

уменьшение проводимости вследствие возрастания вероятности перехода в первую подзону. Эта вероятность, пропорциональная  $k_z^{-1}$ , возрастает, когда уровень  $\hbar\Omega$  приближается к  $\hbar\omega_0$  и переходы типа 2 совершаются в непосредственную окрестность точки  $k_z = 0$ . При  $\beta > 2$  интеграл в (53) приблизительно равен

$$\int_0^{\beta} e^{-x} \left[ 1 + \left( \frac{x}{x+\beta} \right)^{1/2} \right]^{-2} dx \approx [1 + (1+\beta)^{-1/2}]^{-2}.$$

Точность этой оценки тем выше, чем больше  $\beta$ . Отсюда видно, что при очень низких температурах,  $\beta \gg 1$ , производная  $(dI/d\gamma)_{\beta=0}$  отрицательна, т. е. слева от резонансной точки  $\gamma = \beta$  проводимость убывает. С повышением температуры абсолютная величина  $|dI/d\gamma|$  уменьшается, и при некотором значении  $2 < \beta_0 < 3$  эта производная становится положительной.

Рассмотрим теперь поведение  $I(\gamma)$  в области  $\gamma \geq \beta$ :

$$I(\gamma) = \int_0^{\gamma-\beta} e^{-x} x^{1/2} (x+\beta)^{1/2} dx + \int_{\gamma-\beta}^{\beta} \frac{e^{-x} x^{1/2} dx}{(x+\beta)^{-1/2} + (x+\beta-\gamma)^{-1/2}}. \quad (54)$$

Первый интеграл описывает вклад электронов, которые при рассеянии совершают переходы в пределах нулевой подзоны Ландау (переходы типа 1 на рис. 5, б). Этот член возрастает с магнитным полем. Второй интеграл учитывает переходы в первую зону Ландау (переходы типа 2). Он убывает с магнитным полем. Как видно из (52) и (54), функция  $I(\gamma)$  непрерывна в точке  $\gamma = \beta$ . Производная  $dI/d\gamma$  при  $\gamma > \beta$  равна

$$\frac{dI}{d\gamma} = e^{\beta-\gamma} (\gamma-\beta)^{1/2} \gamma^{1/2} - \frac{1}{2} e^{\gamma-\beta} \int_0^{2\beta-\gamma} \frac{e^{-x} (x+\gamma-\beta)^{1/2} dx}{x^{1/2} \{1 + [x/(x+\gamma)]^{1/2}\}^2}. \quad (55)$$

В точке  $\gamma = \beta_+$

$$\left( \frac{dI}{d\gamma} \right)_{\beta_+} = -\frac{1}{2} \int_0^{\beta} e^{-x} \left[ 1 + \left( \frac{x}{x+\beta} \right)^{1/2} \right]^{-2} dx, \quad (56)$$

т. е.  $\rho_{zz}$  возрастает с магнитным полем при любых  $\beta$ . Положение первого МФ максимума найдем, приравнивая нулю  $dI/d\gamma$  в (55). Соответствующее уравнение легко решается в предельном случае  $\beta \gg 1$ :

$$\frac{\Omega_1}{\omega_0} = 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{k_B T}{\hbar \omega_0} \right)^2. \quad (57)$$

При  $\Omega > \Omega_1$  величина  $\rho_{zz}$  убывает, так как уменьшается число электронов, для которых возможны переходы в первую подзону Ландау. Из (57) видно, что МФ максимум  $\rho_{zz}(H)$  сдвигается в сторону больших полей с повышением температуры. Причина этого сдвига состоит в том, что электроны на дне первой подзоны Ландау с  $k_z = 0$  не вносят вклада в продольную проводимость, так как скорость вдоль поля  $v_z = \hbar k_z/m = 0$ . Большая плотность состояний при  $k_z \approx 0$  компенсируется малым значением скорости электрона вдоль поля, так что главную роль играют электроны с  $\epsilon_z = \hbar^2 k_z^2/2m \sim k_B T$ . Повышение температуры приводит к увеличению средней энергии  $\epsilon_z$  и вызывает сдвиг МФ максимумов в сторону больших полей.

Сравнивая (53) и (56), мы видим, что производная  $dI/d\gamma$  претерпевает разрыв в точке  $\gamma = \beta$ . Это нарушение непрерывности обусловлено разрывным характером времени релаксации при неупругом рассеянии на оптических фононах (множитель  $\Theta(x-\beta)$  в (43)) и разрывами в плотности состояний при  $\epsilon = \epsilon_N$ . Учет размытия уровней Ландау устранил разрывы в плотности состояний и в производной  $dI/d\gamma$ . Однако в малой окрестности  $\Delta\Omega = |\Omega - \omega_0|$   $dI/d\gamma$  изменяется от (53) до (56).

Важно обратить внимание, что справа от резонанса производная  $(dI/d\gamma)_{\beta_+}$  всегда отрицательна, т. е.  $\rho_{zz}(H)$  возрастает. Поэтому минимум в точке  $\gamma = \beta$  проявляется только в условиях, когда слева от резонанса  $(dI/d\gamma)_{\beta_-} \geq 0$ . А это означает, что характер осцилляций  $\rho_{zz}$  существенно зависит от температуры. Если  $\beta \gg 1$ , то при  $\Omega = \omega_0$  должен быть максимум  $\rho_{zz}(H)$ . С ростом температуры этот максимум сдвигается в сторону больших полей и амплитуда его уменьшается. Наконец, при некоторой температуре  $T_0$  в интервале

$$\frac{1}{3} \theta_0 < T_0 < \frac{1}{2} \theta_0 \quad (58)$$

в точке  $\Omega = \omega_0$  должен быть минимум  $\rho_{zz}(H)$ . Этот минимум не смещается при дальнейшем увеличении температуры. Аналогично могут быть рассмотрены последующие МФ экстремумы при  $\Omega = \omega_0/M$  ( $M = 2, 3, \dots$ ).

в) Псевдорезонансы продольного магнитосопротивления. До сих пор не учитывался вклад в  $\sigma_{zz}$  электронов с энергиями  $\epsilon > \hbar\omega_0$ . Соответствующая добавка к  $I_1(\gamma)$  (52) может быть представлена в следующем виде:

$$I_1(\gamma) = e^{-2\beta} \int_0^\infty \frac{e^{-x} p_0(x + \beta) dx}{e^{\beta} p_1(x + 2\beta) + p_1(x)} . \quad (59)$$

Функция  $I_1(\gamma)$  конечна и непрерывна при любых  $\gamma$ . Однако, анализируя поведение производной  $dI_1/d\gamma$  (аналогично тому, как мы исследовали

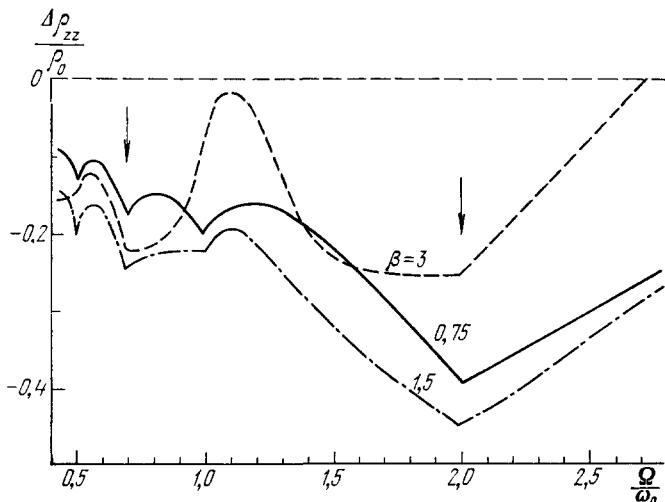


Рис. 6. Зависимость продольного магнитосопротивления от магнитного поля, рассчитанная для трех значений температуры ( $\beta = \hbar\omega_0/k_0 T = 3; 1,5; 0,75$ ).

Стрелками указаны псевдорезонансы <sup>45</sup>.

$dI/d\gamma$ ), можно показать, что  $dI_1/d\gamma$  имеет конечные разрывы в тех точках, где совпадают сингулярности  $p_1(x + 2\beta)$  и  $p_1(x)$ , т. е. при  $N\gamma - 2\beta = N'\gamma$  или при

$$M\Omega = 2\omega_0 . \quad (60)$$

Разрывы производной  $dI_1/d\gamma$  приводят к изломам функции  $I_1(\gamma)$  в соответствующих точках. Характер изломов таков, что  $\rho_{zz}(H)$  возрастает справа и убывает слева от значений  $H$ , определяемых равенством (60). Таким образом, при достаточно высоких температурах, когда  $e^{-2\beta}$  не слишком мало по сравнению с единицей, в  $\rho_{zz}(H)$ , кроме обычных МФ минимумов, должна появиться новая серия минимумов при

$$(2M + 1)\Omega = 2\omega_0 \quad (M = 0, 1, 2, \dots) . \quad (61)$$

Глубина этих минимумов возрастает с увеличением температуры и, как показали численные расчеты Петерсона <sup>45</sup>, при  $T \sim \theta_0$  сравнима с амплитудой МФ экстремумов. Это иллюстрирует рис. 6 из работы <sup>45</sup>. Из этого рисунка также видно, что при возрастании температуры положения МФ максимумов смещаются в сторону больших полей и образуются минимумы в резонансных магнитных полях.

Положения дополнительных минимумов  $\rho_{zz}(H)$ , которые Петерсон назвал псевдорезонансами, совпадают с положениями двухфононных МФ экстремумов (37). Амплитуда тех и других пропорциональна  $\exp(-2\theta_0/T)$ .

Необходимо, однако, подчеркнуть, что псевдорезонансы обусловлены однофононными процессами. В магнитных полях, удовлетворяющих условиям (60), (61), электроны из некоторого состояния  $v$  могут перейти либо на один из нижних уровней Ландау с испусканием одного фона, либо на один из верхних уровней с поглощением фона. Поскольку вклад однофононных процессов в сопротивление пропорционален квадрату константы связи электрон-фононного взаимодействия, а вклад многофононных процессов содержит более высокие степени ее, можно думать, что обнаруженные в эксперименте<sup>26, 32, 46-48</sup> дополнительные минимумы  $\rho_{zz}(H)$  обусловлены скорее псевдорезонансами, нежели двухфононными процессами. Тем не менее вклад резонансных многофононных процессов в магнитосопротивление может быть явно обнаружен не только в  $\rho_{xx}$ <sup>40, 41</sup>, где псевдорезонансы отсутствуют, но и в  $\rho_{zz}$ . Исследуя продольное магнитосопротивление на  $n$ -InSb, авторы<sup>49</sup> при  $T = 150$  °К обнаружили минимум, соответствующий резонансному трехфононному переходу.

Теоретическому исследованию МФР продольного магнитосопротивления посвящены также работы Петерсона<sup>50</sup>, в которых рассмотрены случаи взаимодействия с неполярными<sup>50a</sup> и полярными<sup>50b</sup> фононами. При вычислении продольного тока  $j_z$  Петерсон использовал неравновесную функцию распределения в следующем виде:

$$f_\mu = R \exp \left[ -\frac{\epsilon_N}{k_0 T} - \frac{(p_z - mv)^2}{2mk_0 T} \right], \quad (62)$$

где скорость дрейфа электронов вдоль поля  $\bar{v}$  определяется из уравнения баланса импульса. Такой подход эквивалентен вариационному методу<sup>51a</sup> в самом грубом приближении, когда выбрана лишь одна пробная функция, пропорциональная импульсу  $p_z$ . Это приближение часто используется для вычисления проводимости при упругом рассеянии электронов; оно, однако, явно недостаточно при рассмотрении неупругого рассеяния. В последнем случае для получения правильной величины проводимости при  $H = 0$  необходимо использовать по крайней мере набор двух пробных функций<sup>48</sup>, одна из которых зависит от энергии электрона. То же должно быть справедливо в квантующем магнитном поле. (В работе<sup>51b</sup> показано, что при неупругом рассеянии в набор пробных функций следует включить функции с корневой особенностью.) Не удивительно поэтому, что в результате численных расчетов Петерсон не нашел ни температурного сдвига МФ максимумов  $\rho_{zz}$  в противоречии с результатами работ<sup>43, 44</sup>, ни появления МФ минимумов  $\rho_{zz}$  в резонансных магнитных полях<sup>44</sup> (в работах<sup>43, 44</sup> неравновесная функция распределения определялась из решения кинетического уравнения).

г) МФ осцилляции в вырожденных полупроводниках. Рассмотрим теперь МФ осцилляции  $\rho_{zz}$  для вырожденного электронного газа<sup>52</sup>. Уравнение (41) опять можно решить точно только при  $C_q = C_0$ , и для частоты электрон-фононных столкновений получим

$$\tau_\mu^{-1} = \frac{m^{1/2} C_0^2}{V^{1/2} \pi \hbar^2 L^2} B(\epsilon_\mu), \quad B(\epsilon_\mu) = \sum_{N'} \left[ \frac{N_0 + f_0(\epsilon + \hbar\omega_0)}{\sqrt{\epsilon_\mu - \epsilon_{N'} + \hbar\omega_0}} + \frac{N_0 + 1 - f_0(\epsilon_\mu - \hbar\omega_0)}{\sqrt{\epsilon_\mu - \epsilon_{N'} - \hbar\omega_0}} \right]. \quad (63)$$

Частота столкновений, как и в случае невырожденного электронного газа, обращается в бесконечность, если электрон вследствие поглощения или испускания фона может попасть на уровень Ландау. Теперь, однако, существенны лишь те начальные состояния, которые принадлежат уровню Ферми. В пределе сильного вырождения можно заменить  $d\rho_{zz}/d\epsilon_\mu$

в (45)  $\delta$ -функцией:

$$\frac{df_0}{d\epsilon_\mu} = -\delta(\epsilon_\mu - \zeta). \quad (64)$$

Тогда для  $\rho_{zz}$  получается следующее выражение:

$$\rho_{zz} = \frac{\pi C_0^2 m}{e^2 \hbar} \operatorname{ctg} \beta \frac{\sum_N [\zeta + \hbar\omega_0 - \epsilon_N]^{-1/2} + [\zeta - \hbar\omega_0 - \epsilon_N]^{-1/2}}{\sum_N (\zeta - \epsilon_N)^{1/2}}. \quad (65)$$

Отсюда видно, что  $\rho_{zz}$  бесконечно возрастает в магнитных полях, удовлетворяющих условию

$$\zeta(H) \pm \hbar\omega_0 = \hbar\Omega \left( N + \frac{1}{2} \right); \quad (66)$$

знаки  $\pm$  соответствуют переходам с поглощением и испусканием фонона. При  $\zeta > \hbar\omega_0$  возможны оба процесса, и они дают в  $\rho_{zz}$  одинаковый вклад. Действительно, вероятность перехода электрона с испусканием фонона пропорциональна  $[1 - f_0(e - \hbar\omega_0)](N_0 + 1)$ , а вероятность перехода с поглощением фонона —  $[1 - f_0(e + \hbar\omega_0)]N_0$ , и для электронов на уровне Ферми  $e = \zeta$  эти величины равны.

Если  $\zeta < \hbar\omega_0$ , что возможно при не очень высоких концентрациях электронов, существенны лишь переходы с поглощением фонона.

Резонансное условие (66) показывает, что в случае вырожденного газа могут иметь место МФ осцилляции совершенно нового типа. Как было показано в гл. 2, положения МФ максимумов  $\rho_{xx}$  определяются условием (19) независимо от статистики электронов. Величина энергии Ферми  $\zeta$  не входит в (19), так как при вычислении поперечной проводимости  $\sigma_{xx}$  существует весь интервал энергий  $\zeta - \hbar\omega_0 \leq e \leq \zeta$ , а не только энергия  $e = \zeta$ .

Значения магнитных полей, определяемых (66), зависят от концентрации электронов (через величину  $\zeta$ ), а также от их эффективной массы и частоты фононов  $\omega_0$ . Рассмотренные осцилляции имеют общие черты как с обычными МФ осцилляциями, так и с осцилляциями ШГ. По существу, это и есть шубниковские осцилляции в условиях неупругого рассеяния электронов. При  $\zeta \gg \hbar\omega_0$  член  $\pm \hbar\omega_0$  в (66), связанный с неупругостью рассеяния, можно опустить, и тогда получается известное условие осцилляций ШГ. Поэтому положения МФ максимумов будут заметно отличаться от положений максимумов ШГ лишь при не слишком больших значениях уровня Ферми.

Бесконечная амплитуда пиков  $\rho_{zz}$  в (65) является следствием приближения (64). Если принять во внимание неполное вырождение электронного газа, можно получить следующее выражение для немонотонной добавки  $\Delta\rho_{zz}$ <sup>52б</sup>:

$$\begin{aligned} \Delta\rho_{zz} = \frac{\pi^2}{\gamma} \frac{\sqrt{2\hbar\Omega}}{\sqrt{\zeta_+} + \sqrt{\zeta_-}} \times \\ \times \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \frac{\sqrt{r}}{\operatorname{sh}(2\pi^2 r/\gamma)} \left[ \cos\left(\frac{2\pi r\zeta}{\hbar\Omega} - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{2\pi r\zeta}{\hbar\Omega} + \frac{\pi}{4}\right) \right] \end{aligned} \quad (67)$$

( $\zeta_{\pm} = \zeta \pm \hbar\omega_0$ ). Осциллирующая часть  $\Delta\rho_{zz}$  состоит из двух наборов гармоник, периодичных по обратному магнитному полю. При очень низких температурах амплитуда осцилляций, очевидно, будет определяться не тепловым размытием уровней Ландау, а их уширением главным образом вследствие неборновского рассеяния электронов на примесях.

Понятно, что экспериментальное наблюдение МФ осцилляций в проводниках с вырожденным электронным газом представляет немалые

трудности. Для выполнения условия достаточно сильного вырождения требуются низкие температуры и большие концентрации электронов, стало быть, и легирующей примеси. В таком случае основной вклад в сопротивление вносит упругое рассеяние на ионах примеси и основным эффектом в квантующих полях будут осцилляции ШГ. МФ осцилляции, вероятно, должны проявляться как небольшие искажения осцилляций ШГ. Однако с ростом температуры амплитуда последних уменьшается, тогда как вклад неупругого рассеяния на оптических фононах возрастает, и в некоторой области температур амплитуда МФ осцилляций должна возрастать. Именно такого типа осцилляции были обнаружены Пономаревым и Цидильковским при исследовании  $\rho_{zz}$  на вырожденных образцах  $n\text{-GaSb}$  и  $n\text{-HgTe}$ <sup>52</sup>.

д) МФ осцилляции при смешанном рассеянии. Если, кроме неупругого рассеяния на оптических фононах, электроны рассеиваются и упругим образом, то полная частота столкновений аддитивна:

$$\tau^{-1} = \tau_{\text{опт}}^{-1} + \tau_{\text{упр}}^{-1}. \quad (68)$$

Пусть упругое рассеяние обусловлено взаимодействием электронов с акустическими фононами. Тогда величина  $\tau_{\text{ак}}^{-1}$  пропорциональна плотности состояний:

$$\tau_{\text{ак}}^{-1} = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{E_1^2 k_0 T}{w^2 d}, \quad (69)$$

где  $E_1$  — константа деформационного потенциала,  $d$  — плотность кристалла,  $w$  — скорость звука.

Так как различные механизмы рассеяния вносят не аддитивный вклад в  $\rho_{zz}$  даже в борновском приближении (в отличие от  $\rho_{xx}$ ), то теоретическое исследование МФР продольного магнитосопротивления более сложно. Гуревич и Фирсов<sup>42</sup> впервые рассмотрели МФР в условиях смешанного рассеяния электронов на оптических и акустических фононах. Как показано в<sup>42</sup>, при достаточно большом вкладе упругого рассеяния в частоту столкновений МФ максимумы  $\rho_{zz}(H)$  должны сменяться минимумами. Однако полученный в<sup>42</sup> критерий является слишком грубым и находится в противоречии с многочисленными экспериментальными данными. Более строгое рассмотрение МФ осцилляций  $\rho_{zz}(H)$  было проведено в<sup>44</sup>.

При смешанном рассеянии электронов выражение для  $\sigma_{zz}$  имеет по-прежнему вид (46), но теперь интеграл  $I(\gamma)$  равен

$$I(\gamma) = \int_0^\infty \frac{p_0(x) e^{-x} dx}{p_1(x) + \lambda N_0 p_1(x + \beta) + \lambda (N_0 + 1) \theta(x - \beta) p_1(x - \beta)}; \quad (70)$$

здесь  $\lambda = C_0^2 w^2 d / E_1^2 k_0 T$  — параметр, характеризующий вклад неупругого рассеяния в частоту столкновений. Очевидно, при низких температурах,  $e^\beta \gg 1$ , осциллирующая часть  $\rho_{zz}$  пропорциональна  $\lambda e^{-\beta}$ .

Аналогично тому, как это было сделано в разделе в) этой главы, можно установить, что производная  $dI/d\gamma$  разрывна в точках, соответствующих условию МФР (19). Справа от резонанса эта производная отрицательна при всех значениях  $\beta$  и  $\lambda$ , т. е.  $\rho_{zz}(H)$  возрастает независимо от температуры и при любом вкладе упругого рассеяния. Максимумы  $\rho_{zz}(H)$  смешены в сторону больших полей относительно резонансных значений  $H$ . Знак производной  $dI/d\gamma$  слева от резонанса зависит от значений параметров  $\beta$  и  $\lambda$ . В частности, при  $\beta \gg 1$  и  $\lambda \rightarrow \infty$  (низкие температуры и малый вклад упругого рассеяния) эта производная отрицательна,

а излом функции  $I(\gamma)$  экспоненциально мал. Излом  $I(\gamma)$  возрастает при уменьшении параметров  $\beta$  и  $\lambda$ , и, когда производная  $(dI/d\gamma)_{\beta=}$  становится положительной, в резонансной точке образуется МФ минимум. Условие равенства нулю производной слева от резонанса представляет собой довольно сложное уравнение для  $\lambda$ , решение которого зависит от параметра  $\beta$ . Обозначим это решение  $\lambda_0(\beta)$ . Тогда при  $\lambda < \lambda_0$  резонансным магнитным полям отвечает минимум  $\rho_{zz}(H)$ . Если же  $\lambda > \lambda_0$ , то минимум  $\rho_{zz}(H)$  достигается при меньших значениях  $H$ , тогда как максимумы сдвинуты в сторону больших полей. В этом случае резонансные точки вообще не являются экстремальными для функции  $\rho_{zz}(H)$ .

Величина  $\lambda_0$  легко может быть найдена при  $\beta \gg 1$  и  $\lambda_0 N_0 \ll 1^{44}$ :

$$\lambda_0 = 4\beta. \quad (71)$$

Это выражение достаточно точно при  $\beta \geq 6$ . С другой стороны, при некотором  $\beta < 3$ , как следует из (58),  $\lambda_0$  должно возрастать до бесконечности, ибо даже при чисто неупругом рассеянии в резонансных полях должны быть минимумы  $\rho_{zz}(H)$ . Численные оценки приводят к значениям  $\lambda_0 \approx 30$  при  $\beta = 4$  и  $\lambda_0 \approx 40$  при  $\beta = 3$ . Для сравнения приведем оценку авторов <sup>42</sup>, которые получили  $\lambda_0 \approx 2$  независимо от температуры.

Таким образом, при достаточно большом вкладе упругого рассеяния  $\rho_{zz}(H)$  имеет минимум в резонансных полях при всех температурах. Качественно уменьшение параметра  $\lambda$  приводит к таким же последствиям, как и возрастание температуры в условиях чисто неупругого рассеяния.

Заметим, что если существенны несколько упругих механизмов рассеяния, общий параметр  $\lambda$  определяется формулой

$$\lambda^{-1} = \sum_i \lambda_i^{-1}. \quad (72)$$

Выражения для  $\lambda_{ak}$  и  $\lambda_i$  для упругого рассеяния на акустических фонах и ионах примесей приведены в <sup>44</sup>.

Экспериментально МФ осцилляции исследованы многими авторами в различных полупроводниках:  $n$ -InSb <sup>11, 26, 46</sup>,  $n$ -InAs <sup>25, 26, 47</sup>,  $n$ -GaAs <sup>26, 53</sup>,  $n$ -Ge <sup>54</sup>,  $n$ -InP <sup>32, 48</sup>,  $n$ -CdTe <sup>34</sup>,  $n$ -CdSe <sup>35</sup>,  $p$ -InSb <sup>55</sup>,  $p$ -Te <sup>36-38</sup>. Во всех случаях экстремумы периодичны по обратному магнитному полю с периодом (20). В полупроводниковых соединениях с малой константой связи  $\alpha \leq 0, 1$ , а также в  $n$ -Ge и  $p$ -Te минимумы  $\rho_{zz}$  в резонансных полях расположены во всей области температур, где наблюдается МФР. В соответствии с теорией <sup>44</sup> в этих материалах параметр  $\lambda$  оказывается меньше значения  $\lambda_0$ , т. е. вклад упругого рассеяния приводит к образованию МФ минимумов в резонансе уже при низких температурах  $T \ll \theta_0$ . В материалах с достаточно большой константой связи  $\alpha$  ( $n$ -CdTe,  $n$ -CdSe) в резонансных полях при  $T \ll \theta_0$  расположены некоторые промежуточные фазы кривых  $\rho_{zz}(H)$ : максимумы сдвинуты в сторону больших, а минимумы — в сторону меньших полей.

#### 4. МФР В ПОЛУПРОВОДНИКАХ С НЕСТАНДАРТНОЙ ФОРМОЙ ЗОН

а) Неквадратичный изотропный закон дисперсии. Для произвольного закона дисперсии условие МФР можно записать, исходя из закона сохранения энергии, в виде

$$\varepsilon_{Ns} - \varepsilon_{N's'} = \hbar\omega_0, \quad (73)$$

где  $\varepsilon_{Ns}$  — энергия  $N$ -го уровня Ландау со спиновым числом  $s = \pm 1/2$ . В случае изотропного неквадратичного закона дисперсии, который имеет место, например, для электронов ряда соединений III—V, можно записать

явное выражение для  $\varepsilon_{Ns}$ . Непараболичность зоны проводимости вблизи края возникает в этом случае вследствие взаимодействия между зоной проводимости и валентными зонами при  $\mathbf{k} = 0$ . Уровни энергии в магнитном поле для зоны проводимости, зоны легких дырок и отщепленной вследствие спин-орбитального взаимодействия зоны в пренебрежении членами, содержащими массу свободного электрона  $m_0$ , которая обычно много меньше эффективной массы у края зоны  $m_n$ , даются кубическим уравнением, аналогичным уравнению Кейна в отсутствие магнитного поля<sup>56</sup>:

$$\varepsilon_\mu (\varepsilon_\mu + \varepsilon_g) (\varepsilon_\mu + \varepsilon_g + \Delta) - P^2 \left[ k_z^2 + (2N+1) \frac{1}{L^2} \right] \left( \varepsilon_\mu + \varepsilon_g + \frac{2}{3} \Delta \right) + \\ + \frac{2s}{3} \frac{P^2 \Delta}{L^2} = 0, \quad (74)$$

где  $\varepsilon_g$  — ширина запрещенной зоны при  $\mathbf{k} = 0$ ,  $\Delta$  — величина спин-орбитального расщепления валентной зоны,  $P$  — межзонный матричный элемент оператора импульса. В (74) начало отсчета энергии выбрано у дна зоны проводимости. При  $H = 0$  уравнение (74) переходит в уравнение Кейна. Члены, зависящие от спина, пропорциональны  $L^{-2}$  и дают спиновое расщепление уровней, которое пропорционально фактору спектрскопического расщепления  $g$ .

В предположении  $\varepsilon_\mu \ll \varepsilon_g + (2\Delta/3)$ , справедливом для всех изученных полупроводников в широком интервале энергий, кубическое уравнение (74) сводится к квадратному, решение которого для зоны проводимости имеет вид

$$\varepsilon_\mu = -\frac{\varepsilon_g}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon_g^2 + 4\varepsilon_g \left[ \left( N + \frac{1}{2} \right) \hbar\Omega_n + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m_n} + sg_n \mu_B H \right]}, \quad (75)$$

где  $\Omega = eH/m_n c$ ,  $\mu_B = e\hbar/2m_0 c$ ,  $g_n = -(2m_0/m_n) \Delta/(2\Delta + 3\varepsilon_g)$  есть  $g$ -фактор у дна зоны,

$$\frac{1}{m_n} = \frac{2P^2}{3\hbar^2} \left( \frac{2}{\varepsilon_g} + \frac{1}{\varepsilon_g + \Delta} \right). \quad (76)$$

Для ситуации, когда  $\hbar\omega_0 \ll \varepsilon_g$ , условие МФР, как следует из (73), и (75), принимает вид<sup>57</sup>

$$\Omega_n = \frac{\omega_0}{N' - N} \left( 1 + \frac{N' + N + t + 1}{N' - N} \frac{\hbar\omega_0}{\varepsilon_g} \right), \quad (73a)$$

где  $t = g_n m_n / 2m_0 = -\Delta/(2\Delta + 3\varepsilon_g)$ .

Используя выражение (75), можно по положению пиков магнито-сопротивления с помощью резонансного условия (73) при  $s = s'$  определить эффективную массу электронов у дна зоны  $m_n$ , если известны  $\omega_0$ ,  $\varepsilon_g$  и  $\Delta$ . Для  $n$ -InSb, например<sup>46</sup>, значения  $m_n$ , вычисленные с учетом непараболичности зоны проводимости, совпадают с данными циклотронного резонанса и заметно отличаются от значений, получаемых для простой параболической зоны (для 120 °К соотношение  $\Omega_n = \omega_0$  дает  $m_n/m_0 = 0,016$  (см. гл. 2), тогда как истинное значение  $m_n = 0,014m_0$ ).

Учет непараболичности зоны проводимости, т. е. использование формулы (73a), позволил корректно интерпретировать результаты измерений МФР и определить зависимости эффективной массы  $m_n$  (76) от давления для InSb<sup>58</sup> и от температуры для InSb, InAs и GaAs<sup>29</sup>.

Как следует из (75), уровни Ландау  $\varepsilon_{Ns}$  для непараболичной зоны неэквидистантны. В связи с этим значения резонансных магнитных полей зависят не только от разности  $N' - N$ , но и от номеров уровней  $N$  и  $N'$  (73a). Это должно привести к специфической асимметрии формы линий МФР (широкие линии в сторону больших полей), которая должна

возрастать с повышением температуры. Такие особенности наблюдались на InSb<sup>29</sup>. Вклад переходов между высокими уровнями Ландау, когда эти переходы не могут быть разрешены, приводит к сдвигу МФ экстремума в сторону больших полей. Учет таких переходов в InAs при комнатной и более высоких температурах ( $\theta_0 = 340^\circ\text{K}$ )<sup>29, 59</sup> приводит к хорошему согласию между рассчитанным 76 кэ и экспериментальным  $76 \pm 4$  кэ значениями резонансного магнитного поля, соответствующими переходу между нулевым и первым уровнями Ландау (без учета вклада переходов между уровнями  $1 \rightarrow 2$  и  $2 \rightarrow 3$  рассчитанное значение  $H_{\text{рез}} = 71$  кэ).

б) Анизотропный квадратичный закон дисперсии. В многодолинных полупроводниках типа *n*-Ge МФР может быть двух типов. Один из них, о котором речь шла выше, связан с рассеянием электронов на оптических фонах, при котором электрон остается в пределах данной энергетической долины. Второй тип МФР обусловлен рассеянием электрона на фононе с переходом из одной энергетической долины в другую<sup>60</sup>. При междолинном рассеянии электрон поглощает (испускает) «междолинный» фонон с квазимпульсом  $\hbar q_{12}$ , равным расстоянию между центрами долин 1 и 2, и энергией  $\hbar\omega_q$ . Основные условия возникновения МФР в случае междолинных переходов остаются такими же, как и при внутридолинных переходах: необходимо, чтобы плотность электронных состояний имела особенности и чтобы можно было пренебречь дисперсией фононов.

Условие резонанса при переходе между эквивалентными долинами, т. е. такими, у которых циклотронные массы одинаковы и, следовательно, в магнитном поле они не сдвигаются по энергии, имеет такой же вид, как и (19):

$$\omega_q = M\Omega \quad (M = 1, 2, 3, \dots), \quad (77)$$

но частота  $\omega_0$  заменяется на  $\omega_q$ . В *n*-Ge, например, в междолинном рассеянии могут принять участие только продольные оптические и акустические фононы<sup>61</sup>, для которых характеристическая температура  $\theta_q = \hbar\omega_q/k_0 = 315^\circ\text{K}$ <sup>62</sup>. Для переходов между неэквивалентными долинами, сдвинутыми одна относительно другой на  $\hbar(\Omega_1 - \Omega_2)/2$ , резонансное условие имеет вид

$$\omega_q = \frac{\Omega_1 - \Omega_2}{2} + N\Omega_1 - N'\Omega_2 \quad (N, N' = 0, 1, 2, \dots). \quad (78)$$

Поскольку вероятность рассеяния электронов в резонансе резко возрастает, зависимость  $\rho_{xx}$  от  $H$  должна иметь максимумы при выполнении резонансных условий (77) или (78). Продольное магнитосопротивление должно иметь в резонансе, вероятнее всего, минимум, поскольку обычно вклад междолинного рассеяния мал по сравнению с упругим рассеянием<sup>63</sup>.

МФ осцилляции в *n*-Ge, обусловленные междолинным рассеянием, наблюдались при исследовании  $\rho_{xx}$ <sup>30, 31</sup> и  $\rho_{zz}$ <sup>54, 64</sup>.

Отношение осциллирующей части кинетических коэффициентов к монотонному фону для *n*-Ge должно быть значительно меньше, чем, скажем, для *n*-InSb, так как вклад рассеяния на оптических фонах в InSb существен, в то время как в *n*-Ge резонансные механизмы рассеяния вносят лишь незначительный вклад в общее рассеяние.

МФ осцилляции  $\rho_{xx}$  в Ge столь малы, что их удалось обнаружить<sup>30, 31</sup> в интервале температур 30—340°К лишь при использовании методики двойного дифференцирования по времени сигнала с потенциальных зондов. На кривых продольных эффектов  $\rho_{zz}$  ( $H$ ) резонансным условиям соответствуют минимумы<sup>54, 64</sup>. Большинство экстремумов  $\rho_{xx}$  и  $\rho_{zz}$  соответствует внутридолинным переходам с  $\theta_0 = 430^\circ\text{K}$ . Вместе с тем на кривых

$\rho_{xx}(H)^{30}$  и  $\rho_{zz}(H)^{64}$  для образцов с концентрациями  $10^{14}-10^{15} \text{ см}^{-3}$  при  $90 < T < 180 \text{ }^{\circ}\text{K}$  надежно наблюдались пики (при 155 и 80 кэ), которые можно отнести только за счет междолинных переходов с  $\theta_q = 315 \text{ }^{\circ}\text{K}$ . Подтверждением того, что эти пики обусловлены междолинными переходами, может служить малая по сравнению с другими пиками амплитуда (она примерно на порядок меньше амплитуд остальных пиков).

На образцах с концентрациями  $n < 10^{14} \text{ см}^{-3}$  и  $n > 10^{15} \text{ см}^{-3}$  четкому выявлению МФ осцилляций  $\rho_{zz}$  мешало наличие осцилляций неизвестного происхождения (возможно, что они связаны с явлениями в приконтактных областях), частота и амплитуда которых больше частоты и амплитуды МФ осцилляций. Причина отсутствия МФ осцилляций  $\rho_{zz}$  на образцах с  $n = 2 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-3}$ <sup>31</sup> неясна.

МФ осцилляции  $\rho_{xx}$  исследовались и в дырочных полупроводниках:  $p\text{-Ge}^{31}$ ,  $p\text{-InSb}$  и  $p\text{-GaAs}^{39}$ . Наблюдались пики для легких и тяжелых дырок. Форма изоэнергетических поверхностей последних отличается от сферы. Поэтому период МФР зависит от ориентации магнитного поля, и найденные эффективные массы анизотропны (рис. 7). Сложная форма зоны тяжелых дырок приводит к появлению тонкой структуры пиков<sup>31</sup>.

в) Анизотропный неквадратичный закон дисперсии. Анизотропный неквадратичный закон дисперсии имеет место, например, для дырок теллура, у которого наблюдался МФР<sup>36-38</sup>. Теллур, кристалл с резко анизотропной структурой, принадлежит к тригональной системе и содержит три атома в элементарной ячейке. Последнее обстоятельство, а также высокая атомная поляризуемость (большой атомный номер) приводят к тому, что, несмотря на преобладание в теллуре гомеополярной связи, длинноволновые оптические колебания могут сопровождаться возникновением дипольных моментов. Существование полярных оптических колебаний в атомных полупроводниках с двумя атомами в элементарной ячейке (например, Ge) запрещено симметрией<sup>65</sup>. Полярные оптические колебания в теллуре вносят достаточно эффективный вклад в рассеяние носителей заряда, что и позволяет наблюдать МФР. Как показано в работе<sup>37</sup>, наибольший вклад в рассеяние дырок вносят фононы с энергией  $\hbar\omega_0 = 13,2 \text{ мэв}$ .

В примесной области проводимость теллура дырочная. Минимумы валентной зоны \*) теллура расположены на боковых ребрах шестиугольной призмы, представляющей зону Бриллюэна, вблизи вершины призмы. Закон дисперсии дырок в окрестности минимума зоны описывается выражением

$$s = Ak_z^2 + Bk_{\perp}^2 - \sqrt{k^2 + Ck_z^2} + D, \quad (79)$$

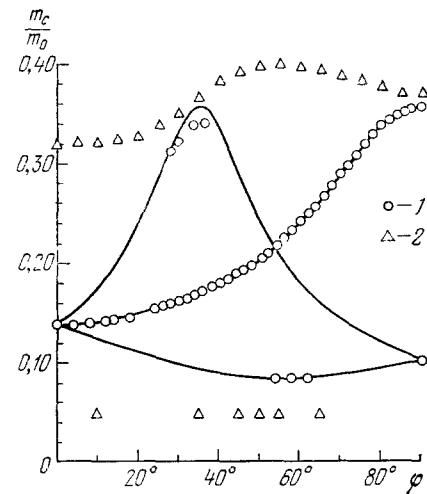


Рис. 7. Зависимость циклотронной массы  $m_c$  электронов (1) и дырок (2) в германии от угла  $\phi$  между магнитным полем и осью [100] в плоскости (110), найденная из измерений МФР  $\rho_{xx}^{31}$ .

\*) Энергия дырок считается возрастающей при удалении от края — минимума — в глубь зоны.

где  $k_z$  и  $k_{\perp} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$  — компоненты волнового вектора в направлении оси симметрии зоны Бриллюэна и перпендикулярно ей, а константы  $A, B, C, \lambda$  и  $D = (\lambda^2 A/C^2) + (C^2/4A)$  были определены по экспериментальным данным<sup>66</sup>.

При энергиях ниже 2,3 мэв поверхности постоянной энергии представляют собой эллипсоиды вращения с осью, параллельной оси симметрии зоны Бриллюэна  $\Delta$ . При энергии дырок  $\epsilon_0 = 2,3$  мэв два эллипсоида вблизи одной вершины призмы сливаются, образуя тело вращения, напоминающее гантель (рис. 8).

Уровни энергии дырок в магнитном поле были найдены в<sup>37</sup>. При  $H \parallel c_3$  ( $c_3$  — ось третьего порядка) каждому квантовому числу  $N$  соответствуют два уровня, возникающие на максималь-

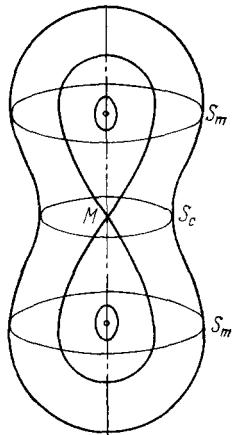
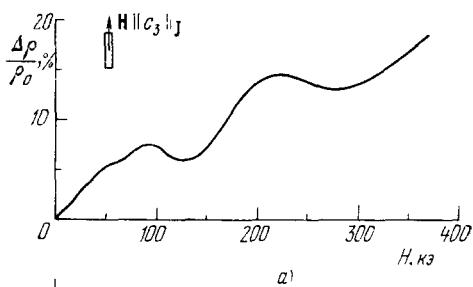
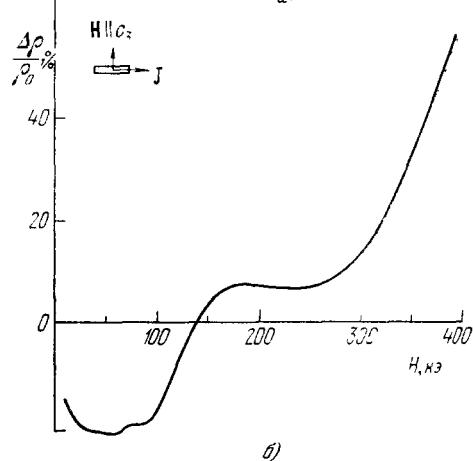


Рис. 8. Изознергетические поверхности дырок в теллуре для различных энергий и типы экстремальных сечений.



a)



б)

Рис. 9. Зависимости продольного (а) и поперечного (б) магнитосопротивления теллура от магнитного поля при 77 °К.  
Концентрация дырок  $p = 1 \cdot 10^{18}$  см<sup>-3</sup><sup>37</sup>.

ном  $S_m$  и минимальном  $S_c$  сечениях гантели (рис. 8). В случае  $H \perp c_3$  при  $\epsilon < \epsilon_0$  уровни, соответствующие паре сечений эллипсоидов, вырождены. При  $\epsilon = \epsilon_0$  траектория дырки в импульсном пространстве становится кривой с самопересечением и на ней появляется особая точка  $M$ . В этом случае (при  $\epsilon \approx \epsilon_0$ ) одновременно могут существовать два типа траекторий: эллиптическая и вдвое большая по площади гантелеобразная, т. е. вследствие взаимодействия орбит через энергетический барьер (магнитный пробой) вырождение уровней снимается.

На рис. 9 приведены экспериментальные зависимости магнитосопротивления теллура при различных ориентациях магнитного поля и тока относительно оси  $c_3$ . Положение осцилляционных пиков оказалось зависящим от ориентации магнитного поля по отношению к оси  $c_3$ . Положение пиков в интервале 20—250 °К не зависит от температуры, а амплитуды максимальны вблизи 80—100 °К. Для ориентации  $H \parallel c_3 \parallel j$  и  $H \parallel c_3 \perp j$

измерения на образцах с концентрациями дырок от  $2 \cdot 10^{14}$  до  $4 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$  при  $77^\circ\text{K}$  показали, что положения осцилляционных экстремумов не зависят от концентрации. Оба эти обстоятельства указывают, что причиной осцилляций является МФР. Из сопоставления рис. 9, а и 9, б видно, что максимумам поперечного магнитосопротивления соответствуют минимумы продольного. Это означает, что при  $77^\circ\text{K}$  вклад в рассеяние дырок на оптических колебаниях мал по сравнению с вкладом рассеяния на акустических колебаниях. При  $\mathbf{H} \parallel c_3 \parallel j$  наблюдается дополнительный минимум при  $H = 280 \text{ кэ}$ , природа которого пока неясна. Вся остальная картина МФ осцилляций в теллуре находится в удовлетворительном согласии с теоретическим анализом, выполненным Бреслером и Машовцем<sup>37</sup>.

Недавно Миура и др.<sup>38</sup>, исследуя МФР на теллуре, обнаружили, что при  $\mathbf{H} \perp c_3$  положение МФ пиков поперечного магнитосопротивления зависит от направления тока. Поскольку циклотронная масса зависит только от направления  $\mathbf{H}$ , смещение пиков может быть вызвано участием в рассеянии фононов более чем одной оптической моды.

## 5. МАГНИТОФОНОННЫЕ ОСЦИЛЛАЦИИ ДРУГИХ КИНЕТИЧЕСКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

а) Термомагнитные эффекты и эффект Холла. Немонотонная зависимость кинетических коэффициентов от  $H$ , обусловленная резонансным взаимодействием электронов с оптическими фононами, может, очевидно, проявляться не только в магнитосопротивлении, но и в других эффектах диссипативной природы. Рассмотрим, например, электронную термо-э. д. с.  $\alpha^e$ , которая обусловлена отступлением электронов от термодинамического равновесия вследствие градиента температуры. Поперечная термо-э. д. с.  $\alpha_{xx}^e (\mathbf{H} \perp \nabla_x T)$  в низшем приближении по  $(\Omega t)^{-1}$  не зависит от рассеяния и, как показал Образцов<sup>67</sup>, просто связана с энтропией электронного газа:

$$\alpha_{xx}^e = \frac{S}{en}. \quad (80)$$

В то же время продольная термо-э. д. с.  $\alpha_{zz}^e$  непосредственно выражается через время релаксации электронов<sup>68</sup>. Поэтому МФ осцилляции  $\alpha_{zz}^e$  легко наблюдаются экспериментально<sup>69-71</sup>. На рис. 10<sup>69</sup> приведены экспериментальные кривые  $\Delta\alpha_{zz}/\alpha_0$  и  $\Delta\alpha_{xx}/\alpha_0$  в зависимости от  $H$  для  $n$ -InSb, которые наглядно иллюстрируют различие в поведении диссипативных и не-диссипативных эффектов. Исследование температурной зависимости МФР на  $\alpha_{zz}$   $n$ -InSb<sup>69</sup> показывает, что амплитуда осцилляций максимальна при  $T \sim 200^\circ\text{K}$ . Поскольку монотонная часть термо-э. д. с. слабо (логарифмически) зависит от  $H$ <sup>68, 70</sup>, то МФ осцилляции проявляются в  $\alpha_{zz}^e$  лучше, чем в магнитосопротивлении. В благоприятных условиях их амплитуда может быть порядка величины монотонного фона<sup>69</sup>.

Положения экстремумов на кривой  $\alpha_{zz}^e (H)$  зависят, как и в случае  $\rho_{zz} (H)$ , от вклада упругих механизмов рассеяния и температуры. Павлов и Фирсов<sup>72</sup> показали, что в случае, когда преобладает упругое рассеяние, резонансным полям должны соответствовать минимумы  $\alpha_{zz}^e$ , однако надежные количественные критерии не получены. На экспериментальных

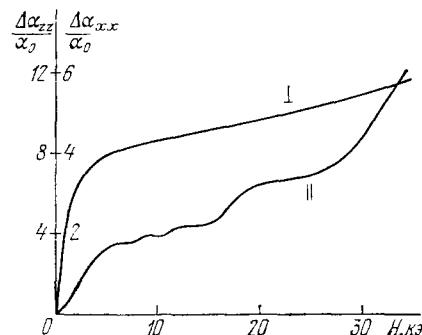


Рис. 10. Продольная (I) и поперечная (II) термо-э. д. с.  $n$ -InSb ( $n = 2,6 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$ ) при  $T = 130^\circ\text{K}$ <sup>69</sup>.

кривых<sup>69, 70</sup> МФ максимумы смещены в сторону больших полей, а минимумы — в сторону меньших.

В квантующих магнитных полях значительный, а иногда и главный вклад в термо-э. д. с. вносит отступление от равновесия длинноволновых акустических фононов<sup>70, 73</sup>. Эта термо-э. д. с. увлечения  $\alpha_z^p$  пропорциональна частоте столкновений фононов с электронами. Хотя оптические фононы, обладающие малой групповой скоростью, не принимают участия в создании тока увлечения, величина  $\alpha_{zz}^p$ , пропорциональная продольному магнитосопротивлению, может обнаруживать МФ осцилляции, если вклад неупругого рассеяния в  $\rho_{zz}$  существен. В работе<sup>74</sup> наблюдались МФ осцилляции  $\alpha_{zz}$  на *n*-Ge, обусловленные как междулинными, так и внутридолинными переходами электронов.

МФ осцилляции наблюдались также при исследовании эффекта Нернста — Эттингсгаузена (НЭ) в *n*-InSb<sup>71</sup>. Амплитуда осцилляций значительно меньше, чем в термо-э. д. с. Это связано, по-видимому, с влиянием микронеоднородностей в распределении примесей, которые в сильных магнитных полях,  $\Omega\tau \gg 1$ , приводят к резкому возрастанию монотонного эффекта НЭ, но не влияют заметно на термо-э. д. с.<sup>75</sup>.

Как было показано в гл. 2, холловский ток  $j_y$  (13) является недиссилиптивным в нулевом приближении по параметру  $(\Omega\tau)^{-1}$ . Осцилляции эффекта Холла появляются лишь во втором приближении по  $(\Omega\tau)^{-1}$ . Из (7) легко видеть, что зависящий от рассеяния вклад в  $\rho_{xy}$  вносит как малая величина  $\sigma_{xx}^2$ , так и члены порядка  $(\Omega\tau)^{-2}$  из  $\sigma_{xy}$ . Ясно поэтому, что МФ осцилляции эффекта Холла должны быть весьма малы. Действительно, обнаруженные в *n*-InSb<sup>76, 77</sup> и *n*-InP<sup>77</sup> осцилляции  $\rho_{xy}$  с минимумами в резонансных полях имеют на два порядка меньшую амплитуду, чем осцилляции  $\rho_{xx}$ . В то же время в *n*-GaAs отношение осциллирующей части  $\rho_{xy}$  к монотонному фону значительно больше<sup>77</sup>, причем резонансным полям соответствуют максимумы.

б) МФР на горячих электронах. При достаточно низких температурах  $T \ll \theta_0$  МФ осцилляции эффектов, линейных по электрическому полю, исчезают, так как вклад рассеяния на оптических фононах в частоту электронных столкновений экспоненциально мал. Однако в области сильных электрических полей испускание фононов неравновесной системой электронов может в ряде случаев являться основным механизмом релаксации энергии. В квантующих магнитных полях резонансный характер релаксации энергии электронов должен приводить к немонотонным зависимостям кинетических коэффициентов. Этот эффект в приближении электронной температуры теоретически рассмотрен в<sup>78–80</sup>. Приближение электронной температуры  $T_e$  может оказаться недостаточным, если частота электрон-электронных столкновений меньше частоты электрон-фононных столкновений. Однако оно позволяет выяснить основные качественные черты физических явлений в области горячих электронов. В обзоре Злобина и Зырянова<sup>81</sup> исследованы пределы применимости концепции электронной температуры и рассмотрены случаи, когда возможно непосредственное решение уравнения для неравновесной функции распределения электронов. В приближении электронной температуры неравновесная функция распределения постулируется в виде

$$f_\mu = R \exp \left( -\frac{e_\mu}{k_0 T_e} \right), \quad (81)$$

где  $R$  — нормировочная константа, а  $T_e$  определяется из уравнения баланса энергии

$$jE = \mathcal{P}(T_e); \quad (82)$$

здесь  $jE = \sigma_{ik} E_i E_k$  — джоулева мощность, а  $\mathcal{P}(T_e)$  — мощность, пере-

даваемая системой неравновесных электронов фононам:

$$\mathcal{P}(T_e) = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\mu, v, q} (\varepsilon_\mu - \varepsilon_v) |C_q|^2 |\langle \mu | e^{iqr} | v \rangle|^2 \times \\ \times [(N_0 + 1) f_\mu - N_0 f_v] \delta(\varepsilon_\mu - \varepsilon_v - \hbar\omega_0). \quad (83)$$

Анализ выражения (83) показывает, что мощность потерь  $\mathcal{P}(T_e)$  при фиксированной величине  $T_e > T$  является осциллирующей функцией магнитного поля. При выполнении условия МФР (20)  $\mathcal{P}(T_e)$  логарифмически расходятся. Если сопротивление обусловлено упругим рассеянием электронов, что всегда имеет место при низких температурах, джоулева мощность  $jE$  есть плавная функция  $H$ . Следовательно, электронная температура  $T_e(H)$ , определяемая уравнением (82), должна быть немонотонной функцией. В частности, при  $M\Omega = \omega_0$   $T_e$  становится равной температуре решетки  $T$ . Вследствие резонансного увеличения частоты испускания оптических фононов происходит резкое остывание электронного газа.

Поскольку в магнитных полях, далеких от резонансных,  $T_e$  возрастает с ростом электрического поля, амплитуда осцилляций определяется электрическим полем. Учет размытия уровней Ландау приводит к устраниению расходимости  $\mathcal{P}(T_e)$ , и поэтому в условиях МФР  $T_e$  будет несколько выше  $T$ . Учет неравновесности оптических фононов также ограничивает мощность  $\mathcal{P}(T_e)$  в резонансе<sup>82</sup>. Немонотонный характер зависимости  $T_e(H)$  может привести к МФ осцилляциям магнитосопротивления даже тогда, когда релаксация импульса происходит вследствие упругих столкновений и «обычные» МФ осцилляции (в омической области электрических полей) невозможны. Ни в одном из исследованных материалов МФР не наблюдался в слабых электрических полях  $E < 50$  мв/см в области температур  $T < 40$  °К. Однако в достаточно сильных электрических полях, когда  $T_e$  заметно превосходит  $T$ , МФ осцилляции наблюдались даже при гелиевых температурах в  $n$ -InSb<sup>83</sup>.

Поскольку МФР на горячих электронах связан с релаксацией энергии, а не импульса, осцилляции  $\rho_{xx}$  и  $\rho_{zz}$  должны быть подобны как по амплитуде, так и по фазе. Так как при упругом рассеянии на акустических фононах или примесях  $\rho_{xx}$  и  $\rho_{zz}$  — убывающие функции  $T_e$ , они в резонансных полях должны достигать максимальных значений. Этот вывод подтверждается численными расчетами Петерсона<sup>79, 80</sup>. Однако экспериментально на  $n$ -GaAs<sup>84</sup> и  $n$ -InSb<sup>85</sup> в резонансных полях были обнаружены минимумы  $\rho_{xx}$  и  $\rho_{zz}$ . Этот факт показывает, что приближение электронной температуры, возможно, не оправдано в условиях экспериментов<sup>84, 85</sup>, т. е. функция распределения электронов не имеет простого вида (81). Были сделаны попытки<sup>86, 87</sup> непосредственно определить вид неравновесной функции распределения в сильных электрических полях из решения кинетического уравнения. Из результатов работ<sup>86, 87</sup> следует, что в резонансе должны быть минимумы сопротивления, однако корректность сделанных приближений трудно оценить (см. также<sup>81</sup>). Недавно Стрэдлинг<sup>39</sup> сообщил о результатах наблюдения МФР сопротивления на горячих электронах в  $n$ -SnSb,  $n$ -InAs,  $n$ -GaAs,  $n$ -InP и  $n$ -CdTe в области температур 10–20 °К. Во всех исследованных случаях МФ экстремумы были смешены в сторону меньших полей относительно резонансных. Величина сдвига коррелирует с энергией ионизации доноров. Стрэдлинг высказал предположение, что в процессе испускания оптического фона электрон совершает резонансный переход с верхнего уровня Ландау на примесный уровень. Неясно, однако, при каких условиях это будет более вероятным, чем резонансный переход на нулевой уровень Ландау.

Авторы<sup>88</sup> наблюдали МФР на  $n$ -InSb при  $T = 77$  °К в области слабой неомичности. Специальная чувствительная методика позволила обнару-

жить осцилляции коэффициента неомичности  $\beta = \frac{u(E) - u_0}{E^2}$ . Интересно, что весьма малые осцилляции коэффициента  $\beta$  ( $\Delta u \sim 10^{-6} u_0$ ) наблюдались на фоне обычных МФ осцилляций  $\sigma_{xx}$ , амплитуда которых составляет несколько процентов монотонной части.

Долат и Брей<sup>89</sup>, исследуя акустоэлектрический ток в  $n$ -InSb, обнаружили МФ осцилляции, которые можно интерпретировать, используя приближение электронной температуры<sup>80</sup>. Акустоэлектрический ток обратно пропорционален  $T_e$ , поэтому в резонансе имеют место максимумы эффекта.

в) МФ осцилляции фотомагнитного эффекта и фотопроводимости. При исследовании фотомагнитного эффекта (ФМЭ) и фотопроводимости в  $n$ -InSb при гелиевых температурах, кроме осцилляций ШГ, были обнаружены МФ осцилляции<sup>90, 91</sup>. В<sup>90</sup> исследована зависимость напряжения нечетного МФЭ  $V_{\text{ФМ}}$  от магнитного поля для образцов с  $n = 2,2 \cdot 10^{14} - 1,1 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ . С понижением концентрации электронов осцилляции ШГ смещаются в сторону слабых магнитных полей и в области квантового предела  $\hbar\Omega > \zeta$  обнаруживается дополнительная серия пиков, положения которых не зависят от концентрации. Дополнительная серия осцилляций периодична по обратному магнитному полю с периодом  $\Delta(1/H) = 3 \cdot 10^{-5} \text{ э}^{-1}$ , который совпадает с периодом МФ осцилляций кинетических коэффициентов  $n$ -InSb. Резонансным значениям полей МФ осцилляций соответствуют минимумы  $V_{\text{ФМ}}(H)$ . При повышении температуры до 20°К МФ осцилляции ФМЭ исчезают. Следует обратить внимание, что 1) в условиях эксперимента определяющую роль играют основные носители  $n$ -InSb — электроны, тогда как согласно диффузионной теории главный вклад в ФМЭ должны давать дырки, и 2) МФ осцилляции обнаруживаются при столь низких температурах. Эти факты не могут быть объяснены с точки зрения обычной диффузионной теории ФМЭ. Как показали авторы<sup>92-94</sup>, для понимания обнаруженных особенностей ФМЭ необходимо учитывать разогрев электронов светом. В образцах с достаточно высокими концентрациями электронов частота столкновений фотоэлектронов с равновесными электронами больше частоты испускания оптических фононов. Поэтому основная часть избыточной энергии фотоэлектронов перераспределяется между всеми электронами. В результате функция распределения электронов имеет фермиевский вид с эффективной температурой  $T_e$  и химическим потенциалом  $\zeta_e$ , несколько отличными от равновесных значений  $T$  и  $\zeta$ , причем  $T_e$  и  $\zeta_e$  зависят от координат. В фотодиффузионном токе наряду с обычным членом, пропорциональным градиенту электронной концентрации, появляется член, пропорциональный  $\nabla T_e$ . При наложении магнитного поля этот член дает основной вклад в фотомагнитный ток короткого замыкания, и, таким образом, ФМЭ, в сущности, оказывается эффектом НЭ на градиенте электронной температуры. Возникновение МФ осцилляций  $V_{\text{ФМ}}$  можно тогда понять следующим образом. Вероятность испускания оптического фона на фотоэлектроном, находящимся на уровне Ландау, резко возрастает при выполнении условия (19). В то же время частота межэлектронных столкновений является плавной функцией  $H$ . Отсюда следует, что вблизи резонанса количество энергии, передаваемое фотоэлектронами системе электронов, уменьшается. Это соответствует уменьшению  $T_e$ . Следовательно, напряжение ФМЭ, связанное с  $\nabla T_e$ , должно иметь минимумы при  $M\Omega = \omega_0$ . При достаточно малых концентрациях электронов межэлектронное взаимодействие является слабым, и все фотоэлектроны успевают испустить оптические фононы. Это приводит к уменьшению сигнала ФМЭ и исчезновению МФ осцилляций, что и наблюдалось на опыте. МФ осцилляции фотопроводимости при разогреве электронов светом наблюдались и в CdS<sup>95</sup>.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

За десятилетие, прошедшее со времени первого обнаружения МФР<sup>9</sup>, этот эффект стал новым мощным средством изучения зонных параметров носителей заряда в полупроводниках. Во многих случаях эффективные массы и их зависимость от температуры и давления были определены с высокой точностью, сравнимой с точностью оптических и магнитооптических (циклотронный резонанс) методов. Однако роль МФР в исследовании полупроводников значительно шире, и можно надеяться, что в последующем будут реализованы и другие возможности МФР, позволяющие изучить сложные детали электрон-фононного взаимодействия. Можно предположительно указать на такие эффекты, как полярное взаимодействие, многофононные процессы, уширение уровней Ландау, которые определяют форму линий и амплитуду МФ осцилляций. Эти эффекты изучены еще недостаточно как экспериментально, так и теоретически. Другой круг мало изученных вопросов связан с МФ осцилляциями в области горячих электронов — это механизмы релаксации энергии и вид неравновесной функции распределения в условиях МФР. Наконец, перспективным может оказаться изучение спин-магнитофононного резонанса, при котором происходит рассеяние электрона с переворотом спина. Этот эффект, теоретически рассмотренный в работах Павлова и Фирсова<sup>96</sup> и обнаруженный экспериментально на *n*-InAs<sup>69</sup>, может дать информацию о *g*-факторе, величине энергий спин-орбитального взаимодействия и времени спин-решеточной релаксации в полупроводниках с большим спин-орбитальным взаимодействием.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Значения предельных частот  $\omega_0$  оптических фононов и константы связи  $\alpha$  носителей заряда с оптическими фононами для некоторых полупроводниковых материалов

Материал	$T, ^\circ\text{K}$	$\omega_0 \cdot 10^{-13} \text{ сек}^{-1}$	$\alpha$ *)	Материал	$T, ^\circ\text{K}$	$\omega_0 \cdot 10^{-13} \text{ сек}^{-1}$	$\alpha$ *)
InSb	4	3,72 <sup>97</sup>	0,02	PbSe	4	2,5 <sup>100</sup>	0,3
	100	3,64 <sup>98</sup>		PbS	4	3,99 <sup>100</sup>	
	300	3,59 <sup>98</sup>		CdTe	20	3,23 <sup>102,103</sup>	
InAs	4	4,59 <sup>97</sup>	0,05		300	3,22 <sup>104</sup>	0,5
	300	6,59 <sup>99</sup>		CdSe	20	4,09 <sup>103</sup>	
InP	4	6,59 <sup>99</sup>	0,11	(вюрцит)	300	3,98 <sup>105</sup>	0,6
	300	6,5 <sup>99</sup>		CdS	77	5,75 <sup>106</sup>	
GaSb	4	4,53 <sup>97</sup>	0,025	(вюрцит)	300		0,1
GaAs	4	5,59 <sup>99</sup>		HgTe	10	2,17 <sup>107</sup>	
	300	5,5 <sup>99</sup>		Ge	300	5,65 <sup>62</sup>	
GaP	4	7,6 <sup>99</sup>	0,2	Te	300	1) 1,81 <sup>108 **</sup> )	0,04
	300					2) 2,0 <sup>108 **</sup> )	
AlSb	4	6,49 <sup>99</sup>	0,13			3) 2,73 <sup>108</sup> )	0,43
	300	6,41 <sup>99</sup>					
PbTe	4	2,07 <sup>100,101</sup>					0,01

\*) Константа связи  $\alpha$  вычислена по формуле (27). Для  $\omega_0$  и  $\omega_\infty$  в соединениях III—V принятые значения, приведенные в обзоре<sup>109</sup>. Значения  $\omega_0$ ,  $\omega_\infty$  в CdTe, CdSe, CdS взяты из<sup>110</sup>, в HgTe — из<sup>107</sup>. Значения эффективных масс  $m$  взяты из<sup>111</sup>.

\*\*) Представлены три активные продольные оптические частоты из данных по отражению в инфракрасной области при поляризации света параллельно  $c_3$  (1) и перпендикулярно  $c_3$  (2, 3). Для константы связи  $\alpha$  в случае 1) в работе<sup>108</sup> допущена опечатка.

Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе АН СССР,  
Ленинград  
Институт физики металлов Уральского научного центра АН СССР.  
Свердловск

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, М., Физматгиз, 1963.
2. а) R. Dingle, Proc. Roy. Soc. A211, 517 (1952); б) R. Kubo, S. Miake, N. Hashitsume, Sol. State Phys. 17, 269 (1965).
3. L. Roth, A. Arguges, сборник «Semiconductors and Semimetals», v. 1, N.Y.—L., Academic Press, 1966, p. 159.
4. E. Adams, T. Holstein, J. Phys. Chem. Sol. 10, 254 (1959) (см. перевод в сборнике «Вопросы квантовой теории необратимых процессов», М., ИЛ, 1961).
5. Л. С. Дубинская, ФТТ 7, 2821 (1965); ЖЭТФ 56, 801 (1969).
6. Г. И. Харус, сборник «Физические свойства полупроводников АИИВ и АИИВГ», Баку, Изд-во АН Аз. ССР, 1967; I. M. Tsidilkovski, M. M. Akselrod, V. I. Sokolov, G. I. Hargus, Phys. Stat. Sol. 9, K91 (1965).
7. В. Л. Гуревич, Ю. А. Фирсов, ЖЭТФ 40, 499 (1961).
8. М. И. Клингер, ФТТ 3, 1342 (1961).
9. S. Puglisi, T. Geballe, Bull. Am. Phys. Soc. 8, 309 (1963).
10. С. С. Шалыт, Р. В. Парфеньев, В. М. Муждаба, ФТТ 6, 677 (1964).
11. Р. В. Парфеньев, С. С. Шалыт, В. М. Муждаба, ЖЭТФ 47, 444 (1964); Y. A. Firssov, V. L. Gurevich, R. V. Parfenev, S. S. Shalyt, Phys. Rev. Lett. 12, 660 (1964).
12. R. Arguges, L. Roth, J. Phys. Chem. Sol. 12, 89 (1959).
13. А. Л. Эфрос, ФТТ, 3, 2878 (1961).
14. Ю. А. Фирсов, В. Л. Гуревич, ЖЭТФ 41, 512 (1961).
15. H. Fröhlich, Polarons and Exitons, N.Y., Plenum Press, 1963.
16. D. M. Larsen, Phys. Rev. A135, 419 (1964).
17. D. H. Dickey, E. J. Johnson, D. M. Larsen, Phys. Rev. Lett. 18, 599 (1967).
18. D. M. Larsen, E. J. Johnson, Phys. Rev. Lett. 16, 655 (1966); J. Phys. Soc. Japan, Suppl. 21, 443 (1966).
19. C. W. Litton, R. B. Dennis, S. D. Smith, J. Phys. C2, 2146 (1969).
20. D. H. Dickey, D. M. Larsen, Phys. Rev. Lett. 20, 65 (1968).
21. L. Dvorin, Phys. Rev. A140, 1689 (1965).
22. M. Nakayama, J. Phys. Soc. Japan 27, 636 (1969).
23. J. R. Barker, Phys. Lett. A33, 516 (1970).
24. В. Л. Гуревич, Ю. А. Фирсов, А. Л. Эфрос, ФТТ 4, 1813 (1962).
25. M. M. Akselrod, V. I. Sokolov, I. M. Tsidilkovski, Phys. Stat. Sol. 8, K15 (1965).
26. R. A. Stradling, R. A. Wood, J. Phys. C1, 1711 (1968).
27. Х. И. Амирханов, Р. И. Баширов, ФТП 1, 677 (1967).
28. S. Askenazy, J. Leotin, J. Ulmet, A. Laurent, J. Holland, Phys. Lett. A29, 9 (1969).
29. R. A. Stradling, R. A. Wood, J. Phys. C3, L94 (1970).
30. Н. Г. Глузман, И. М. Цидильковский, ФТТ 10, 3128 (1968).
31. L. Eaves, R. A. Stradling, R. A. Wood, Proc. of the Intern. Conference on Physics of Semiconductors, Boston, 1970, p. 816.
32. L. Eaves, R. A. Stradling, S. Askenazy, J. Leotin, J. Portal, J. Ulmet, J. Phys. C4, L42 (1971).
33. Р. И. Баширов, А. Ю. Моллаев, Н. В. Сиукаев, ФТТ 13, 3097 (1971).
34. A. L. Meairs, R. A. Stradling, E. K. Inall, J. Phys. C1, 821 (1968).
35. L. Eaves, R. A. Stradling, S. Askenazy, G. Carrero, J. Leotin, J. Portal, J. Ulmet, J. Phys. C5, L19 (1972).
36. Д. В. Машовец, С. С. Шалыт, Письма ЖЭТФ 4, 244 (1966).
37. M. S. Bresler, D. V. Mashovets, Phys. Stat. Sol. 39, 421 (1970).
38. N. Miura, R. A. Stradling, S. Askenazy, G. Carrero, J. Leotin, J. Portal, J. P. Ulmet, J. Phys. C5, 3332 (1972).
39. R. A. Stradling, Proc. of the Intern. Conference on Physics of Semiconductors, Warszawa, 1972, p. 261.
40. М. М. Аксельрод, И. М. Цидильковский, Письма ЖЭТФ 9, 622 (1969).
41. Э. А. Нейфельд, И. М. Цидильковский, ФТП 5, 2239 (1971).
42. В. Л. Гуревич, Ю. А. Фирсов, ЖЭТФ 47, 734 (1964).
43. В. В. Брыксин, ФТТ 9, 232 (1967).
44. Г. И. Харус, И. М. Цидильковский, ФТП 5, 603 (1971).
45. R. L. Peterson, Phys. Rev. Lett. 28, 431 (1972).
46. И. М. Цидильковский, М. М. Аксельрод, В. И. Соколов, ФТТ 7, 316 (1965).
47. Д. В. Машовец, Р. В. Парфеньев, С. С. Шалыт, Письма ЖЭТФ 1, 2 (1965).
48. Р. И. Баширов, А. Ю. Моллаев, Н. В. Сиукаев, ФТТ 13, 3432 (1971).

49. М. М. Аксельрод, И. М. Цидильковский, ФТП 7, 402 (1973).
50. R. L. Peterson, Phys. Rev. a) B2, 4135 (1970); б) B5, 3994 (1972).
51. а) Д. Займан, Электроны и фононы, М., ИЛ, 1962, гл. 10; б) В. М. Михеев, П. С. Зырянов, ФММ 30, 526 (1970).
52. Р. В. Поморцев, А. И. Пономарев, Г. И. Харус, И. М. Цидильковский, а) ЖЭТФ 54, 1347 (1968); б) Труды IX Международной конференции по физике полупроводников, Л., «Наука», стр. 720.
53. N. Scherwood, W. Beeker, Phys. Lett. A27, 167 (1968).
54. В. И. Соколов, И. М. Цидильковский, ФТП 1, 835 (1967).
55. Х. И. Амирханов, Р. И. Баширов, З. А. Исаилов, ФТП 2, 434 (1968).
56. Y. Yafet, Phys. Rev. 115, 1172 (1965).
57. В. М. Askarov, F. M. Gashimzade, Phys. Stat. Sol. 18, 667 (1966).
58. Е. С. Ицкевич, В. М. Муждаба, В. А. Сухопаров, С. С. Шалыт, Письма ЖЭТФ 2, 514 (1965); М. М. Аксельрод, К. М. Демчук, И. М. Тсидильковский, E. L. Groouda, K. P. Rodionov, Phys. Stat. Sol. 27, 249 (1968).
59. М. М. Аксельрод, И. М. Цидильковский, Письма ЖЭТФ 4, 205 (1966).
60. С. В. Ганцевич, В. Л. Гуревич, ФТТ 6, 2871 (1964).
61. М. Лах, Bull. Am. Phys. Soc. 6, 109 (1961).
62. B. Brockhouse, P. Iyengar, Phys. Rev. 111, 747 (1958).
63. E. Raige, Progr. Semicond. 8, 100 (1965).
64. Н. Г. Глузман, В. З. Любимов, И. М. Цидильковский, ФТП 7, 1000 (1973).
65. R. Zallen, Phys. Rev. 173, 824 (1968).
66. М. С. Бреслер, В. Г. Веселаго, Ю. В. Косякин, Г. Е. Пикус, И. И. Фарбштейн, С. С. Шалыт, ЖЭТФ 57, 1479 (1969).
67. Ю. Н. Образцов, ФТТ 6, 414 (1964); 7, 573, 1965.
68. А. И. Аксельм, Б. М. Аскеров, ФТТ 4, 1579 (1962).
69. В. М. Муждаба, Р. В. Парфеньев, С. С. Шалыт, ФТТ 6, 3194 (1964), 7, 2379 (1965).
70. S. Puri, T. Gevalle, сборник<sup>3</sup>, р. 203.
71. Р. И. Баширов, И. М. Гаджиалиев, ФТП 2, 115 (1968).
72. С. Т. Павлов, Ю. А. Фирсов, ФТТ 6, 3608 (1964).
73. П. С. Зырянов, Г. И. Гусева, УФН 95, 565 (1968).
74. Н. Г. Глузман, И. М. Цидильковский, ФТП 2, 1039 (1968).
75. В. А. Кудинов, Б. Я. Мойжес, ФТТ 7, 2309 (1965).
76. М. М. Аксельрод, В. А. Вилисов, А. П. Подколзин, И. М. Цидильковский, ФТП 4, 2217 (1970).
77. R. A. Wood, R. A. Stradling, J. P. Molodyan, J. Phys. C3, L145 (1970).
78. Р. В. Поморцев, Г. И. Харус, ФТТ 9, 1473 (1967).
79. R. Peterson, Phys. Rev. B2, 4135 (1970).
80. R. Peterson, B. Magnison, R. Weissglass, Phys. Stat. Sol. 46, 729 (1971).
81. А. М. Злобин, П. С. Зырянов, УФН 104, 353 (1971).
82. Р. В. Поморцев, Г. И. Харус, ФТТ 9, 2871 (1967).
83. N. Kotegawa, K. Komatsubara, E. Yamada, Proc. of the Intern. Conference on Physics of Semiconductors, Kyoto, 1966, p. 411.
84. R. A. Stradling, R. A. Wood, Sol. State Comm. 6, 701 (1968).
85. М. М. Аксельрод, В. П. Луговых, Р. В. Поморцев, И. М. Цидильковский, ФТТ 11, 113 (1969).
86. Е. Я마다, Т. Куросава, сборник<sup>52б</sup>, стр. 805.
87. А. М. Злобин, ФТП 3, 334 (1969).
88. C. Hamaguchi, T. Shirakawa, T. Yamashita, I. Nakai, Phys. Rev. Lett. 28, 1129 (1972).
89. V. Dolat, R. Blaauw, ibid. 24, 262 (1970).
90. Р. В. Парфеньев, И. И. Фарбштейн, С. С. Шалыт, Письма ЖЭТФ 5, 253 (1967); ЖЭТФ 53, 1571 (1967).
91. И. К. Кикоин, С. Д. Лазарев, Письма ЖЭТФ 3, 434 (1966); И. К. Кикоин, С. Д. Лазарев, Г. А. Шепельский, Г. Д. Ефремова, ЖЭТФ 58, 60 (1970).
92. Р. И. Лягушенко, И. Н. Яссиевич, ФТТ 9, 3547 (1967); ЖЭТФ 56, 1432 (1969).
93. В. Н. Абакумов, Р. И. Лягушенко, И. Н. Яссиевич, ФТТ 10, 2920 (1968).
94. А. В. Матвеенко, Р. В. Парфеньев, И. Н. Яссиевич, ФТТ 11, 2538 (1969); Р. И. Лягушенко, Р. В. Парфеньев, И. И. Фарбштейн, С. С. Шалыт, И. Н. Яссиевич, ФТТ 10, 2241 (1968).

95. G. P. Vella - Coleiro, Phys. Rev. Lett. **23**, 697 (1969).
96. С. Т. Павлов, Ю. А. Фирсов, ЖЭТФ **49**, 1664 (1965); ФТТ **7**, 2634 (1965); **9**, 1780 (1967).
97. M. Hass, B. W. Henvis, J. Phys. Chem. Sol. **23**, 1099 (1962).
98. R. B. Anderson, ibid. **26**, 803 (1965).
99. A. Mooradian, G. B. Wright, Sol. State Comm. **4**, 431 (1966).
100. R. H. Hall, J. H. Racette, J. Appl. Phys. Suppl. **32**, 2078 (1961).
101. E. G. Bylander, M. Hass, Sol. State Comm. **4**, 51 (1966).
102. A. L. Mears, A. R. Sprauy, R. A. Stradling, J. Phys. **C1**, 1412 (1968).
103. R. E. Halsted, M. R. Lorenz, B. Segall, J. Phys. Chem. Sol. **22**, 109 (1961).
104. A. Mooradian, G. B. Wright, сборник <sup>526</sup>, стр. 1076.
105. H. W. Verleur, A. S. Barker, Phys. Rev. **155**, 750 (1967).
106. B. Tell, T. S. Dammen, S. P. Porto, Phys. Rev. **144**, 771 (1966).
107. D. H. Dickey, J. G. Mavroides, Sol. State Comm. **2**, 213 (1964).
108. G. Lucovsky, R. C. Keezer, ibid. **5**, 439 (1967).
109. M. Hass, сборник <sup>3</sup>, в. 3, p. 3.
110. M. Balkanski, Proc. Intern. Conference on II-VI Semiconductor Compounds, New York—Amsterdam, W. A. Benjamin, Inc., 1967, p. 1007.
111. И. М. Цидильковский, Электроны и дырки в полупроводниках, М., «Наука», 1972.