

КИНЕТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ НЕИДЕАЛЬНОГО ГАЗА
И НЕИДЕАЛЬНОЙ ПЛАЗМЫ

Ю. Л. Климонтович

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	537
2. Кинетическое уравнение Больцмана для неидеального газа в приближении парных столкновений	546
3. <i>H</i> -теорема Больцмана для неидеального газа	550
4. Кинетическое уравнение для неидеального газа с учетом тройных столкновений	551
5. Кинетические уравнения для неидеальной плазмы	552
6. Уравнение Больцмана для неидеальной плазмы с учетом усредненной динамической поляризации	554
7. Квантовое кинетическое уравнение для невырожденного неидеального газа	555
8. Квантовое кинетическое уравнение для неидеальной плазмы	557
9. Кинетические уравнения для плотных газов	558
10. Кинетическая теория флуктуаций в газе и плазме	561
11. Обобщенное кинетическое уравнение	564
12. Заключение	565
Цитированная литература	567

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей статье излагаются основы современной кинетической теории одноатомных газов и полностью ионизованной плазмы.

В основе теории неравновесных процессов в газах лежит кинетическое уравнение Больцмана — замкнутое уравнение для функции распределения переменных одной частицы $f_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ ¹⁻⁸. Кинетическое уравнение для газа было установлено Больцманом 100 лет назад на основе простых физических предположений о характере взаимодействия частиц в газе малой плотности.

Уравнение Больцмана является приближенным уравнением. Наиболее общее статистическое описание процессов в газе может быть получено на основе уравнения Лиувилля — уравнения для функции распределения координат и импульсов всех частиц газа, т. е. для функции $f_N(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N, t)$. Решение уравнения Лиувилля равносильно решению системы уравнений движения всех частиц газа и поэтому в общем случае не может быть осуществлено. В этом, однако, и нет практической необходимости, так как для описания процессов в газе обычно достаточно знать функции распределения переменных одной или двух частиц, т. е. первую (одночастичную) $f_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ и вторую (двухчастичную) $f_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2, t)$ функции распределения.

Уравнение для функции f_1 можно получить из уравнения Лиувилля путем интегрирования по переменным всех частиц, кроме одной. При

этом, однако, уравнение для функции f_1 оказывается незамкнутым, так как в него входит функция f_2 . Если аналогичным путем получить уравнение для функции f_2 , то в него войдет функция распределения переменных трех частиц f_3 , и т. д. В результате получается цепочка зацепляющихся уравнений для функций распределения $f_1, f_2, f_3 \dots$, которая эквивалентна исходному уравнению Лиувилля. Ее называют системой уравнений Боголюбова или BBGKY (Боголюбова — Борна — Грина — Кирквуда — Ивона).

Вследствие чрезвычайной сложности цепочки уравнений для функций распределения естественно стремление получить приближенные замкнутые уравнения для простейших функций распределения. Примером такого уравнения и служит кинетическое уравнение Больцмана для газа.

Переход от уравнения Лиувилля к существенно более простому кинетическому уравнению означает, естественно, переход к более огрубленному описанию процессов в газах. Это возможно благодаря тому, что в газе малой плотности эффективный радиус межмолекулярных сил r_0 значительно меньше среднего расстояния между молекулами $r_{\text{ср}} \sim n^{-1/3}$ (n — концентрация атомов), а $r_{\text{ср}}$ в свою очередь много меньше средней длины свободного пробега $l \sim 1/nr_0^2$, т. е. имеют место неравенства

$$r_0 \ll r_{\text{ср}} \ll l. \quad (1.1)$$

Вследствие этого можно ввести малый параметр — параметр плотности

$$\varepsilon = nr_0^3 \sim (r_0/r_{\text{ср}})^3 \sim r_0/l. \quad (1.2)$$

Первое приближение по ε соответствует учету лишь двойных столкновений, второе — тройных столкновений и т. д.

Кинетическое уравнение Больцмана для одноатомного газа соответствует первому приближению по ε , т. е. приближению первых столкновений. Однако, как мы увидим ниже, взаимодействие частиц в уравнении Больцмана учитывается неполностью. Оно учтено лишь в диссипативных членах, определяющих, например, процесс установления равновесного состояния в разреженном газе. В недиссипативных характеристиках, например, в выражениях для внутренней энергии, давления, энтропии, явный вклад взаимодействия частиц не учитывается. Поэтому в состоянии равновесия эти выражения совпадают с соответствующими выражениями для идеального газа. В этом смысле уравнение Больцмана — кинетическое уравнение для идеального газа.

В связи с этим возникает проблема, как в рамках данного приближения — приближения парных столкновений — надо видоизменить кинетическое уравнение, чтобы оно полностью учитывало эффекты неидеальности газа, т. е. эффекты, обусловленные взаимодействием частиц.

Энскогом (см. ²) для модели твердых сфер было проведено обобщение интеграла столкновений Больцмана с целью учета конечности размеров атомов газа. Такое обобщение позволяет учесть в уравнении состояния газа отклонение от уравнения состояния идеального газа, обусловленное конечностью объема атомов.

В работе Боголюбова ⁴ получено соответствующее обобщенное выражение для интеграла столкновений при произвольном характере межмолекулярных сил отталкивания.

Проведенные в работах Энскога и Боголюбова обобщения кинетического уравнения Больцмана еще недостаточны для полного учета взаимодействия частиц в рамках приближения парных столкновений. Для полного учета эффектов неидеальности в кинетическом уравнении Больцмана необходимо учесть в интеграле столкновений не только пространственную неоднородность функций распределения на расстояниях порядка

r_0 , но и временное запаздывание функций распределения на временах порядка r_0/v_T (v_T — средняя тепловая скорость частиц газа).

Для классического случая в рамках модели парных столкновений полный учет взаимодействия в кинетическом уравнении Больцмана приведен в работе ⁹.

Первая попытка учесть вклад взаимодействия в недиссипативные характеристики в квантовом кинетическом уравнении была сделана в работе Грина ¹⁰. Более последовательный вывод квантового кинетического уравнения Больцмана для невырожденного неидеального газа в приближении парных столкновений проведен в работах Каданова и Бейма ¹¹, Гроссмана и Бэрвинкеля ^{12, 13} и Климонтовича и Эбелинга ¹⁴.

Таким образом, для газа в рамках приближения парных столкновений (первого приближения по параметру плотности ϵ) возможно получение кинетического уравнения, учитывающего вклад взаимодействия как в диссипативные, так и недиссипативные характеристики газа.

Возможно ли продвинуться дальше и получить кинетическое уравнение для более плотного газа, когда необходим уже учет тройных и более сложных процессов столкновений, т. е. высших приближений по степеням параметра ϵ ? Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо рассмотреть основные идеи и предположения, используемые при выводе кинетического уравнения для газа.

Запишем первое уравнение цепочки уравнений Боголюбова для функций распределения $f_1, f_2 \dots$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} + \mathbf{F} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} \right) f_1 = n \int \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial g_2}{\partial \mathbf{p}_1} d\mathbf{r}_2 d\mathbf{p}_2 \equiv J. \quad (1.3)$$

Здесь Φ_{12} — потенциальная энергия взаимодействия двух частиц, $g_2 = f_2 - f_1 f_1$ — корреляционная функция, $n = N/V$ — средняя концентрация частиц, $\mathbf{F} = -n \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} \int \Phi_{12} f_1(2) d\mathbf{x}_2$ — средняя сила. Условия нормировки f_1, f_2 :

$$\frac{1}{V} \int f_1 d\mathbf{x}_1 = 1, \quad \frac{1}{V^2} \int f_2 d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 = 1, \quad \mathbf{x} = (\mathbf{r}, \mathbf{p}).$$

Правая часть этого уравнения определяет вклад взаимодействия частиц газа. Обозначим его через J и будем называть интегралом столкновений.

Интеграл столкновений определяется второй функцией распределения f_2 . Запишем уравнение для этой функции (второе уравнение цепочки)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} + \mathbf{v}_2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_2} - \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} - \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \mathbf{r}_2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_2} \right) f_2 = \\ = n \int \left(\frac{\partial \Phi_{13}}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} + \frac{\partial \Phi_{23}}{\partial \mathbf{r}_2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_2} \right) f_3 d\mathbf{x}_3 \equiv J_2. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Правая часть этого уравнения (обозначаем ее через J_2) определяет вклад взаимодействий двух частиц (с индексами 1, 2) с одной из окружающих их частиц (индекс 3). Она определяется функцией распределения f_3 . Уравнение для функции f_3 содержит функции f_4 и т. д. Функцию распределения f_3 в уравнении (1.4) можно представить в виде

$$f_3 = f_1 f_1 f_1 + f_1(1) g_2(2, 3) + f_1(2) g_2(1, 3) + f_1(3) g_2(1, 2) + \\ + g_3(1, 2, 3). \quad (1.5)$$

Здесь g_2, g_3 — корреляционные функции соответственно двух и трех частиц.

В приближении парных столкновений $g_3 = 0$, так как функция g_3 отлична от нуля при сближении трех частиц.

Рассмотрим результат подстановки остальных членов из (1.5) в правую часть (1.4). Членами с $\Phi_{13}g_2$ (2.3), $\Phi_{23}g_2$ (1.3) также можно пренебречь, так как и они отличны от нуля при сближении сразу трех частиц. Используя определение средней силы $F(\mathbf{r}_1, t)$ и уравнение (1.3), получим уравнение для функции f_2 в приближении парных столкновений

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} + \mathbf{v}_2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_2} - \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} - \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \mathbf{r}_2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_2} + \mathbf{F} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} + \mathbf{F} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_2} \right) f_2 = \\ = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} + \mathbf{v}_2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_2} + \mathbf{F} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} + \mathbf{F} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_2} \right) f_1 f_1. \quad (1.6) \end{aligned}$$

Таким образом, в приближении парных столкновений первые два уравнения цепочки (1.3), (1.6) становятся замкнутыми уравнениями для функций распределения f_1, f_2 .

Рассмотрим дополнительные предположения, при которых из системы уравнений (1.3), (1.6) можно получить замкнутое уравнение для функции f_1 — кинетическое уравнение Больцмана.

Обозначим через $\tau_0 = r_0/V_T$ время взаимодействия пары частиц, а через $\tau_{ст} = l/V_T$ время свободного пробега (время релаксации функции f_1). Из неравенств (1.1) следует, что $\tau_0 \ll \tau_{ст}$, а из (1.2) — что $\tau_0/\tau_{ст} \sim \varepsilon$.

Решение уравнения (1.6) при заданных функциях f_1 можно представить в виде суммы двух частей: решений однородного и неоднородного уравнений. Первая часть решения определяется функцией распределения f_2 в начальный момент t_0 . Так как $f_2 = f_1 f_1 + g_2$, то это решение зависит от начальной корреляции частиц.

Первое дополнительное ограничение при получении кинетического уравнения Больцмана из системы уравнений (1.4), (1.6) состоит в использовании условия полного ослабления начальной корреляции, введенного Боголюбовым⁴.

Реально можно при выводе кинетического уравнения пренебречь лишь теми корреляциями, для которых характерные времена $\tau_{кор} \ll \tau_{ст}$. Тем самым условие полного ослабления начальных корреляций соответствует предположению о том, что долгоживущие корреляции (с $\tau_{кор} \gg \tau_{ст}$) не играют существенной роли в кинетической теории.

При использовании этого условия решение однородного уравнения (1.6) определяется лишь начальными значениями функций f_1 в момент $t_0 = t - \tau$ ($\tau = t - t_0$).

Таким образом, при условии полного ослабления корреляций функция $f_2(x_1, x_2, t)$ определяется значениями функций f_1 в более ранние моменты времени $t - \tau$, т. е. имеет место временное запаздывание.

Второе ограничение заключается в полном пренебрежении временным запаздыванием, т. е. $f_1(t - \tau) \rightarrow f_1(t)$. В этом же приближении можно пренебречь правой частью в уравнении (1.6) и пространственным изменением функций f_1 на расстояниях порядка r_0 .

В результате решение уравнения (1.6) принимает вид

$$f_2(x_1, x_2, t) = f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{P}_1(-\infty), t) f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{P}_2(-\infty), t) \equiv S_{-\infty}^{(2)}(1, 2) f_1 f_1. \quad (1.7)$$

$\mathbf{P}_{1,2}(-\infty) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathbf{P}_{1,2}(-\tau)$ — начальные импульсы двух частиц «1» и «2», которые сталкиваются в момент времени t . $S_{-\tau}^2(1, 2)$ — оператор сдвига переменных x_1, x_2 по времени на интервале $-\tau$. Предельный переход $\tau \rightarrow \infty$ возможен в силу неравенства $\tau_0 \ll \tau_{ст}$.

Чтобы найти выражение для интеграла столкновений J , надо подставить выражение (1.7) в правую часть уравнения (1.3). Таким образом,

$$J(x_1, t) = n \int \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1(-\infty), t) f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_2(-\infty), t) d\mathbf{x}_2. \quad (1.8)$$

В работе Боголюбова было показано, что это выражение лишь формой записи отличается от выражения для интеграла столкновений в уравнении Больцмана (см. ⁴⁻⁸).

Аналогичный вывод кинетического уравнения Больцмана был приведен Борном и Грином ¹⁵. Анализу различных выводов кинетического уравнения Больцмана посвящена работа ¹⁶ (см. также ⁶).

Напомним свойства интеграла столкновений в уравнении Больцмана. Умножим выражение (1.8) на функцию $\varphi(\mathbf{p}_1)$ и проинтегрируем по \mathbf{p}_1 . Тогда

$$\int \varphi(\mathbf{p}_1) J d\mathbf{p}_1 = 0 \quad \text{при } \varphi = 1, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_1^2/2m. \quad (1.9)$$

Первое равенство (при $\varphi = 1$) обеспечивает выполнение закона сохранения числа частиц, второе — импульса, а третье — кинетической энергии частиц газа.

Если в качестве функции φ взять функцию $\varphi = -\kappa \ln f_1$ (κ — постоянная Больцмана), то интеграл $-\kappa \int \ln f_1 \cdot J d\mathbf{p}_1 \geq 0$.

Основываясь на этом, Больцман доказал так называемую H -теорему, из которой следует закон возрастания полной энтропии газа по мере приближения состояния газа к равновесному состоянию. По Больцману плотность энтропии всей системы определяется выражением

$$S_E(t) = -\kappa n \int \ln f_1 \cdot f_1 \frac{d\mathbf{x}_1}{V} \quad (1.10)$$

и по H -теореме $dS/dt \geq 0$, т. е. полная энтропия газа может либо возрастать, либо оставаться неизменной. Последнее имеет место после достижения равновесного состояния.

Посмотрим, в какой мере сделанные допущения при выводе уравнения Больцмана являются принципиальными и можно ли получить более общие кинетические уравнения для газа.

В рамках модели парных столкновений можно построить кинетическое уравнение лишь при одном условии ослабления начальной корреляции, т. е. с учетом изменения функции распределения за время τ_0 и на расстоянии r_0 . Поскольку для газа параметры $\tau_0/\tau_{ст} \sim r_0/l \sim \varepsilon$, то в приближении парных столкновений достаточно учесть лишь члены первого порядка по $\tau_0/\tau_{ст}$, r_0/l . (см. гл. 2).

Полученное таким путем уравнение учитывает вклад взаимодействия как в диссипативные, так и в недиссипативные характеристики газа, поэтому его можно назвать кинетическим уравнением Больцмана для неидеального (в приближении парных столкновений) газа.

При учете эффектов неидеальности видоизменяется, в частности, выражение для энтропии (H -функции Больцмана) ²¹. К выражению Больцмана (1.10) добавляется член, учитывающий корреляцию пар взаимодействующих частиц в газе (см. гл. 3).

Выражение (1.7) для второй функции распределения можно рассматривать как нулевой член разложения точной функции распределения по плотности (по параметру ε).

В работе Боголюбова ⁴ развит метод, позволяющий при выполнении условия ослабления начальной корреляции любого числа взаимодей-

ствующих частиц находить последовательно члены разложения функции распределения по плотности.

Выражение (1.7) определяет нулевое приближение по плотности. Следующий член разложения (первое приближение по плотности) содержит вклады двух типов. Один определяет влияние тройных столкновений на диссипативные характеристики газа. Второй вклад иной природы. Он включает члены, определяющие влияние парных столкновений на недиссипативные характеристики газа, т. е., например, поправки к термодинамическим функциям, обусловленные взаимодействием пар частиц. Это эквивалентно (см. гл. 2) учету членов в термодинамических функциях первого порядка по $\tau_0/\tau_{ст}$, r_0/l .

Используя выражение для функции f_2 , учитывающее члены линейные по плотности, можно, естественно, получить и более точное выражение для интеграла столкновений в кинетическом уравнении. Это было сделано в работе Чо и Уленбека (см. ⁵).

Возможно построение кинетического уравнения для неидеального газа и в приближении тройных столкновений. Это сделано в работе ²² (см. гл. 4).

Если учесть в выражении для f_2 члены следующего приближения по плотности, то можно получить еще более общее кинетическое уравнение для газа. В нем дополнительно учитывается вклад четверных столкновений в диссипативные и тройных в недиссипативные характеристики газа.

Таким образом, казалось бы, имеется метод построения кинетических уравнений для газа в любом приближении по плотности. В каждом приближении по плотности используется лишь одно допущение о полном ослаблении начальной корреляции на временах, много меньших $\tau_{ст}$. Однако при осуществлении этой программы возникают принципиальные трудности.

Исследования, проведенные независимо Вайнштоком ¹⁷, Голдменом и Фрименом ¹⁸ и Дорфманом и Коэном ¹⁹ (см. обзоры Коэна ²⁰) показали, что вклады в интегралы столкновений от высших приближений по плотности содержат расходящиеся (по времени) интегралы.

Интересно, что характер расходимостей в двумерной и трехмерной моделях газа оказывается различным.

В двумерной модели уже первая поправка по плотности (учет тройных столкновений) приводит в соответствующем интеграле столкновений к логарифмической ($\ln t/\tau_0$) расходимости. Члены порядка ε^n ($n \geq 2$) приводят к расходимости вида $(t/\tau_0)^{n-1}$.

В трехмерном случае в первом приближении по ε (тройные столкновения) расходимости нет. Расходимость (как $\ln t/\tau_0$) возникает при учете четверных столкновений. Члены порядка ε^n в f_2 ($n \geq 3$) приводят к расходимости вида $(t/\tau_0)^{n-2}$.

Это показывает, что построение кинетических уравнений для плотных газов путем непосредственного использования метода последовательных приближений по степеням плотности оказывается невозможным. Имеется несколько работ (см. обзор ²⁰), в которых на частных примерах показано, что устранение логарифмической расходимости может быть проведено путем учета вклада наиболее расходящихся диаграмм, возникающих при использовании разложения по плотности. Это приводит к обрезанию области интегрирования по t при $t \sim \tau_{ст}$. В результате интеграл столкновений оказывается пропорциональным величине $\ln(\tau_{ст}/\tau_0) \sim \ln(1/nr_0^3)$, которая неаналитически зависит от плотности. Вследствие этого оказывается невозможным вириальное (по степеням плотности) разложение кинетических коэффициентов.

Задача построения кинетических уравнений для плотных газов может быть решена иным путем без проведения суммирования расходящихся диаграмм в разложениях по плотности, но для этого надо отказаться от условия полного ослабления начальных корреляций на временах, много меньших $\tau_{ст}$ (гл. 9).

Уже сравнительно давно было обращено внимание на то, что условие полного ослабления начальных корреляций является приближенным (см., например, работу Сандри²³). Ослабляется влияние лишь мелко-масштабных флуктуаций, для которых в приближении парных столкновений длина корреляции $l_{кор}$ и время корреляции $\tau_{кор}$ таковы, что

$$r_{кор} \ll l, \quad \tau_{кор} \ll \tau_{ст}. \quad (1.11)$$

В общем случае имеет место лишь частичное ослабление корреляций. Крупномасштабные флуктуации не затухают достаточно быстро и должны, следовательно, учитываться при построении кинетической теории. Их роль проявляется, в частности, в том, что функция распределения f_1 , для которой записывается кинетическое уравнение, не является строго детерминированной (см. гл. 9).

Условную границу, разделяющую области быстрых и медленных флуктуаций, можно ввести следующим образом²⁴.

Рассмотрим приближение парных столкновений. Обозначим через l_ϕ^3 , τ_ϕ объем и временной интервал, которые для уравнения Больцмана можно рассматривать как физически бесконечно малые. При этом $\tau_\phi = l_\phi/V_T$.

Величину l_ϕ определим из условия непрерывности процесса парных столкновений: интервал между последовательными столкновениями любой из частиц в физически бесконечно малом объеме равен τ_ϕ , т. е.

$$\frac{\tau_{ст}}{nl_\phi^3} = \tau_\phi = \frac{l_\phi}{V_T}. \quad (1.12)$$

Отсюда

$$l_\phi = V \varepsilon l \ll l, \quad \tau_\phi = V \varepsilon \tau_{ст} \ll \tau_{ст}, \quad l_\phi^3 n \sim \frac{1}{V \varepsilon} \gg 1. \quad (1.13)$$

Будем называть мелко-масштабными такие флуктуации, для которых $\tau_{кор} \leq \tau_\phi$, $r_{кор} \leq l_\phi$. Из (1.13) следует, что они затухают за время порядка $V \varepsilon \tau_{ст} \ll \tau_{ст}$.

Проведем соответствующие рассуждения для столкновений трех и четырех частиц. Обозначим соответствующие времена релаксации через $\tau_{ст}^{(3)}$, $\tau_{ст}^{(4)}$. Они связаны с $\tau_{ст}$: $\tau_{ст}^{(3)} \sim \tau_{ст}/\varepsilon$; $\tau_{ст}^{(4)} \sim \tau_{ст}/\varepsilon^2$. Подставим вместо $\tau_{ст}$ в (1.12) величины $\tau_{ст}^{(3)}$, $\tau_{ст}^{(4)}$. В результате получим $\tau_\phi^{(3)} \sim \varepsilon^{1/4} \tau_{ст} \ll \tau_{ст}$, $l_\phi^{(3)} \sim (\varepsilon)^{1/4} l \ll l$, но $\tau_\phi^{(4)} \sim \tau_{ст}$, $l_\phi^{(4)} \sim l$, поэтому при учете четверных столкновений мелко-масштабными являются корреляции, для которых $\tau_{кор} \leq \tau_{ст}$; $r_{кор} \leq l$. Отсюда следует, что корректное построение интеграла четверных столкновений невозможно без учета корреляций с $\tau_{кор} \sim \tau_{ст}$, $r_{кор} \sim l$ и, следовательно, интеграл столкновений будет зависеть от $\tau_{ст}$ (или l). Из-за этого появляется дополнительная зависимость от плотности.

Заметим, что для двумерного случая уже для тройных столкновений (в (1.12) $\tau_{ст}/nl_\phi^3 = \tau_\phi = l_\phi/V_T$) $\tau_\phi \sim \tau_{ст}$, $l_\phi \sim l$. Поэтому в этом случае интеграл тройных столкновений нельзя построить без учета корреляции с $\tau_{кор} \sim \tau_{ст}$, $l_{кор} \sim l$. Это поясняет, почему разложение по плотности в двумерном случае нарушается раньше, чем в трехмерном.

Таким образом, положение границы, разделяющей области быстрых и медленных флуктуаций, зависит от рассматриваемого приближения.

Из изложенного следует, что при построении кинетического уравнения для плотных газов на временах $\tau \ll \tau_{\text{ст}}$ происходит лишь частичное ослабление корреляций, которые существенны при построении кинетического уравнения.

В работе ²⁴ показано, что при использовании условия частичного ослабления парных корреляций из уравнения Лиувилля не следует кинетическое уравнение Больцмана. Упрощение исходного уравнения Лиувилля состоит лишь в том, что вместо уравнения для точной функции распределения f_N получается приближенное уравнение для сглаженной на интервалах $\tau_{\text{ф}} \sim \tau_{\text{ст}}$, $l_{\text{ф}}^3 \sim l^3$ функции распределения \tilde{f}_N (см. гл. 9).

Из уравнения для функции \tilde{f}_N снова следует цепочка уравнений, но теперь уже для сглаженных функций распределения $\tilde{f}_1 \equiv f_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3 \dots$. Эта цепочка уравнений отличается от цепочки уравнений ВВГКУ тем, что в ней уже учтена диссипация, обусловленная парными столкновениями, и все функции являются медленно меняющимися.

В п. 9 показано, как можно использовать эту цепочку уравнений при построении кинетического уравнения для плотных газов.

При выводе кинетических уравнений для газа в различных приближениях предполагается, что крупномасштабные флуктуации ($\epsilon \tau_{\text{кор}} \gg \tau_{\text{ф}}$, $l_{\text{кор}} \gg l_{\text{ф}}$) не играют роли. Однако крупномасштабные флуктуации, естественно, существуют. Они приводят к тому, что функции распределения, для которых записываются кинетические уравнения, на самом деле не являются строго детерминированными.

Исследование крупномасштабных флуктуаций в последние годы приобрело значительный интерес в связи с исследованием шумов в различных приборах.

При исследовании крупномасштабных флуктуаций в газах используются два подхода.

В первом исходными служат кинетические уравнения, которые рассматриваются как уравнения Ланжевена со случайными источниками. Такой подход для газов развит в работах Кадомцева ³⁴, Горькова, Дзялошинского, Питаевского ³⁵, Когана, Шульмана ³⁶.

Второй подход основан на приближенном решении цепочки уравнений для функций распределений или соответствующих уравнений для функции Грина ^{57, 59-61, 24} (см. гл. 10).

В настоящее время довольно широко обсуждается иной метод получения обобщенных кинетических уравнений. Он основан, с одной стороны, на работах Пригожина, Балеску, Ресибуа, Хенин, Жоржа, Валленборна (см. ²⁵⁻²⁹) и, с другой стороны, на работах Зубарева, Пелетминского и Цуканова, Калашникова, Новикова ³⁰⁻³³. В этих работах авторы стремятся сразу получить наиболее общие кинетические уравнения, учитывающие произвольные взаимодействия частиц.

В гл. 11 будет рассмотрено такого рода обобщенное кинетическое уравнение с учетом как диссипативных, так и недиссипативных членов. При этом будет использован метод, примененный в гл. 2, 4 при выводе уравнения Больцмана для неидеального газа. Обобщенное кинетическое уравнение значительно проще уравнения Лиувилля, так как является уравнением для первой функции распределения. Однако оно все же столь сложное, что его практическое применение требует дальнейших значительных упрощений. Тем не менее такого рода подход может оказаться весьма плодотворным.

Проблемы, аналогичные рассмотренным, изучаются и в теории плазмы.

В плазме роль эффективного радиуса действия играет радиус Дебая r_d . В отличие от газов, вместо неравенств (1.1) в плазме

$$r_{\text{ср}} \ll r_d \ll l, \quad (1.14)$$

и, следовательно, в сфере с радиусом r_d имеется много частиц, поэтому малым параметром является величина $\mu = 1/nr_d^3 \sim 1/N_d$; N_d — число частиц в сфере с радиусом r_d . Величина μ называется плазменным параметром.

Возможность использования кинетических уравнений для плазмы обусловлена не малостью плотности, как в газе, а тем, что каждая частица плазмы взаимодействует сразу с большим числом частиц и взаимодействие с отдельными частицами является слабым. В силу этого флуктуации фазовой плотности каждой компоненты и напряженностей поля в плазме оказываются малыми. Нулевое приближение по плазменному параметру соответствует полному пренебрежению флуктуациям. В этом случае для первых функций распределения f_a (a — индекс компоненты плазмы) и средних полей получается замкнутая система самосогласованных уравнений (уравнения Власова).

Уравнение нулевого приближения по плазменному параметру недостаточно для описания процессов установления равновесного состояния. Это следует, в частности, из того, что полная энтропия плазмы в этом приближении не меняется со временем.

В первом приближении по μ в уравнении для f_a появляется дополнительный член, который определяется парной корреляционной функцией заряженных частиц плазмы или связанной с ней корреляцией фазовой плотности и поля (п. 5). Этот член по аналогии с уравнением Больцмана также называется интегралом столкновений, хотя, как это следует из определения параметров ϵ и μ , приближения, приводящие к кинетическим уравнениям, в теории газов и плазмы противоположны.

В теории плазмы используются два выражения для интегралов столкновений. Это интеграл столкновений Ландау и интеграл столкновений Балеску — Ленарда ^{6, 8, 37, 38}. В интеграле столкновений Ландау коллективный характер взаимодействия частиц в плазме проводится путем приближенного учета статической поляризуемости плазмы. В интеграле столкновений Балеску — Ленарда учитывается динамическая поляризуемость плазмы, создаваемая движущимися частицами.

Кинетические уравнения Ландау и Балеску — Ленарда, как и уравнение Больцмана, учитывают взаимодействия частиц в первом приближении по μ лишь в диссипативных характеристиках и в этом смысле являются кинетическими уравнениями для идеальной плазмы.

Классические кинетические уравнения в первом приближении по μ для полностью ионизованной неидеальной плазмы получены в работе ³⁹, а соответствующие квантовые уравнения — в работе ¹⁴. Они рассматриваются в гл. 5 и 8.

Интегралы столкновений J_a в кинетических уравнениях для идеальной плазмы обладают свойствами

$$\sum_a n_a \int \varphi_a J_a d\mathbf{p}_a = 0 \quad \text{при } \varphi_a = 1, \mathbf{p}_a, \mathbf{p}_a^2/2m_a, \quad (1.15)$$

аналогичными (1.9) (n_a — концентрация компоненты a).

Эти свойства обеспечивают выполнение законов сохранения числа частиц, суммарного импульса и суммарной кинетической энергии всех компонент плазмы.

Для неидеального газа и неидеальной плазмы выполняются из (1.9), (1.15) лишь первые пары равенств. При $\varphi_a = \mathbf{p}_a^2/2m_a$ выражение

$\sum_a n_a \int \Phi_a J d\mathbf{p}_a$ не равно нулю, так как суммарная кинетическая энергия не является интегралом движения (гл. 2, 4, 5).

Кинетические уравнения для плазмы, полученные в первом приближении по плазменному параметру, недостаточно точно учитывают взаимодействие частиц на малых расстояниях. Следствием этого является логарифмическая расходимость в интегралах столкновений Ландау и Балеску — Ленарда на малых расстояниях.

Интеграл столкновений Больцмана, напротив, для частиц с кулоновским взаимодействием правильно учитывает взаимодействие частиц на малых расстояниях, но содержит логарифмическую расходимость на больших расстояниях. Это является следствием того, что в приближении парных столкновений не учитывается коллективный характер взаимодействия частиц в плазме.

В работах де Витта ⁴¹, Хаббарда ⁴², Аоно ⁴³, Алямовского ⁴⁴ предложено использовать в качестве интеграла столкновений для плазмы комбинацию интегралов столкновений Больцмана, Ландау, Балеску — Ленарда и тем самым одновременно учесть вклад парных и коллективных взаимодействий частиц.

Учет эффектов неидеальности в кинетических уравнениях с интегралами столкновений, предложенными в работах ⁴¹⁻⁴⁴, показывает, что соответствующие термодинамические функции не удовлетворяют необходимым предельным условиям (см. гл. 6).

В работе ³⁹ эта задача решается иным путем. В ней получено кинетическое уравнение Больцмана для неидеальной плазмы с учетом усредненной по скоростям динамической поляризации (гл. 6). Интеграл столкновений в этом уравнении сходится на малых и больших расстояниях. Пространственная корреляционная функция, определяющая вклад взаимодействия в термодинамические функции, на малых расстояниях совпадает с корреляционной функцией в приближении парных столкновений, а на больших расстояниях с дебаевской корреляционной функцией. Вследствие этого получаются и правильные предельные значения для термодинамических функций.

Соответствующие результаты для квантовой невырожденной плазмы получены в работе Климонтовича и Эбелинга ¹⁴ и кратко изложены в гл. 8. (См. добавление при корректуре на стр. 567.)

В гл. 9 рассматриваются некоторые проблемы теории неидеальных газов и плазмы. Одна из проблем связана с построением кинетической теории газов большой плотности, когда нельзя ограничиться приближением парных и тройных столкновений.

2. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ БОЛЬЦМАНА ДЛЯ НЕИДЕАЛЬНОГО ГАЗА В ПРИБЛИЖЕНИИ ПАРНЫХ СТОЛКНОВЕНИЙ

В приближении парных столкновений для описания неравновесных процессов в газе можно использовать замкнутую систему уравнений (1.3), (1.6) для функций распределения f_1 , f_2 .

При условии полного ослабления корреляций функцию f_2 можно выразить через f_1 ⁹:

$$f_2(x_1, x_2, t) = f_1(X_1(-\tau), t-\tau) f_1(X_2(-\tau), t-\tau) + \int_0^\tau \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} + \mathbf{v}_2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_2} \right) f_1(x_1, t) f_1(x_2, t) \right]_{X_1(-\tau), X_2(-\tau), t-\tau} d\tau'. \quad (2.1)$$

Здесь $X_1(-\tau)$, $X_2(-\tau)$ — значения координат и импульсов двух взаимодействующих частиц в момент времени $t - \tau$.

Если подставить выражение (2.1) в правую часть уравнения (1.3), то получим самое общее (в приближении парных столкновений) выражение для интеграла столкновений. В нем учтено пространственное изменение функций распределения $f_1(x_1, t)$, $f_1(x_2, t)$ в пределах радиуса действия межмолекулярных сил, а также временное запаздывание.

Рассмотрим частные случаи.

1) Функция распределения пространственно-однородна и временное запаздывание не учитывается. При этих предположениях выражение (2.1) совпадает с (1.7) и интеграл столкновений определяется выражением (1.8), которое отличается от интеграла столкновений в уравнении Больцмана лишь формой записи.

2) Пренебрегаем временным запаздыванием, но учитываем эффект пространственной неоднородности в первом члене (2.1). Это отвечает предположению, что функция f_2 определяется значениями функций $f_1(x_1, t)$, $f_1(x_2, t)$ в тот же момент времени. В результате приходим к обобщенному уравнению Больцмана, полученному Боголюбовым (уравнение (9.17) работы ⁴). Для модели твердых шариков оно совпадает с обобщенным уравнением Больцмана, предложенным Энскогом (гл. 16 книги ²).

Различие между этими уравнениями и уравнениями Больцмана проявляется, в частности, при переходе к гидродинамическому приближению. При использовании обобщенных уравнений можно получить поправки к уравнению состояния и кинетическим коэффициентам в виде рядов по плотности ⁵.

Напомним, что эти уравнения получены в приближении парных столкновений. Полученные поправки к кинетическим коэффициентам не являются поэтому точными, поскольку при учете более сложных взаимодействий будут получаться дополнительные вклады того же порядка (см. об этом в п. 4). По той же причине из дополнительных членов к уравнению состояния идеального газа правильной будет лишь первая поправка по плотности.

Из этого следует, что при учете пространственной неоднородности в выражении (2.1) для получения кинетического уравнения достаточно удержать лишь члены первого порядка по $r_0/l \sim \epsilon$.

Рассмотренные в этом разделе обобщенные кинетические уравнения не учитывают временного запаздывания, поэтому при переходе к уравнениям газовой динамики нет поправок, обусловленных взаимодействием, к функциям под знаком $\partial/\partial t$. Таким образом, в выражении для внутренней энергии взаимодействие не учитывается. Для учета всех вкладов порядка ϵ надо из (2.1) получить выражение для f_2 с учетом членов первого порядка по r_0/l , $\tau_0/\tau_{\text{рел}}$.

3) Пространственно-однородное распределение. Учет членов первого порядка по $\tau_0/\tau_{\text{рел}}$. Выражение (2.1) в этом случае можно записать в виде ⁹

$$f_2^{\text{ДВ}}(x_1, x_2, t) = f_1(\mathbf{P}_1(-\infty), t) f_1(\mathbf{P}_2(-\infty), t) - \\ - \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty \tau \frac{d}{d\tau} f_1(\mathbf{P}_1(-\tau), t) f_1(\mathbf{P}_2(-\tau), t) d\tau. \quad (2.2)$$

При подстановке этого выражения в правую часть (1.3) интеграл столкновений представляется в виде суммы двух частей:

$$J = J_{(1)} + J_{(2)}. \quad (2.3)$$

Первая часть совпадает с выражением (1.8) и обладает, следовательно, свойствами (1.9). Для $J_{(2)}$ имеем выражение

$$J_{(2)} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty \int \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} \tau \frac{d}{d\tau} f_1(\mathbf{P}_1(-\tau), t) f_1(\mathbf{P}_2(-\tau), t) d\tau d\mathbf{x}_2. \quad (2.4)$$

Эта часть интеграла столкновений обладает свойствами (1.9) лишь при $\varphi = 1$, \mathbf{p}_1 . При $\varphi = \mathbf{p}_1^2/2m$ из (2.4) следует, что

$$n \int \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m} J d\mathbf{p}_1 = -\frac{n^2}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int \Phi_{12} f_1(\mathbf{P}_1(-\infty), t) f_1(\mathbf{P}_2(-\infty), t) \frac{d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2}{V}.$$

Вследствие этого сохраняется не кинетическая энергия газа, а полная энергия в приближении парных столкновений⁹. Таким образом, для плотности внутренней энергии получаем выражение

$$U = n \int \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m} f_1 d\mathbf{p}_1 + \frac{n^2}{2} \int \Phi_{12} f_2^{(лв)}(x_1, x_2, t) \frac{d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2}{V}. \quad (2.5)$$

Это выражение определяет первые два члена разложения неравновесной внутренней энергии газа по плотности.

Заметим, что сами функции распределения также можно разложить в ряды по плотности. В приближении парных столкновений можно получить лишь два первых члена разложения функции f_1 по плотности, поэтому функцию f_1 можно представить в виде $f_1 = f_1^0 + f_1^1$. Здесь f_1^0 — функция распределения идеального газа. Функция f_1^1 определяется корреляционной функцией $g_2 = f_2 - f_1 f_1$. Связь f_1^1 с g_2 определяется выражением

$$f_1(x_1, t) = f_1^0 + n \int \left[\int g_2 d\mathbf{p}_2 - \int g_2 d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 f_1^0(x_1, t) \right] \frac{d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2}{V}. \quad (2.6)$$

Из формул (2.5), (2.6) следует, что в неравновесных состояниях, когда отлична от нуля корреляция распределений по координатам и импульсам, $f_1 \neq f_1^0$, и, следовательно, взаимодействие частиц газа определяет в (2.5) не только потенциальную энергию, но и часть кинетической энергии.

В состоянии локального равновесия $f_1 = f_1^0$ — распределение Максвелла. Выражение (2.5) в этом случае принимает вид

$$U = n \frac{3}{2} \kappa T + \frac{n^2}{2} \int \Phi_{12} e^{-\Phi_{12}/\kappa T} \frac{d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2}{V}. \quad (2.7)$$

Для квантового газа даже в состоянии равновесия $f_1 \neq f_1^0$ (см. гл. 7).

4) Учет пространственной неоднородности и временного запаздывания в первом приближении по r_0/l , $\tau_0/\tau_{\text{кор}}$. В этом приближении интеграл столкновений представляется в виде суммы трех частей⁹

$$J = J_{(1)} + J_{(2)} + J_{(3)}. \quad (2.8)$$

Первая часть отличается от (1.8) заменой $f_1(\mathbf{P}(-\infty), t)$ на $f_1(\mathbf{r}, \mathbf{P}(-\infty), t)$. Вторая отличается от (2.4) заменой оператора $\partial/\partial t$ на $\partial/\partial t + (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)/2 \cdot \partial/\partial \mathbf{r}_1$, а $J_{(3)}$ определяется выражением (3.4) работы⁹.

Полный интеграл столкновений обладает свойством (1.9) лишь при $\varphi = 1$. Это свойство обеспечивает выполнение закона сохранения числа частиц.

При $\varphi = \mathbf{p}_1$ для интеграла столкновений (2.8)

$$n \int p_{1i} J d\mathbf{p}_1 = -\frac{\partial}{\partial r_j} \Delta P_{ij}, \quad (2.9)$$

где

$$\Delta P_{ij} = -\frac{n^2}{2} \int \frac{r_i r_j}{r} \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial r} f_1(\mathbf{r}, \mathbf{P}_1(-\infty), t) f_1(\mathbf{r}, \mathbf{P}_2(-\infty), t) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2$$

— добавка к тензору напряжений P_{ij} , обусловленная взаимодействием частиц.

В состоянии локального равновесия

$$\Delta P_{ij} = \delta_{ij} p, \quad \Delta p = -\frac{n^2}{6} \int r \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial r} e^{-\frac{\Phi_{12}}{\kappa T}} d\mathbf{r}. \quad (2.10)$$

Для модели шариков со слабым притяжением, когда

$$\Phi(r) = \begin{cases} \infty & \text{при } r \leq r_0, \\ \Phi(r) < 0, \quad |\Phi(r)| \ll \kappa T & \text{при } r > r_0, \end{cases}$$

выражения (2.7), (2.10) принимают вид

$$U = \frac{3}{2} n \kappa T - n^2 a, \quad p = n \kappa T \left[1 + n \left(b - \frac{a}{\kappa T} \right) \right].$$

Здесь

$$b = \frac{2\pi}{3} r_0^3, \quad a = 2\pi \int_{r_0}^{\infty} |\Phi(r)| r^2 dr$$

— постоянные Ван-дер-Ваальса.

Выражение (2.9) определяет вклад взаимодействия в уравнение баланса плотности импульса. При наличии пространственной неоднородности появляется, естественно, дополнительный вклад и в уравнение баланса внутренней энергии. Интеграл $n \int \mathbf{p}_1^2 / 2m J_{(2)} d\mathbf{p}_1$, теперь определяется выражением (2.4) с заменой $\partial/\partial t$ на $\partial/\partial t + (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)/2 \cdot \partial/\partial \mathbf{r}_1$. В состоянии локального равновесия

$$n \int \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m} J_{(2)} d\mathbf{p}_1 = - \left(\frac{\partial \Delta U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (U \Delta U) \right), \quad (2.11)$$

где

$$\Delta U = \frac{n^2}{2} \int \Phi_{12} e^{-\Phi_{12}/\kappa T} d\mathbf{r}$$

— вклад взаимодействия в плотность внутренней энергии.

Наконец, для последней части интеграла столкновений в приближении локального равновесия

$$n \int \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m} J_{(3)} d\mathbf{p}_1 = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (U \Delta p). \quad (2.12)$$

Величина Δp определяется формулой (2.10).

Мы видим, что полный вклад взаимодействия частиц в поток энергии в состоянии локального равновесия определяется выражением $U(\Delta U + \Delta p)$. Выражение в скобках — плотность тепловой функции (энтальпии).

В приближении парных столкновений тензор вязких напряжений $\pi_{ij} = P_{ij} - \delta_{ij} p$ и вектор теплового потока S определяются обычным образом с использованием лишь первой части интеграла столкновений $J_{(1)}$ в (2.8).

Мы видим, что в приближении парных столкновений из уравнения Больцмана с интегралом столкновений (2.8) следует система уравнений газовой динамики для неидеального газа. Плотность внутренней энергии

и давление определяются выражениями

$$U = n \frac{3}{2} \kappa T + \Delta U, \quad p = n \kappa T + \Delta p.$$

В газодинамическом приближении вычисление величин ΔU , Δp можно проводить в приближении локального равновесия.

В уравнениях газовой динамики здесь удержаны лишь линейные члены по двум малым параметрам: параметру плотности $\varepsilon = nr_0^3$ и газодинамическому параметру $\varepsilon_r = l/L \sim \varepsilon^{-1} r_0/L$ (L — характерный параметр длины при газодинамическом описании). Вопрос о высших приближениях по параметрам ε , ε_r будет рассмотрен в гл. 4.

3. *H*-ТЕОРЕМА БОЛЬЦМАНА ДЛЯ НЕИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

Согласно *H*-теореме Больцмана энтропия газа, определяемая выражением (1.10), возрастает при приближении состояния газа к равновесному состоянию.

Для неравновесных состояний выражение Больцмана для энтропии частично учитывает вклад корреляций, так как, согласно (2.6), функция f_1 в общем случае не совпадает с функцией распределения для идеального газа.

В равновесном состоянии $f_1 = f_1^0$ и выражение (1.10) определяет энтропию идеального газа.

Однако в равновесном состоянии даже в приближении первых столкновений вклад взаимодействия частиц в выражение для энтропии не равен нулю. Это показывает, что выражение Больцмана (1.10) в приближении парных столкновений учитывает взаимодействие частиц неполностью.

Обозначим неучтенную часть через ΔS и запишем выражение для энтропии газа в виде

$$S = S_B + \Delta S. \quad (3.1)$$

В работе ²¹ показано, что величина ΔS определяется выражением *)

$$\Delta S = -\frac{\kappa n^2}{2} \int f_2 \ln \frac{f_2}{f_1 f_1} \frac{dx_1 dx_2}{V}. \quad (3.2)$$

Рассмотрим это выражение для состояния равновесия. В этом случае в (3.2) можно выполнить интегрирование по импульсам. В результате

$$\Delta S = -\frac{\kappa n^2}{2} \int f_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \ln f_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \frac{d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2}{V}.$$

В равновесном состоянии $f_2 = C \exp(-\Phi_{12}/kT)$, поэтому

$$\Delta S = \frac{\kappa n^2}{2} \int \left[\frac{\Phi_{12}}{\kappa T} e^{-\Phi_{12}/\kappa T} + (e^{-\Phi_{12}/\kappa T} - 1) \right] d\mathbf{r}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2. \quad (3.3)$$

Такое же выражение следует и из канонического распределения Гиббса. При этом первый член в (3.3) определяется вкладом внутренней энергии Δu (см. (2.11)), а второй член — вкладом свободной энергии

$$\Delta F = -\kappa T \frac{n^2}{2} \int (e^{-\Phi_{12}/\kappa T} - 1) d\mathbf{r}.$$

*) Выражение (3.2) впервые было получено, по-видимому, Гринем ⁴⁰. При получении (3.2) он использовал выражение Гиббса для энтропии всей системы.

Таким образом, в равновесном состоянии

$$\Delta S = \frac{\Delta u - \Delta F}{T}.$$

Заметим, что и в неравновесном случае выражение (3.2) можно представить в виде суммы двух частей, одна из которых при переходе к равновесному состоянию определяется вкладом внутренней энергии, а вторая — свободной энергии. Для этого представим функции f_1 , f_2 в виде

$$f_1 = \left(\int F_1 \frac{dx_1}{V} \right)^{-1} F_1, \quad f_2 = \left(\int F_2 \frac{dx_1 dx_2}{V^2} \right)^{-1} F_2, \\ F_2 - F_1 F_1 = G_2.$$

В равновесном состоянии $F_2 = \exp(-\Phi_{12}/kT)$, $G_2 = F_2 - 1$.

Выражение (3.2) при использовании функций F_1 , F_2 , G_2 можно записать в виде ²¹

$$\Delta S = -\frac{\kappa n^2}{2} \int \left(\ln \frac{F_2}{F_1 F_1} - G_2 \right) \frac{dx_1 dx_2}{V}.$$

Второй член в этом выражении определяет вклад в ΔS , соответствующий вкладу от $-\Delta F/T$.

Более полный учет взаимодействия приводит к изменению H -функции Больцмана. Она определяется теперь выражением ²¹

$$-H = S' = -\kappa n \int f_1 \ln f_1 \frac{dx_1}{V} - \frac{\kappa n^2}{2} \int f_2 \ln \frac{f_2}{f_1 f_1} \frac{dx_1 dx_2}{V}.$$

Добавочный член совпадает с выражением (3.2).

4. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ НЕИДЕАЛЬНОГО ГАЗА С УЧЕТОМ ТРОЙНЫХ СТОЛКНОВЕНИЙ

Чтобы получить кинетическое уравнение с учетом тройных столкновений, надо в дополнение к уравнениям (1.3), (1.4) для функций f_1 , f_2 использовать еще одно уравнение цепочки для функции f_3

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + H^{(3)} \right) f_3 = n \int (\theta_{14} + \theta_{24} + \theta_{34}) f_4 dx_4 \equiv J_3. \quad (4.1)$$

Здесь использованы обозначения для операторов

$$\theta_{ij} = \frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial \mathbf{r}_i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_i} + \frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial \mathbf{r}_j} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_j}, \quad (4.2)$$

$$H^{(s)} = \sum_{1 \leq i \leq s} \mathbf{v}_i \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} - \sum_{1 \leq i < j \leq s} \theta_{ij}.$$

В приближении тройных столкновений выражение для J_3 можно представить в виде ²²

$$J_3 = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} + \mathbf{v}_2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_2} + \mathbf{v}_3 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_3} \right) f_1 f_1 f_1. \quad (4.3)$$

В результате получаем замкнутую систему уравнений для функций f_1 , f_2 , f_3 .

При пространственно-однородном распределении частиц газа из (4.1), (4.3) в первом приближении по $\tau_0/\tau_{\text{рел}}$ находим выражение для f_3 в при-

ближении тройных столкновений

$$f_3^{(\text{тр})}(x_1, x_2, x_3, t) = S_{-\infty}^{(3)} f_1(p_1, t) f_1(p_2, t) f_1(p_3, t) - \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty \tau \frac{d}{d\tau} S_{-\tau}^{(3)} f_1 f_1 f_1 d\tau; \quad (4.4)$$

$S_{-\tau}^{(3)}$ — оператор смещения для системы трех частиц.

Это выражение аналогично использованному в приближении парных столкновений выражению (2.2) для f_2 . С учетом тройных столкновений выражение для f_2 имеет вид ²²

$$f_2^{(\text{тр})} = S_{-\infty}^{(2)} f_1 f_1 + n \int_0^\infty d\tau \int dx_3 S_{-\tau}^{(2)}(1, 2) \left(1 - \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) \times \\ \times [(\theta_{13} + \theta_{23}) f_3^{(\text{тр})} - S_{-\infty}^{(2)}(1, 2) (\theta_{13} f_2^{(\text{дв})}(1, 3) f_1 + \theta_{23} f_2^{(\text{дв})}(2, 3) f_1)]. \quad (4.5)$$

Функции $f_2^{(\text{тр})}$, $f_2^{(\text{дв})}$ определяются выражениями (4.4), (2.2).

Чтобы получить кинетическое уравнение для неидеального газа с учетом тройных столкновений, надо подставить выражение (4.5) в правую часть уравнения (1.3).

Это уравнение совпадает с уравнением Чо — Уленбека, если в выражении (4.5) и (4.4), (2.2) пренебречь членами, содержащими $\tau \partial/\partial t$.

С учетом тройных столкновений выражение для плотности внутренней энергии принимает вид

$$U = n \int \frac{p_1^2}{2m} f_1 \frac{dx_1}{V} + \frac{n^2}{2} \int \Phi_{12} f_2^{(\text{тр})} \frac{dx_1 dx_2}{V}. \quad (4.6)$$

При подстановке сюда выражения (4.5) можно опустить члены, содержащие $\tau \partial/\partial t$. В равновесном состоянии (4.6) совпадает с тремя членами вириального разложения.

В приближении кинетического уравнения Чо — Уленбека в выражении для U вместо $f_2^{(\text{тр})}$ стоит функция $f_2^{(\text{дв})}$. Такая несогласованность приближений для диссипативных и недиссипативных характеристик газа является следствием того, что взаимодействие частиц в кинетическом уравнении Чо — Уленбека учтено (в приближении тройных столкновений) неполно.

Неполнота состоит в том, что диссипативные процессы описываются в приближении тройных столкновений, а недиссипативные — парных столкновений.

Если распределение частиц газа пространственно неоднородно, то в выражениях для $f_2^{(\text{тр})}$, $J^{(\text{тр})}$ появляются соответствующие дополнительные члены. При переходе к уравнениям газовой динамики выражения для коэффициентов вязкости и теплопроводности совпадают с полученными в работе Чо — Уленбека. Выражения для внутренней энергии и давления содержат по три первых члена соответствующих вириальных разложений.

В работе Чо — Уленбека ^{5, 45} дан вывод уравнений газовой динамики с учетом вклада тройных столкновений в выражения для коэффициентов вязкости и теплопроводности. Это соответствует учету членов порядка $\varepsilon \varepsilon_r$.

5. КИНЕТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ НЕИДЕАЛЬНОЙ ПЛАЗМЫ

При выводе кинетических уравнений для неидеальной плазмы в качестве исходных уравнений удобно использовать систему уравнений для фазовых плотностей в пространстве координат и импульсов отдельных компонент плазмы

$$N_a(x, t) = \sum_{1 \leq i \leq N} \delta(x - x_i(t)), \quad x = (\mathbf{r}, \mathbf{p})$$

и микроскопических напряженностей полей ^{37, 39}. Интегралы столкновений J_a выражаются при этом через корреляцию флуктуаций фазовых плотностей и напряженностей поля.

Для кулоновской плазмы

$$J_a = \sum_b n_b \int \frac{\partial \Phi_{ab}}{\partial \mathbf{r}_a} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_b} g_{ab} d\mathbf{x}_b \equiv -\frac{e_a}{n_a} \frac{\partial \overline{\delta N_a \delta \mathbf{E}}}{\partial \mathbf{p}_a}. \quad (5.1)$$

В первом приближении по плазменному параметру μ (в поляризационном приближении) уравнения для флуктуаций δN_a , $\delta \mathbf{E}$ можно представить в виде ³⁹

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_a \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_a} + e_a \mathbf{E} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_a} \right) (\delta N_a - \delta N_a^{(\text{ист})}) + e_a n_a \delta \mathbf{E} \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}_a} = 0, \quad (5.2)$$

$$\text{div } \delta \mathbf{E} = 4\pi \sum_a e_a \int \delta N_a d\mathbf{p}_a. \quad (5.3)$$

Из уравнения (5.2) следует, что флуктуации δN_a можно представить в виде суммы индуцированной (пропорциональной $\delta \mathbf{E}$) части и источника $\delta N_a^{(\text{ист})}$. При этом флуктуации фазовой плотности источника удовлетворяют уравнению

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + e_a \mathbf{E} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right) \delta N_a^{(\text{ист})} = 0. \quad (5.4)$$

Из него следует уравнение для двухвременной корреляции $\overline{(\delta N_a \delta N_b)_{\mathbf{r}\mathbf{r}'\mathbf{p}\mathbf{p}'}^{(\text{ист})}}$, которое решается при начальном условии

$$\overline{(\delta N_a \delta N_b)_{\mathbf{r}\mathbf{r}'\mathbf{p}\mathbf{p}'}^{(\text{ист})}} = \delta_{ab} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') f_a(\mathbf{r}', \mathbf{p}', t). \quad (5.5)$$

В работе ³⁹ на основе уравнений (5.2)–(5.4) получена система кинетических уравнений для неидеальной пространственно-однородной плазмы. Одним из следствий этих уравнений является закон сохранения суммарной кинетической и потенциальной энергий плазмы

$$U = \sum_a n_a \int \frac{\mathbf{p}^2}{2m_a} f_a d\mathbf{p} + \frac{1}{8\pi} \int (\delta \mathbf{E} \delta \mathbf{E})_{\mathbf{k}} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}, \quad (5.6)$$

где

$$(\delta \mathbf{E} \delta \mathbf{E})_{\mathbf{k}} = \sum_a \frac{(4\pi)^2 e_a^2 n_a}{k^2} \int \frac{f_a}{|\varepsilon(\mathbf{k}\mathbf{v}, \mathbf{k})|^2} d\mathbf{p} \quad (5.7)$$

— неравновесная спектральная функция поля.

В равновесном состоянии $(\delta \mathbf{E} \delta \mathbf{E})_{\mathbf{k}} = 4\pi \kappa T / (1 + r_D^2 k^2)$. Этому выражению соответствует дебаевская корреляционная функция

$$g_{ab}(r) = -\frac{e_a e_b}{\kappa T r} e^{-r/r_D}. \quad (5.8)$$

Полученное в работе ³⁹ кинетическое уравнение является обобщением уравнения Балеску — Ленарда для неидеальной плазмы. Представляют интерес два частных случая этого уравнения. Один соответствует приближению Ландау. Интеграл столкновений при этом принимает вид

$$J_a = \sum_b \frac{2}{\pi} e_a^2 e_b^2 n_b \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_i} \text{Re} \int_0^\infty \int \frac{k_i k_j}{k^4} e^{-\Delta\tau - i(\mathbf{k}\mathbf{v} - \mathbf{k}\mathbf{v}')\tau} \times \\ \times \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_j} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_j'} \right) \left(1 - \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) f_a(\mathbf{p}; t) f_b(\mathbf{p}', t) d\tau d\mathbf{p}' d\mathbf{k}. \quad (5.9)$$

Область интегрирования по k ограничена условием $1/r_{\min} \geq k \geq 1/r_D$.

Если в выражении (5.9) пренебречь запаздыванием, то оно совпадает с интегралом столкновений Ландау.

В выражении (5.9) учитывается вклад лишь коротковолновой части спектра по волновым числам ($k \geq 1/r_D$). В другом предельном случае учитывается вклад лишь длинноволновых возбуждений (плазмонов), и интеграл столкновений принимает вид ^{39, 37}

$$J_a = \frac{e_a^2}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \operatorname{Re} \int_0^\infty \int \frac{\mathbf{k}}{k^2} \left\{ \left(1 - \frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial t} \right) (\delta \mathbf{E} \delta \mathbf{E})_{\omega, \mathbf{k}, t} \frac{\partial f_a(\mathbf{p}, t - \tau)}{\partial \mathbf{p}} + \right. \\ \left. + \frac{8\pi^2}{\omega} \operatorname{sign} \frac{\partial \varepsilon'}{\partial \omega} \delta(\varepsilon'(\omega, \mathbf{k})) f_a(\mathbf{p}, t) \right\} e^{-\Delta\tau + i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})\tau} d\tau d\omega d\mathbf{k}. \quad (5.10)$$

Система уравнений для функций f_a в этом случае не является замкнутой. Ее надо дополнить уравнением для спектральной функции плазмонов $(\delta \mathbf{E} \delta \mathbf{E})_{\omega, \mathbf{k}, t}$ ³⁷. Интегралы (5.9), (5.10) учитывают вклады от разных областей спектра по \mathbf{k} . Полный интеграл может быть приближенно представлен как сумма выражений (5.9), (5.10).

6. УРАВНЕНИЕ БОЛЬЦМАНА ДЛЯ НЕИДЕАЛЬНОЙ ПЛАЗМЫ С УЧЕТОМ УСРЕДНЕННОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ

В поляризационном приближении (первое приближение по μ) взаимодействие заряженных частиц плазмы учитывается неточно. Одно из следствий этого — логарифмическая расходимость на малых расстояниях в интеграле столкновений. Напротив, в приближении парных столкновений для плазмы взаимодействие на малых расстояниях учитывается правильно, но соответствующий интеграл столкновений содержит логарифмическую расходимость на больших расстояниях.

При рассмотрении процессов в неидеальной плазме нужно иметь кинетическое уравнение, в котором одновременно учитывается вклад парных и коллективных взаимодействий. Эту задачу можно решить, если ввести эффективный потенциал $\tilde{\Phi}_{ab}$ взаимодействия частиц, учитывающий усредненную динамическую поляризацию ³⁹. Вид эффективного потенциала находим следующим образом.

Корреляционная функция, определяющая вид интеграла столкновений в поляризационном приближении, $\sim \Phi_{ab}(\mathbf{k}) / |\varepsilon(\mathbf{k}\mathbf{v}, \mathbf{k})|^2$. Отсюда следует возможность определения эффективного потенциала с учетом усредненной по скоростям динамической поляризации:

$$\tilde{\Phi}_{ab}(\mathbf{k}) = \frac{\Phi_{ab}(k)}{\sum_c e_c^2 n_c} \sum_c e_c^2 n_c \int \frac{f_c}{|\varepsilon(\mathbf{k}\mathbf{v}, \mathbf{k})|^2} d\mathbf{p} = \frac{e_a e_b}{\sum_c e_c^2 n_c} \frac{(\delta \mathbf{E} \delta \mathbf{E})_{\mathbf{k}}}{4\pi}. \quad (6.1)$$

Здесь использовано (5.7).

В приближении локального равновесия из (6.1) следует

$$\tilde{\Phi}_{ab}(\mathbf{k}) = \frac{\Phi_{ab}(k)}{1 + r_D^2 k^2} \quad \text{и} \quad \tilde{\Phi}_{ab}(\mathbf{r}) = \frac{e_a e_b}{r} e^{-r/r_D}, \quad (6.2)$$

т. е. эффективный потенциал совпадает с дебаевским потенциалом.

Рассматриваемая модель не сводится к бальмановскому газу, в котором взаимодействие пар частиц определяется выражением (6.2). Дело в том, что эффективный потенциал входит лишь в уравнения для корреляционных функций g_{ab} , а в выражении (5.1) для интеграла столкновений потенциал Φ_{ab} остается по-прежнему кулоновским потенциалом.

Для определения интеграла столкновений J_a надо решить уравнения для f_{ab} в приближении парных столкновений с потенциалом взаимодей-

ствия $\tilde{\Phi}_{ab}$. Решение можно представить в виде, аналогичном (2.2), если \mathbf{R} заменить на $\tilde{\mathbf{R}}$, т. е. на начальные импульсы частиц, взаимодействующих по закону $\tilde{\Phi}_{ab}$.

Внутренняя энергия определяется выражением, аналогичным (2.5). В состоянии равновесия оно принимает вид

$$U = \sum_a n_a \frac{3}{2} \kappa T + \frac{1}{2} \sum_{ab} n_a n_b \int \Phi_{ab}(\mathbf{r}) f_{ab}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (6.3)$$

где

$$f_{ab}(\mathbf{r}) = \exp \left(-\frac{e_a e_b}{\kappa T r} e^{-r/r_D} \right) \quad (6.4)$$

— радиальная функция распределения неидеальной плазмы.

На малых расстояниях эта функция переходит в функцию распределения Больцмановского газа, а на больших расстояниях совпадает с дебаевской функцией распределения, что соответствует первому приближению по плазменному параметру μ . Соответствующими предельными свойствами обладают и термодинамические функции.

Учет усредненной динамической поляризации и эффектов неидеальности приводит к изменению кинетических коэффициентов.

В работе ³⁹ показано, что первая причина приводит к изменению вида кулоновского логарифма. В работе ¹⁴ приведен расчет эффективного электрического поля $\mathbf{E}_{эф}$ в неидеальной плазме. При расчете электропроводности σ оба эффекта уменьшают величину σ . Возможно, что это позволит объяснить, почему экспериментальные данные по измерению электропроводности меньше вычисленных по теории Спитцера ⁴⁶⁻⁴⁸.

7. КВАНТОВОЕ КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ НЕВЫРОЖДЕННОГО НЕИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

Квантовый интеграл столкновений можно записать в виде ¹⁴

$$J_a = \frac{i}{\hbar} \sum_b N_b \int [\Phi_{ab}(|\mathbf{r}'_a - \mathbf{r}_b|) - \Phi_{ab}(|\mathbf{r}'_a - \mathbf{r}_b|)] \rho_{ab}(\mathbf{r}'_a, \mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b, \mathbf{r}_b, t) e^{-i(\mathbf{r}'_a - \mathbf{r}_a) \mathbf{p}_a / \hbar} \frac{d\mathbf{r}'_a d\mathbf{r}_a d\mathbf{r}_b}{V}. \quad (7.1)$$

Здесь ρ_{ab} — матрица плотности двух частиц. Условие нормировки функций f_a , ρ_{ab} :

$$\frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int f_a d\mathbf{p} = 1, \quad \int \rho_{ab}(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b, \mathbf{r}_b, t) \frac{d\mathbf{r}_a d\mathbf{r}_b}{V^2} = 1.$$

Уравнения для функций f_a , ρ_{ab} в приближении парных столкновений аналогичны уравнениям (1.3), (1.6).

Интеграл столкновений J_a для пространственно-однородного газа в первом приближении по $\tau_0 \partial/\partial t$ также можно представить в виде суммы двух частей. Правая часть, аналогичная классическому выражению (1.8), может быть записана в виде ¹⁴

$$J_a(\mathbf{p}_a, t) = \frac{i}{\hbar} \frac{V^2}{(2\pi)^6 \hbar^3} \sum_b N_b \int \left[\Phi_{ab} \left(\left| \mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b - \frac{1}{2} \hbar \mathbf{y}_a \right| \right) - \Phi_{ab} \left(\left| \mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b + \frac{1}{2} \hbar \mathbf{y}_a \right| \right) \right] e^{-i\mathbf{y}_a \mathbf{p}_a} \Psi_{\mathbf{p}'_a \mathbf{p}_b}(\mathbf{r}_a + \frac{1}{2} \hbar \mathbf{y}_a, \mathbf{r}_b) \times \\ \times \Psi_{\mathbf{p}'_a \mathbf{p}_b}^*(\mathbf{r}_a - \frac{1}{2} \hbar \mathbf{y}_a, \mathbf{r}_b) f_a(\mathbf{p}'_a, t) f_b(\mathbf{p}_b, t) d\mathbf{y}_a d\mathbf{p}'_a d\mathbf{r}_b d\mathbf{p}_b. \quad (7.2)$$

Здесь $\Psi_{\mathbf{p}_a \mathbf{p}_b}(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b)$ — собственные функции гамильтониана двух частиц газа.

Это выражение совпадает с полученным Грином¹⁰. В работе⁴⁹ показано, что выражение (7.2) можно привести к обычному виду интеграла столкновений Больцмана с квантовым сечением.

В первом приближении по $\tau_0 \partial/\partial t$ получаем дополнительный вклад в интеграл столкновений, который аналогичен (2.4)¹⁴. Эта часть интеграла столкновений учитывает эффекты неидеальности.

Интеграл столкновений в квантовом кинетическом уравнении обладает теми же свойствами, что и в классическом случае. В частности, выражение для внутренней энергии газа определяется суммой кинетической и потенциальной энергий:

$$U = \sum_a n_a \int \frac{\mathbf{p}^2}{2m_a} f_a \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} d\mathbf{p} + \sum_{ab} \frac{n_a n_b}{2} \int \Phi_{ab} \rho_{ab}(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b, \mathbf{r}_b) d\mathbf{r}_{ab}. \quad (7.3)$$

Входящая сюда функция $\rho_{ab}(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b, \mathbf{r}_b, t)$ — функция распределения координат двух частиц. В нулевом приближении по запаздыванию она определяется выражением

$$\rho_{ab} = \frac{V^4}{(2\pi\hbar)^6} \int |\Psi_{\mathbf{p}_a \mathbf{p}_b}(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b)|^2 f_a(\mathbf{p}_a, t) f_b(\mathbf{p}_b, t) d\mathbf{p}_a d\mathbf{p}_b. \quad (7.4)$$

Как и в классическом случае, первая квантовая функция распределения разлагается по плотности (см. (2.6)). Отличие от классического случая состоит в том, что член пропорциональный плотности, не обращается в нуль даже в равновесном состоянии. Он обращается в нуль лишь при $\hbar \rightarrow 0$. С точностью до \hbar^2

$$f_a^{\text{кв}}(\mathbf{p}_a) = f_a^0 + \sum_b n_b \frac{\hbar^2}{24\kappa T} \int \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_a} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_a} \right)^2 (\Phi_{ab} f_a^0) g_{ab}^0(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) \frac{d\mathbf{r}_a d\mathbf{r}_b}{V}; \quad (7.5)$$

f_a^0 — распределение Максвелла, $g_{ab}^0 = \exp - \left(\frac{\Phi_{ab}}{\kappa T} \right) - 1$ — классическая корреляционная функция больцмановского газа.

Из (7.5) следует выражение для средней кинетической энергии⁵⁰

$$\int \frac{\mathbf{p}^2}{2m_a} f_a^{\text{кв}} d\mathbf{p} = \frac{3}{2} \kappa T + \frac{\hbar^2}{24m_a \kappa T} \sum_b n_b \int \frac{\partial^2 \Phi_{ab}}{\partial \mathbf{r}_a^2} g_{ab}^0 \frac{d\mathbf{r}_a d\mathbf{r}_b}{V}.$$

Поскольку даже в равновесном состоянии вклад корреляций в выражении для U входит как через потенциальную, так и кинетическую энергии, то выражение для U удобно представить в виде

$$U = U_{\text{ид}} + U_{\text{кор}}. \quad (7.6)$$

Здесь $U_{\text{ид}}$ — внутренняя энергия идеального газа, $U_{\text{кор}}$ — корреляционная часть внутренней энергии. Она следующим образом выражается через потенциальную энергию $U_{\text{пот}}$ ^{14, 38}:

$$U_{\text{кор}} = \int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \beta} (\beta U_{\text{пот}}(\lambda\beta)), \quad \beta = 1/\kappa T. \quad (7.7)$$

Это выражение определяет второй вириальный коэффициент разложения внутренней энергии квантового газа по плотности.

8. КВАНТОВОЕ КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ НЕИДЕАЛЬНОЙ ПЛАЗМЫ

Обычно квантовые кинетические уравнения для плазмы получают в поляризационном приближении ^{8, 38}. Учет динамической поляризации обеспечивает экранировку на больших расстояниях. На малых расстояниях взаимодействие частиц в интеграле столкновений описывается в борновском приближении.

В неидеальной плазме сильные взаимодействия заряженных частиц на малых расстояниях играют значительную роль, поэтому необходимы кинетические уравнения, в которых учитывается сильное взаимодействие на малых расстояниях и поляризационные эффекты.

Точный учет динамической поляризации, как и в классическом случае (гл. 5) приводит к чрезвычайно сложным уравнениям. Вследствие этого и в квантовом случае целесообразно использовать приближение, при котором учитывается усредненная динамическая поляризация плазмы. Как и в гл. 5, можно ввести квантовый эффективный потенциал ¹⁴

$$\tilde{\Phi}_{ab}(\mathbf{k}) = \frac{\Phi_{ab}(\mathbf{k})}{\sum_c e_c^2 n_c} \sum_d e_d^2 n_d \frac{1}{2} \int \frac{f_d\left(\mathbf{p} + \frac{1}{2}\hbar\mathbf{k}\right) + f_d\left(\mathbf{p} - \frac{1}{2}\hbar\mathbf{k}\right)}{|\varepsilon(\mathbf{k}\mathbf{v}, \mathbf{k})|^2} \frac{v d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (8.1)$$

где

$$\varepsilon(\mathbf{k}\mathbf{v}, \mathbf{k}) = 1 + \sum_a \frac{4\pi e_a^2 n_a}{k^2} \int \frac{f_a\left(\mathbf{p} + \frac{1}{2}\hbar\mathbf{k}\right) - f_a\left(\mathbf{p} - \frac{1}{2}\hbar\mathbf{k}\right)}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\Delta} \frac{v d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3}$$

— квантовая диэлектрическая проницаемость плазмы.

При $\hbar \rightarrow 0$ выражение (8.1) переходит в классическое выражение (6.1). Заметим, что и в квантовом случае эффективный потенциал может быть выражен через соответствующую спектральную плотность $(\delta E \delta E)_k$.

Чтобы получить уравнение для матрицы плотности $\tilde{\rho}_{ab}$, надо использовать уравнение для функции ρ_{ab} в приближении парных столкновений ¹⁴ и заменить в нем Φ_{ab} на $\tilde{\Phi}_{ab}$. В соответствии с этим собственные функции гамильтониана пары частиц $\Psi_{\mathbf{p}_a \mathbf{p}_b}$ заменяются на $\tilde{\Psi}_{\mathbf{p}_a \mathbf{p}_b}$ — собственные функции гамильтониана пары частиц с потенциалом $\tilde{\Phi}_{ab}$. Из этого следует, что после замены $\Psi \rightarrow \tilde{\Psi}$ выражение (7.2) будет определять квантовый интеграл столкновений для плазмы в приближении усредненной динамической поляризации. Соответствующим образом определяется и дополнительный член к интегралу столкновений, учитывающий эффекты неидеальности.

Точное решение волнового уравнения для функции $\tilde{\Psi}_{\mathbf{p}_a \mathbf{p}_b}$ даже для простейшего эффективного потенциала в настоящее время, по-видимому, неизвестно. Вследствие этого при расчетах, например при вычислении термодинамических функций, результаты могут быть представлены лишь в виде рядов по борновскому параметру $\xi_{ab} = -e_a e_b / \kappa T \lambda_{ab}$ (λ_{ab} — длина волны де Бройля).

В работе ¹⁴ получены выражения для термодинамических функций неизоэнтальной плазмы. Интересно, что, хотя теория строится для полностью ионизованной плазмы, термодинамические функции учитывают вклад связанных состояний, близких к границе непрерывного спектра.

В работе ¹⁴ рассмотрена также квантовая функция распределения положений двух атомов $\tilde{\rho}_{ab}(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b, \mathbf{r}_b)$ для неизоэнтальной плазмы.

Эта функция конечна при всех расстояниях $r = |\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|$. Убывание на больших расстояниях обусловлено учетом экранирования. Конечность на малых расстояниях обусловлена квантовыми эффектами.

Так, например, при дебаевском эффективном потенциале для неизотермической плазмы значение этой функции распределения в нуле определяется выражением

$$\tilde{\rho}_{ab}(r=0) = 1 - \sqrt{\pi} \frac{m_a + m_b}{m_a \kappa T_b + m_b \kappa T_a} \frac{e_a e_b}{\lambda_{ab}} \exp\left(\frac{\lambda_{ab}}{2r_D}\right)^2 \left[1 - \Phi\left(\frac{\lambda_{ab}}{2r_D}\right)\right]; \quad (8.2)$$

Φ — функция ошибок, ξ_{ab} и λ_{ab} для неизотермической плазмы определяются выражениями

$$\xi_{ab} = -\frac{e_a e_b}{\kappa T \lambda_{ab}}, \quad \lambda_{ab} = \frac{m_a + m_b}{m_a m_b} \hbar \left(2 \frac{\kappa T_a}{m_a} + 2 \frac{\kappa T_b}{m_b}\right)^{-1/2}.$$

Автором настоящей статьи и В. Крэфтом⁷⁰ показано, что при учете обменных эффектов в выражении (8.2) появляется дополнительный множитель $(1 - \delta_{ab}/2)$ и, следовательно, при $a = b$ результат уменьшается в два раза.

Если длина де Бройля много меньше радиуса Дебая и плазма изотермична, то в нулевом приближении по параметру λ_{ab}/r_D из выражения (8.2) находим

$$\tilde{\rho}_{ab}(r=0) = \left(1 - \sqrt{\pi} \frac{e_a e_b}{\kappa T \lambda_{ab}}\right) \left(1 - \frac{\delta_{ab}}{2}\right).$$

Этот результат был получен в работах Кельбга⁵¹ и Трубникова, Елессина⁵².

В п. 6 уже отмечалось, что отклонение величины электропроводности от рассчитанной по формуле Спитцера обусловлено двумя причинами. Первая — влияние эффекта экранирования, вторая — отличие эффективного (действующего) поля $\mathbf{E}_{a \text{ эфф}}$ от среднего поля \mathbf{E} . Поле $\mathbf{E}_{a \text{ эфф}} = \mathbf{E} + \frac{1}{e_a} \int \mathbf{p} \mathbf{J} \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} d\mathbf{p}$. Оба эффекта имеют значение при расчете электропроводности неидеальной плазмы.

Для эффективного потенциала (6.2) в первом приближении по борновскому параметру эффективное поле в неизотермической плазме определяется выражением

$$\mathbf{E}_{a \text{ эфф}} = \mathbf{E} \left\{ 1 - \frac{4\pi e_a}{3} r_D \sum_b e_b^2 n_b \frac{(m_a + m_b)(e_a m_b + e_b m_a)}{(\kappa T_a m_b + \kappa T_b m_a)^2} K\left(\frac{\lambda_{ab}}{r_D}\right) \right\},$$

$$K(\eta) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\eta} \left\{ 1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \eta - \left(1 + \frac{\eta^2}{4}\right) e^{\eta^2/4} \left[1 - \Phi\left(\frac{\eta}{2}\right)\right] \right\}. \quad (8.3)$$

Отсюда следует, что добавка к внешнему полю зависит от двух параметров: плазменного параметра и параметра $\eta = \lambda_{ab}/r_D$.

В классическом пределе ($\eta = 0$, $K = 1$) формула (8.3) для эффективного поля, действующего на электроны, совпадает с результатом Кадомцева⁵³.

9. КИНЕТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПЛОТНЫХ ГАЗОВ

В гл. 2, 4 рассмотрены кинетические уравнения для неидеального газа с учетом двойных и тройных столкновений. Построение по такой схеме кинетических уравнений для более плотных газов, когда необходим учет более сложных столкновений, не может быть осуществлено, так как соответствующие интегралы столкновений расходятся (см. Введение).

Мы видели, что при выводе кинетического уравнения используется условие ослабления быстрых (мелкомасштабных) флуктуаций. Граница раздела быстрых и медленных флуктуаций зависит от рассматриваемого приближения. Она определяется размерами соответствующих физически бесконечно малых интервалов τ_Φ , l_Φ (см. стр. 543 Введения). Для приближения парных столкновений $\tau_\Phi^{(2)} \sim \sqrt{\epsilon} \tau_{\text{ст}}$, $l_\Phi^{(2)} \sim \sqrt{\epsilon} l$; для тройных $\tau_\Phi^{(3)} \sim \sqrt[4]{\epsilon} \tau_{\text{ст}}$, $l_\Phi^{(3)} \sim \sqrt[4]{\epsilon} l$, а для четверных $\tau_\Phi^{(4)} \sim \tau_{\text{ст}}$, $l_\Phi^{(4)} \sim l$. Отсюда следует, что интеграл столкновений, определяемый столкновениями четырех частиц, не может быть построен методом теории возмущения по плотности, так как величины $\tau_\Phi^{(4)} \sim \tau_{\text{ст}}$, $l_\Phi^{(4)} \sim l$ и поэтому не могут рассматриваться как пренебрежимо малые. Вследствие этого интеграл столкновений явно зависит от $\tau_{\text{ст}}$ (или l). Это вносит дополнительную зависимость от плотности (см. стр. 542).

Иными словами, при построении интегралов столкновений, учитывающих столкновения четырех и большего числа частиц, надо строить теорию так, чтобы учесть в интегралах столкновений явно вклад двойных столкновений. Для этого можно поступить следующим образом.

Используем уравнение Лиувилля, усредненное по физически бесконечно малому объему $(l_\Phi^{(2)})^3$, определенному в приближении парных столкновений²⁴. Из (1.13) $(l_\Phi^{(2)})^3 \sim 1/\sqrt{\epsilon} n$ (напомним, что $l_\Phi^{(2)} \sim \sqrt{\epsilon} l \ll l$). Обозначим соответствующую усредненную функцию распределения через \tilde{f}_N , тогда, согласно²⁴,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + H^{(N)}\right) \tilde{f}_N - \sum_{1 \leq i < j \leq N} \overline{\theta_{ij} f_N^{(ij)}} = 0, \quad (9.1)$$

где (для пространственно-однородного газа)

$$f_N^{(ij)}(x_1, \dots, x_N, t) = \tilde{f}_N(x_1, \dots, \mathbf{r}_i \mathbf{P}_i(-\infty), \dots, \mathbf{r}_j \mathbf{P}_j(-\infty), \dots, x_N, t). \quad (9.2)$$

Здесь использованы также обозначения, введенные на стр. 540, 551. Знак \sim над последним членом в (9.1) означает, что надо произвести усреднение по объему $(l_\Phi^{(2)})^3$.

На основе уравнения (9.1) можно построить цепочку уравнений для функций $\tilde{f}_1 \equiv f_1$, \tilde{f}_2 , \tilde{f}_3 , ... Она отличается от цепочки уравнений Боголюбова наличием во всех уравнениях цепочки диссипативных членов, обусловленных парными столкновениями.

Первое уравнение цепочки для пространственно-однородного газа имеет вид

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = n \int \theta_{12} (f_2^{(1,2)} + \tilde{f}_2) dx_2 \equiv J. \quad (9.3)$$

Мы видим, что интеграл столкновений состоит из двух частей. Одна, содержащая функцию $f_2^{(1,2)}$, определяется мелкомасштабными флуктуациями ($l_{\text{кор}} \leq l_\Phi \sim \sqrt{\epsilon} l$), вторая — крупномасштабными флуктуациями. Функцию $f_2^{(1,2)}$ можно представить в виде $f_2^{(1,2)} = (f_1 f_1)^{(1,2)} + g_2^{(1,2)}$, где $g_2^{(1,2)}$ — соответствующая корреляционная функция. Корреляцией на малых масштабах пренебрегаем ($g_2^{(1,2)} = 0$), тогда выражение (9.3) принимает вид

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = n \int \theta_{12} [f_1(\mathbf{P}_1(-\infty), t) f_1(\mathbf{P}_2(-\infty), t) + \tilde{f}_2] dx_2 \equiv J_B + \Delta J. \quad (9.4)$$

Первый член в (9.4) совпадает с интегралом столкновений Больцмана (1.8). Второй член (ΔJ) определяется вкладом крупномасштабных корреляций. Именно через \tilde{f}_2 в кинетическом уравнении (9.4) будет учитываться вклад более сложных, чем парные, взаимодействий частиц.

Запишем уравнение для \tilde{f}_2 , которое следует из уравнения (9.1). При этом сделаем следующие упрощения. Представим функции $f_3^{(1,3)}$, $f_3^{(2,3)}$, входящие в уравнение для \tilde{f}_2 , в виде, аналогичном формуле (1.5), и рассмотрим в нем приближение вторых корреляций ($g_3^{(1,3)} = 0$, $g_3^{(2,3)} = 0$). Полученное в таком приближении уравнение для \tilde{f}_2 с учетом уравнения (9.3) (или (9.2)) можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + H^{(2)} + \delta J_{x_1} + \delta J_{x_2}\right) (\tilde{f}_2 - f_1 f_1) = \theta_{12} f_1 f_1 + \overline{\theta_2 (f_1 f_1)^{(1,2)}} + \\ + n \int [\theta_{13} (\tilde{f}_3 - \tilde{f}_2(1, 3) f_1(2)) + \theta_{23} (\tilde{f}_3 - \tilde{f}_2(2, 3) f_1(1))] dx_3. \quad (9.5)$$

Здесь введены обозначения для линейризованных интегралов парных столкновений δJ_{x_1} , δJ_{x_2} (для формы Боголюбова). Например,

$$\delta J_{x_1} \{\tilde{g}_2\} = -n \int \theta_{13} [f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{P}_1(-\infty)) \tilde{g}_2(x_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{P}_3(-\infty)) + \\ + \tilde{g}_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{P}_1(-\infty), x_2) f_1(\mathbf{r}_3, \mathbf{P}_3(-\infty))] dx_3. \quad (9.6)$$

Знак минус введен в определение (9.6) для удобства.

Рассмотрим правую часть уравнения (9.5). Третий член в ней учитывает влияние тройных и более сложных взаимодействий частиц. Первый и второй члены правой части определяются первыми функциями распределения, поэтому их можно рассматривать как источник в уравнении для корреляционной функции $\tilde{g}_2 = \tilde{f}_2 - f_1 f_1$.

В гл. 10 мы увидим, что они определяют спектр крупномасштабных флуктуаций. Здесь же рассмотрим лишь вклад третьего члена в правой части (9.5) в кинетическое уравнение для плотных газов.

Сравним уравнение (9.5) (без учета источника) со вторым уравнением цепочки уравнений Боголюбова — уравнением (1.4).

Для пространственно-однородного распределения частиц газа уравнение (1.4) (с учетом уравнения (1.3)) можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + H^{(2)}\right) (f_2 - f_1 f_1) = \theta_{12} f_1 f_1 + \\ + n \int [\theta_{13} (f_3 - f_2(1, 3) f_1(2)) + \theta_{23} (f_3 - f_2(2, 3) f_1(1))] dx_3. \quad (9.7)$$

В приближении двойных столкновений второй член правой части этого уравнения обращается в нуль и оно (в (9.7) $F = 0$ из-за пространственной однородности) совпадает с уравнением (1.6). Таким образом, вклад тройных и более сложных взаимодействий частиц газа определяется вторым членом правой части уравнения (9.7). Он совпадает со вторым членом правой части уравнения (9.5).

Во введении уже отмечалось, что использование теории возмущений по плотности для решения цепочки уравнений Боголюбова приводит в кинетическом уравнении к появлению расходящихся интегралов. Положение, однако, меняется, если применять теорию возмущений по плотности при решении уравнений для функций распределения \tilde{f}_3 , \tilde{f}_4 , ... Поскольку правые части в уравнениях (9.5), (9.7), учитывающие вклады тройных, четверных и высших взаимодействий, совпадают, то основное различие будет состоять в замене оператора $\left(\frac{\partial}{\partial t} + H^{(2)}\right)$ в (9.7) на $\left(\frac{\partial}{\partial t} + H^{(2)} + \delta J_{x_1} + \delta J_{x_2}\right)$ в уравнении (9.5).

При решении уравнения (9.5) можно не учитывать решение однородного уравнения, так как начальные корреляции затухают за время порядка $\tau_{\text{ст}}^{(2)}$, а характерные времена интегралов тройных, четверных столкновений порядка соответственно $\tau_{\text{ст}}^{(2)}/\varepsilon$, $\tau_{\text{ст}}^{(2)}/\varepsilon^2$, ... При использовании неоднородного решения уравнения (9.5) из-за наличия диссипативного члена $(\delta J_{x_1} + \delta J_{x_2}) \tilde{g}_2 \sim \frac{1}{\tau_{\text{эфф}}} \tilde{g}_2$ происходит обрезание интегралов столкновений на временах $t \sim \tau_{\text{эфф}}$, где $\tau_{\text{эфф}}$ — эффективное время свободного пробега при парных столкновениях.

Например, при учете тройных столкновений в выражении (4.5) произойдет замена

$$\int_0^\infty d\tau S_{-\tau}^{(2)}(1, 2) \dots \rightarrow \int_0^\infty d\tau e^{-\frac{\tau}{\tau_{\text{эфф}}}} S_{-\tau}^{(2)}(1, 2) \dots$$

Таким образом, расходимость в интегралах столкновений, учитывающих вклады тройных и более сложных столкновений, ликвидируется благодаря учету диссипативного вклада в уравнениях для функций $\tilde{f}_2, \tilde{f}_3, \dots$, обусловленного парными столкновениями. Аналогичный результат можно получить с помощью диаграммной техники, если просуммировать наиболее сильно расходящиеся при разложении по плотности диаграммы. Результат такого суммирования соответствует приближению вторых корреляций для мелкомасштабных корреляций в уравнении для функции \tilde{f}_2 .

10. КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ФЛУКТУАЦИЙ В ГАЗЕ И ПЛАЗМЕ

Рассмотрим снова газ настолько разреженный, что можно ограничиться приближением парных столкновений. Напомним (см. Введение), что при выводе кинетического уравнения Больцмана используется условие полного ослабления начальных корреляций. В действительности, как уже отмечалось на стр. 544, происходит ослабление мелкомасштабных корреляций с $\tau_{\text{кор}} \leq \sqrt{\varepsilon} \tau_{\text{ст}}$, $r_{\text{кор}} \leq \sqrt{\varepsilon} l$. Таким образом, при выводе кинетического уравнения Больцмана фактически предполагается, что крупномасштабные флуктуации (с $\tau_{\text{кор}} \geq \sqrt{\varepsilon} \tau_{\text{ст}}$, $r_{\text{кор}} \geq \sqrt{\varepsilon} l$) не играют роли в кинетической теории.

Лишь такой ценой можно получить кинетическое уравнение — замкнутое уравнение для функций распределения f_1 .

Крупномасштабные флуктуации в общем случае не успевают затухнуть за время релаксации функции f_1 . Вследствие этого из цепочки уравнений Боголюбова (или уравнения Лиувилля) при учете крупномасштабных флуктуаций не следует кинетическое уравнение Больцмана, а получается система уравнений для функции f_1 и корреляционных функций крупномасштабных флуктуаций $\tilde{g}_2 \dots \tilde{g}_3 \dots$. Эту систему уравнений можно заменить приближенно уравнением Ланжевена для случайной функции f_1 — уравнением Больцмана со случайным источником $y(x_1, t)$. При этом, естественно, возникает задача определения статистических характеристик случайного источника. Для состояний газа, близких к равновесному состоянию, такая задача впервые была решена Кадомцевым⁵³. В этой работе для расчета корреляционной функции случайного источника y использован метод, аналогичный тому, которым впервые было получено само кинетическое уравнение Больцмана.

В работе Горькова, Дзялошинского, Питаевского⁵⁵ для построения кинетической теории флуктуаций в состоянии равновесия был использован метод Рытова⁵⁴, Ландау и Лифшица^{50, 55, 56}.

В работе Когана и Шульмана³⁶ корреляционная функция случайного источника в уравнении Больцмана определена для стационарных состояний, сильно отклоняющихся от равновесного состояния.

Независимо эта задача была решена в работах Ганцевича, Гуревича, Катилуса⁵⁷ на основе выведенных ими уравнений для крупномасштабных корреляционных функций. В работе²⁴ для описания крупномасштабных флуктуаций в газе и плазме использована цепочка уравнений для функций $f_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3$ (см. п. 9), которая следует из уравнения (9.1). Расчет флуктуаций в²⁴ проведен в поляризационном приближении. В той же работе найден дополнительный вклад в кинетическое уравнение (9.4), определяемый крупномасштабными флуктуациями.

Рассмотрим сначала результаты расчета для случая локального равновесия.

Обратимся к уравнению (9.5) для корреляционной функции $\tilde{g}_2 = \tilde{f}_2 - f_1 f_1$. Последний член в правой части для разреженного газа (в приближении парных столкновений) можно опустить, так как он учитывает вклад тройных и более сложных взаимодействий (см. гл. 9). Второй член правой части $\overline{\theta_{12} (f_1 f_1)^{(1,2)}}$ в приближении локального равновесия равен нулю. Таким образом, в правой части уравнения (9.5) остается лишь один член $\theta_{12} f_1^{(0)} f_1^{(0)}$, где $f_1^{(0)}$ — локальное распределение Максвелла. Учитывая, что $\delta J_x \{f_1^{(0)}\} = 0$, получим в рассматриваемом приближении решение уравнения (9.5)

$$\tilde{g}_2(x_1, x_2) = (e^{-\frac{\Phi_{12}}{\kappa T}} - 1) f_1^{(0)} f_1^{(0)} \approx -\frac{\Phi_{12}}{\kappa T} f_1^{(0)} f_1^{(0)}, \quad (10.1)$$

так как $r \gg \sqrt{\varepsilon} l \sim \frac{r_0}{\sqrt{\varepsilon}} \gg r_0$.

Используем известную формулу, связывающую одновременную корреляцию флуктуаций фазовой плотности в пространстве координат и импульсов $N(x, t) = \sum_i \delta(x - x_i(t))$, где $x = (\mathbf{r}, \mathbf{p})$, с корреляционной функцией g_2 :

$$\overline{(\delta N \delta N)_{xx't}} = \left(\delta(x - x') n f_1 - \frac{n}{V} f_1(x, t) f_1(x', t) \right) + n^2 g_2(x, x', t). \quad (10.2)$$

Здесь n — средняя концентрация, $\delta N(x, t) = N - \bar{N}$. Средняя фазовая плотность связана с функцией распределения f_1 соотношением $\bar{N}(x, t) = n f_1(x, t)$.

Из формул (10.1), (10.2) следует выражение для крупномасштабной части одновременной корреляции флуктуаций δN в состоянии локального равновесия

$$\overline{(\delta N \delta N)_{xx't}} = n \left(\delta(x - x') f_1^{(0)} - \frac{1}{V} f_1^{(0)} f_1^{(0)} \right) - n^2 \frac{\Phi_{12}}{\kappa T} f_1^{(0)} f_1^{(0)}. \quad (10.3)$$

В (10.3) в $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ -функции бесконечно малым элементом длины является l_ϕ .

Чтобы найти спектральную плотность $(\delta N \delta N)_{\omega \mathbf{k} \mathbf{p} \mathbf{p}'}$ крупномасштабных флуктуаций, используем уравнение для двухвременной корреляции флуктуаций δN . Оно получено разными способами в работах^{57, 24} и имеет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} + \delta J_{\mathbf{p}} \right) (\delta N \delta N)_{xx'tt'} = 0. \quad (10.4)$$

К этому уравнению надо добавить начальное условие — значение функции $(\delta N \delta N)_{xx'tt'}$ при $t = t'$. Для приближения локального равнове-

Геометрия и физика микромира. Б л о х и н ц е в Д. И. «Успехи физических наук», 1973 г., т. 110, вып. 4, 481—497.

В статье дается критический анализ основных геометрических понятий применительно к физике микромира. Статья начинается с очерка геометрии в макроскопической физике. Эта часть основывается на классических работах А. Пуанкаре, А. Эйнштейна и А. А. Фридмана. Новым является указание на возможные ограничения понятия точечного события, связанные с предельными плотностями вещества. В дальнейшем обсуждается локализация элементарных частиц и указываются пределы возможной точности. В статье подчеркивается, что логическая структура локальной квантовой теории поля предполагает существование частиц как угодно большой массы.

Существование «максимонов» — частиц предельной, но ограниченной массы — вступит в противоречие с локальностью. В статье приводятся физические основания для существования предельных, конечных масс — сильная гравитация (коллапс частиц), неустойчивость частиц относительно распада из-за слабого взаимодействия (это взаимодействие может стать сильным для очень тяжелых частиц и привести к полной неустойчивости такой частицы).

В заключение статьи рассматриваются два пункта нелокальной теории поля. В этой теории координаты точечного события являются операторами, а пространство импульсов остается числовым пространством (имеющим кривизну или плоским). Первый вариант предполагает коммутационные условия для координат точки (теория Снайдера — Кадышевского), второй — антикоммутационные условия (теория автора).

Библиографических ссылок 47.

533.723

Приближение диффузионного случайного процесса в некоторых нестационарных статистических задачах физики. К л я ц к и н В. И., Т а т а р с к и й В. И. «Успехи физических наук», 1973 г., т. 110, вып. 4, 499—536.

В обзоре на основе единого подхода рассматриваются задачи о броуновском движении в нелинейных динамических системах, в том числе линейный осциллятор под действием случайных сил, параметрический резонанс в колебательной системе со случайными параметрами, турбулентная диффузия частиц в поле случайных скоростей, диффузия лучей в среде со случайными неоднородностями показателя преломления. Тем же методом рассматриваются и более сложные задачи: равновесные гидродинамические флуктуации в идеальном газе, описание гидродинамической турбулентности методом случайных сил, распространение света в среде со случайными неоднородностями. Применяемый для описания этих задач метод заключается в построении уравнений для плотности вероятностей системы или для ее статистических моментов с использованием малого параметра — отношения характерного времени случайных воздействий к постоянной времени системы (в ряде задач роль времени играет одна из пространственных координат). При этом первое приближение метода эквивалентно замене реальной корреляционной функции воздействий на δ -функцию, что позволяет получить замкнутые уравнения для статистических характеристик. Применяемый метод дает возможность строить и более высокие приближения по упомянутому малому параметру, что, в частности, позволяет исследовать область применимости результатов первого приближения.

Иллюстраций 10, библиографических ссылок 96.

533.93

Кинетические уравнения для неидеального газа и неидеальной плазмы. К л и м о н т о в и ч Ю. Л. «Успехи физических наук», 1973 г., т. 110, вып. 4, 537—568.

Проводимые в последние годы экспериментальные исследования кинетических процессов в плотных газах и плазме стимулируют развитие теории неидеальных газов и плазмы. В настоящее время развита кинетическая теория неидеальных одноатомных газов средней плотности и кинетическая теория слабо неидеальной полностью ионизованной плазмы. Систематическому изложению этих вопросов и посвящен настоящий обзор. Кинетическая теория неидеальных газов малой плотности строится на основе обобщенного кинетического уравнения Больцмана (в приближении парных столкновений) и кинетического уравнения Чо—Уленбека (в приближении тройных столкновений). Кинетические уравнения для более плотных газов имеют существенно иную структуру, чем обычные кинетические уравнения. Это связано с невозможностью использования обычной схемы из-за расходимостей интегралов столкновений в высших приближениях по плотности. В статье изложена кинетическая теория слабо неидеальной плазмы. Особое внимание уделено исследованиям возможностей построения классических и квантовых кинетических уравнений без предположения о малости взаимодействия частиц на малых расстояниях, так как в неидеальной плазме взаимодействие частиц на малых расстояниях играет существенную роль. Значительное место в обзоре уделено изложению кинетической теории флуктуаций в неидеальных газах и плазме. Рассмотрены некоторые проблемы кинетической теории неидеальных систем.

Библиографических ссылок 70.

Зеркальная электронная микроскопия. Лукьянов А. Е., Спивак Г. В., Гвоздов Р. С. «Успехи физических наук», 1973 г., т. 110, вып. 4, 623—668.

Настоящий обзор посвящен рассмотрению основных этапов развития зеркальной электронной микроскопии. В зеркальном электронном микроскопе (ЗЭМ) электронный пучок отражается в тормозящем электрическом поле вблизи поверхности образца, благодаря чему исследуемый объект не подвергается бомбардировке зондирующими частицами. Это позволяет получать информацию о геометрическом рельефе поверхности и микрополей на ней. Обсуждаются проблемы конструирования ЗЭМ, различные режимы работы прибора, вопросы предельного разрешения. Подробно рассмотрены теории формирования контраста геометрического рельефа, а также электрических и магнитных микрополей. Приводятся экспериментальные данные об исследовании широкого класса объектов — полупроводников, диэлектриков и магнитных структур — в ЗЭМ. Описываются различные методики для количественных измерений статических и динамических микрополей на поверхностях твердых тел.

Таблиц 2, иллюстраций 29, библиографических ссылок 187 (227 назв.).

сия из уравнения (10.4) с начальным условием (10.3) следует выражение для спектральной функции

$$(\delta N \delta N)_{\omega \mathbf{k} \mathbf{p} \mathbf{p}'} = \frac{(\delta J_{\mathbf{p}} + \delta J_{\mathbf{p}'}) \left(n \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') f_1^{(0)} - \frac{n^2 \Phi(\mathbf{k})}{\kappa T} f_1^{(0)} f_1^{(0)} \right)}{(-i(\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}) + \delta J_{\mathbf{p}})(i(\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}') + \delta J_{\mathbf{p}'})}. \quad (10.5)$$

Используя это выражение, можно найти спектральную функцию случайного источника y в уравнении Больцмана, если последнее рассматривается как уравнение Ланжевена. Она определяется числителем выражения (10.5), т. е.

$$n^2 (yy)_{\omega \mathbf{k} \mathbf{p} \mathbf{p}'} = (\delta J_{\mathbf{p}} + \delta J_{\mathbf{p}'}) \left(n \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') f_1^{(0)} - \frac{n^2 \Phi(\mathbf{k})}{\kappa T} f_1^{(0)} f_1^{(0)} \right). \quad (10.6)$$

Первый член в этом выражении определяет спектральную функцию источника крупномасштабных флуктуаций для идеального газа и совпадает с выражением, полученным Кадомцевым³⁴. Второй член в (10.6) учитывает неидеальность газа (в приближении парных столкновений).

Приведенные результаты можно обобщить на случай, когда состояние газа не является равновесным^{36, 57, 24}. Неравновесность вызвана действием постоянного поля. Результат снова следует из уравнения (9.5), если в нем опустить последний член правой части. Однако второй член правой части не равен теперь нулю. Это приводит к появлению дополнительного члена в выражении для спектральных функций $(\delta N \delta N)_{\omega \mathbf{k} \mathbf{p} \mathbf{p}'}$, $(yy)_{\omega \mathbf{k} \mathbf{p} \mathbf{p}'}$.

В работах^{57, 36} для функции $(yy)_{\omega \mathbf{k} \mathbf{p} \mathbf{p}'}$ при малых k ($kl \ll 1$) получено выражение

$$n^2 (yy)_{\omega \mathbf{k} \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2} = (I_{\mathbf{p}_1} + I_{\mathbf{p}_2}) n \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) f_1 + n^2 \int \theta_{12} f_1(\mathbf{P}_1(-\infty)) f_1(\mathbf{P}_2(-\infty)) d\mathbf{r}_2. \quad (10.7)$$

Здесь $I_{\mathbf{p}} = \mathbf{F} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} + \delta J_{\mathbf{p}}$.

Второй член в (10.7) определяется взаимодействием частиц. Он отличается от интеграла столкновений в уравнении Больцмана (1.8) тем, что в (1.8) есть еще интегрирование по \mathbf{p}_2 .

В равновесном состоянии первый член в (10.7) совпадает с первым членом в (10.6), а второй член в (10.7) обращается в нуль. Взаимодействие частиц в (10.7) учтено неполно, так как в нем отсутствует член, совпадающий в равновесном состоянии со вторым членом (10.6).

Спектральные функции крупномасштабных флуктуаций используются, например, для расчета флуктуаций в полупроводниковых приборах^{36, 57} и для исследования рассеяния и трансформации волн на неравновесной плазме в полупроводниках⁵⁸.

Рассмотрим дополнительный вклад ΔJ , который вносят крупномасштабные флуктуации в интеграл столкновений в приближении парных столкновений. Для этого надо из уравнения (9.5) найти неравновесное решение уравнения (9.5) (это можно сделать в приближении теории возмущений) и подставить найденное выражение для \tilde{g}_2 во второй член правой части уравнения (9.4). В результате получим

$$\Delta J = n \frac{\partial}{\partial p_i} \int \Phi^2(\mathbf{k}) \operatorname{Im} \frac{1}{(\mathbf{k} \mathbf{v}_1 - \mathbf{k} \mathbf{v}_2) - i(\delta J_{\mathbf{p}_1} + \delta J_{\mathbf{p}_2})} k_i k_j \times \\ \times \left(\frac{\partial}{\partial p_{1j}} - \frac{\partial}{\partial p_{2j}} \right) f_1 f_1 d\mathbf{p}_2 \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}. \quad (10.8)$$

Сравним это выражение с приближением Ландау для интеграла столкновений Больцмана J_B в уравнении (9.4). Оно следует из (10.8), если считать время затухания флуктуаций бесконечно малым, т. е.

$$\text{Im} \frac{1}{(\mathbf{k}\mathbf{v}_1 - \mathbf{k}\mathbf{v}_2) - i(\delta J_{\mathbf{p}_1} + \delta J_{\mathbf{p}_2})} \rightarrow \pi \delta(\mathbf{k}\mathbf{v}_1 - \mathbf{k}\mathbf{v}_2). \quad (10.9)$$

Из изложенного следует, что это возможно лишь для мелкомасштабных флуктуаций, для которых $\tau_{\text{кор}} \leq \sqrt{\epsilon} \tau_{\text{ст}} \ll \tau_{\text{ст}}$.

Чтобы учесть в кинетическом уравнении (9.4) эффекты неидеальности, надо к J_B добавить выражение (2.4), а ΔJ записать в форме, аналогичной выражению (5.9), в котором произведена замена, обратная (10.9) и $4\pi e^2/k^2 \rightarrow \Phi(\mathbf{k})$.

Кинетическая теория флуктуаций в плазме развита в работе ²⁴. В этой работе найдены в поляризационном приближении спектральные функции крупномасштабных флуктуаций и найдено соответствующее выражение для дополнительного вклада в интегралы столкновений заряженных частиц. Показано, что граница, разделяющая мелко- и крупномасштабные флуктуации, определяется радиусом Дебая.

11. ОБОБЩЕННОЕ КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Во введении уже отмечалось, что в последние годы появился целый ряд работ, в которых различными методами стремятся получать наиболее общее кинетическое уравнение, сразу учитывающее корреляции любого порядка. Просто и изящно эта задача решена в недавней работе Зубарева и Новикова ³³. Суть подхода работы ³³ состоит в следующем.

Выразим интеграл столкновений через функцию распределения всех N частиц $F_N = V^N f_N \left(\int F_N dx_1 \dots dx_N V^{-N} = 1 \right)$. Для пространственно однородного распределения частиц из (1.3) следует

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = J(\mathbf{p}_1, t) = n \int \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial F_N}{\partial \mathbf{p}_1} \frac{dx_2 \dots dx_N}{V^{N-1}}. \quad (11.1)$$

Для функции F_N в работе ³³ используется уравнение Лиувилля. Решая уравнение для F_N при условии ослабления всех начальных корреляций, можно выразить функцию F_N через первые функции распределения. Подставляя это выражение в уравнение (11.1), получаем замкнутое уравнение для функции F_1 — обобщенное кинетическое уравнение.

Использование в качестве уравнения для F_N уравнения Лиувилля приводит, однако, к некоторым трудностям при переходе к обычной (больцмановской) форме интеграла столкновений и при установлении законов сохранения. Этих трудностей можно избежать, если в качестве уравнения для f_N использовать уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + H^{(N)} \right) F_N = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i \leq N} \left(\mathbf{v}_i \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} + F \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_i} \right) \right) \prod_i F_1(x_i, t). \quad (11.2)$$

Это уравнение имеет такую же структуру, как и уравнение (1.6) для f_2 в приближении парных столкновений или уравнение (4.1) с правой частью (4.3) в приближении тройных столкновений.

Существенно, что уравнение (11.2) не есть уравнение Лиувилля. Это есть N -е уравнение цепочки уравнений Боголюбова в приближении, когда пренебрегаем столкновениями $N+1$ частицы. Считаем здесь, что $N \gg 1$.

При условии полного ослабления начальных корреляций решение уравнения (11.2) для пространственно-однородного газа можно записать в виде

$$F_N = \prod_{1 \leq i \leq N} F_1(x_i, t) + \int_0^\infty \frac{dS_{-\tau}^{(N)}}{d\tau} \prod_{1 \leq i \leq N} F_1(x_i, t - \tau) d\tau. \quad (11.3)$$

Подставляя (11.3) в (11.1), получим интеграл столкновений обобщенного кинетического уравнения.

Рассмотренные выше в гл. 2 и 4 кинетические уравнения следуют из обобщенного кинетического уравнения, если использовать вириальные разложения для неравновесных функций распределения. Эти разложения были получены в работах Козна²⁰ и других авторов.

Полученный таким путем интеграл столкновений обладает свойствами (1.9) при $\varphi = 1$, p_1 . При $\varphi = \mathbf{p}_1^2/2m$ из (11.1), (11.3) следует

$$n \int \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m} J(x_1, t) dx_1 = -\frac{n^2}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int \Phi_{12} F_N \frac{dx_1 \dots dx_N}{V^{N-1}}. \quad (11.4)$$

В соответствии с этим выражение для плотности внутренней энергии имеет вид

$$U = n \int \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m} f_1 \frac{dx_1}{V} + \frac{n^2}{2} \int \Phi_{12} F_N \frac{dx_1 \dots dx_2}{V^{N-1}}. \quad (11.5)$$

В равновесном состоянии выражение (11.3) для f_N совпадает с распределением Гиббса для системы N частиц.

Для решения конкретных проблем обобщенные кинетические уравнения пока еще не использовались.

12. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрим кратко некоторые проблемы кинетической теории неидеальных систем.

В гл. 2, 4 были получены кинетические уравнения для неидеального газа с учетом двойных и тройных столкновений. Возможно, как мы видели (гл. 9), построение кинетических уравнений и для более плотных газов, когда становятся существенными столкновения большего числа частиц. Такой путь последовательных приближений при построении кинетических уравнений для плотных газов, однако, мало эффективен. Здесь нужен иной подход. Он аналогичен тому, который используется при вычислении термодинамических функций в плотных газах и жидкостях.

Для термодинамических функций существует вириальное разложение. Однако практически используются лишь несколько первых членов разложения. Расчет термодинамических функций в плотных газах производится либо численными методами (метод молекулярной динамики, метод Монте-Карло), либо путем решения модельных интегральных уравнений для парной корреляционной функции молекул газа.

В настоящее время используются три типа таких уравнений. Это уравнение Кирквуда — Боголюбова — Борна — Грина, в котором для тройной функции распределения принимается суперпозиционное приближение Кирквуда, уравнение Перкуса — Йефика и так называемое уравнение сверхпереплетающихся цепей. С этими уравнениями можно познакомиться по обзорным работам^{62, 63}. В работе⁶⁴ рассмотрен еще один пример таких интегральных уравнений для газа и плазмы. Все эти интегральные уравнения для корреляционной функции точно учитывают

вклады первых трех членов вириального разложения и приближенно — вклады более сложных взаимодействий.

Аналогичный путь возможен и при построении кинетических уравнений для плотных газов и плазмы. При этом, например, для газа вместо кинетического уравнения — замкнутого уравнения для первой функции распределения — надо будет использовать систему двух уравнений для функций f_1 , g_2 . Уравнение для g_2 будет нелинейное интегральное уравнение. Его можно выбрать так, чтобы в приближении тройных столкновений из него следовало выражение (4.5). Тогда система уравнений для функций f_1 , g_2 может быть заменена одним уравнением для функции f_1 , которое было рассмотрено в п. 4. В равновесном состоянии уравнение для g_2 может совпадать с одним из перечисленных уравнений.

В настоящей статье были рассмотрены кинетические уравнения для неидеального газа и для полностью ионизованной неидеальной плазмы. Это два предельных случая частично ионизованной плазмы. В первом случае степень ионизации равна нулю, а во втором случае — ста процентам.

Кинетическая теория частично ионизованной плазмы значительно сложнее. Это обусловлено в первую очередь необходимостью учета внутримолекулярных движений, а также процессов ионизации и рекомбинации, приводящих к изменению концентраций свободных и связанных заряженных частиц.

В настоящее время развита лишь кинетическая теория идеальной частично ионизованной плазмы⁶⁵. В этих работах на основе микроскопических уравнений построена система трех кинетических уравнений для функций распределения электронов, ионов и атомов. Интегралы столкновений получены в поляризационном приближении (борновское приближение с учетом эффектов поляризации). В рамках этого приближения можно произвести и учет эффектов неидеальности.

Более полно (без применения теории возмущений по взаимодействию) развита кинетическая теория для многоатомных газов. Эффекты неидеальности, обусловленные взаимодействием молекул, не учитывались. В последнее время начали появляться работы по обоснованию кинетических уравнений для реагирующих газов^{66, 67}.

В настоящей статье не были затронуты вопросы кинетической теории турбулентных состояний газов и плазмы. Естественно, что в турбулентной плазме роль эффектов неидеальности может быть значительной. В настоящее время достаточно полно развита лишь теория слабой турбулентности (см. последний обзор⁶⁸).

Проблемы, аналогичные рассмотренным выше, имеются и в теории твердого тела. Мы не можем, однако, их здесь рассматривать.

Можно указать много примеров проявления эффектов неидеальности при экспериментальном исследовании процессов в газах и плазме. Один из них — это наблюдаемое экспериментально уменьшение электропроводности неидеальной плазмы по сравнению с проводимостью идеальной плазмы (гл. 5, 8). Эффекты неидеальности проявляются в плазме и при наличии высокочастотного поля. Они определяют дополнительные вклады в поляризацию среды. Сдвиг атомных уровней под действием электромагнитного излучения — также следствие неидеальности системы (атомы и электромагнитное излучение). Его величина определяется корреляцией флуктуаций матрицы плотности атомов и флуктуаций поля⁶⁹. В достаточно плотных газах корреляция, обусловленная взаимодействием частиц газа, влияет и на ширину спектральных линий, поэтому анализ спектра излучения плотных газов при протекании в них быстрых процессов возможен лишь при учете в кинетических уравнениях эффектов неидеальности.

В заключение хочется еще раз отметить, что кинетическая теория неидеальных систем начала развиваться сравнительно недавно, поэтому многие ее задачи решены еще не полно, а многие даже не поставлены.

Добавление при корректуре. Для расчета термодинамических функций неидеальной плазмы полезно использовать так называемые псевдопотенциалы (обзор работ по этому вопросу см. в ⁷⁰). В работе ⁷⁰ предложено выражение для псевдопотенциала, которое имеет конечное (из-за квантовых эффектов) значение при $r=0$. В промежуточной области, когда $a_0 \ll r \ll r_D$ (a_0 — боровский радиус), псевдопотенциал близок к кулоновскому потенциалу, а на больших расстояниях совпадает с потенциалом Дебая.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Больцман, Лекции по теории газов, М., Гостехиздат, 1956.
2. С. Чепмен, Т. Каулинг, Математическая теория неоднородных газов, М., ИЛ, 1960.
3. Дж. Гиршфельдер, Ч. Кертисс, Р. Берд, Молекулярная теория газов и жидкостей, М., ИЛ, 1961.
4. Н. Н. Боголюбов, Проблемы динамической теории в статистической физике, М., Гостехиздат, 1946.
5. Дж. Уленбек, Дж. Форд, Лекции по статистической механике, «Мир», 1965.
6. К. П. Гуров, Основания кинетической теории, М., «Наука», 1966.
7. М. Н. Коган, Динамика разреженного газа, М., «Наука», 1967.
8. В. П. Силин, Введение в кинетическую теорию газов, М., «Наука», 1971.
9. Ю. Л. Климонтович, ЖЭТФ 60, 1352 (1971).
10. H. Green, Proc. Phys. Soc. A66, 325 (1953).
11. Л. Каданов, Г. Бейм, Квантовая статистическая механика, М., «Мир», 1964.
12. K. Baerwinkel, S. Grossmann, Zs. Phys. 198, 277 (1967).
13. K. Baerwinkel, Zs. Naturforsch. 24a, 22, 38 (1969).
14. Ю. Л. Климонтович, В. Эбелинг, ЖЭТФ 63, 905 (1972).
15. M. Born, H. Green, Proc. Roy. Soc. A188, 10 (1946).
16. H. H. Hollinger, C. Curtiss, J. Chem. Phys. 33, 1386 (1960).
17. J. Weinstock, Phys. Rev. 132, 454 (1963); A140, 460 (1963).
18. R. Goldman, E. Frieman, J. Math. Phys. 8, 1410 (1967).
19. J. Dorfman, E. Cohen, *ibid.*, p. 1410.
20. E. Cohen, а) сборник «Lectures in Theoretical Physics», v. 9C. Ed. V. Brittin, N.Y., Gordon and Breach, 1967; б) сборник «Statistical Mechanics at the Turn of the Decade». Ed. E. Cohen, N. Y., 1971.
21. Ю. Л. Климонтович, ЖЭТФ 63, 150 (1972).
22. Ю. Л. Климонтович, сборник «Проблемы теории плазмы», Киев, «Наукова думка», 1972.
23. G. Sandri, Ann. Phys. (N.Y.) 24, 332 (1963).
24. Ю. Л. Климонтович, ТМФ 9, 109 (1971).
25. И. Пригожин, Неравновесная статистическая механика, М., «Мир», 1964.
26. J. Prigogine, G. George, J. Roe, Physica 56, 25 (1971).
27. F. Henin, Physica 54, 385 (1971).
28. R. Balescu, L. Brenig, J. Wallenborn, Physica 52, 29 (1971).
29. R. Balescu, Physica 52, 29 (1971).
30. Д. Н. Зубарев, Неравновесная статистическая термодинамика, М., «Наука», 1971.
31. Д. Н. Зубарев, В. П. Калашников, ТМФ 7, 372 (1971).
32. С. В. Пелетминский, В. Д. Цуканов, ТМФ 7, 395 (1971).
33. Д. Н. Зубарев, М. Ю. Новиков, Phys. Lett. A36, 343 (1971); ТМФ 13, 406 (1972).
34. Б. Б. Кадомцев, ЖЭТФ 32, 943 (1957).
35. Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, Л. П. Питаевский, Труды ИЗМИРАН, вып. 17 (27), 239 (1960).
36. Ш. М. Коган, А. Я. Шульман, ЖЭТФ 56, 862 (1969).
37. Ю. Л. Климонтович, Статистическая теория неравновесных процессов в плазме, М., Изд-во МГУ, 1964.
38. Р. Балеску, Статистическая механика заряженных частиц, М., «Мир», 1967.

39. Ю. Л. Климонтович, ЖЭТФ 62, 1770, 1972.
 40. H. Green, The Molecular Theory of Fluids, Oxford, 1953.
 41. H. De Witt, сборник ^{20a}.
 42. J. Hubbard, Proc. Roy. Soc. A261, 371 (1961).
 43. О. Аono, Phys. Fluids 11, 341 (1968).
 44. В. Н. Алямовский, ЖЭТФ 60, 1672 (1971).
 45. J. Sengers, сборник ^{20a}.
 46. Н. В. Ермохин, Б. М. Ковалев, П. П. Кулик, Б. А. Рябий, ТВТ 9, 665 (1971); С. Г. Барольский, Н. В. Ермохин, П. П. Кулик, В. М. Мельников, ЖЭТФ 62, 171 (1972); Б. М. Ковалев, П. П. Кулик, В. А. Рябий, ИФЖ 22, 92 (1972); Yu. Krasnikov, P. Kulik, G. Norman, Non-ideal Plasma. In «Tenth International Conference on Phenomena in Ionized Gases», Oxford England, September 13—18, 1971.
 47. В. М. Батенин, П. В. Минаев, ТВТ 9, 676, 1971.
 48. В. Р. Рогов, Канд. диссертация (М., ИИМ, 1971).
 49. D. Hoffman, J. Mueller, C. Curtiss, J. Chem. Phys. 43. 2878 (1965).
 50. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Статистическая физика, «Наука», 1964.
 51. G. Kelbg, Ann. d. Phys. (Lpz.) 12, 249, 354 (1964).
 52. Б. А. Трубищев, В. Елесин, ЖЭТФ 47, 1279 (1964).
 53. Б. Б. Кадомцев, ЖЭТФ 33, 151 (1957).
 54. С. М. Рытов, Теория электрических флуктуаций и теплового излучения, М., Изд. АН СССР, 1953; М. Л. Левин, С. М. Рытов, Теория равновесных тепловых флуктуаций в электродинамике, М., «Наука», 1967.
 55. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, М., Гостехиздат, 1957.
 56. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, ЖЭТФ 32, 618 (1957).
 57. С. В. Ганцевич, В. Л. Гуревич, Р. Катилус, ЖЭТФ 57, 503 (1969); 59, 533 (1970).
 58. П. М. Томчук, В. А. Шендеровский, Препринт Ин-та физики АН УССР № 12, Киев, 1971.
 59. В. Н. Жигулев, ТМФ 7, 106, 271 (1971).
 60. Б. И. Садовников, ДАН СССР 164, 785, 1024 (1965).
 61. Ш. М. Коган, ТМФ 10, 143 (1972).
 62. Сб. статей «Физика простых жидкостей», М., «Мир», 1971.
 63. Н. П. Коваленко, И. З. Фишер, УФН 108, 2 (1972).
 64. Ю. Л. Климонтович, Письма ЖЭТФ 15, 495 (1972).
 65. Ю. Л. Климонтович, ЖЭТФ I— 52, 1233 (1967); II— 54, 136 (1968).
 66. С. В. Пелетминский, ТМФ 6, 123 (1971).
 67. Е. С. Якуб, ТВТ 10, 507 (1972).
 68. В. Н. Цытович, УФН 108, 143 (1972).
 69. Ю. Л. Климонтович, УФН 101, 577 (1970).
 70. Ю. А. Климонтович, В. Крэфт, ТВТ 11, 6 (1973).
-