

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

533.951

ЦИКЛОТРОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЛАЗМЫ В НЕОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

А. В. Тимофеев

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	329
I. Равновесная плазма	331
1. Динамика резонансного циклотронного взаимодействия (331). а) Одно- родное магнитное поле (331). б) Циклотронное поглощение в неоднородном магнитном поле (331). в) Модулированные пучки (332).	
2. Поле модулированного пучка (333). а) Адиабатическое волновое урав- нение (333). б) Решение Брамбиллы (334). 3. Влияние теплового раз- броса. Правило обхода Ландау (335). 4. Количественные характери- стики резонансного взаимодействия (337).	
II. Неравновесная плазма	340
1. Резонансное циклотронное взаимодействие в неравновесной плазме (340). а) Однородное магнитное поле (340). б) Магнитное поле, моно- тонно меняющееся в пространстве (342). в) Немонотонное магнитное поле (344). г) Колебания, нарастающие во времени (345). 2. Устойчи- вость циклотронных колебаний в магнитных ловушках (345). а) Грани- цы, отражающие колебания (345). б) Границы, поглощающие колеба- ния (347). в) Эволюция возмущений во времени (348). г) Циклотронные колебания плазмы с горячими электронами (350). д) Анизотропная неустойчивость (351). е) Дрейфово-циклотронная неустойчивость (352).	
Приложение	353
Цитированная литература	354

ВВЕДЕНИЕ

Если электромагнитные колебания распространяются в плазме, находящейся в неоднородном магнитном поле, то в какой-то точке (резонансной) их частота ω может стать равной частоте циклотронного вращения заряженных частиц ω_j ($j = e, i$). При этом возникает ряд характерных явлений, исследование которых является целью настоящего обзора. Оно проводится на примере двух задач, стимулировавших развитие теории циклотронных колебаний. Мы имеем в виду задачу о циклотронном нагреве плазмы с равновесным распределением заряженных частиц по скоростям и задачу об устойчивости неравновесной плазмы в магнитных ловушках.

Циклотронный резонанс создает условия для обмена энергией между колебаниями и вращательной степенью свободы заряженных частиц в магнитном поле. Поэтому, естественно, возникла идея использовать циклотронные колебания для нагрева плазмы^{1, 2}. Динамика процессов, приводящих к нагреву при циклотронном резонансе в неоднородном магнитном поле, исследовалась в ряде работ³⁻⁸. К настоящему моменту

общую картину явления можно считать выясненной. Для того чтобы наглядно ее представить, полезно использовать пучковую модель плазмы, т. е. считать, что плазма состоит из набора пучков заряженных частиц, движущихся вдоль магнитного поля. Каждый пучок, проходя через резонансную область, модулируется колебаниями, — в нем возбуждаются заряды и токи. Если частота колебаний ω и пучок движется со скоростью v , то пространственный период модуляции будет равен $2\pi v/(\omega - \omega_j)$. Отдельные пучки вызывают в плазме колебания, аналогичные известным волнам Ван-Кампена. При непрерывном распределении пучков по скоростям эти колебания с удалением от резонансной точки сдвигаются по фазе и в конце концов затухают под действием интерференции. Поскольку в конечном состоянии видимый порядок в движении частиц отсутствует, в определенном смысле можно утверждать, что энергия колебаний переходит в тепловую. Образование модулированных пучков с их последующей интерференцией, по-видимому, характерно для любых процессов, приводящих к обмену энергией между волной и частицами, если действие этих процессов ограничено малой областью пространства. В приложении с этой точки зрения рассмотрены резонансное черенковское взаимодействие в неоднородной плазме⁹, а также взаимодействие, возникающее при резком изменении скорости заряженных частиц¹⁰. Последнее, в частности, приводит к поглощению колебаний, падающих на резкую границу плазмы (см. задачу об аномальном скин-эффекте¹¹). Следует отметить, что при интерференции модулированных пучков информация о фазовых соотношениях сохраняется в скрытом виде, что может привести к явлениям типа эха (см. ^{9,12}, а также ⁸).

Если распределение заряженных частиц по скоростям термодинамически неравновесно, то при циклотронном резонансе энергия может переходить от плазмы к колебаниям. Неравновесные распределения устанавливаются во многих системах, предназначенных для удержания горячей плазмы. Так, например, в магнитных ловушках удерживаются лишь те частицы, которые движутся под достаточно большим углом к магнитному полю. Частицы, попавшие в так называемый конус ухода, покидают ловушку. В результате распределение частиц по скоростям, поперечным к магнитному полю, обедняется в области малых скоростей.

Возможны два подхода к изучению устойчивости плазмы: нахождение собственных колебаний и исследование эволюции первоначальных возмущений во времени. В первом случае определяется асимптотика возмущения при $t \rightarrow \infty$, во втором — исследуется начальный этап эволюции до установления собственных колебаний. Собственные колебания, как правило, имеют вид стоячих волн, поэтому для их установления необходимо, чтобы в системе существовали точки отражения. В неоднородном магнитном поле колебания при прохождении через резонансную точку не только изменяют свою амплитуду (усиливаются в неравновесной плазме, поглощаются в равновесной), но и частично отражаются (в неравновесной плазме отражение сопровождается усилением, в результате коэффициент отражения может оказаться больше единицы). Поэтому в немонотонном магнитном поле возможны собственные колебания, «запертые» между резонансными точками^{13, 14}. Эта возможность особенно существенна, если колебания поглощаются на границах плазмы. Однако если колебания отражаются от границ, то дополнительное отражение от резонансных точек можно не учитывать.

Эволюция неустойчивых циклотронных колебаний в неоднородном магнитном поле исследовалась в работе¹⁵. Было показано, что возмущения нарастают конечное время, после чего их амплитуда не меняется, причем оказалось, что отношение конечной амплитуды к начальной равно коэффи-

циенту усиления колебаний при прохождении через циклотронный резонанс. Возмущения можно считать практически устойчивыми, если коэффициент усиления близок к единице. Интересно отметить, что при диссипативных граничных условиях плазма в этом случае устойчива по отношению к собственным колебаниям. Таким образом, оба подхода к исследованию устойчивости плазмы взаимно дополняют и согласуются друг с другом.

1. РАВНОВЕСНАЯ ПЛАЗМА

1. Динамика резонансного циклотронного взаимодействия. а) *Однородное магнитное поле.* Рассмотрим движение электрона, находящегося в постоянном однородном магнитном поле и подвергающегося воздействию переменного электрического поля. Предположим, что вектор электрического поля перпендикулярен к магнитному, вращается с той же частотой и в ту же самую сторону, что и электроны в магнитном поле. Из уравнения движения находим

$$dv/dt = -(e/m_e) E; \quad (1.1)$$

здесь v — модуль скорости в направлении поперек магнитного поля $\mathbf{v}_\perp = \text{Re}(v; iv) e^{-i\omega_e t}$, величина E определяется соотношением $\mathbf{E} = \text{Re}(E; iE; 0) e^{-i\omega_e t}$, $\omega_e = eH/m_e c$ — электронная циклотронная частота, $\omega = \omega_e$; используется декартова система координат, ось Oz которой направлена вдоль магнитного поля.

С помощью (1.1) получаем

$$dw_e/dt = -eEv_{x0} + (e^2 E^2/m_e) t; \quad (1.2)$$

здесь w_e — кинетическая энергия электрона, v_{x0} — начальное значение проекции скорости на Ox . Для совокупности электронов, равномерно распределенных по фазам ларморовского вращения, первое слагаемое в правой части (1.2) исчезает после усреднения. Интересно отметить, что если электрическое поле не поддерживается внешними источниками, то оно будет затухать с декрементом, по порядку величины равным электронной плазменной частоте $\omega_{pe} = (4\pi e^2 n_0/m_e)^{1/2}$. Действительно, из (1.2) следует, что за время $t \approx \omega_{pe}^{-1}$ электроны приобретут энергию, сравнимую с энергией поля $E^2/8\pi$. При этих оценках предполагается, что электроны распределены равномерно по пространству с плотностью n_0 .

б) *Циклотронное поглощение в неоднородном магнитном поле.* Пусть теперь магнитное поле меняется в продольном направлении $H = H(z)$ и электроны движутся вдоль него. В дальнейшем нам понадобится знать не только амплитуду, но и фазу ларморовского вращения. Поэтому введем $v_- = v_x - iv_y$. Для этой величины уравнение движения принимает следующий вид:

$$dv_-/dt + i\omega_e(z(t)) v_- = -(eE/m_e) e^{-i\omega_e t}. \quad (1.3)$$

Из (1.3) находим

$$v_-(t) = \left[v_-(0) - \frac{eE}{m_e} \int_0^t \exp(-i\omega_e t') + \right. \\ \left. + i \int_0^{t'} \omega_e(t'') dt'' \right] \exp\left(-i \int_0^t \omega_e(t') dt'\right). \quad (1.4)$$

Предположим, что циклотронная частота в какой-то точке (резонансной) совпадает с частотой волны. Рассмотрим большие интервалы времени $t \gg \delta\omega_e^{-1}$, где $\delta\omega_e$ — изменение электронной циклотронной частоты на

траектории электрона. В этом случае при вычислении интеграла по dt' в (1.4) можно использовать асимптотические методы. Если электрон еще не дошел до резонансной точки $t < t_s$ ($z(t_s) = z_s$), то асимптотика $v_-(t)$ имеет вид

$$v_-(t) \approx v_-(0) \exp \left(-i \int_0^t \omega_e(t') dt' \right) - \frac{ieE}{m_e} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega - \omega_e(z(t))}; \quad (1.5)$$

здесь учтен только вклад верхнего предела интегрирования ($t' = t$), так как считается, что электрон успел «забыть» о моменте включения поля.

При $t > t_s$ следует дополнительно учесть вклад резонансной точки. В ее окрестности электрон находится в фазе с волной, и поэтому подынтегральное выражение в (1.4) при $t' = t_s$ имеет точку стационарной фазы ^{4, 6, 8}:

$$v_-(t) \approx \left\{ v_-(0) - \frac{eE}{m_e} \left[\frac{2\pi i}{v_{||} (d\omega_e/dz)_{z_s}} \right]^{1/2} \exp \left[-i\omega t_s + i \int_0^{t_s} \omega_e(z(t')) dt' \right] \right\} \times \\ \times \exp \left[-i \int_0^t \omega_e(z(t')) dt' \right] - \frac{ieE}{m_e} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega - \omega_e(z(t))}. \quad (1.6)$$

Из сопоставления (1.5) и (1.6) следует, что после прохождения резонансной точки амплитуда и фаза циклотронного вращения изменяются. При этом энергия электрона возрастает на величину

$$\delta u_e = (\pi e^2 E^2 / m_e) [v_{||} (d\omega_e/dz)_{z_s}]^{-1}.$$

(Здесь произведено усреднение по начальной фазе ларморовского вращения.) Этот прирост можно получить из следующих соображений.

Электрон, движущийся в неоднородном магнитном поле, пребывает в состоянии резонанса конечное время, которое можно найти из условия $|\delta\Phi| < \pi/2$, где

$$\delta\Phi = -\omega(t - t_s) + \int_{t_s}^t dt' \omega_e(z(t'))$$

— разность между фазой ларморовского вращения электрона и фазой волны. Подставляя в это выражение $\omega_e(z) = \omega + (z - z_s)(d\omega_e/dz)_{z_s}$, $z - z_s = v_{||}(t - t_s)$, определяем продолжительность резонансного взаимодействия $\delta t \approx [2\pi v_{||} (d\omega_e/dz)_{z_s}]^{-1/2}$. При $|t - t_s| < \delta t$ магнитное поле можно считать однородным, поэтому в соответствии с (1.2) оказывается $\delta u_e = (e^2 E^2 / 2m_e) (\delta t)^2$.

в) *Модулированные пучки.* Мы показали, что электроны, движущиеся вдоль неоднородного магнитного поля, получают от волны конечное количество энергии. Рассмотрим другое важное следствие, связанное с движением электронов в неоднородном магнитном поле. Предположим, что имеется стационарный и однородный в пространстве поток электронов, движущийся в постоянной скоростью $v_{||}$. В соответствии с (1.5), (1.6) в резонансной точке скорость ларморовского вращения электронов модулируется электрическим полем. При этом изменение скорости зависит как от начального положения электрона на ларморовский окружности, характеризуемого $v_-(0)$, так и от момента прохождения резонансной точки t_s . Предположим, что магнитное поле спадает вдоль оси Oz . В таком поле электроны, прошедшие через резонансную точку, отстают по фазе от электрического поля. Нетрудно понять, что электроны, модуль скорости

которых изменился на одну и ту же величину, образуют в пространстве спиральную линию (рис. 1 *)). Она движется вдоль оси z со скоростью $v_{||}$ и вращается вокруг этой оси с локальной ларморовской частотой. Таким образом, за резонансной точкой появляются электрические токи круговой поляризации. В силу стационарности процесса возбуждаемые ими поля должны иметь частоту первичного поля ω . Зависимость фазы вторичной волны от координаты z и скорости $v_{||}$ находим из (1.6):

$$\Phi(z, v_{||}) = -[(z - z_s)^2 / 2v_{||}] d\omega_e / dz|_z. \quad (1.7)$$

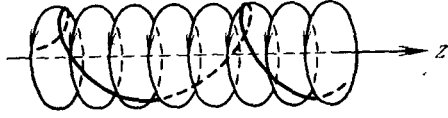


Рис. 1. Модуляция потока электронов в резонансной точке.

Легко усмотреть сходство между вторичной волной и волнами Ван-Кампена¹⁶. Последние, как известно, представляют колебания, вызываемые пучками заряженных частиц, плотность которых модулирована в направлении движения. Брамбилле⁷ удалось найти асимптотическое решение самосогласованного волнового уравнения циклотронных колебаний, которое можно считать аналогом волны Ван-Кампена.

Жирная линия показывает положение группы электронов, модуль скорости которых изменился на одну и ту же величину $\delta v_{||}$. Группы с другим значением $\delta v_{||}$ образуют аналогичные спирали, сдвинутые по оси z и заполняющие всю поверхность цилиндра, составленного из ларморовских окружностей (тонкие линии).

2. Поле модулированного пучка. а) *Адиабатическое волновое уравнение.* В предыдущих разделах мы считали электрическое поле колебаний постоянным в пространстве. Действительный интерес представляет задача о резонансном взаимодействии электромагнитных волн. При этом решение должно быть самосогласованным, т. е. следует учитывать, что токи, вызываемые волной, изменяют поле волны.

Будем считать, что магнитное поле меняется с расстоянием по линейному закону $dH/dz = \text{const} < 0$ и что все электроны движутся с одной и той же постоянной скоростью $v_{||} > 0$. При этих условиях волновое уравнение принимает следующий вид:

$$\frac{d^2 E}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} E + i \frac{\omega \omega_{pe}^2}{v_{||} c^2} \int_{-\infty}^z dz' E(z') \exp \left[-\frac{i}{2v_{||}} \frac{d\omega_e}{dz} (z^2 - z'^2) \right] = 0; \quad (1.8)$$

здесь начало координат выбрано в резонансной точке $\omega_e(0) = \omega$.

Не представляет труда установить соответствие между (1.8) и (1.4). Действительно, (1.4) определяет возмущение скорости электрона под действием электрического поля δv . С возмущением скорости будет связан ток $\delta j = -en_0 \delta v$. Его влияние на колебания и учитывается последним слагаемым в (1.8). В нем, в отличие от (1.4), интегрирование по времени заменено интегрированием по координате на траектории электрона $dz'/dt' = v_{||}$, начальный момент отнесен в $-\infty$, электрическое поле считается функцией координаты и поэтому оставлено под знаком интегрирования. Если в (1.8) вычислить асимптотику интеграла по dz' , считая $E(z')$ медленно меняющейся функцией и учитывая лишь вклад верхнего предела интегрирования, то получим

$$d^2 E / dz^2 + (\omega^2 / c^2) \{1 + [\omega_{pe}^2 / \omega (\omega_e(z) - \omega)]\} E = 0; \quad (1.9)$$

здесь произведена замена $z d\omega_e / dz = \omega_e(z) - \omega$.

*) На рис. 1 для наглядности считается, что центры ларморовских окружностей электронов лежат на одной силовой линии. Если система однородна в направлении поперек магнитного поля, то при усреднении по всем электронам, приходящим в данную точку пространства, зависимость от азимута пропадает.

Уравнение (1.9), часто используемое при анализе циклотронных колебаний в неоднородном магнитном поле, можно получить, описывая движение электронов в колебаниях в гидродинамическом приближении (см., например, ¹⁷⁻¹⁹). От волнового уравнения для случая однородного магнитного поля оно отличается лишь тем, что в нем величина поля считается медленно меняющимся параметром. Поэтому (1.9) может быть названо адиабатическим волновым уравнением⁸. Адиабатическое волновое уравнение является асимптотическим и не учитывает влияния резонансного взаимодействия (вклад точки стационарной фазы в интеграл по dz' при $z > 0$). Поэтому неудивительно, что в резонансной точке $z = 0$ оно теряет смысл (имеет особенность). Для продолжения решения через особую точку обычно вводится правило обхода Ландау. А именно, рассматривается аналитическое продолжение (1.9) на плоскость комплексного переменного z и считается, что колебания с $\text{Im } \omega = 0$ являются пределом нарастающих с $\text{Im } \omega > 0$. Если $\text{Im } \omega > 0$, то резонансная (особая) точка z_s смещается с действительной оси вниз при $d\omega_e/dz|_{z_s} < 0$ и вверх при $(d\omega_e/dz)_{z_s} > 0$ ($\delta z = i \text{Im } \omega [(d\omega_e/dz)_{z_s}]^{-1}$). Соответственно, при $(d\omega_e/dz)_{z_s} < 0$ особая точка должна обходиться сверху и при $d\omega_e/dz|_{z_s} > 0$ снизу. В некоторых работах (см., например, ¹⁷⁻¹⁹) указывалось, что для обоснования правила обхода Ландау достаточно учесть электрон-ионные соударения. Действительно, при наличии соударений с частотой ν резонансный знаменатель в (1.9) принимает вид $1/(\omega_e(z) - \omega - i\nu)$, что эквивалентно переходу к нарастающим колебаниям. За счет столкновений энергия колебаний в окрестности резонансной точки переходит в джоулево тепло. Этот процесс доминирует при $\nu \gg \gg (v_{||} |d\omega_e/dz|)^{1/2}$ (см. ниже). Однако в экспериментальных условиях часто выполняется обратное неравенство. В этом случае обмен энергией между волной и электронами протекает без участия столкновений (см. предыдущие разделы) и, следовательно, обоснование правила обхода Ландау должно быть получено иным способом.

б) *Решение Брамбиллы*. Теперь обратимся к волновому уравнению (1.8) которое, разумеется, является регулярным при всех значениях z . Помножим (1.8) на $\exp[(i/2v_{||})(d\omega_e/dz)z^2]$, продифференцируем результат по dz , после чего помножим на $\exp[(-i/2v_{||})(d\omega_e/dz)z^2]$. Получим

$$E''_z - 2ip^2\zeta E''_{\zeta^2} + E''_{\zeta} + i(A - 2p^2\zeta)E = 0; \quad (1.10)$$

здесь введены обозначения $A = (\omega_{pe}^2/\omega^2) c/v_{||}$, $p^2 = -(1/2v_{||})(d\omega_e/dz) c^2/\omega^2$, $\zeta = \omega z/c$. Последнее уравнение отличается от (1.9) дополнительными слагаемыми (третьей и первой производными). Добавление третьей производной устраняет особенность в начале координат (в резонансной точке). При $|\zeta| \rightarrow \infty$ (1.10) имеет решения двух типов: крупно- и мелкомасштабные. Приближенно можно считать, что крупномасштабные решения удовлетворяют адиабатическому уравнению (1.9), в котором отсутствует третья производная. Для мелкомасштабных решений в (1.10) можно опустить два последних слагаемых. При этом находим $E \approx C(\zeta) e^{ip^2\zeta^2}$; здесь $C(\zeta)$ — медленно меняющаяся функция. Фаза этого решения совпадает с (1.7) и само оно описывает поле модулированного пучка, уходящего от резонансной точки. В соответствии с изложенным в разделе 1, в), такие пучки должны, например, возбуждаться при падении на нее колебаний с большей длиной волны. Изменение пространственного масштаба колебаний принято называть *трансформацией*. Хорошо известно (см., например, обзор ²⁰), что уравнения с малым параметром перед старшей производной действительно описывают этот эффект. Если скорость электрона и градиент магнитного поля не слишком велики, то в настоящем случае малым параметром является величина $1/p^2$.

Для решения (1.10) в работе ⁷ использовался метод преобразования Лапласа. Получены следующие результаты. Решение, представляющее при $z < 0$ волну, набегающую на резонансную точку,

$$E(\xi) \approx |\xi|^{-i\beta/2\pi} e^{i\xi}, \quad (1.11)$$

при $z > 0$ имеет вид

$$E(\xi) \approx |\xi|^{-i\beta/2\pi} e^{i\xi - (\beta/2)} \frac{i^{(\beta/2\pi) + (3/2)\pi^{1/2}} \cdot 2^{\beta/2\pi}}{p^3 \xi^2 \Gamma(i\beta/2\pi)} e^{ip^2 \xi^2}, \quad (1.12)$$

где $\beta = \pi \omega_{pe}^2 L / \omega c$.

Из (1.12) следует, что крупномасштабные колебания действительно трансформируются в мелкомасштабные. При этом амплитуда крупномасштабных колебаний уменьшается на множитель

$$T = e^{-\beta/2}, \quad (1.13)$$

и, следовательно, коэффициент трансформации (доля передаваемой энергии) равен

$$\eta = 1 - e^{-\beta}. \quad (1.14)$$

Этот результат можно было бы получить, используя упрощенное адиабатическое волновое уравнение (1.9), дополненное правилом обхода Ландау. Действительно, при $\xi < 0$ возьмем решение в виде $E(\xi) = \xi^{-i\beta/2\pi} e^{i\xi}$. Продолжим его на область $\xi > 0$, обходя точку $\xi = 0$ в верхней полуплоскости. При этом $\arg \xi$ получает приращение $-\pi$, и соответственно амплитуда $E(\xi)$ уменьшается на множитель $e^{-\beta/2}$.

В настоящем рассмотрении не принимались во внимание релятивистские эффекты. В работе ⁷ показано, что их учет приводит к замене $\beta \rightarrow \beta [1 - (v_{||}/c)]$.

3. Влияние теплового разброса. Правило обхода Ландау. Теперь предположим, что распределение электронов по продольным скоростям обладает некоторым тепловым разбросом $\delta v_{||}$. В этом случае можно считать, что на резонансную точку набегают совокупность пучков электронов с непрерывно распределенными скоростями. В резонансной точке каждый из этих пучков модулируется колебаниями. В соответствии с (1.7) при удалении от резонанса фазы отдельных пучков сдвигаются. При $z - z_s \gg v_{||} (\delta v_{||} d\omega_e/dz)^{-1/2}$ интерференция полей, связанных с отдельными пучками, приведет к их взаимному уничтожению *). Тот же самый результат получился бы при хаотическом распределении фаз отдельных пучков, поэтому в определенном смысле можно утверждать, что упорядоченная энергия колебаний переходит в тепловую. Однако фазовая информация сохраняется в скрытом виде и в принципе может проявиться в эффектах типа «эха», (см. ^{9,12}).

Чтобы описать явление интерференции количественно, получим выражение для тока, вызываемого волной, за резонансной точкой. Используя (1.6), находим

$$\begin{aligned} \delta j(z) &= -en_0 \int dv_{||} f_{0e}(v_{||}) \delta v \approx \\ &\approx \frac{e^2 n_0}{m_e} \left[\frac{2\pi i}{(d\omega_e/dz)_{z_s}} \right]^{1/2} E(z_s) \int \frac{dv_{||}}{v_{||}^{1/2}} f_{0e}(v_{||}) e^{i\Phi(z, v_{||})} + \\ &\quad + i \frac{\omega_{pe}^2}{4\pi} \frac{1}{\omega - \omega_e(z)} E(z). \end{aligned} \quad (1.15)$$

*) Указание на этот процесс содержится в работе ⁶.

В случае максвелловского распределения электронов по скоростям $f_0 e(v_{||}) = (1/\pi^{1/2} \delta v_{||}) e^{-(v_{||}/\delta v_{||})^2}$ интеграл по скоростям в (1.15) легко вычисляется методом перевала:

$$\int \frac{dv_{||}}{v_{||}^{1/2}} f_0 e(v_{||}) e^{i\Phi(z, v_{||})} \approx \left(6 \left| \frac{d\omega_e}{dz} \right| \right)^{-1/6} (3\delta v_{||} (z - z_s))^{-1/3} \times \\ \times \exp \left[\frac{i\pi}{12} - \frac{3}{2^{3/4}} e^{-i\pi/3} \frac{(z - z_s)^{4/3} |d\omega_e/dz|^{2/3}}{(\delta v_{||})^{2/3}} \right]. \quad (1.16)$$

Из (1.16) следует, что характерная длина затухания полей модулированных пучков по порядку величины равна $(\delta v_{||}/|d\omega_e/dz|)^{1/2}$.

Полученные нами выражения справедливы на действительной оси. Для аналитического продолжения на плоскость комплексного переменного z следует воспользоваться волновым

уравнением, которое полностью учитывает резонансные эффекты⁸. Оно может быть получено из (1.8), если в последнем произвести усреднение по $v_{||}$. Анализ полного волнового уравнения показывает, что эффекты, связанные с резонансным взаимодействием (модулированные пучки), необходимо учитывать не только в окрестности резонансной точки ($|z - z_s| \lesssim (\delta v_{||}/|d\omega_e/dz|)^{1/2}$), но и при $|z - z_s| \rightarrow \infty$ в секторах $-3\pi/4 < \arg(z - z_s) < -5\pi/8$, $-3\pi/8 < \arg(z - z_s) < -\pi/4$. На рис. 2 эти секторы заштрихованы. В незаштрихованной области $\delta j \approx (i\omega_{pe}^2/4\pi) E(z)/(\omega - \omega_e(z))$, и соответственно полное волновое уравнение сводится к адиабатическому (1.9)*. Таким образом, если обходить резонансную точку сверху на достаточно большом расстоянии $|z - z_s| \gg (\delta v_{||}/|d\omega_e/dz|)^{1/2}$, то можно ограничиться использованием упрощенного адиабатического волнового уравнения (1.9).

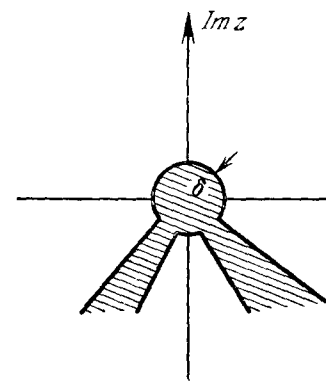


Рис. 2. Плоскость комплексной переменной в окрестности резонансной точки.

Заштрихована область, в которой нельзя использовать упрощенное адиабатическое волновое уравнение (1.9). Распределение электронов по продольным скоростям принимается максвелловским: $f_0(v_{||}) =$

$$= (1/\pi^{1/2} \delta v_{||}) e^{-(v_{||}/\delta v_{||})^2}, \\ \delta = (\delta v_{||}/|d\omega_e/dz|)^{1/2}.$$

Поскольку в настоящем рассмотрении мы считаем $(d\omega_e/dz)|_{z_s} < 0$, это правило обхода совпадает с правилом обхода Ландау. При уменьшении теплового разброса, когда мы от максвелловского распределения по скоростям переходим к распределениям вида

$$f_0(v_{||}) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \delta v_{||}} \exp \left[- \left(\frac{v_{||} - v_{||0}}{\delta v_{||}} \right)^2 \right],$$

радиус обхода возрастает, $|z - z_s| \gg v_{||0} (\delta v_{||}/|d\omega_e/dz|)^{1/2}$. В пределе $\delta v_{||} \rightarrow 0$ интерференция отсутствует и радиус обхода становится бесконечным. Именно этот случай был рассмотрен в предыдущем разделе.

При выполнении условия

$$\max \left(\frac{\omega^2}{c^2} \frac{v_{||}}{|d\omega_e/dz|}, \frac{\omega_{pe}^2 \omega v_{||}^{1/2}}{c^2 |d\omega_e/dz|^{3/2}} \right) \gg 1$$

*) Если электро-ионные соударения достаточно часты, $\nu \gg (\delta v_{||}/|d\omega_e/dz|)^{1/2}$, то заштрихованная область на рис. 2 опускается ниже действительной оси. В этом случае на всей оси можно использовать адиабатическое волновое уравнение (1.9).

резонансная область расширяется за счет эффекта Доплера. Если изменение циклотронной частоты $\Delta\omega_e$ в пределах системы достаточно мало,

$$\frac{\Delta\omega_e}{\omega_e} \ll \max \left[\frac{v_{||}}{c}, \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega} \frac{v_{||}}{c} \right)^{2/3} \right],$$

то резонансная область перекрывает всю систему. В этом случае неоднородность магнитного поля можно вообще не учитывать.

Интересно сопоставить рассматриваемые колебания с электронными лэнгмюровскими колебаниями горячей плазмы. В задаче об электронных лэнгмюровских колебаниях вклад резонансных частиц в выражение для возмущенной функции распределения частиц по скоростям приводит к сингулярности $f_1(v) \sim [v - (\omega/k)]^{-1}$. Для ее устранения оказалось необходимым учесть нелинейный эффект изменения скорости резонансных частиц под действием поля волны, который приводит к ограничению времени резонансного взаимодействия (см., например, обзор ²¹). Однако в настоящем случае учет нелинейных эффектов не привел бы к желаемому результату, так как в нерелятивистском пределе частота циклотронного вращения не зависит от энергии. В то же время в неоднородном магнитном поле резонансное условие для отдельного электрона может нарушиться, если он, двигаясь вдоль поля, покинет резонансную зону. Этот эффект и был учтен нами.

В обеих задачах при определенных условиях возможно использование сингулярных выражений, дополненных правилом обхода Ландау. При рассмотрении электронных лэнгмюровских колебаний такой подход применим, если в начальный момент отсутствовали модулированные пучки (волны Ван-Кампена), и только до тех пор, пока волна не передаст значительную часть своей энергии таким пучкам. В задаче о циклотронных колебаниях адиабатическое волновое уравнение (1.9) применимо в области, свободной от полей, связанных с модулированными пучками.

4. Количественные характеристики резонансного взаимодействия. Будем считать, что распределение электронов по скоростям вдоль магнитного поля имеет тепловой разброс. В этом случае на достаточном удалении от резонансной точки можно использовать адиабатическое волновое уравнение, дополненное правилом обхода Ландау. Оно имеет вид уравнения Шрёдингера с «потенциалом» $U(z) = \omega_{pe}^2 \omega / c^2 (\omega - \omega_e(z))$ и «энергией» $W = \omega^2 / c^2$ (рис. 3). Из рисунка следует, что области распространения колебаний (области прозрачности) разделены потенциальным барьером ($z_s < z < z_0$). Здесь z_0 — обычная точка поворота, в которой обращается в нуль «кинетическая энергия» ($W = U(z_0)$), z_s — сингулярная точка поворота, в которой «потенциальная энергия» бесконечна.

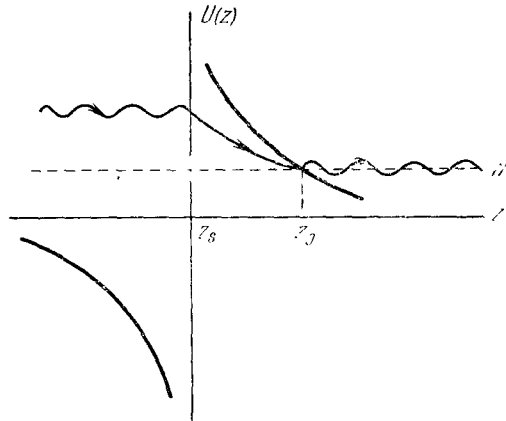


Рис. 3. Поглощение колебаний, падающих со стороны большего магнитного поля.

Направление распространения колебаний отмечено стрелками; в области прозрачности, где колебания имеют вид бегущих волн, их амплитуда изображена волнистой линией; $U(z) = \omega_{pe}^2 \omega / c^2 (\omega - \omega_e(z))$ — потенциальная энергия в уравнении Шрёдингера, эквивалентном (1.9); $W = \omega^2 / c^2$ — полная энергия, z_s — сингулярная точка поворота (резонансная точка); z_0 — обычная точка поворота.

Рассмотрим колебания, распространяющиеся со стороны больших значений магнитного поля (слева направо). Отношение амплитуды колебаний, прошедших через область непрозрачности, к амплитуде падающей волны дается обычным квантовомеханическим выражением

$$T = \exp \left(i \int_{z_s}^{z_0} k_{\parallel}(z) dz \right), \quad (1.17)$$

где

$$k_{\parallel}(z) = \frac{\omega}{c} \left[1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega_e(z) - \omega)} \right]^{1/2};$$

при линейном изменении магнитного поля

$$\omega_e(z) = \omega \left(1 - \frac{z - z_s}{L} \right).$$

интеграл в показателе экспоненты легко вычисляется и оказывается равным $\beta/2$ (см. (1.13)).

В разделе 3 отмечено, что и при отсутствии теплового разброса для описания длинноволновой части колебаний можно использовать адиабатическое волновое уравнение, дополненное правилом обхода Ландау. Поэтому неудивительно, что вне зависимости от величины разброса коэффициент ослабления длинноволновой части колебаний дается (1.13).

В отличие от задач, рассматриваемых в квантовой механике, в настоящем случае отсутствует отраженная волна (см. ^{14, 17}, а также ⁴²). Поэтому следует считать, что разность между энергиями падающей волны и прошедшей поглощается. В предыдущих разделах было показано, что энергия колебаний тратится на модуляцию потока заряженных частиц, набегающего на резонансную точку. Этот процесс, на первый взгляд, никак не отражен в использованном нами адиабатическом волновом уравнении, и соответствие (1.13) с (1.17) может показаться случайным *). На самом деле это не так. В работе ⁸, где получено полное волновое уравнение, показано, что взаимодействие между колебаниями и частицами описывается единым аналитическим выражением, которое распадается на адиабатическую и резонансную части лишь асимптотически — на достаточно большом расстоянии от резонансной точки. Однако каждая из этих частей содержит в себе информацию о другой части, поэтому любое изменение процесса резонансного взаимодействия, например под действием ускорения, эффекта Доплера и т. д., отражается на адиабатическом волновом уравнении. Естественно, что и результаты, получаемые из рассмотрения движения отдельных частиц и с помощью адиабатического волнового уравнения, оказываются одинаковыми. Покажем справедливость этого утверждения на простейшем примере плазмы низкой плотности ($\omega_{pe}^2 L / \omega c \ll 1$).

Из (1.17) следует, что коэффициент поглощения (доля поглощаемой энергии) при $\omega_{pe}^2 L / \omega c \ll 1$ равен

$$\eta = 1 - T^2 \approx \frac{1}{2} \omega_{pe}^2 L / \omega c. \quad (1.18)$$

С другой стороны, количество энергии, поглощаемое электронами, может быть получено с помощью (1.6). Оно равно $\delta \omega_e = (m_e n_0 / 2) |\delta v|^2$; здесь δv — изменение скорости ларморовского вращения (слагаемое, линейное по δv , устраняется после усреднения по фазе ларморовского вращения). При низкой плотности электромагнитную энергию модулированных пучков можно не учитывать и поэтому для коэффициента поглощения —

*) Фактически поглощение энергии учитывается правилом обхода Ландау. Отсутствие отраженной волны является следствием использования этого правила.

принять следующее выражение: $\eta \approx \delta w_e/S$, где $S = c |E|^2/4\pi$; E — амплитуда колебаний, падающих на резонансную точку. Простые вычисления приводят к (1.18). В работе ⁶ показано, что и при более высокой плотности, когда выполняется условие $c/\omega L \ll (\omega_{pe}/\omega)^2 \ll c^2/\omega^3 L^3/2v_{||}^{1/2}$, коэффициент поглощения, получаемый обоими способами, оказывается одним и тем же ($\eta \approx 1$).

Адиабатическое волновое уравнение в виде (1.9), вообще говоря, справедливо, только если магнитное поле меняется по линейному закону, не учитывается эффект Допплера и ускорение частиц в неоднородном магнитном поле. В работе ⁸ эквивалентность обоих подходов была проверена на вычислении соответствующих поправок к коэффициенту поглощения (1.18) *):

$$\frac{\delta\eta}{\eta} = -\frac{1}{8c^2} \left\langle \frac{v_{||}^4}{v_{||}^2} \right\rangle - \langle v_{||}^2 \rangle \left[\frac{5}{8} \left(\frac{L}{\omega} \right)^6 \left(\frac{d^2\omega_e}{dz^2} \right)^4 + \frac{1}{6} \left(\frac{L}{\omega} \right)^4 \left(\frac{d^3\omega_e}{dz^3} \right)^2 \right]; \quad (1.19)$$

здесь первое слагаемое учитывает совместное действие эффекта Допплера и ускорения частиц в неоднородном магнитном поле, второе — связано с нелинейным характером изменения магнитного поля, угловые скобки означают усреднение по скоростям; плотность плазмы считается низкой ($\beta = \omega_{pe}^2 L/\omega c \ll 1$).

До сих пор мы рассматривали циклотронные колебания, падающие на резонансную точку со стороны больших значений магнитного поля. Ниже мы увидим, что колебания, распространяющиеся в обратном направлении, слабее взаимодействуют с плазмой и поэтому представляют меньший интерес. Из рис. 4 следует, что такие колебания попадают сначала на обычную точку поворота, от которой частично отражаются. Отраженная волна может быть найдена в квазиклассическом приближении методом Цваана (см. ¹⁴) или при линейном профиле магнитного поля с помощью точного решения уравнения (1.9), выражающегося через функции Уиттекера ^{14, 17}. Вычисления приводят к следующим результатам:

$$\xi = |R|^2 = (1 - e^{-\beta})^2, \quad (1.20)$$

$$\eta = 1 - |R|^2 - |T|^2 = e^{-\beta} (1 - e^{-\beta}); \quad (1.21)$$

здесь, как и ранее, $\beta = 2i \int_{z_s}^{z_0} k_{||} dz$ (при линейном профиле магнитного

поля $\beta = \pi \omega_{pe}^2 L/\omega c$, R — отношение амплитуды отраженной волны к падающей; коэффициент ослабления T не зависит от направления распространения колебаний и дается (1.13), (1.17). Напомним, что для колебаний, падающих со стороны большего магнитного поля, коэффициент отражения равен нулю.

*) При высокой плотности плазмы $\beta \gg 1$, $\eta \approx 1$, основные эффекты, связанные с нелинейностью магнитного поля, могут быть учтены в рамках адиабатического волнового уравнения (1.9).

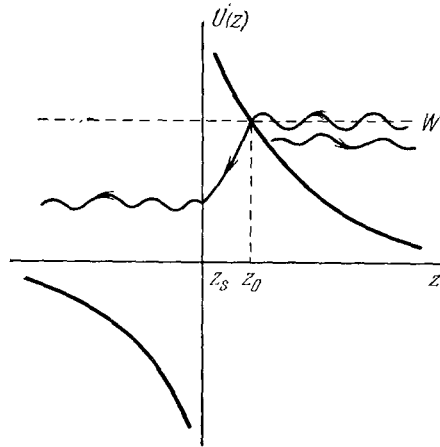


Рис. 4. Поглощение колебаний, падающих со стороны меньшего магнитного поля.

Обозначения те же, что на рис. 3.

При $\beta \ll 1$ (низкая плотность, большие градиенты магнитного поля) плазма практически одинаково взаимодействует с колебаниями, падающими на точку циклотронного резонанса с противоположных сторон. В этом случае с точностью до величин порядка β имеем $\xi \approx 0$, $\eta \approx \beta$. В то же время при $\beta \gg 1$ колебания, падающие со стороны большего магнитного поля, почти целиком поглощаются, а со стороны меньшего — отражаются. Следовательно, при $\beta \gg 1$ для эффективной передачи энергии плазме необходимо, чтобы между излучателем и резонансной точкой магнитное поле уменьшалось¹. Эта область была названа магнитным берегом «по аналогии с диссипацией волн, набегающих на наклонный берег океана»¹³.

Нагрев ионов в установке с магнитным берегом был осуществлен в работе^{2 *}). В дальнейшем этот метод развивался в работах^{22, 23} и др. Циклотронные колебания использовались также для нагрева электронной компоненты плазмы (см., например,²⁴), причем нередко осуществлялся режим электронного циклотронного резонанса, т. е. энергия, необходимая для ионизации газа, поставлялась циклотронными колебаниями. Нам не известны экспериментальные работы, посвященные проверке характерных зависимостей, полученных в теории, например, зависимости коэффициента поглощения от плотности плазмы и градиента магнитного поля. Это объясняется, по-видимому, трудностями вариации параметров в реальных системах. В то же время отметим, что в работе⁶ в соответствии с (1.13) наблюдалось почти полное поглощение колебаний при достаточно большой плотности плазмы.

В работе²⁵ предложено использовать циклотронные колебания для «затыкания пробок» в магнитных ловушках. Дело в том, что в магнитных ловушках не удерживаются частицы, скорость которых направлена под достаточно малым углом к аксиальному магнитному полю, т. е. попадает в так называемый конус ухода. Предполагалось, что если расположить точки циклотронного резонанса в магнитных пробках, то частицы, покидающие ловушку, за счет циклотронного поглощения будут увеличивать поперечную компоненту скорости. При этом вектор скорости повернется, и уходящие частицы перейдут в число удерживаемых. Однако в²⁶ было показано (см. также²⁷), что основным результатом резонансного циклотронного взаимодействия является усиленная диффузия функции распределения заряженных частиц по поперечным скоростям. Диффузия должна приводить к заполнению конуса ухода, а следовательно, и к возрастанию потерь частиц. Действительно, из (1.6) следует, что изменение поперечной компоненты скорости зависит от соотношения между фазой ларморовского вращения частиц и фазой поля в момент прохождения циклотронного резонанса. Если частицы распределены равномерно на ларморовских окружностях, то в первом приближении по амплитуде поля энергия ларморовского вращения может с равной вероятностью как увеличиваться, так и уменьшаться. Систематическое поглощение энергии является более слабым квадратичным эффектом по полю волны.

II. НЕРАВНОВЕСНАЯ ПЛАЗМА

1. Резонансное циклотронное взаимодействие в неравновесной плазме. а) *Однородное магнитное поле.* В реальных условиях распределение частиц плазмы по скоростям часто

*) До сих пор проблема резонансного циклотронного взаимодействия рассматривалась на примере электронных циклотронных колебаний с круговой поляризацией, распространяющихся вдоль магнитного поля (свисты). Однако механизм резонансного взаимодействия является одинаковым для зарядов обоих знаков. Более того, если в адиабатическом волновом уравнении (1.9) поменять индекс e на i , то оно будет описывать альвеновские колебания в области частот $\omega \approx \omega_i$ (см., например,¹⁸).

отличается от равновесного, максвелловского. Неравновесность может быть связана с наличием пучков, анизотропией функции распределения (неравенство средних энергий в направлении поперек и вдоль магнитного поля), отсутствием в распределении по поперечным скоростям частиц с малыми скоростями и т. д. Как уже отмечалось, распределения, обедненные частицами с малыми поперечными скоростями, характерны для магнитных ловушек. Такие распределения, называемые конусными, и будут нас интересовать. Для того чтобы выделить эффекты, связанные с наличием конуса потерь, необходимо рассмотреть колебания, обладающие некоторой пространственной структурой в направлении поперек магнитного поля. В простейшем случае — это плоская волна, с волновым вектором, перпендикулярным к магнитному полю: $\mathbf{E} = E (\sin(\omega t - kx); 0; 0)$. Довольно громоздкие расчеты приводят к следующему выражению для скорости изменения энергии заряженной частицы (иона) под действием поля волны *):

$$dW_i/dt = (n/2) (J_{n-1}^2(s) - J_{n+1}^2(s)) (e^2 E^2 / m_i) t; \quad (2.1)$$

здесь $s = kr_i$, $r_i = v_{\perp} / \omega_i$ — ларморовский радиус ионов, рассматривается резонанс на n -й циклотронной гармонике $\omega \approx n\omega_i$.

Выражение (2.1) отличается от (1.1) множителем

$$A_n(s) = (n/2) (J_{n-1}^2(s) - J_{n+1}^2(s)) = (n^2/s) (J_n^2(s))'_s.$$

При $s \ll n$

$$A_n(s) \approx [n^3/2\Gamma^2(n+1)] (s/2)^{2(n-1)},$$

а при $s \gg n$ имеет колебательную структуру²⁰, $A_n(s) \approx (-1)^n (2n^2/\pi s^2) \cos 2s$. Если $A_n(s) < 0$, то кинетическая энергия ионов под действием поля волны будет уменьшаться и, следовательно, в силу сохранения энергии волна, — нарастать. В этом случае циклотронное взаимодействие приводит к излучению, а не к поглощению колебаний. Поясним этот результат. Разложим плоскую волну по цилиндрическим в соответствии с известной формулой $e^{\pm ikx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(s) e^{\pm in\theta}$; здесь $x = r_i \sin \theta$, θ — азимутальный угол, начало координат выбрано в центре ларморовской окружности. В силу равенства²⁰ $\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(s) = 1$, вес n -й цилиндрической гармоники в разложении равен $J_n^2(s)$. В системе координат, связанной с частицей, частоты отдельных цилиндрических гармоник равны $\omega_n = \omega - n\dot{\theta}$, где $\dot{\theta} = \omega_i$. Очевидно, что слагаемое $n\dot{\theta}$ играет ту же роль, что и доплеровский сдвиг $k_{\parallel}v_{\parallel}$ для волны, периодической вдоль магнитного поля. По аналогии с этим случаем можно говорить о нормальном и аномальном доплер-эффектах $\omega_n = \omega - n\dot{\theta} = \pm \omega_i$. При нормальном доплер-эффекте энергия поглощается заряженной частицей и при аномальном излучается. Поскольку $\dot{\theta} = \omega_i$, для колебаний с $\omega = n\omega_i$ будет поглощаться $(n-1)$ -я цилиндрическая гармоника и излучаться $(n+1)$ -я. Эффект излучения преобладает, если вес $(n+1)$ -й гармоники в разложении плоской волны окажется большим.

*) В отличие от (1.2), это выражение не является точным, а представляет лишь первый член разложения по степеням t . Условия применимости (2.1) совпадают с условиями применимости ливейного приближения, что вполне достаточно для наших целей. Процедура вывода (2.1) вкратце такова: усреднение по быстрому ларморовскому вращению, а также по его начальной фазе, в предположении равномерного распределения дает $\dot{W}_i = 2m_i (\dot{v}_{\perp}^2 + v_{\perp} \ddot{v}_{\perp}) t$; величины $\dot{v}_{\perp}$, $\ddot{v}_{\perp}$ определяются методом усреднения²⁸.

Для совокупности частиц с некоторым распределением по поперечным скоростям $f_0(v_\perp)$ результирующий эффект определяется средним значением $A_n(s)$:

$$\alpha_n = 2\pi \int_0^\infty dv_\perp v_\perp f_0(v_\perp) A_n(s).$$

Величина α_n может стать отрицательной, если распределение обеднено в области малых скоростей $v_\perp \lesssim n\omega_i/k_\perp$, так как при этом из интеграла по $dv_\perp$ вырезается область малых значений s , где $A_n(s) > 0$.

б) *Магнитное поле, монотонно меняющееся в пространстве.* В связи с проблемой устойчивости плазмы в адиабатических ловушках интенсивно изучались замагниченные электронные лэнгмюровские колебания в области частот $\omega \approx n\omega_i$. Адиабатическое волновое уравнение, описывающее эти колебания, имеет вид (см., например, ^{13, 14, 30})

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} + k_\perp^2 \left(\frac{\omega}{\omega_{pe}} \right)^2 \left[1 - \frac{\omega_{pi}^2 \alpha_n}{n\omega_i (\omega - n\omega_i(z))} \right] \varphi = 0; \quad (2.2)$$

здесь $\varphi(z)$ — возмущенный потенциал, $\varphi(\mathbf{r}, t) = \varphi(z) e^{-i\omega t + ik_\perp r_\perp}$, частота колебаний считается близкой к $n\omega_i$, поэтому из суммы по n , которая, вообще говоря, должна присутствовать в (2.2), оставлено n -е резонансное слагаемое, и зависимость от координаты z учитывается лишь в резонансном знаменателе. Это приближение справедливо при $(\omega_{pi}/\omega_i) |\alpha_n/n|^{1/2} \ll 1$, т. е. при достаточно низкой плотности плазмы или при достаточно больших значениях $k_\perp$. (Для конусных распределений $\alpha_n \approx -2^{-3/2} \pi^{-1/2} n^{-2} (k_i r_\perp)^{-3}$, $k_\perp r_i \gg n$)

здесь r_i — средний ларморовский радиус ионов.)

После ряда переобозначений (2.2) приводится к (1.9), соответственно (2.1) — к (1.1). Поэтому резонансное взаимодействие в неравновесной плазме можно описывать выражениями, полученными в разделе 1, г). При $\alpha_n < 0$ удобно ввести

$$\beta_1 = -\beta = 2\iota \int_{z_0}^{z_1} k_\parallel dz,$$

где $k_\parallel$ находим из (2.2):

$$k_\parallel = k_\perp \frac{\omega}{\omega_{pe}} \left[1 - \frac{\omega_{pi}^2 \alpha_n}{n\omega_i (\omega - n\omega_i(z))} \right]^{1/2}.$$

В магнитном поле, меняющемся по линейному закону,

$$\beta_1 = -\pi (\alpha_n/n) (m_e/m_i)^{1/2} (k_\perp L) \omega_{pi}/\omega_i.$$

По аналогии с (1.17), (1.20) имеем (см. ¹⁴)

$$T_1 = e^{\beta_1/2}, \quad (2.3)$$

$$\xi_1 = |R_1|^2 = (e^{\beta_1} - 1)^2. \quad (2.4)$$

При $\alpha_n < 0$ ионы не поглощают, а излучают колебания, и поэтому колебания, проходя через резонансную область, усиливаются ($T_1 > 1$). Если $\beta_1 > \ln 2$, то и отраженная волна будет также усилена. В дальнейшем нам понадобится отношение амплитуды отраженной волны к падающей с учетом фазы. В работе ¹⁴ эта величина была определена методом Цваана:

$$R_1 = -\iota (e^{\beta_1} - 1); \quad (2.5)$$

здесь фаза отсчитывается от резонансной точки, т. е. падающая и отраженная волны берутся в виде

$$\varphi \sim \exp \left(\pm \iota \int_{z_0}^z k_\parallel dz \right).$$

Так же как и в равновесной плазме, отражаются колебания, падающие со стороны меньшего магнитного поля; колебания, распространяющиеся в обратном направлении, проходят через резонанс без отражения. Коэффициент усиления не зависит от направления распространения колебаний.

Заметим, что при $\alpha_n > 0$ ионы поглощают энергию колебаний, поэтому потенциальные колебания наряду с непотенциальными можно использовать для нагрева ионной компоненты плазмы³¹.

Представляет интерес проследить за процессами, приводящими к усилению прошедшей и отраженной волн. На рис. 5, 6 изображен потенциал,

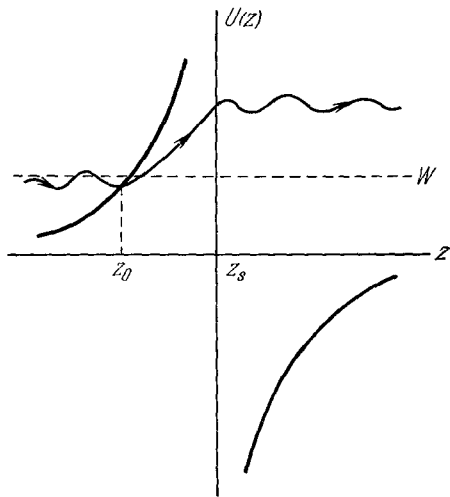


Рис. 5. Усиление колебаний, падающих со стороны большего магнитного поля. $U(z) = (m_e/m_i) n^2 \alpha_n \omega / (\omega - n \omega_i(z))$ — потенциальная энергия в уравнении Шрёдингера, эквивалентном (2.2); $W = k_{\perp}^2 \omega^2 / \omega_{pe}^2$ — полная энергия, остальные обозначения те же, что на рис. 3 и 4.

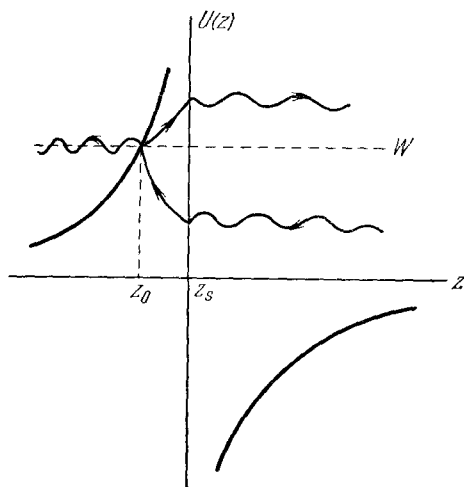


Рис. 6. Усиление колебаний, падающих со стороны меньшего магнитного поля. Обозначения те же, что на рис. 5.

входящий в уравнение Шрёдингера, эквивалентное (2.2). Из сопоставления их с рис. 3 следует, что в неравновесной плазме ($\alpha_n < 0$) потенциал меняет знак (как и ранее, считаем $dH/dz < 0$). Рассмотрим колебания, падающие на резонансную точку со стороны большего магнитного поля. Такие колебания сначала попадают на обычную точку поворота z_0 (см. рис. 5) *). В области непрозрачности ($z_0 < z < z_s$) их амплитуда нарастает

экспоненциально $\sim k_{\perp}^{-1/2} \exp \left(i \int_{z_0}^z k_{\parallel} dz \right)$, и в точке z_s превышает начальную на множитель $\sim \beta_1^{-1/2} e^{\beta_1/2}$. Однако поток энергии остается неизменным вплоть до точки z_s , где колебания отбирают энергию у ионов. Количество энергии, отданной ионами, оценим с помощью (2.1), положив $t \approx (v_{\parallel} d\omega_i/dz)^{-1/2}$. Из очевидного соотношения $T_1^2 \approx n_0 v_{\parallel} \delta W_i / S_1$ получаем $T_1 = e^{\beta_1/2}$; здесь δW_i — энергия, отданная одним ионом, $S_1 = V_0 E^2 / 4\pi$ — поток энергии в области слева от z_s , E — амплитуда

*) Нас не должно удивлять различие со случаем равновесной плазмы (см. рис. 4), так как мы рассматриваем установившуюся картину, когда колебания, набегающие на точку z_0 , успевают «почувствовать» процессы, происходящие в резонансной точке z_s . Формально отсутствие отраженной волны связано с нарастанием амплитуды в области от z_0 до z_s . Обсуждение возможных правил сопряжения квазиклассических решений при переходе через точки поворота можно найти, например, в работе³².

колебаний в точке z_s , $V_0 = \omega_{pe}/k_\perp$ — их групповая скорость при $|z - z_s| \rightarrow \infty$. Рис. 6 иллюстрирует процесс отражения колебаний, падающих со стороны меньшего магнитного поля. Коэффициент отражения можно оценить изложенным выше способом.

в) *Немонотонное магнитное поле*. С уменьшением градиента магнитного поля в резонансной точке коэффициенты усиления и отражения колебаний возрастают (см. (2.3) — (2.5)). Так как в адиабатических ловушках магнитное поле имеет минимум в центре системы, для колебаний с $\omega \approx n\omega_{i\min}$ коэффициенты T_1 , R_1 должны быть максимальны. Однако их вычисление в этом случае сопряжено с значительными трудностями. Во-первых, адиабатическое волновое уравнение при немонотонном профиле магнитного поля не сводится к стандартным, во-вторых, при $z_s \rightarrow z_{\min}$ само его использование оказывается незаконным. Действительно, в соответствии с правилом обхода Ландау, в спадающем магнитном поле резонансная точка должна обходиться в комплексной плоскости сверху и в нарастающем снизу. Поэтому при резонансе вблизи экстремума, когда резонансные точки встречаются парами, мы должны обязательно пройти между ними. С приближением z_s к $z_{\min}$ длина затухания модулированных пучков, генерируемых в резонансных точках, может оказаться больше расстояния между z_s и $z_{\min}$. В этом случае при построении решения мы обязательно попадем в область, занятую пучками, где упрощенное адиабатическое волновое уравнение оказывается неприменимым (см. раздел 1, в)).

При больших (термоядерных) плотностях кулоновские соударения должны уширять функцию распределения ионов по скоростям. В такой плазме тепловой разброс продольных скоростей будет довольно большим ($\delta v_\parallel \approx v_\parallel$) и, следовательно, модулированные пучки должны затухать на расстоянии порядка длины волны модуляции (см. раздел 1, в)). Тот же порядок величины имеет и размер резонансной зоны δz_s . При $|z_s - z_{\min}| \gg r_i^{1/3} L_1^{2/3}$ $\delta z_s \approx L_1 (r_i/z_s)^{1/2}$ и при $|z_s - z_{\min}| \lesssim r_i^{1/3} L_1^{2/3}$ $\delta z_s \approx r_i^{1/3} L_1^{2/3}$; здесь принято

$$H(z) = H_{\min} \left[1 + \left(\frac{z - z_{\min}}{L_1} \right)^2 \right].$$

Поэтому мы будем считать, что приближение z_s к $z_{\min}$ лишь расширяет резонансную зону, делая резонансное взаимодействие более интенсивным *).

Оценим коэффициент усиления колебаний с $\omega \approx n\omega_{i\min}$. Количество энергии, отобранной колебаниями у ионов, пропорционально квадрату амплитуды колебаний в резонансной точке (см. (2.1)). Амплитуда возра-

стает в области непрозрачности $\sim \exp \left(\int_0^z \text{Im } k_\parallel dz \right)$. В результате показатель экспоненты в выражении для коэффициента усиления T_1 оказывается равным $\beta_1 = \int_0^{z_s} \text{Im } k_\parallel dz$ (см. (2.3)). При резонансе в минимуме

магнитного поля приближенные оценки дают $\beta_1 \approx C (k_\perp L_1) (m_e/m_i)^{1/2}$; здесь C — величина порядка единицы. Это приближенное выражение можно использовать при $|z_s - z_{\min}| \lesssim L_1 |\alpha_n|^{1/2} \omega_{pi}/n\omega_i$. Если $|z_s - z_{\min}| \gg L_1 |\alpha_n|^{1/2} \omega_{pi}/n\omega_i$, то области, в которых колебания отличаются от плоских волн, разделены. В этом случае каждый из резонансов может рассматриваться по отдельности, как резонанс в монотонно меняющемся магнитном поле.

*) Если бы тепловой разброс был достаточно мал ($\delta v_\parallel \ll v_\parallel$), то при определенных расстояниях между резонансными точками модулированный пучок, возбуждаемый в одной из них, отдавал бы свою энергию в другой. В результате коэффициенты усиления и отражения как функции $z_s - z_{\min}$ приобрели бы колебательную структуру.

г) *Колебания, нарастающие во времени.* В ограниченной плазме усиление в резонансной области приводит к установлению колебаний, нарастающих во времени ($\text{Im } \omega = \gamma > 0$). Оказывается, что в простейшем случае линейно меняющегося магнитного поля коэффициенты усиления и отражения (2.3) — (2.5) не зависят от величины инкремента γ . Однако, несмотря на это, при $\gamma > 0$ процесс перекачки энергии от ионов к колебаниям происходит по-иному. Прежде всего при $\gamma \gg (\delta v_{\parallel} d\omega_i/dz)^{1/2}$ не возбуждаются модулированные пучки. Действительно, частоту нарастающих колебаний нельзя определить с точностью $\delta\omega$, превышающей инкремент. Поэтому, если $\gamma \neq 0$, можно считать, что в возбуждении пучков одновременно участвует много волн. Из (1.16) следует, что при $\gamma \gg (\delta v_{\parallel} d\omega_i/dz)^{1/2}$ интерференция должна гасить модулированные пучки. Соответственно заштрихованная область на рис. 2 опускается ниже действительной оси, и на всей оси можно использовать адиабатическое волновое уравнение, учитывая неоднородность магнитного поля параметрически. (Сравнить с колебаниями в столкновительной плазме; см. гл. I, раздел 2, а)). Этот результат можно также получить, рассмотрев движение отдельного иона. Действительно, при $\gamma \gg (\delta v_{\parallel} d\omega_i/dz)^{1/2}$ ион не «чувствует» неоднородности магнитного поля, так как амплитуда колебаний меняется раньше, чем он уйдет из резонансной зоны.

Оценивая энергию, отдаваемую ионами нарастающим колебаниям, из всей предыстории следует учитывать ближайший интервал $\delta t \approx \gamma^{-1}$, поскольку в более ранние моменты времени амплитуда колебаний экспоненциально мала. В силу неопределенности частоты нарастающих колебаний резонансная зона размывается на расстоянии порядка $\delta z_s \approx \approx \gamma (d\omega_i/dz)^{-1}_{z=z_s}$. Число частиц, находящихся в ней, $\approx n_0 \delta z_s$, а энергия, отдаваемая ими в единицу времени, $\approx n_0 \delta z_s \dot{W}_i \approx n^2 \alpha_n \omega_{pi}^2 (d\omega_i/dz)^{-1} E^2 / 4\pi$. Эта величина не зависит от инкремента (оценка для случая $\gamma = 0$ была сделана выше). Если в окрестности резонансной точки магнитное поле меняется по нелинейному закону, то с ростом γ резонансное взаимодействие ослабляется. Так, например, в предельном случае резонанса в минимуме магнитного поля показатель экспоненты β_1 в выражении для коэффициента усиления, определенный в предыдущем разделе, можно использовать лишь при $\gamma \ll (\omega_{pi}^2/\omega_i) |\alpha_n/n|$. В обратном предельном случае следует сделать замену $\beta_1 \rightarrow \beta_1 [\omega_{pi}/(\omega_i \gamma)^{1/2}] |\alpha_n/n|^{1/2}$.

2. Устойчивость циклотронных колебаний в магнитных ловушках. а) *Границы, отражающие колебания.* В адиабатических ловушках магнитное поле возрастает от центра к краям системы, что ограничивает движение заряженных частиц вдоль магнитного поля. В ограниченных системах эволюция произвольных возмущений приводит в конце концов к установлению собственных колебаний. Последние можно считать составленными из падающей и отраженной волн. Если система симметрична относительно минимума магнитного поля ($z = 0$), а колебания отражаются как от резонансной области, так и от границы плазмы, то условие согласования падающей и отраженной волн имеет вид

$$R_1 \exp \left(2i \int_0^{z_s} k_{\parallel} dz \right) + R_b \left(2i \int_0^{z_b} k_{\parallel} dz \right) = \pm 1; \quad (2.6)$$

здесь ± 1 соответствует симметричным модам, -1 — антисимметричным, R_1 — коэффициент отражения от резонансной области (2.5), R_b — коэффициент отражения от границы плазмы $z = z_b$. Если плотность плазмы на границе меняется достаточно резко, $ak_{\parallel}(z_b) \ll 1$ ($k_{\parallel}(z_b) \approx k_{\perp} \omega/\omega_{pe}(z_b)$,

a — характерный масштаб изменения плотности), и на расстоянии b от границы помещена металлическая стенка, то $R_b = e^{-i\rho}$, где $\rho = \arctg [2B/(1 - B^2)]$, $B = [k_{||}(z_b)/k_{\perp}] \operatorname{cth}(k_{\perp} b)$. Из этого выражения следует, что отражение от границы плазмы изменяет фазу, но не амплитуду колебаний. Здесь и в дальнейшем поле магнитной ловушки аппроксимируем выражением $H(z) = H_0 [1 + (z^2/L_1^2)]$.

В работе ³³ указано, что при плавном изменении плотности на границе $ak_{||} \ll 1$ колебания, падающие на границу, должны поглощаться без отражения ($R_b = 0$). Действительно, вдали от резонансной области в адиабатическом волновом уравнении (2.2) можно не учитывать вклад ионов, при этом колебания переходят в замагниченные электронные лэнгмюровские с $k_{||}(z) \approx k_{\perp} \omega / \omega_{pe}(z)$. Волновой пакет, составленный из таких колебаний, двигаясь к границе, т. е. по направлению, в котором плотность плазмы падает, уменьшает фазовую (групповую) скорость $\omega/k_{||} \approx \omega_{pe}/k_{\perp}$. Когда она по порядку величины сравнится с тепловой скоростью электронов, колебания поглотятся резонансными электронами.

С другой стороны, в не слишком длинных системах, $z_b < L_1$, с резкой границей плазмы, можно не учитывать отражения от резонансной области. Дело в том, что, как показано в работе ¹⁵, колебания, отраженные от резонансной точки, запаздывают на время $t \approx L_s/V_0$; здесь $L_s = (H^{-1} dH/dz)_{z=z_s}^{-1}$, $V_0 = \omega_{pe}/k_{\perp}$. Если выполняется условие $\gamma L_s/V_0 \ll 1$, то колебания, отраженные от границ, за это время усилятся в большей степени.

Рассмотрим сначала колебания плазмы с резкой границей, когда отражение от резонансной области (первое слагаемое в (2.6)) можно не учитывать. Из (2.6) находим

$$2 \int_0^{z_b} k_{||} dz = p\pi + i \ln R_b; \quad (2.7)$$

здесь p — целое число. Если изменение магнитного поля в пределах системы достаточно мало, $\delta H/H = (z_b/L_1)^2 \ll (\omega_{pi}/\omega_i) |\alpha_n/n|^{1/2}$, то магнитное поле может считаться однородным. При этом из (2.7) получаем $\operatorname{Im} \omega = \gamma_0 \approx \omega_{pi} |\alpha_n/2n|^{1/2}$. В обратном предельном случае $(z_b/L_1)^2 \gg (\omega_{pi}/\omega_i) |\alpha_n/n|^{1/2}$ резонансная область занимает малую часть системы $\delta z_s/z_b \approx (\gamma_0/z_b) (d\omega_i/dz)_{z=z_s}^{-1}$ (см. предыдущий раздел). Поскольку в резонансной области процесс перекачки энергии от ионов к колебаниям происходит с той же интенсивностью, что и в однородном поле, инкремент колебания должен уменьшиться по сравнению с γ_0 в отношении $\delta z_s/z_b$. Действительно, при $(z_b/L_1)^2 \gg (\omega_{pi}/\omega_i) |\alpha_n/n|^{1/2}$ из (2.7) находим (см. ^{30, 34})

$$\gamma \approx (\pi/4) (\alpha_n/n) [L_1^2/(z_s - z_b)] \omega_{pi}^2/\omega_i.$$

Это выражение для инкремента можно получить и иным способом. Рассматриваемые колебания близки к замагниченным электронным лэнгмюровским, групповая скорость которых равна $V_0 = \omega_{pe}/k_{\perp}$. За одно прохождение между границами, т. е. за время $t_b = 2z_b/V_0$, их амплитуда в соответствии с (2.3) увеличится на множитель $T_1 = e^{\beta_1}$ (в параболическом магнитном поле колебания дважды переходят через резонанс). Инкремент находим из условия $\gamma t_b = \beta_1$. Он возрастает с уменьшением z_s . Предельное значение можно найти, взяв

$$\beta_1 \approx C (k_{\perp} L_1) [(m_e/m_i) (\omega_{pi}^2/\omega_i \gamma) |\alpha_n/n|]^{1/2}$$

(см. раздел 1, г)). При этом получаем

$$\gamma \approx (\omega_{pi}^{4/3}/\omega_i^{1/3}) (L_1/z_b)^{2/3} |\alpha_n/n|^{2/3}.$$

б) *Границы, поглощающие колебания.* В плазме с плавной границей ($R_b = 0$) собственные колебания устанавливаются за счет отражения от резонансных точек. Примерный вид колебаний изображен на рис. 7. Между резонансными точками имеются две волны спадающей амплитуды, распространяющиеся навстречу друг другу, за резонансными точками, — убегающие волны. Спадание амплитуды в области $|z| < z_s$ связано

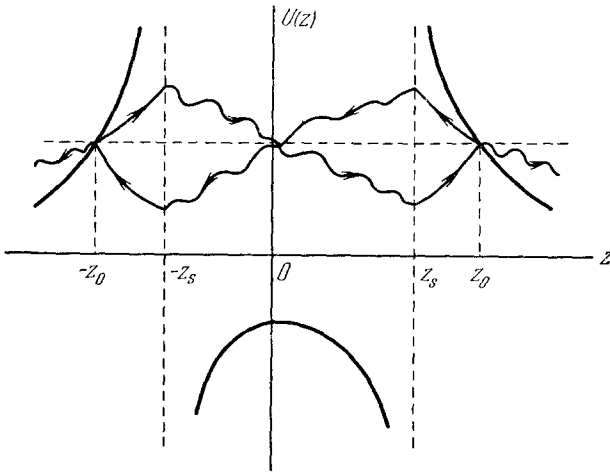


Рис. 7. Нарастающие собственные колебания в поле магнитной ловушки при диссипативных граничных условиях.

Обозначения те же, что на рис. 5 и 6.

с тем, что собственные колебания, рассматриваемые нами, нарастают во времени. Если выполняется условие $\text{Im } k_{||} = (\gamma/\omega) \text{Re } k_{||}$, то в области $|z| < z_s$, где ионы не взаимодействуют с колебаниями, их амплитуда не меняется при распространении, поскольку временное нарастание компенсируется пространственным спаданием. Так как волны, убегающие на границы, уносят энергию, а колебания при этом нарастают, их следует отнести к классу колебаний с отрицательной энергией^{35, 36}.

Если $\beta_1 \gg 1$, то

$$R_1 \approx -i \exp \left(2i \int_{z_s}^{z_0} k_{||} dz \right),$$

и (2.6) можно привести к виду

$$2 \int_0^{z_0} k_{||} dz = (p + 1/2) \pi. \quad (2.8)$$

Отсюда находим, что колебания неустойчивы^{14*}

$$\omega = n\omega_{i0} - \frac{\omega_{pi}^2}{n\omega_{i0}} \frac{\alpha_n}{n} + i \frac{2p+1}{k_{\perp} L_1} \frac{\omega_{pi}^2}{n\omega_{i0}} \left(\frac{m_i}{m} |\alpha_n| \right)^{1/2}. \quad (2.9)$$

В неустойчивом состоянии параметры плазмы таковы, что $\gamma \leq \omega_{pi}^2/\omega_{i0}$, в то время как при условии отражения колебаний от границ $\gamma \geq \omega_{pi}^2/\omega_{i0}$. С уменьшением L_1 (увеличением неоднородности) инкремент сначала возрастает, что объясняется сокращением области локализации колебаний. Однако при этом падает и коэффициент отражения, так как $\beta_1 \leq C (m_e/m_i)^{1/2} L_1 k_{\perp}$ (см. раздел 1, в). Если $L_1 \ll k_{\perp}^{-1} (m_i/m_e)^{1/2}$, то $\beta_1 \ll 1$;

при этом колебания проходят через резонансную область практически без отражения (и без усиления), что делает существование собственных колебаний невозможным. Отсюда находим, что неустойчивость существует лишь при $L_1 \gtrsim k_{\perp}^{-1} (m_i/m_e)^{1/2}$. Эта оценка критического значения согласуется с результатами исследования (2.6)¹⁴.

$$L_{1cr} = (n/k_{\perp}) [(p + 1/2) \ln 2 \cdot |\alpha_n|^{-1} (m_i/m_e)]^{1/2}; \quad (2.10)$$

здесь, как и ранее, $k_{\perp} \gtrsim r_i^{-1}$, $|\alpha_n| \lesssim 1$. Частота колебаний при $L_1 = L_{1cr}$ равна $\omega = n\omega_{i0} + (p + 1/2) (\pi^2/4) \ln 2 |\alpha_n| \omega_{pi}^2/n\omega_{i0}$.

Эти результаты относятся к плазме низкой плотности $\omega_{pi}/\omega_i \lesssim 1$. Численные расчеты показывают, что условие стабилизации циклотронных колебаний слабо меняется вплоть до «термоядерных» плотностей $((\omega_{pi}/\omega_i)^2 \approx 10^3)$ ¹⁴. При $\omega_{pi}/\omega_i \gtrsim 1$, наряду с циклотронными, появляются колебания, на развитие которых магнитное поле вообще не влияет, так как их инкремент $\gamma > \omega_i$ ³³. Хотя циклотронные колебания имеют меньший инкремент, они в некоторых отношениях более опасны, поскольку их, например, труднее стабилизировать примесью холодной плазмы³⁷. В заключение заметим, что проведенное выше условие стабилизации $L_1/r_i \lesssim (m_i/m_e)^{1/2} (k_{\perp} \gtrsim r_i^{-1})$ может оказаться трудно выполнимым в реальных системах, так как уже при $L_1/r_i \approx 25$ должны начаться потери частиц из ловушки из-за несохранения магнитного момента (см., например,³⁸).

в) *Эволюция возмущений во времени.* Рассмотрим эволюцию возмущения, которое при $t = 0$ имело вид δ -функции. Такое возмущение будем называть элементарным. В соответствии с¹⁵, асимптотика коротковолновой, квазиклассической части возмущения имеет вид *)

$$\varphi_{z_0}(z, t) = C(z, z_0, t) \exp[-i\omega t + i \operatorname{sgn}(z - z_0) \int_{z_0}^z dz' k_{\parallel}(z', \omega)]; \quad (2.11)$$

здесь $C(z, z_0, t)$ — медленно меняющийся предэкспоненциальный множитель, а частота ω определяется уравнением

$$t = \operatorname{sgn}(z - z_0) \int_{z_0}^z dz' [\partial k_{\parallel}(z', \omega) / \partial \omega], \quad (2.12)$$

являясь функцией протекшего времени t , точки наблюдения z и точки возникновения элементарного возмущения z_0 . Поскольку величина $\partial \omega / \partial k$ определяет скорость распространения квазиклассических возмущений, физический смысл (2.12) очевиден.

Примем для простоты линейный закон изменения магнитного поля $H(z) = H_0 [1 - (z/L)]$. С помощью (2.11), (2.12) находим частоту и комплексную фазу колебаний:

$$\omega = n\omega_{i0} \left(1 - \frac{z - z_0}{2L}\right) + \left[(n\omega_{i0})^2 \left(\frac{z - z_0}{2L}\right)^2 - \frac{\alpha_n}{2} \omega_{pi}^2 \frac{(z - z_0)}{V_0 t - (z - z_0)} \right]^{1/2}, \quad (2.13)$$

$$\Phi(z, z_0, t) = -\omega t + \frac{\omega}{V_0} (z - z_0) + \frac{\beta_1}{2\pi} \ln \frac{\omega - n\omega_{i0}(z_0)}{\omega - n\omega_{i0}(z)}. \quad (2.14)$$

Здесь учтена та часть элементарного возмущения, которая распространяется направо ($z > z_0$). В области $z < z_0$ возмущение эволюционирует аналогичным образом.

*) В работе³⁹ частота элементарных возмущений определялась из уравнения $V^{-1}(z, z_0) = \partial k(z, \omega) / \partial \omega$. Для нахождения траекторий $z(z_0, t)$ привлекался «принцип Гюйгенса». На выбранных таким образом траекториях не сохраняется частота колебаний. Заметим, что уравнение $V^{-1} = \partial k / \partial \omega$ получается дифференцированием (2.12) по времени только при условии постоянства частоты.

Из (2.14) следует, что колебания нарастают, если выполняется условие $(z - z_0) (V_0 t - (z - z_0)) < l_r^2$, где $l_r = L (\omega_{pi}/\omega_i) |2\alpha_n/n|^{1/2}$. При

$$t = t_r = \frac{1}{V_0} \left[\frac{l_r^2}{z - z_0} + (z - z_0) \right]$$

нарастание прекращается и вместо одной комплексной частоты с $\gamma > 0$ появляются две действительные. При $t \ll t_r$ одна из этих частот стремится к локальной циклотронной частоте $\omega \approx n\omega_i(z) + (n\beta_1/2\pi t)$, другая — к циклотронной частоте в точке, где возникло возмущение, $\omega \approx n\omega_i(z_0) - (n\beta_1/2\pi t)$. Траектория частоты на плоскости комплексной переменной

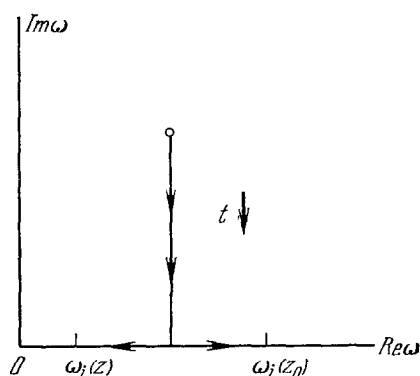


Рис. 8. Траектория частоты $\omega(t)$ возмущения, имевшего в начальный момент вид δ -функции.

Координата z ($z > z_0$) фиксирована; магнитное поле меняется по линейному закону $H(z) = H_0 [1 - (z/L)]$.

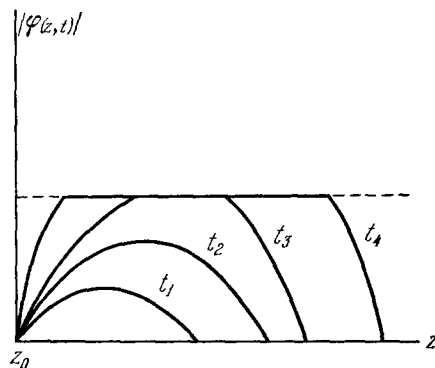


Рис. 9. Эволюция возмущения, имевшего в начальный момент вид δ -функции.

Магнитное поле меняется по линейному закону.

приведена на рис. 8. Общая картина эволюции элементарного возмущения дается рис. 9.

За время нарастания колебаний их амплитуда увеличивается на множитель $T_1 = e^{\beta_1/2}$. Действительно, к моменту времени $t = t_r$ аргумент логарифма в (2.14) получает приращение $\approx -\pi$ и затем остается постоянным.

Таким образом, временной коэффициент усиления первоначального возмущения оказался равным пространственному коэффициенту усиления возмущения, периодического во времени, при его прохождении через точку циклотронного резонанса. Это совпадение не случайно. Действительно, при $t > t_r$ частота колебаний в точке z лежит в интервале $n\omega_i(z_0) > \omega > n\omega_i(z)$. Такие колебания, двигаясь из z_0 в z , должны обязательно пройти через точку циклотронного резонанса.

Плазма может считаться практически устойчивой, если временной коэффициент усиления близок к единице. С другой стороны, было показано, что при поглощении колебаний на границе плазмы это условие обеспечивает устранение неустойчивых собственных колебаний.

Использованное нами выражение для $\varphi_{z_0}(z, t)$ учитывает волны, убегающие от точки z_0 (см. (2.11)). Если колебания отражаются от границ, то при $t \approx t_b \approx z_b/V_0$ должны появиться отраженные волны. В работе ¹⁵ показано, что при $t \gtrsim L/V_0 > t_b$ появляются также волны, отраженные от точки циклотронного резонанса (обычно характерный масштаб изменения магнитного поля L больше z_b). Фактически за несколько отражений успевают установиться собственные колебания. При этом следует использовать результаты предыдущих разделов. Таким образом, оба подхода

к исследованию устойчивости плазмы (рассмотрение эволюции возмущений во времени и анализ собственных колебаний) согласуются и взаимно дополняют друг друга.

Более подробное исследование эволюции первоначальных возмущений произведено в работе ¹⁵. В частности, найдено, что и в немономном магнитном поле временной и пространственный коэффициенты усиления совпадают друг с другом. Прослежена эволюция пространственно-периодических возмущений и возмущений в виде волновых пакетов. Показано, что в неустойчивых неоднородных средах волновой пакет может распастись на образования, дальнейшую эволюцию которых нельзя описать в терминах волновых пакетов.

г) *Циклотронные колебания плазмы с горячими электронами.* В предшествующем рассмотрении электроны считались холодными ($v_e/v_i \ll \ll (\omega_{pe}/\omega_i)/k_\perp r_i$, где $k_\perp \gg r_i^{-1}$). Для того чтобы составить представление о характере неустойчивости в плазме с горячими электронами, полезно сначала рассмотреть более простой случай колебаний в однородном магнитном поле. В однородных средах колебания имеют вид плоских волн $e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}}$. Зависимость $\omega(\mathbf{k})$ определяется дисперсионным уравнением, которое для циклотронных колебаний в плазме с горячими электронами имеет вид (см., например, ³⁶)

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = 1 - \left(\frac{k_\perp}{k}\right)^2 \frac{\omega_{pi}^2 \alpha_n}{n\omega_i (\omega - n\omega_i)} + \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 v_e^2} \left(1 + i\sqrt{\pi} \frac{\omega}{|k_\parallel| v_e}\right) = 0; \quad (2.15)$$

здесь $\varepsilon(\omega, \mathbf{k})$ — диэлектрическая проницаемость плазмы.

В нулевом приближении по $|\operatorname{Im} \varepsilon / \operatorname{Re} \varepsilon| \ll 1$ из (2.15) находим

$$\omega = n\omega_i + \frac{\omega_{pi}^2}{n\omega_i} \alpha_n \left[\left(\frac{k}{k_\perp}\right)^2 + \left(\frac{\omega_{pe}}{k_\perp v_e}\right)^2 \right]^{-1}.$$

Если $\alpha_n < 0$, то энергия этих колебаний, определяемая по формуле $W = (1/8\pi) \omega (\partial \varepsilon / \partial \omega) |E|^2$, отрицательна (см., например, ³⁶). Электроны, тепловая скорость которых равна фазовой скорости волны, поглощают энергию (бесстолкновительное поглощение Ландау). Этот эффект, учитываемый малой мнимой частью ε , приводит к раскачке колебаний ^{36, 40}. По существу, рассматриваемая неустойчивость отличается от неустойчивости с диссипативными граничными условиями (см. раздел б)) лишь тем, что поверхностная диссипация у границы плазмы заменяется объемной.

Если магнитное поле неоднородно и его изменение в пределах области, занятой плазмой, достаточно велико,

$$\Delta\omega_i \gg \frac{\omega_{pi}^2}{n\omega_i} |\alpha_n| \left[1 + \left(\frac{\omega_{pe} r_i}{v_e}\right)^2 \right]^{-1},$$

то для рассматриваемых колебаний будут характерны резонансы с циклотронным вращением ионов. При циклотронном резонансе в неравновесной плазме ($\alpha_n < 0$) энергия излучается, что должно приводить к затуханию колебаний с отрицательной энергией. В силу этого волновой пакет, составленный из колебаний с отрицательной энергией, существует лишь до тех пор, пока не дойдет до точки циклотронного резонанса. Таким образом, следует ожидать (см. ³⁰), что в плазме с горячими электронами неустойчивые собственные колебания будут отсутствовать, а сама неустойчивость будет проявляться в виде нескоррелированных между собой вспышек. В магнитном поле, меняющемся по параболическому закону, $H(z) = H_0 [1 + (z^2/L_i^2)]$, время существования вспышки

$$\Delta t \lesssim \omega_{pi}^{-1} \frac{L_i}{r_i} \left[1 + \left(\frac{\omega_{pe} r_i}{v_e}\right)^2 \right]^{1/2}.$$

Заметим, что в окрестности минимума магнитного поля, вообще говоря, возможны неустойчивые собственные колебания с $\omega < n\omega_{i \min}$, для которых не выполняется условие циклотронного резонанса. Однако достаточно сильная неоднородность магнитного поля $L_1 \lesssim r_i (\omega_i/\omega_{pi}) |\alpha_n| / n^{-1/2}$ устраняет и эти собственные колебания. В математическом отношении задача о колебаниях плазмы с горячими электронами в неоднородном магнитном поле близка к задаче о колебаниях течений сплошной среды, движущейся со скоростью, переменной в направлении поперек течения. Подробное изложение этого вопроса можно найти в обзорной работе ⁴¹ (см. также ^{30, 42}).

д) *Анизотропная неустойчивость.* Для магнитных ловушек с низкой плотностью плазмы ($\omega_{pi} \lesssim \omega_i$) характерны анизотропные распределения ионов по скоростям, при которых средняя энергия теплового движения ионов в направлении поперек магнитного поля существенно превышает продольную. Анизотропия распределения, так же как и конусность, может быть причиной раскачки циклотронных колебаний. Для анизотропной неустойчивости характерно, что даже при большой анизотропии неустойчивы лишь колебания с $\omega < n\omega_i$, а колебания с $\omega > n\omega_i$ затухают. Это положение иллюстрируется видом мнимой части диэлектрической проницаемости (см., например, ³⁶):

$$\text{Im } \varepsilon = \frac{\pi}{|k_{||}|} \left(\frac{\omega_{pi}}{k} \right)^2 \left(\frac{k_{\perp}^2}{n\omega_i} \alpha_n F_0(v_{||}) - \frac{\omega - n\omega_i}{v_{||}} \alpha_n F'_0(v_{||}) \right) \\ v_{||} = (\omega - n\omega_i)/k_{||}; \quad (2.16)$$

здесь $F_0(v_{||})$ — функция распределения ионов по продольным скоростям, которая берется при $v_{||} = (\omega - n\omega_i)/k_{||}$,

$$\alpha_n = 2\pi \int_0^{\infty} dv_{\perp} v_{\perp} J_n^2(k_{\perp} v_{\perp}/\omega_i) F_0(v_{\perp}),$$

магнитное поле, как и в (2.15), считается однородным.

Знак $\text{Im } \varepsilon$ характеризует баланс энергии в колебаниях. Ионы отдают энергию, если $\text{Im } \varepsilon < 0$. Первое слагаемое в (2.16) учитывает поперечные смещения ионов в поле волны. Оно может быть отрицательным для конусных распределений, когда $\alpha_n < 0$. Второе, посредством которого учитываются продольные смещения, преобладает при достаточно малом тепловом разбросе по продольным скоростям. Если распределение по $v_{||}$ спадает монотонно (отсутствуют пучки), то оно становится отрицательным при $\omega < n\omega_i$. В неоднородном магнитном поле могут одновременно присутствовать как область раскачки, так и область затухания. Поэтому неустойчивость за счет анизотропии возможна лишь в том случае, когда влияние области раскачки преобладает.

Если магнитное поле меняется монотонно и его изменение в пределах системы достаточно велико,

$$\frac{\Delta H}{H} \gg \max \left[\frac{\omega_i}{\omega_{pe}} \frac{v_{||i}}{v_{\perp i}}, \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/3} \right],$$

то коэффициент усиления (ослабления) циклотронных колебаний при прохождении через резонансную область дается выражением

$$T_1 = \exp \left[\int_{-\infty}^{\infty} dz (\gamma/v_0) \right];$$

здесь $\gamma = -\text{Im } \varepsilon / (\partial \text{Re } \varepsilon / \partial \omega)$ — локальный инкремент (временной коэффициент усиления), $\text{Re } \varepsilon \approx 1 - [(\omega_{pe}/\omega) k_{||}/k]^2$, $V_0 \approx \omega_{pe}/k_{\perp}$ — групповая

скорость колебаний; неоднородность магнитного поля и плотности в этих выражениях учитывается параметрически. Вычисления дают $T_1 = T_{11}T_{12}$, где $T_{11} = e^{\beta_{1/2}}$ (см. (2.3)), а для T_{12} имеем

$$T_{12} = \exp \left\{ \frac{\pi}{2} \frac{m_e}{m_i} k_{\perp} \frac{n\omega_i^3}{|(\omega_i)_z|} \left[\left(\frac{\alpha_{1n}}{\omega_{pe}(\omega_i)_z} \right)' \right]_{z=z_s} \right\}. \quad (2.17)$$

Из (2.17) следует, что для усиления колебаний за счет анизотропии необходимо выполнение по крайней мере одного из неравенств $H_z H_{z2}^* < 0$, $H_z (\alpha_{1n})'_z > 0$, $H_z (n_0)'_z < 0$. Поясним эти условия.

Амплитуда колебаний меняется внутри резонансной зоны, где $\text{Im } \varepsilon \neq 0$. Из (2.16) следует, что размер резонансной зоны равен $\approx |k_{\parallel} v_{\parallel} / (\omega_i)_z|$. Если выполняется первое неравенство, то область усиления колебаний ($\omega < n\omega_i(z)$) имеет больший размер, чем область ослабления ($\omega > n\omega_i(z)$). Продольное движение ионов в поле колебаний определяется n -й цилиндрической гармоникой в разложении плоской волны (ср. с разделом 1, а). Поэтому второе неравенство обеспечивает большую интенсивность резонансного взаимодействия в области усиления ($\text{Im } \varepsilon \sim \alpha_{1n}$). Наконец, третье учитывает действие нескольких эффектов, поскольку с увеличением плотности возрастает число резонансных частиц $\sim n_0$, сокращается размер резонансной зоны $\sim \Delta z \sim k_{\parallel} \sim n_0^{-1/2}$, ослабляется резонансное взаимодействие $\text{Im } \varepsilon \sim (\omega - n\omega_i) \leq k_{\parallel} v_{\parallel} \sim n_0^{-1/2}$, возрастает продолжительность взаимодействия, так как колебания замедляются, $V_0 \sim n_0^{-1/2}$.

В магнитных ловушках размеры области занятой плазмой, как правило, меньше характерного масштаба изменения магнитного поля L . В этом случае преобладает эффект, связанный со второй производной магнитного поля, причем, поскольку $H_z H_{z2}^* > 0$, при прохождении через область циклотронного резонанса колебания ослабляются. Исключение представляют колебания с $\omega \approx n\omega_{i \min}$, для которых $\omega < n\omega_i(z)$ и поэтому область поглощения вообще отсутствует. Такие колебания и будут раскачиваться при условии отражения от границ плазмы. Если колебания поглощаются на границах, а распределение ионов хотя и анизотропно, но монотонно по поперечным энергиям, то неустойчивые собственные колебания установиться не могут. Действительно, при диссипативных граничных условиях собственные колебания должны быть локализованы между точками циклотронного резонанса (см. раздел б)). Однако если эти точки разнесены (удалены от центра ловушки), то резонансное взаимодействие должно приводить к ослаблению колебаний. Можно также показать, что неустойчивые собственные колебания невозможны и в плазме с горячими электронами.

е) *Дрейфово-циклотронная неустойчивость.* Если плотность плазмы меняется в направлении поперек магнитного поля, то дрейф электронов в скрещенных полях (электрическом поле волны и постоянном магнитном) приводит к разделению электронного и ионного зарядов. Этот эффект можно учесть, если в (2.2) ввести дополнительное слагаемое $k_{\perp} \kappa (\omega/\omega_e) \varphi$, где $\kappa = (k_{\perp} \nabla n_0) / k_{\perp} n_0$. Анализ измененного уравнения показывает, что уже при малой неоднородности $\kappa r_i \approx 10^{-2} - 10^{-3}$ появляются неустойчивые колебания, сильно вытянутые вдоль магнитного поля (дрейфово-циклотронная неустойчивость с $k_{\parallel} \rightarrow 0$)⁴³. Такие колебания не могут поглощаться у границ плазмы, так как для них любая граница является резкой, $ak_{\parallel} \rightarrow 0$ (см. раздел б)). По аналогии с результатами, полученными в этом разделе, следует заключить, что неоднородность магнитного поля может лишь уменьшить инкремент дрейфово-циклотронной неустойчивости, не приводя к ее полной стабилизации. В реальных условиях изменение инкремента должно быть небольшим⁴⁴.

Основной результат, полученный в разделе 2, можно сформулировать следующим образом. Увеличение неоднородности магнитного поля оказывает стабилизирующее воздействие на циклотронную неустойчивость. Будет ли при этом уменьшаться инкремент неустойчивых колебаний или произойдет их полная стабилизация, зависит от конкретных условий.

Обращаясь к экспериментальным данным, характеризующим устойчивость циклотронных колебаний в магнитных ловушках, заметим, что ввиду сложности реальных систем, приводящей к необходимости одновременного учета множества факторов (электрическое поле, влияние торцов, сложная форма силовых линий), эффект влияния неоднородности магнитного поля на устойчивость плазмы к настоящему времени не исследован. В то же время имеются четкие указания на улучшение устойчивости плазмы при увеличении неоднородности магнитного поля (см., например, ⁴⁵).

ПРИЛОЖЕНИЕ

При циклотронном резонансе в неоднородном магнитном поле обмен энергией между колебаниями и заряженными частицами осуществляется посредством возбуждения модулированных пучков. Сходным образом протекают и другие процессы, приводящие к обмену энергией между колебаниями и плазмой, если их область действия ограничена малой областью пространства. Так, например, при взаимодействии колебаний с потоком заряженных частиц, движущихся со скоростью $v_0(\mathbf{r})$, меняющейся в пространстве, модулированные пучки будут возбуждаться в точке $\mathbf{r}_s$, где фазовая скорость колебаний ω/k совпадает со скоростью потока $v_0(\mathbf{r}_s)$. В этом случае доплеровское смещение частоты $kv_0(\mathbf{r})$ играет ту же роль, что и сдвиг на $n\omega_c(\mathbf{r})$ для циклотронных колебаний ⁹.

Остановимся теперь на взаимодействии между колебаниями и заряженными частицами при резком (скачкообразном) изменении скорости частиц. Рассмотрим упрощенную модель. Пусть вдоль OZ распространяется плоская волна $E = E_1 e^{-i\omega t + ikz}$ и в том же направлении со скоростью $v_0(z)$ движется поток заряженных частиц. Предположим, что в окрестности некоторой точки z_s скорость потока достаточно резко изменяется на малую величину $\Delta v_0 \ll v_0(z_s)$. Из уравнения движения

$$\dot{v}_1 = (eE_1/m) e^{-i\omega t + ikz(t)} \quad (\text{П.1})$$

находим

$$v_1 = (eE_1/m) \int_{-\infty}^t dt' e^{-i\omega t' + ikz(t')}; \quad (\text{П.2})$$

здесь $z(t)$ — траектория частицы.

Введем под интеграл $1 \equiv \{ -\omega + kv_0(t') \} / [-\omega + kv_0(t')]$ и проинтегрируем по частям

$$v_1 = \frac{eE_1}{m} \left[\frac{i}{\omega - kv_0(t)} e^{-i\omega t + ikz(t)} - i \int_{-\infty}^t dt' \frac{\dot{kv}_0(t')}{(\omega - kv_0(t'))^2} e^{-i\omega t' + ikz(t')} \right]. \quad (\text{П.3})$$

Второе слагаемое в (П.3) учитывает предысторию движения частицы, которая существенна только при наличии ускорения. Если зависимость ускорения от времени имеет вид δ -функции, то из (П.3) получаем

$$v_1 = \frac{eE_1}{m} \left[\frac{i}{\omega - kv_0(t)} e^{-i\omega t + ikz(t)} - \frac{ik\Delta v_0(t_s)}{(\omega - kv_0(t_s))^2} e^{-i\omega t_s + ikz(t_s)} \right]; \quad (\text{П.4})$$

здесь $\Delta v_0(t_s)$ — скачок скорости в точке $z_s = z(t_s)$.

Из (П.4) следует, что в точке z_s частицы получают приращение скорости (второе слагаемое). Это приращение затем переносится со скоростью $v_0(z)$. Иными словами, в точке z_s возбуждаются модулированные пучки. Энергия, необходимая для этого, отбирается у колебаний. Таков механизм бесстолкновительного поглощения (аномальный скин-эффект), рассмотренного в работе ¹¹. В этой работе исследовалось поглощение на границе плазмы, отражаясь от которой частицы резко изменяют свою скорость (зеркальное отражение, диффузионное отражение).

При наличии теплового разброса по скоростям колебания, связанные с модулированными пучками, затухают в пространстве. По аналогии с (1.9) легко найти, что при максвелловском распределении затухание происходит по закону $\sim \exp[-\alpha(z - z_s)^{2/3}]$. Эта характерная зависимость была впервые получена в работе ⁴⁸, где, в частности, рассматривалось распространение колебаний, возбуждаемых на резкой границе плазмы. Она получает естественное объяснение в терминах модулированных пучков. Более подробный анализ явлений, возникающих у резкой границы плазмы, можно найти в работе ¹⁰.

Институт атомной энергии
им. И. В. Курчатова

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. T. H. Stix, *Phys. Fluids* **1**, 308 (1958).
2. W. M. Hooge, F. H. Tenney, M. H. Brennan, H. M. Hill, T. H. Stix, *ibid.*, **4**, 1131 (1961).
3. А. Д. Пиляя, *ЖТФ* **34**, 93 (1964).
4. А. Д. Пиляя, В. Я. Френкель, *ibid.*, стр. 1753.
5. M. Brambilla, *Plasma Phys.* **10**, 359 (1968).
6. A. F. Kuckes, *ibid.*, p. 367.
7. M. Brambilla, *Nucl. Fusion* **9**, 343 (1969).
8. A. V. Timofeev, A. K. Nekrasov, *ibid.* **10**, 377 (1970).
9. H. L. Berk, C. W. Horton, M. N. Rosenbluth, R. N. Sudan, *Phys. Fluids* **10**, 2003 (1967); D. Baldwin, *Phys. Rev. Lett.* **18**, 1119 (1967); H. L. Berk, C. W. Horton, M. N. Rosenbluth, D. E. Baldwin, R. N. Sudan, *Phys. Fluids* **11**, 365 (1968).
10. A. K. Nekrasov, A. V. Timofeev, *Nucl. Fusion* **13**(2) (1973).
11. G. E. H. Reuter, E. H. Sondheimer, *Proc. Roy. Soc. A* **195**, 336 (1948).
12. А. А. Водяницкий, Н. С. Ерохин, С. С. Моисеев, *Письма ЖЭТФ* **12**, 529 (1970).
13. H. L. Berk, L. D. Pearlstein, J. D. Callen, C. W. Horton, M. N. Rosenbluth, *Phys. Rev. Lett.* **22**, 876 (1969).
14. H. L. Berk, L. D. Pearlstein, J. G. Cordey, *Phys. Fluids* **15**, 891 (1972).
15. A. V. Timofeev, *Plasma Phys.* **14**, 999 (1972).
16. N. G. Van Kampen, *Physica* **21**, 949 (1955) (см. перевод в сборнике «Колебания сверхвысоких частот в плазме», М., ИЛ, 1961).
17. K. G. Budden, *Radio Waves in the Ionosphere*, Cambridge, Cambr. Univ. Press, 1961.
18. Т. Стикс, *Теория плазменных волн*, М., Атомиздат, 1965.
19. В. Л. Гинзбург, *Распространение электромагнитных волн в плазме*, М., «Наука», 1967.
20. Н. С. Ерохин, С. С. Моисеев, *УФН* **109**, 225 (1973).
21. Б. Б. Кадомцев, *УФН* **95**, 111 (1968).
22. S. Yoshikawa, M. A. Rothman, R. M. Sinclair, *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research*, v. 2, Vienna, IAEA, 1966, p. 925.
23. H. Yamato, A. Jiyoshi, M. A. Rothman, R. M. Sinclair, S. Yoshikawa, *Phys. Fluids* **10**, 756 (1967).
24. В. В. Аликеев, В. М. Глаголев, С. А. Морозов, *сборник* ²², p. 877.
25. T. Consoli, *Phys. Lett.* **7**, 254 (1963).
26. J. B. Taylor, *Сборник «Thermonuclear Reactors Based on Mirror Machine Confinement»*, A Report from the Culham Mirror Study Group 1967—1968, CLM-R94.
27. A. K. Nekrasov, *Nucl. Fusion* **10**, 387 (1970).
28. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, М., Физматгиз, 1963.
29. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, т. 2, М., «Наука», 1966.
30. A. V. Timofeev, K. S. Klovovskii, *Plasma Phys.* **12**, 611 (1970).
31. S. Mijsake, T. Sato, K. Takayama, *J. Phys. Soc. Japan* **29**, 769 (1970).
32. Д. Хединг, *Введение в метод фазовых интегралов*, М., «Мир», 1965.
33. M. N. Rosenbluth, R. F. Post, *Phys. Fluids* **8**, 547 (1965).
34. J. G. Cordey, *ibid.* **12**, 1506 (1969).
35. Б. Б. Кадомцев, А. Б. Михайловский, А. В. Тимофеев, *ЖЭТФ* **47**, 2266 (1964).
36. А. В. Тимофеев, В. И. Пистуневич, *сборник «Вопросы теории плазмы»*, под ред. М. А. Леонтовича, т. 5, М., Атомиздат, 1967, стр. 351.
37. R. W. Moir, *Plasma Phys* **11**, 169 (1969); R. A. Dory, W. M. Farr, G. E. Guest, J. D. Callen, *Phys. Fluids* **12**, 2117 (1969).

38. М. С. Иоффе, Б. Б. Кадомцев, УФН 100, 601 (1970).
 39. L. S. Hall, Phys. Rev. D1, 404 (1970).
 40. В. И. Пистуневич, А. В. Тимофеев, ДАН СССР 159, 779 (1964).
 41. А. В. Тимофеев, УФН 102, 185 (1970).
 42. А. В. Тимофеев, ЖТФ 38, 14 (1968).
 43. А. Б. Михайловский, А. В. Тимофеев, ЖЭТФ 44, 919 (1963); R. F. Post, M. N. Rosenbluth, Phys. Fluids 9, 730 (1966).
 44. а) А. Б. Михайловский, Яд. синтез 5, 125 (1965); C. W. Horton, J. D. Callen, M. N. Rosenbluth, Phys. Fluids 14, 2019 (1971); б) D. E. Baldwin, C. O. Beasley, H. L. Berk, W. M. Farr, R. C. Harding, J. E. McCune, L. D. Pearlstein, A. Sen, 4th Conference on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research, Madison, USA, 1971, Report CN 28/G-13.
 45. Л. И. Артеменков, Канд. диссертация (ИАЭ, 1968); E. Thompson, J. G. Cordey, D. R. Sweetman, см. ⁴⁴6, Report CN 28/G-10.
 46. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ 16, 574 (1946).
-