1973 г. Июнь Том 110, вып. 2
УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

538.312

О ЗАКОНАХ СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ И ИМПУЛЬСА ПРИ ИЗЛУЧЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН (ФОТОНОВ) В СРЕДЕ И О ТЕНЗОРЕ ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА В МАКРОСКОПИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

В. Л. Гинзбург

При анализе процессов излучения и поглощения электромагнитных волн в среде в настоящее время широко используются законы сохранения энергии и импульса для «фотонов в среде»— квантов энергии возбуждений, распространяющихся в среде (такие «фотоны в среде» в разных случаях именуются также фотонами, реальными экситонами, экситонами, поляритонами, плазмонами и т. д.). Если, например, речь идет об испускании одного «фотона в среде» при переходе излучающей системы (ею может быть и одна движущаяся заряженная частица) из состояния с энергией E_1 и импульсом $\mathbf{p}_1$ в состояние с энергией E_2 и импульсом $\mathbf{p}_2$, то законы сохранения имеют вид

$$E_1 = E_2 + \hbar\omega, \tag{1}$$

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 + \hbar\mathbf{k}, \tag{2}$$

где $\hbar\omega$ — энергия и $\hbar\mathbf{k}$ — импульс «фотона в среде» (ω — частота и $\mathbf{k}$ — волновой вектор излучения). При этом, например, в изотропной среде

$$k = (\omega/c)\, n\, (\omega), \tag{3}$$

где $n(\omega)$ — показатель преломления на частоте ω. Использование законов сохранения (1) — (2) и связи (3) или ее обобщения на случай анизотропной среды позволяет получить условие черенковского излучения, формулу для эффекта Допплера в среде и некоторые сведения о характере перехода (см. [1] и ниже). Если, к тому же, энергия $\hbar\omega$ и импульс $\hbar k$ малы по сравнению с E_1 и p_1 (а следовательно, и по сравнению с E_2 и p_2), то в хорошем приближении квантование энергии возбуждения не играет роли и, естественно, результат не зависит от квантовой постоянной $\hbar$. В таких условиях квантовый язык, разумеется, не обязателен, хотя и удобен. В классических терминах соответствующие выражения, не зависящие от $\hbar$, получаются в предположении, что излучаемая энергия $\mathscr{E}$ связана с излучаемым импульсом $\mathbf{G}$ соотношением

$$\mathbf{G} = (\mathscr{E} n\, (\omega)/c)\, \mathbf{k}/k. \tag{4}$$

Связь эта в данном контексте эквивалентна дисперсионному уравнению (3). Но если дисперсионное уравнение (3) непосредственно вытекает из уравнений поля и общеизвестно, то в отношении связи энергии $\mathscr{E}$ и импульса **G**, уносимых при излучении электромагнитных волн, этого никак нельзя сказать. Вопрос о связи между **G** и $\mathscr{E}$ может быть последовательно решен лишь на основе выражений для тензора энергии-импульса в макроскопической электродинамике. Между тем проблема тензора энергии-импульса в макроскопической электродинамике дискутируется уже более шестидесяти лет и вплоть до последнего времени (см. [2–5] и указанную там литературу; дополнительно к этой литературе сошлемся на статьи [6, 7]). Сейчас, правда, может считаться в достаточной мере установленным, что против тензора энергии-импульса электромагнитного поля в форме, предложенной Абрагамом, нельзя привести никаких возражений и именно этот тензор является в общем случае правильным. Связь (4) непосредственно получается, однако, не на основе использования тензора Абрагама, а для тензора энергии-импульса в форме Минковского. В чем здесь дело, по существу, выяснено, в частности, в статьях [1, 3, 5, 6], но, как нам кажется, уместно сделать еще несколько замечаний на этот счет. Кроме того, нужно пояснить, почему при квантовом подходе к задаче правильный результат и, конкретно, законы сохранения в форме (1) — (3) получаются вообще без использования какого-либо выражения для тензора энергии-импульса электромагнитного поля.

1. Нас будет интересовать лишь принципиальная сторона вопроса, а не получение наиболее общих выражений. Рассмотрим поэтому квантование электромагнитного поля в среде [8–11] в применении к изотропной немагнитной среде без дисперсии (диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = n^2$) и при наличии лишь одного нерелятивистского заряда (электрона). Сразу же отметим, что, по сути дела, эти ограничения совершенно не существенны. В указанных условиях функция Гамильтона для поля и частицы имеет вид

$$\mathscr{H} = (1/2m)\,[\mathbf{p} - (e/c)\,\mathbf{A}\,(\mathbf{R})]^2 + (1/8\pi)\int (\varepsilon\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2)\,d\mathbf{r}, \tag{5}$$

где $\mathbf{p}$ — импульс и $\mathbf{R}$ — радиус-вектор частицы с массой m и зарядом e, а $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — напряженности электрического и магнитного полей (буквой E ниже обозначается также энергия, но к путанице это привести не должно).

При рассмотрении лишь одной частицы и отсутствии внешнего поля скалярный потенциал можно, без потери общности, считать равным нулю и поэтому положить

$$\mathbf{E} = -\,(1/c)\,\partial\mathbf{A}/\partial t, \qquad \mathbf{H} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}, \qquad \mathrm{div}\,\mathbf{A} = 0. \tag{6}$$

Поле можно считать периодическим для куба с ребром $L = 1$ и использовать разложение

$$\begin{gathered}\mathbf{A} = \sum_{\lambda,\, i=1,\, 2} q_{\lambda i}(t)\,\mathbf{A}_{\lambda i}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{A}_{\lambda 1} = (8\pi)^{1/2}(c/n)\,\mathbf{e}_\lambda \cos(\mathbf{k}_\lambda\mathbf{r}),\\ \mathbf{A}_{\lambda 2} = (8\pi)^{1/2}(c/n)\,\mathbf{e}_\lambda \sin(\mathbf{k}_\lambda\mathbf{r}), \ \ \mathbf{e}_\lambda = 1, \ \ (\mathbf{e}_\lambda\mathbf{k}_\lambda) = 0, \ \ n = \varepsilon^{1/2}.\end{gathered} \tag{7}$$

Фактически имеются два вектора поляризации $\mathbf{e}_\lambda$, но для простоты записи это не отражено в явном виде. Подставляя (7), с учетом соотношений (6), в выражение для энергии поперечного поля, имеем

$$\begin{gathered}\mathscr{H}_{\mathrm{tr}} = (1/8\pi)\int (\varepsilon E^2 + H^2)\,d\mathbf{r} = (1/2)\sum_{\lambda,\, i}(p_{\lambda i}^2 + \omega_\lambda^2 q_{\lambda i}^2),\\ p_{\lambda i} = dq_{\lambda i}/dt = \dot{q}_{\lambda i}, \qquad \omega_\lambda^2 = c^2k_\lambda^2/n^2 = c^2k_\lambda^2/\varepsilon.\end{gathered} \tag{8}$$

Введенные переменные $p_{\lambda i}$, $q_{\lambda i}$, а также $\mathbf{p}$, $\mathbf{R}$ являются каноническими, т. е.

$$\dot{q}_{\lambda i}=\partial\mathscr{H}/\partial p_{\lambda i}=p_{\lambda i},\quad \dot{p}_{\lambda i}=-\partial\mathscr{H}/\partial q_{\lambda i}=-\omega_\lambda^2 q_{\lambda i}+ \\ +(e/c)\,[\mathbf{p}-(e/c)\,\mathbf{A}\,(\mathbf{R})]\,\mathbf{A}_{\lambda i}\,(\mathbf{R}), \tag{9}$$

$$\dot{\mathbf{R}}\equiv\mathbf{v}=\partial\mathscr{H}/\partial\mathbf{p}=\left(\frac{1}{m}\right)\left(\mathbf{p}-\frac{e}{c}\,\mathbf{A}\,(\mathbf{R})\right),\quad \dot{\mathbf{p}}=-\partial\mathscr{H}/\partial\mathbf{R}.$$

Отсюда получается уравнение движения для частицы и уравнения для $q_{\lambda i}$:

$$\ddot{q}_{\lambda i}+\omega_{\lambda i}^2 q_{\lambda i}=\left(\frac{e}{c}\right)(\mathbf{v}\mathbf{A}_{\lambda i}\,(\mathbf{R})). \tag{10}$$

Эти уравнения получаются, конечно, и непосредственно из уравнения для потенциала (заряд считается точечным, δ — дельта-функция):

$$\Delta\mathbf{A}-(\varepsilon/c^2)\,\ddot{\mathbf{A}}=-(4\pi/c)\,\mathbf{j}=-(4\pi/c)\,e\mathbf{v}\delta\,(\mathbf{r}-\mathbf{R}\,(t)). \tag{11}$$

Использование уравнений поля в форме (10) — такой подход обычно называют гамильтоновским методом — в ряде случаев удобно уже в рамках классической теории. Особенно это относится к случаю анизотропной среды [12], но сейчас ограничимся примером черенковского излучения в изотропной среде. При этом в правой части уравнений (10) фигурируют выражения

$$(8\pi)^{1/2}\,(e/n)\,(\mathbf{v}\mathbf{e}_\lambda)\cos\,(\mathbf{k}_\lambda\mathbf{v})\,t,\quad (8\pi)^{1/2}\,(e/n)\,(\mathbf{v}\mathbf{e}_\lambda)\sin\,(\mathbf{k}_\lambda\mathbf{v})\,t;$$

$\mathbf{R}=\mathbf{v}t$ — траектория равномерно движущегося заряда ($\mathbf{v}=\mathrm{const}$). Условие стационарного излучения состоит в наличии резонанса между частотой действующей «силы», стоящей в правой части уравнений (10), и собственной частотой осцилляторов поля $\omega_\lambda=ck_\lambda/n$. Отсюда для черенковского излучения сразу же получаем условие $\mathbf{k}_\lambda\mathbf{v}=\omega_\lambda=ck_\lambda/n$, которое тождественно с обычным условием

$$\cos\,\theta_0=c/nv, \tag{12}$$

где θ_0 — угол между волновым вектором $\mathbf{k}$ и скоростью заряда $\mathbf{v}$. Формула Тамма—Франка для мощности черенковского излучения также легко получается в результате элементарного интегрирования уравнений (10) и последующего вычисления энергии поля $\mathscr{H}_{\mathrm{tr}}$.

Если использование гамильтоновского метода в классической электродинамике — некоторый прием, имеющий те или иные преимущества и недостатки по сравнению с другими способами решения уравнений поля, то при квантовании применение гамильтоновского формализма имеет, можно сказать, принципиальное значение. Какие бы рафинированные методы квантования сейчас ни применялись, в основе их лежит сведе́ние задачи о квантовании поля (в частности, электромагнитного поля) к квантованию механической системы. В гамильтоновском методе эта сторона дела выступает особенно выпукло и непосредственно. В самом деле, после введения канонических переменных $p_{\lambda i}$ и $q_{\lambda i}$ функция Гамильтона (5) приобретает такой же вид, как для совокупности бесконечного числа осцилляторов, взаимодействующих с механической подсистемой, характеризуемой каноническими переменными $\mathbf{p}$ и $\mathbf{R}$. Квантование этой механической подсистемы, т. е. переход от классической механики к квантовой, связано с рассмотрением величин $\mathbf{p}$ и $\mathbf{R}$ как операторов, удовлетворяющих условиям коммутации $p_jR_k-R_kp_j=-i\hbar\delta_{jk}$ ($j,\ k=1,\ 2,\ 3$; $\delta_{kk}=1$, $\delta_{j,\,k\neq j}=0$). Совершенно аналогично квантование электромагнитного поля в среде связано с использованием коммутационных соотношений

$$p_{\lambda j}q_{\lambda k}-q_{\mu k}p_{\lambda j}=-i\hbar\delta_{\lambda\mu}\delta_{jk}\qquad (j,\ k=1,\ 2). \tag{13}$$

При отсутствии зарядов или при пренебрежении взаимодействием поля с зарядами функция Гамильтона для поля имеет вид (8) и, как хорошо известно из квантовой механики, собственные значения соответствующего оператора Гамильтона $\mathscr{H}_{\mathrm{tr}}$ равны *)

$$\mathscr{H}_{\mathrm{tr}}\Psi(q_{\lambda i}) = E_{\mathrm{tr}}\Psi(q_{\lambda i}), \qquad E_{\mathrm{tr}} = \sum_{\lambda, i} n_{\lambda i}\hbar\omega_\lambda \qquad (n_{\lambda i} = 0, 1, 2, 3, \ldots). \quad (14)$$

Тем самым вводятся кванты энергии, равные $\hbar\omega_\lambda$. Испускание или поглощение одного такого кванта отвечает переходу поля в состояние, отличающееся увеличением или уменьшением на единицу одного из чисел $n_{\lambda i}$. Вероятность процессов испускания и поглощения при использовании стандартной квантовомеханической теории возмущений [13] определяется матричными элементами энергии взаимодействия, в данном случае равной (см. (5); член энергии взаимодействия, пропорциональный A^2, обусловливает двухквантовые переходы, которыми сейчас не интересуемся)

$$\mathscr{H}' = -(e/mc)\,\mathbf{pA}(R) =$$
$$= -[(2\pi)^{1/2}e/m]\sum_\lambda[(\mathbf{pe}_\lambda)/n][(q_{\lambda 1} - iq_{\lambda 2})e^{i\mathbf{k}_\lambda\mathbf{R}} + (q_{\lambda 1} + iq_{\lambda 2})e^{-i\mathbf{k}_\lambda\mathbf{R}}]. \quad (15)$$

Заметим, что при учете дисперсии нужно считать, что $n = n(\omega_\lambda)$. В рассматриваемом простейшем случае (5) гамильтониан невозмущенной задачи имеет вид $\mathscr{H}_0 = (p^2/2m) + \mathscr{H}_{\mathrm{tr}}$, а его собственные функции таковы (см. также (14)):

$$\Psi(\mathbf{R}, q_{\lambda i}) = e^{i\mathbf{pR}/\hbar}\,\Psi_{n_{\lambda i}}(q_{\lambda i}). \quad (16)$$

Матричные элементы $\int \Psi_1^*\mathscr{H}'\Psi_2\,d\mathbf{R}\,dq_{\lambda i}$ для возмущения (15) и с волновыми функциями (16) отличны от нуля лишь для одноквантовых переходов (например, $\int \Psi^*_{n_{\lambda i}=0}q_{\lambda i}\Psi_{n_{\lambda i}=1}dq_{\lambda i} = (\hbar/2\omega_\lambda)^{1/2}$) и при выполнении одного из равенств $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 \pm \hbar\mathbf{k}_\lambda = 0$. Но эти равенства как раз и представляют собой закон сохранения импульса соответственно при испускании (знак минус) или поглощении (знак плюс) одного кванта с энергией $\hbar\omega_\lambda$.

Таким образом, закон сохранения импульса (2) при испускании «фотона в среде» получается без всяких дополнительных предположений и без выяснения вопроса о виде оператора импульса для поля. Закон сохранения энергии (1) также автоматически следует при применении нестационарной теории возмущений, позволяющей вычислить интенсивность излучения. Очевидное обобщение гамильтониана для частицы в поле на релятивистский случай с использованием уравнения Клейна — Гордона (спин нуль), уравнения Дирака (спин 1/2) или уравнений для частиц с более высокими спинами позволяет вычислить интенсивность черенковского излучения для частицы при любой скорости, а при учете спина — и с любым спином (см. [1] и указанную там литературу).

Законы сохранения (1), (2) при учете связи (3) и с

$$E_{1,2} = (m^2c^4 + c^2p_{1,2}^2)^{1/2}, \qquad \mathbf{p}_1 = m\mathbf{v}_1/[1 - (v_1^2/c^2)]^{1/2}$$

дают условие излучения

$$\cos\theta_\lambda = (c/nv_1)\{1 + (\hbar\omega_\lambda/2mc^2)(n^2 - 1)[1 - (v_1^2/c^2)]^{1/2}\}, \quad (17)$$

---

*) Для того чтобы избавиться от нулевой энергии, оператор $\mathscr{H}_{\mathrm{tr}}$ записывается в форме $\mathscr{H}_{\mathrm{tr}} = (1/2)\sum_{\lambda,j}(p_{\lambda j} - i\omega_\lambda q_{\lambda j})(p_{\lambda j} + i\omega_\lambda q_{\lambda j})$, которая в классической области эквивалентна выражению (8).

где θ_λ — угол между $\mathbf{k}_\lambda$ и $\mathbf{v}_1$. Очевидно, если

$$(\hbar\omega_\lambda/2mc^2)(n^2-1)[1-(v_1^2/c^2)]^{1/2} \ll 1, \tag{18}$$

то выражение (17) сводится к классическому черенковскому условию (12) с $v \approx v_1 \approx v_2$.

При пренебрежении отдачей (т. е. при условии (18)) можно сразу же записать

$$\Delta E = E_2 - E_1 = (\partial E/\partial \mathbf{p})\,\Delta\mathbf{p} = (c^2\mathbf{p}/E)\,\Delta\mathbf{p} = \mathbf{v}\Delta\mathbf{p}, \quad \Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1.$$

Полагая здесь, в согласии с (1) — (3), $\Delta E = \hbar\omega$ и $\Delta\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} = (\hbar\omega n/c)\,\mathbf{k}/k$, непосредственно получаем условие (12) для угла θ_0 между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{v}$. Отсутствие в этом условии квантовой постоянной $\hbar$, конечно, не случайно. Дело в том, что тот же результат получается, если положить $\Delta E = \mathscr{E}$ и $\Delta\mathbf{p} = (\mathscr{E}n/c)\,\mathbf{k}/k$, т. е. использовать связь (4) между излучаемыми энергией $\mathscr{E}$ и импульсом $\mathbf{G}$, причем сами значения $\mathscr{E}$ и $\mathbf{G}$ не квантуются (являются классическими величинами). Использование законов сохранения (1) — (3) в применении к излучателям с внутренними степенями свободы приводит к формулам для эффекта Допплера в среде [1, 14]. При этом уже из одних законов сохранения выясняется, что при нормальном эффекте Допплера (при $\theta > \theta_0$) излучатель с испусканием фотона переходит с верхнего уровня на нижний, а при аномальном эффекте Допплера (при $\theta < \theta_0$) излучение происходит с возбуждением излучателя, который переходит с нижнего уровня на верхний уровень внутреннего движения (энергия фотона при этом черпается из энергии поступательного движения). В этом отношении законы сохранения дают больше чем классическое интерференционное условие, также приводящее к выражению (12) и формуле Допплера. Но это уже другая тема (см. [1] и указанную там литературу).

Здесь же мы хотели продемонстрировать, что квантовая теория излучения в среде непосредственно приводит к законам сохранения (1) — (2) с использованием связи (3). Это справедливо, конечно, не только в случае самой элементарной (но, по существу, вполне точной) формы теории, развитой в работе [8] и выше, но и при использовании ковариантных формулировок [9-11]. То обстоятельство, что результаты не зависят от каких-либо предположений о форме выражений для импульса поля, не может при этом вызвать особое удивление. Действительно, выше использовались как уравнения поля (в частности, именно они приводят к связи (3) для частоты ω и волнового вектора $\mathbf{k}$ излучения), так и выражение для функции Гамильтона (5). Вместе с тем электродинамические законы сохранения как раз и следуют из уравнений поля (см., в частности, ниже), а выражение для функции Гамильтона определяет вид гамильтониана.

До какой степени в остальном «математика умнее человека» и, конкретно, несущественна связь между используемыми волновыми функциями и собственными функциями оператора импульса поля, ясно видно уже из следующего факта. При разложении поля по стоячим волнам (см. (7)) в состояниях, отвечающих собственным значениям оператора энергии (см. (14)), среднее значение импульса поля равно нулю, а собственные функции энергии не являются собственными функциями оператора импульса. Сказанное сразу же очевидно, поскольку в стоячей волне поток энергии равен нулю. Для вакуума в том же легко убедиться и формально, ибо в этом случае выражение для импульса поля хорошо известно и равно $\mathbf{G} = (1/4\pi c)\int [\mathbf{EH}]\,d\mathbf{r}$. Если стремиться с самого начала работать с фотонами с энергией $\hbar\omega$ и импульсом $\hbar\mathbf{k}$, то нужно разлагать поле (потенциал) по бегущим волнам, как это обычно и делается (см., например, [13]; мы так не поступили, чтобы подчеркнуть независимость результата от «вида» квантования, а также в силу того, что разложение по стоячим волнам более непосредственно ведет к каноническим переменным [13]). Независимо от вопроса о выборе выражения для импульса поля $\mathbf{G}$ в среде, сказанное относится и к случаю поля в среде, поскольку выражения Минковского и Абрагама для импульса поля оба пропорциональны $(1/4\pi c)\int[\mathbf{EH}]\,d\mathbf{r}$ и отличаются лишь множителем (в случае Абрагама этот множитель равен 1, а в случае Минковского он равен $\varepsilon = n^2$; см. ниже).

Сделанные замечания не оставляют, на наш взгляд, никаких сомнений в правильности результатов квантовой теории излучения в среде и, в частности, в справедливости выводов, связанных с использованием соотношений (1) — (3). Но все эти результаты и выводы должны, конечно, получаться и при правильном применении выражений для тензора энергии-импульса поля в среде. Это и будет продемонстрировано ниже.

2. Предварительно, однако, приведем несколько соотношений и выражений, связанных с получением и использованием тензора энергии-импульса в макроскопической электродинамике (подробнее см. [2-5]).

Для простейшего случая, обсуждавшегося выше (покоящаяся немагнитная среда без дисперсии), уравнения поля имеют вид

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = (4\pi/c)\,\mathbf{j} + (\varepsilon/c)\,\partial\mathbf{E}/\partial t, \tag{19}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -(1/c)\,\partial\mathbf{H}/\partial t, \tag{20}$$

$$\operatorname{div}(\varepsilon\mathbf{E}) = 4\pi\rho, \tag{21}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0. \tag{22}$$

Умножим уравнение (19) скалярно на $\mathbf{E}$, а уравнение (20) — на $\mathbf{H}$. Вычитая получающиеся выражения одно из другого и используя тождество $\mathbf{E}\operatorname{rot}\mathbf{H} - \mathbf{H}\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\operatorname{div}[\mathbf{EH}]$, получаем

$$(1/8\pi)\,[\partial(\varepsilon E^2 + H^2)/\partial t] + \mathbf{jE} = -\operatorname{div}\mathbf{S},\quad \mathbf{S} = (c/4\pi)\,[\mathbf{EH}]. \tag{23}$$

Эта теорема Пойнтинга отвечает закону сохранения энергии и приводится в любом учебнике. Вывод из уравнений поля закона сохранения импульса несколько менее популярен. Для его получения умножим уравнение (19) векторно на $\mathbf{H}$, а уравнение (20) также векторно на $\mathbf{E}$. В результате сложения получающихся выражений имеем

$$\frac{1}{4\pi}\{[\mathbf{H}\operatorname{rot}\mathbf{H}] + [\mathbf{E}\operatorname{rot}\mathbf{E}]\} = -\frac{1}{c}[\mathbf{jH}] - \frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{EH}] - \frac{\varepsilon-1}{4\pi c}\left[\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\mathbf{H}\right].$$

Прибавим теперь к правой и левой частям этого соотношения выражения $-\rho\mathbf{E} - [(\varepsilon-1)/4\pi c]\,[\mathbf{E}\,\partial\mathbf{H}/\partial t]$, причем в левой части преобразуем этот добавок с помощью (20) и (21) к виду $-\mathbf{E}\operatorname{div}(\varepsilon\mathbf{E}) + [(\varepsilon-1)/4\pi]\times$ $\times[\mathbf{E}\operatorname{rot}\mathbf{E}]$. В результате получается

$$\frac{1}{4\pi}\{[\mathbf{H}\operatorname{rot}\mathbf{H}] + \varepsilon[\mathbf{E}\operatorname{rot}\mathbf{E}] - \mathbf{E}\operatorname{div}\varepsilon\mathbf{E}\} + \frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{EH}] =$$

$$= -\left\{\rho\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{jH}] + \frac{\varepsilon-1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{EH}]\right\}. \tag{24}$$

В правой части здесь фигурирует плотность лоренцевой силы $f^{Л} = \rho\mathbf{E} + (1/c)\,[\mathbf{jH}]$ и плотность объемной силы

$$\mathbf{f}^{A} = [(\varepsilon-1)/4\pi c]\,\partial\,[\mathbf{EH}]/\partial t, \tag{25}$$

которую иногда называют силой Абрагама. Знак минус в правой части (24) связан с тем, что $\mathbf{f}^{Л} + \mathbf{f}^{A}$ — это сила, действующая на среду, уравнение же (24) определяет баланс сил и импульса в применении к полю, причем

$$\mathbf{g}^{\mathrm{A}} = (1/4\pi c)\,[\mathbf{EH}] = \mathbf{S}/c^2 \tag{26}$$

— плотность импульса поля (именно такое выражение, одинаковое и в вакууме, и в среде, отвечает выбору тензора энергии-импульса в форме Абрагама).

Если считать, для простоты, среду однородной (при этом $\varepsilon = \mathrm{const}$) *), то уравнение (24) особенно легко преобразовать к стандартному виду

$$\partial\sigma_{\alpha\beta}/\partial x_\beta - \partial g^{\mathrm{A}}_\alpha/\partial t = f_\alpha,\quad f_\alpha = f^{\text{Л}}_\alpha + f^{\mathrm{A}}_\alpha \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3), \tag{27}$$

где $\sigma_{\alpha\beta}$ — максвелловский тензор напряжений

$$\sigma_{\alpha\beta} = (1/4\pi)\,[\varepsilon E_\alpha E_\beta + H_\alpha H_\beta - (1/2)\,(\varepsilon E^2 + H^2)\,\delta_{\alpha\beta}]. \tag{28}$$

Итак, закон сохранения импульса (27) следует из уравнений поля без дополнительных предположений. Объединяя этот закон и закон сохранения энергии (23) в одно четырехмерное соотношение — закон сохранения энергии-импульса, приходим вместе с тем к выражению для тензора энергии-импульса T_{ik}:

$$T^{\mathrm{A}}_{ik} = \begin{pmatrix} \sigma_{\alpha\beta} & -ic\mathbf{g}^{\mathrm{A}} \\ -\frac{i}{c}\mathbf{S} & W \end{pmatrix},\quad W = \frac{\varepsilon E^2 + H^2}{8\pi},\quad \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\,[\mathbf{EH}] = c^2\mathbf{g}^{\mathrm{A}} \tag{29}$$

$$(i, k = 1, 2, 3, 4;\ \alpha, \beta = 1, 2, 3;\ x_4 = ict),$$

$$\partial T^{\mathrm{A}}_{ik}/\partial x_k = f_i,\quad f_\alpha = f^{\text{Л}}_\alpha + f^{\mathrm{A}}_\alpha,\quad f_4 = (i/c)\,(\mathbf{jE}). \tag{30}$$

Тензор (29) представляет собой тензор Абрагама для покоящейся среды; для движущейся среды этот тензор выглядит несколько сложнее (см. [3, 5, 7]).

Тензор Минковского в тех же предположениях, как и в случае (29), (30), имеет вид

$$T^{\mathrm{M}}_{ik} = \begin{pmatrix} \sigma_{\alpha\beta} & -ic\mathbf{g}^{\mathrm{M}} \\ -\frac{1}{c}\mathbf{S} & W \end{pmatrix},\quad \mathbf{g}^{\mathrm{M}} = \frac{\varepsilon}{4\pi c}\,[\mathbf{EH}] = \varepsilon\mathbf{g}^{\mathrm{A}}, \tag{31}$$

$$\partial T^{\mathrm{M}}_{ik}/\partial x_k = f^{\text{Л}}_i,\quad f^{\text{Л}}_\alpha = \rho E_\alpha + (1/c)\,[\mathbf{jH}]_\alpha,\quad f^{\text{Л}}_4 = f_4 = \frac{i}{c}\,(\mathbf{jE}). \tag{32}$$

Совершенно очевидно, что по крайней мере с формальной точки зрения законы сохранения (30) и (32) тождественны: они отличаются лишь разбиением одной и той же суммы на слагаемые. Конкретно, если силу Абрагама (25) перенести из правой в левую часть равенства и объединить с $\partial T^{\mathrm{A}}_{ik}/\partial x_k$, то как раз получится выражение $\partial T^{\mathrm{M}}_{ik}/\partial x_k$ и тензором энергии-импульса можно будет считать тензор Минковского. Подобная неоднозначность в выборе выражения для тензора энергии-импульса тем менее удивительна, что она носит весьма общий характер и имеет место уже в отношении теории поля в вакууме (см., например, [16], § 32). К тому же, поле в среде является незамкнутой системой —«замкнута» лишь система, состоящая из поля и среды, последняя характеризуется своим тензором энергии-импульса T^{c}_{ik}. Для суммарного тензора $T_{ik} = T^{\mathrm{c}}_{ik} + T^{\text{ЭМ}}_{ik}$, где $T^{\text{ЭМ}}_{ik}$ — тензор поля (например, тензор (29)), имеет место закон сохранения $\partial T_{ik}/\partial x_k = 0$, но ни тензор T_{ik}, ни, тем более, его части T^{c}_{ik} и $T^{\text{ЭМ}}_{ik}$ в общем

*) В неоднородной среде появляется также сила с плотностью $\mathbf{f}^{\varepsilon} = -(E^2/8\pi)\,\nabla\varepsilon$, а при учете сжимаемости среды еще одна сила (см. [15], §§ 15 и 56; вообще нужно подчеркнуть, что закона сохранения типа (27) еще недостаточно для получения однозначного выражения для плотности силы). При переходе от (24) к (27) удобно воспользоваться тождеством $[\mathbf{a}\ \mathrm{rot}\ \mathbf{a}] = (1/2)\,\nabla a^2 - (\mathbf{a}\nabla)\,\mathbf{a}$.

виде однозначно не определяются. Совсем другое дело — плотность силы, которая является, по крайней мере в принципе, однозначной и измеримой величиной. В этой связи и судьба «спора» о тензорах Абрагама и Минковского в конечном счете решается в результате выбора выражения для силы. Сила Абрагама (25) генетически связана с силой магнитного поля, действующего на ток смещения. В реальности этой силы невозможно сомневаться, несмотря на то, что она непосредственно все еще не измерена *). Тем самым однозначно решается вопрос «в пользу» тензора Абрагама. В статье [5] подробно показано также, что различные встречавшиеся в литературе возражения против выбора тензора Абрагама необоснованны. Тот факт, что против выбора тензора $T_{ik}^{\text{ЭМ}}$ в форме Абрагама нельзя привести никаких существенных доводов, подчеркивается и в статье [3]. Ограничимся здесь упоминанием одного из аргументов в пользу выбора тензора Минковского, а не Абрагама. Именно, при выборе тензора Минковского для квазимонохроматического цуга волн в любой системе отсчета [7] поток энергии $\mathbf{S} = W\mathbf{v}_{\text{гр}}$, где $\mathbf{v}_{\text{гр}}$ — групповая скорость. Аналогично, именно для тензора Минковского $\sigma_{\alpha\beta} = -g_\alpha^{\text{M}} v_{\text{гр},\,\beta}$ (см. [17], стр. 114, и указанную там литературу). При выборе тензора Абрагама подобные соотношения не имеют места, и это почему-то считается каким-то минусом или трудностью. На самом деле, как это особенно подробно продемонстрировано в [5], все дело опять-таки связано с наличием, при использовании тензора Абрагама, объемной силы $\mathbf{f}^{\text{A}}$. В движущейся среде такая сила производит работу над средой и поэтому соотношение $\mathbf{S} = W\mathbf{v}_{\text{гр}}$ не может и не должно соблюдаться. Ситуация здесь вполне аналогична той, какая имеет место в покоящейся среде **), когда соотношение $\mathbf{S} = W\mathbf{v}_{\text{гр}}$ нарушается при наличии поглощения и вообще каких-либо источников или «стоков» энергии в среде. В применении к потоку плотности импульса $g_\alpha v_{\text{гр},\beta}$ сказанное относится уже к случаю прозрачной покоящейся среды, так как соотношение $\sigma_{\alpha\beta} = -g_\alpha v_{\text{гр},\,\beta}$ может иметь место только при отсутствии объемной силы. Последнему требованию как раз и удовлетворяет тензор Минковского (заряды и токи считаем отсутствующими), для которого $\partial T_{ik}^{\text{M}}/\partial x_k = 0$.

Все сказанное позволяет считать тензор Абрагама «правильным», но, как нам представляется, объявить тензор Минковского «неправильным» можно, лишь подходя к проблеме несколько формально. Фактически же в большинстве ситуаций результаты, получаемые на основе использования тензоров Абрагама и Минковского, совершенно тождественны. Это дает возможность в соответствующих случаях не только пользоваться тензором Минковского, но даже делает это вполне целесообразным, если тем самым достигаются какие-то упрощения. Поэтому тензор Минковского T_{ik}^{M} вряд ли следует объявить «ошибочным», скорее он представляет собой некоторое вспомогательное понятие, которое (подобно, скажем, псевдотензорам) вполне может использоваться. Тем самым отнюдь не наносится какой-либо ущерб «престижу» более фундаментального и, если угодно, истинного тензора энергии-импульса электромагнитного поля в среде T_{ik}^{A}.

3. Анализ вопроса о законах сохранения энергии и импульса при излучении электромагнитных волн (фотонов) в среде подтверждает и иллю-

*) Соответствующие возможности обсуждаются в статьях [3] (стр. 31) и [5]. Несомненно, что, хотя бы «для спокойствия», измерение силы Абрагама вполне оправдано, и вместе с тем в возможности таких измерений на современном техническом уровне трудно сомневаться.

**) В этом случае объемная сила, действующая на среду, работы не производит, так как эта работа равна произведению силы на скорость среды.

стрирует только что сделанное замечание. В самом деле, посмотрим, чему равен импульс цуга волн в среде на основе использования тензоров Абрагама и Минковского, а затем используем в обоих случаях законы сохранения.

Рассмотрим распространяющуюся в среде плоскую волну:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= (1/2)\,(\mathbf{E}_0 e^{-i(\mathbf{kr}-\omega t)} + \mathbf{E}_0^* e^{-i(\mathbf{kr}-\omega t)}),\\ \mathbf{H} &= (1/2)\,(\mathbf{H}_0 e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)} + \mathbf{H}_0^* e^{-i(\mathbf{kr}-\omega t)}).\end{aligned} \tag{33}$$

Если волна квазимонохроматическая, то $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{H}_0$ являются медленными (по сравнению с периодом $2\pi/\omega$) функциями времени t. Однако, для простоты, мы не учитываем дисперсию и поэтому будем считать амплитуды $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{H}_0$ постоянными, но цуг волн имеющим сечение с площадью 1 и длину L (учет дисперсии см., например, в книге [17], § 3). Подставляя (33) в уравнения поля (19), (20) с вещественным $\varepsilon = \mathrm{const}$ *) и при $\mathbf{j} = 0$, имеем

$$\mathbf{E}_0 = -(c/\varepsilon\omega)\,[\mathbf{kH}_0],\quad \mathbf{H}_0 = (c/\omega)\,[\mathbf{kE}_0]. \tag{34}$$

Отсюда, как условие существования нетривиального решения, получаем дисперсионное уравнение (3) с $n^2 = \varepsilon$. Далее, для средних по времени (усредненных по высокой частоте) величин получаем (см. (29) и (31))

$$\overline{W} = \overline{(\varepsilon E^2 + H^2)}/8\pi = (1/16\pi)\,(\varepsilon\mathbf{E}_0\mathbf{E}_0^* + \mathbf{H}_0\mathbf{H}_0^*) = (n^2/8\pi)\,(\mathbf{E}\mathbf{E}_0^*),$$

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{S}} = (c/4\pi)\,\overline{[\mathbf{EH}]} = (c/16\pi)\,\{[\mathbf{E}_0^*\mathbf{H}_0] + [\mathbf{E}_0\mathbf{H}_0^*]\} =\\ = (cn/8\pi)\,(\mathbf{E}_0\mathbf{E}_0^*)\,\mathbf{k}/k,\quad \overline{\mathbf{g}^{\mathrm{A}}} = \overline{\mathbf{S}}/c^2,\quad \overline{\mathbf{g}^{\mathrm{M}}} = n^2\overline{g^{\mathrm{A}}},\end{aligned} \tag{35}$$

или

$$\mathbf{G}^{\mathrm{A}} = \overline{\mathbf{g}^{\mathrm{A}}}L = (\overline{W}L/cn)\,\mathbf{k}/k = (\mathscr{E}/cn)\,\mathbf{k}/k, \tag{36}$$

$$\mathbf{G}^{\mathrm{M}} = \overline{\mathbf{g}^{\mathrm{M}}}L = (\overline{W}Ln/c)\,\mathbf{k}/k = (\mathscr{E}n/c)\,\mathbf{k}/k, \tag{37}$$

где $\mathbf{G}^{\mathrm{A,M}}$ и $\mathscr{E} = \mathscr{E}^{\mathrm{A}} = \mathscr{E}^{\mathrm{M}}$ — соответственно импульсы и энергия цуга волн.

Связь (37) совпадает с (4) и приводит к правильным выражениям при использовании законов сохранения энергии и импульса. Уже отсюда ясно, и это, конечно, подтверждается вычислениями (они были проделаны, например, в работе [9]), что для получения квантов (фотонов в среде) с энергией $\hbar\omega$ и импульсом $(\hbar\omega n/c)\,\mathbf{k}/k$ при стандартном квантовании нужно использовать тензор энергии-импульса в форме Минковского. Если же пользоваться тензором Абрагама, то как в классическом случае (см. (36)), так и при квантовании и учете лишь импульса $\mathbf{G}^{\mathrm{A}}$ получается заведомо неверный результат. Фактически же, как и следовало ожидать, использование тензора Абрагама приводит к правильному результату, но нужно учесть также действие силы Абрагама на среду, имеющее место в процессе испускания излучения (то же относится к процессу поглощения). Сделать это действительно необходимо, поскольку при излучении цуга волн (или, например, при его вхождении в среду) сила $\mathbf{f}^{\mathrm{A}}$ (см. (25)) отлична от нуля. При этом нас интересует не сама сила, а импульс силы

$$\begin{aligned}\mathbf{F}^{\mathrm{A}} = \frac{n^2-1}{4\pi c}\int \frac{\partial}{\partial t}\,[\mathbf{EH}]\,dt\,d\mathbf{r} = \frac{n^2-1}{16\pi c}\,\{[\mathbf{E}_0\mathbf{H}_0^*] + [\mathbf{E}_0^*\mathbf{H}_0]\}\,L =\\ = \frac{(n^2-1)\,n}{8\pi c}\,(\mathbf{E}_0\mathbf{E}_0^*)\,L\,\frac{\mathbf{k}}{k} = \frac{(n^2-1)\,\mathscr{E}}{cn}\,\frac{\mathbf{k}}{k},\end{aligned} \tag{38}$$

где отброшены осциллирующие члены и тем самым речь идет о средней

*) Если быть точным, то нужно добавить, что среда считается не только непоглощающей (вещественность ε), но и прозрачной (условие $\varepsilon > 0$).

по времени величине *). Отметим, что можно с самого начала рассматривать более или менее произвольный цуг волн и вычислять, а затем и сравнивать интегральные величины $\mathcal{E} = \int W\,dt\,d\mathbf{r}$, $\mathbf{G}^{A,M} = \int \mathbf{g}^{A,M}\,dt\,d\mathbf{r}$ и $\mathbf{F}^A$. Соотношения между этими величинами остаются такими же, как в (36) — (38) для цуга с резкими границами.

Очевидно, что в силу (36) — (38)

$$\mathbf{G}^A + \mathbf{F}^A = \mathbf{G}^M = (\mathcal{E}n/c)\,\mathbf{k}/k. \tag{39}$$

В плане применения закона сохранения энергии и импульса обычно существенны лишь два момента: во-первых, какие энергии и импульс теряет при излучении (и получает при поглощении) излучающая частица или «система»; во-вторых, нужно знать, конечно, какая энергия поля излучается в данном направлении. Вопрос же о том, как распределяется или перераспределяется импульс излучения, с этой точки зрения не важен. В рассматриваемом случае частица теряет импульс $-\mathbf{G}^M$, а поле в среде приобретает импульс $\mathbf{G}^A$ и среда получает импульс силы $\mathbf{F}^A = \mathbf{G}^M - \mathbf{G}^A$. Для среды — «пылевидной материи» под действием силы $\mathbf{f}^A$ частицы среды ускоряются и $\mathbf{F}^A = \mathbf{G}^c$ — импульс среды. В общем же случае состояние среды определяется соответствующими уравнениями движения, например уравнениями теории упругости или уравнениями гидродинамики, в которых плотность объемной силы равна $\mathbf{f}^A$, а, в принципе, может содержать и какие-то другие члены. При этом, конечно, нельзя считать, что $\mathbf{F}^A = \mathbf{G}^c = \overline{\mathbf{g}^c}L$, где $\mathbf{g}^c$ — плотность импульса среды (именно это обстоятельство справедливо подчеркивается в статье [5]) **). Тем самым нельзя также, вообще говоря, утверждать, что плотность импульса Минковского $\mathbf{g}^M = \mathbf{g}^A + \mathbf{g}^c$. Но, как мы видели, в отношении интегральных величин — импульсов и импульса силы $\mathbf{F}^A$ — результат (39) совершенно не зависит от свойств среды и остается верным и в предположении (вообще говоря, неправильном), что $\mathbf{g}^M = \mathbf{g}^A + \mathbf{g}^c$. Тем самым использование тензора Минковского в данном случае фактически оправдано, так как не только приводит к правильному результату, но и ведет к цели более непосредственно, без рассмотрения действия объемной силы. Правда, учет действия этой силы в рамках классического подхода весьма прост (см. выше), но квантово-механически он оказался бы, по-видимому, довольно громоздким делом. Так или иначе, насколько нам известно, такое квантовое рассмотрение еще не проведено. В тех нестационарных задачах, для решения которых преимущества или даже необходимость применения тензора Абрагама имеют место, соответствующий квантовый анализ был бы оправдан (хотя,

*) Сила действует лишь пока волна (цуг) входит в среду или излучается. При распространении же цуга данной длины в однородной среде импульс силы $\mathbf{F}^A$ равен нулю.

**) Аналогичная ситуация имеет место в случае фононов. Распределение звука в твердом теле не сопровождается перемещением массы, и в этой связи импульс звуковых волн равен нулю (здесь не учитывается релятивистский эффект — тот факт, что цуг звуковых волн с энергией $\mathcal{E}$ имеет массу $\mathcal{E}/c^2$ и, следовательно, обладает импульсом $(\mathcal{E}/c^2)\,s$, где s — скорость звука). Поэтому и при квантовании получится, что кванты звука — фононы имеют энергию $\hbar\omega$ и равный нулю импульс (импульсом $(\hbar\omega/c^2)\,s$ пренебрегаем). Утверждение же, что импульс фонона (скажем, при его излучении электроном) равен $\hbar\mathbf{k} = (\hbar\omega/s)\,\mathbf{k}/k$, на самом деле означает, что при излучении фонона решетка как целое получает импульс $\hbar\mathbf{k}$ (процессов переброса здесь не учитываем). С точки зрения применения законов сохранения при излучении, поглощении и рассеянии звука ничего, однако, не меняется, если считать, как это обычно и делается, что сами фононы имеют энергию $\hbar\omega$ и импульс $\hbar\mathbf{k} = (\hbar\omega/s)\,\mathbf{k}/k$ (сделанным замечанием автор обязан Л. В. Келдышу). Кстати, импульс поля по Абрагаму $G^A = \mathcal{E}/cn = (\mathcal{E}/c^2)\,c/n$ (см. (36)), т. е. имеет такой же смысл, как и «истинный» импульс фонона $(\mathcal{E}/c^2)\,s$, поскольку скорость электромагнитного импульса равна c/n (дисперсией было пренебрежено).

конечно, и не необходим, пока задача является классической, что, вероятно, справедливо при любой реальной постановке вопроса об измерении силы Абрагама; см в этой связи [3, 5]) Что же касается обсуждавшегося выше применения законов сохранения энергии и импульса при излучении «фотонов в среде», то, как нам представляется, вопрос может считаться вполне ясным уже в свете сделанных замечаний. Кстати, эти замечания не новы, но, как нам казалось, их было все же целесообразно здесь привести и сопоставить, чтобы несколько дополнить в этом отношении содержащийся в статье [5], а также в статьях [2, 3] анализ вопроса о выборе тензора энергии импульса в макроскопической электродинамике

Физический институт им П Н Лебедева
АН СССР

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1 В Л Гинзбург, УФН 69, 535 (1959)
2. I Brevik, Mat Fys Medd Dan Vid Selsk 37, No 11 (1970)
3 I Brevik, ibid 37, No 13 (1970)
4 C Møller, The Theory of Relativity, Oxford, Clarendon Press, 1972
5 Д В Скобельцын, УФН 110, 253 (1973) (см в этом же выпуске УФН)
6 G Gyorgyi, Am J Phys 28, 85 (1960)
7 О С Мергелян и С Н Столяров, Изв АН Арм ССР (Физика) 5, 309 (1970)
8 В Л Гинзбург, ЖЭТФ 10, 589 (1940), J Phys USSR 2, 441 (1940)
9 J M Jauch, K M Watson, Phys Rev 74, 950, 1485 (1948), 75, 1249 (1949)
10 М И Рязанов, ЖЭТФ 32, 1244 (1957), 34, 1258 (1958)
11 O Brevik, B Lautrup, Mat Fys Medd Dan Vid Selsk 38, No 1 (1970)
12 В Л Гинзбург, ЖЭТФ 10, 601 (1940), J Phys USSR 3, 95 (1940)
13 В Гайтлер, Квантовая теория излучения, М , ИЛ, 1956
14 В Л Гинзбург, И М Франк, ДАН СССР 56, 583 (1947)
15 Л Д Ландау, Е М Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, М , Гостехиздат, 1957
16 Л Д Ландау, Е М Лифшиц, Теория поля, М , «Наука», 1967.
17 В М Агранович, В Л Гинзбург, Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов, М , «Наука», 1965