

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

538.312

О ТЕНЗОРЕ ИМПУЛЬС-ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ*Д. В. Скобельцын*

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|---|-----|
| Введение | 253 |
| 1. Импульс фотона и законы сохранения | 255 |
| 2. Теорема Максвелла, пондеромоторные силы и электромагнитное количество движения | 258 |
| 3. Об опытах по измерению светового давления | 263 |
| 4. Тензор импульс-энергии поля | 265 |
| 5. Две модели идеализированной диэлектрической среды | 269 |
| 6. О потоке энергии и скорости распространения энергии световой волны | 274 |
| 7. О критерии Мёллера | 279 |
| 8. О моменте количества движения статического поля | 281 |
| 9. Сравнение тензоров Абрагама и Минковского и заключительные замечания | 283 |
| Приложения 1—4 | 289 |
| Цитированная литература | 292 |

ВВЕДЕНИЕ

Вопрос о тензоре импульс-энергии (и.-э.) *) электромагнитного поля в электрически поляризуемой среде следовало бы уже давно отнести к архиву классической физики.

Однако же за последние десять-двадцать лет появилось немало работ, авторы которых вновь и вновь возвращаются к этой теме. Центральное место в этой литературе занимает вопрос о сравнительной оценке двух тензоров — Абрагама и Минковского, предложенных более полувека назад.

В истории проблемы сложилось парадоксальное положение, в результате которого и до последнего времени дискутируются вопросы, касающиеся некоторых базисных положений классической электродинамики. Литература вопроса изобилует разноречиями и разночтениями, приводящими к тому, что в настоящее время утрачена ясность представлений в области таких концепций, которые, казалось, не должны были бы быть предметом дискуссии. К этим противоречиям, в основе которых часто можно обнаружить нечеткость в трактовке физического смысла тех или иных формальных построений, мы вернемся в конце статьи.

Существенно отрицательное влияние на всю последующую историю вопроса оказал следующий характерный эпизод. В 1950 г. Лауэ² обратил внимание на определенные ограничительные требования, которым должны удовлетворять трансформационные свойства компонент тензора импульс-энергии волны света. Эти требования вытекают (как он полагал) из следующих соображений.

*) Мы считаем возможным придерживаться этого термина (вместо обычно принятого «тензор энергии-импульса»), поскольку им пользуется Паули в своем классическом труде¹.

Представим себе световой импульс, распространяющийся в виде волнового пакета и движущийся в среде со скоростью c/n (n — показатель преломления) относительно наблюдателя, неподвижного в этой среде. Вместе с этим пакетом движется (с той же скоростью c/n) некоторый объект, находящийся все время в поле светового луча и, следовательно, остающийся все время освещенным этим лучом. Очевидно, что для другого наблюдателя, движущегося с какой-то произвольной скоростью относительно первого, этот объект также будет все время представляться освещенным. А для того, чтобы это условие было выполнено, необходимо, чтобы скорость пакета световых волн при переходе от системы отсчета первого наблюдателя (в которой он неподвижен) к «системе второго наблюдателя» преобразовывалась как скорость материальной точки.

Как полагал Лауэ, им было доказано, что тензор Абрагама должен быть исключен из рассмотрения, как якобы противоречащий указанному выше критерию. Приняв, основываясь на этом, тензор Минковского, Лауэ сделал отсюда далеко идущие выводы. Поскольку на (несостоятельные с нашей точки зрения) аргументы Лауэ продолжают постоянно ссылаться и поскольку аналогичные соображения, приводящие к отводу тензора Абрагама, были развиты также и Мёллером ³, вопрос этот будет нами рассмотрен подробнее.

Предлагаемая читателю статья не является обзором литературы вопроса. Достаточно полный перечень работ, посвященных данной теме, можно найти в недавно опубликованном обзоре ⁴.

Имеется серия работ формалистического стиля, авторы которых подходят к решению вопроса, опираясь на обобщения, сформулированные в постулатах, которые положены ими в основу применения затем вариационного метода. По-видимому, в большинстве случаев такой формальный аппарат приводит к решению в форме тензора Минковского (см., например, ⁵). Авторы другой группы работ (де Гроот ⁶ с сотрудниками) пошли по пути микроскопического рассмотрения задачи. Этот метод требует введения чрезвычайно громоздкого, трудно обозримого аппарата вычислений.

Указанной только что группе работ должна была, казалось бы, предшествовать вполне однозначно установленная схема представлений в рамках электродинамики Максвелла — Герца *).

То, что до сих пор альтернатива в выборе формы тензора и.-э. поля (тензор — Абрагама или Минковского?) остается неразрешенной, приводит, однако, к неоднозначности в построении этой схемы базисных представлений, поскольку вопрос о пондеромоторных **) силах в электромагнитном поле и о количестве движения этого поля остается дискуссионным.

Однако анализ вопроса на основе простых моделей приводит к однозначному выводу о том, что в рамках феноменологической картины и в применении к *предельным случаям* идеализированных диэлектрических сред правильное решение задачи дано Абрагамом ⁷ в форме предложенного им тензора. Такой вывод, при выполнении определенных условий и упрощений, может быть сделан на основе идей, высказанных еще в 1954 г.

*) К этим двум именам, которыми отмечена эпоха в истории классической физики, в связи с данной проблемой следовало бы добавить еще и имя Абрагама, который ввел в науку фундаментальное представление об электромагнитном количестве движения.

**) Мы пользуемся этим, принятым в классических работах, но, видимо, устаревшим, термином. В новейшей литературе обычно говорят «объемные силы».

венгерскими физиками — Марксом и Дьёрди ⁸, а также отчасти и в предшествовавшей работе Бека ⁹ *).

Если потребовать выполнения законов сохранения в сочетании с уравнениями Максвелла — Герца, то, как будет показано, отсюда вытекает уже определенное, достаточно сильное «правило отбора» (теорий).

Другое «правило отбора» было применено Лауэ, как якобы вытекающее из его, упомянутого выше критерия, что привело к ошибочным выводам.

При наличии противоречий в основной схеме концепций целесообразно на данной стадии отвлечься от осложнений, вносимых учетом законов термодинамики. Для этого будем предполагать, что диэлектрическая постоянная среды есть константа, не зависящая от напряженности электрического поля и параметров, характеризующих состояние среды.

Две модели, которые будут в деталях рассмотрены ниже, удовлетворяют, например, необходимому в этой связи требованию: плотность среды, выраженная числом частиц (диполей) на единицу объема, неизменна (не зависит от напряженности поля).

Обращение к указанной выше абстракции целесообразно и, видимо, так же допустимо, как допустимо и целесообразно, например, в теоретической механике рассматривать законы движения абсолютно твердого тела, отвлекаясь от свойств упругости и пластичности.

В последующем изложении автор пользуется только элементарными и, насколько возможно, наглядными выводами.

В целях упрощения среда предполагается немагнитной и рассматривается частный случай электромагнитного поля плоской волны.

1. ИМПУЛЬС ФОТОНА И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

В связи с очерченной выше ситуацией до сих пор не получено ясного ответа на вопрос о величине импульса фотона в среде — пусть идеальной, характеризуемой постоянным (не зависящим от каких-либо параметров) показателем преломления.

Тензоры Минковского и Абрагама приводят к существенно различным выражениям для плотности (g) количества движения поля.

Предваряя результаты выводов, которые будут изложены ниже, приведем здесь эти выражения. В векторной форме они записываются так:

$$g^M = (1/4\pi c) [DB] \quad (1.1)$$

по Минковскому (см., например, ¹) и

$$g^A = (1/4\pi c) [EH] \quad (1.2)$$

по Абрагаму (см. ⁷); здесь E , H , D , B — векторы напряженностей и индукций электрического и магнитного полей.

Говоря о фотоне, будем представлять себе «пакет» в виде «цуга» плоских (плоскополяризованных) волн, который несет энергию, равную $\mathcal{E} = h\nu$. Согласно уравнениям Максвелла, в поле плоской волны имеет место соотношение $H = nE$. (Для упрощения здесь, а также чаще всего и в дальнейшем, будем полагать $\mu = 1$.)

При соответствующей ориентации координатных осей, согласно (1.1) и (1.2), получим

$$g^M = n^3 E^2 / 4\pi c = nu/c \quad (1.3)$$

и

$$g^A = nE^2 / 4\pi c = u/nc \quad (1.4)$$

(так как $D = \epsilon E$ и $\epsilon = n^2$; $u = n^2 (E^2 + H^2) / 8\pi$); здесь (и в дальнейшем) u — плотность энергии волны света.

*) Выводы этого автора, однако, неверны.

Отсюда для импульса «фотона» (G^M и G^A) в среде получаются следующие выражения:

$$G^M = g^M l = n u l / c = n h \nu / c \quad (1.5)$$

— согласно Минковскому (l — длина цуга, $l = h\nu/u$) и

$$G^A = g^A l = h\nu / nc \quad (1.6)$$

— согласно Абрагаму.

Отметим прежде всего, что с экспериментальной стороны вопрос также остается неясным. Прямого ответа на этот вопрос эксперимент не дает, о чем у нас также речь еще впереди.

Однако однозначный ответ дает обращение к законам сохранения количества движения и скорости движения центра тяжести (в применении к системе «поле + среда»). Так, во всяком случае, обстоит дело, если полагать справедливым представление об инертности энергии в соответствии с соотношением Эйнштейна $\mathcal{E} = mc^2$.

Из простой схемы «мысленного эксперимента», который сейчас будет рассмотрен, следует, что предположение Минковского находится в противоречии с законом постоянства скорости движения центра тяжести системы «излучение + материальное тело». На это впервые было указано в работе ¹⁰.

Для доказательства рассмотрим систему «пакет световых волн + среда (прозрачная пластинка — прямоугольный параллелепипед, грани которого параллельны координатным плоскостям)».

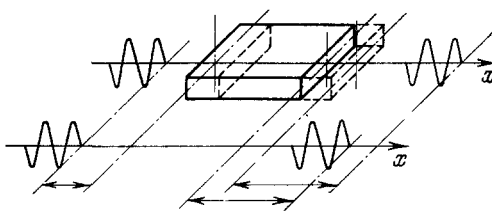


Рис. 1.

Сопоставим перемещение центра тяжести всей этой системы по оси x (направление распространения луча) в двух случаях:

а) «Пакет» находится вне среды, двигаясь в направлении к ее границе (левой), проходит через среду и затем, в выбранный нами

момент времени, находится в положении, которое симметрично начальному его положению относительно среды (рис. 1).

б) Положения пакета относительно среды, начальное и конечное, также симметричны. Но пакет перешел из положения первого в положение второе, *минуя* среду. (То, что, следовательно, пакет движется сейчас по траектории, параллельной, но сдвинутой относительно оси x , для вывода, очевидно, не существенно.) Если бы среда за время прохождения через нее светового пакета оставалась неподвижной, то перемещение по оси x центра тяжести всей системы в целом («свет + среда») в том и другом из указанных выше случаев было бы одним и тем же. Однако для перемещения света на длину проводящей свет пластины в первом случае требуется времени больше, так как скорость света c/n в среде меньше, чем в пустоте — вне нее (предполагаем, что $n > 1$). Поскольку скорость перемещения центра тяжести системы в обоих случаях одна и та же, смещение центра тяжести по оси x из его начального положения в конечное в первом случае должно быть большим. А это значит, что проводящая свет среда не будет оставаться неподвижной и должна сместиться в направлении распространения света. Иначе говоря, это значит, что при вхождении света в среду ей передается импульс в направлении луча, что противоречит предположению Минковского (импульс света в среде $n\mathcal{E}/c$ больше, чем в пустоте \mathcal{E}/c).

Таким образом, простые качественные соображения, казалось бы, уже достаточны для того, чтобы исключить гипотезу Минковского. Если же написать уравнения сохранения импульса и постоянства скорости движения центра тяжести, то можно получить и количественный результат.

Обозначим через X_c — координату центра тяжести системы, M — массу пластины, μ — массу энергии света и G — импульс пакета волн в среде. Из определения центра тяжести системы, дифференцируя, получаем следующие уравнения:

$$dX_c/dt = [M(dx_1/dt) + \mu(dx_2/dt)]/(M + \mu); \quad (1.7)$$

здесь x_1 и x_2 — координаты центра тяжести пластины и светового пакета соответственно *).

Пусть (dX_c/d_1t) — значение скорости dX_c/dt до вхождения света в среду:

$$(dX_c/d_1t) = \mu c/(M + \mu). \quad (1.8)$$

Обозначим далее (dX_c/d_2t) значение скорости для интервала времени, в течение которого свет проходит через среду. Уравнение сохранения импульса дает

$$M dx_1/dt = (\mathcal{E}/c) - G. \quad (1.9)$$

При этом $dx_2/dt = c/n$ и, следовательно, согласно (1.7)

$$(dX_c/d_2t) = [(\mathcal{E}/c) - G + \mu(c/n)]/(M + \mu). \quad (1.10)$$

Но постоянство скорости движения центра тяжести системы требует равенства

$$(dX_c/d_1t) = (dX_c/d_2t). \quad (1.11)$$

Подставляя в уравнение (1.11) выражения (1.8) и (1.10), получим

$$\mu c = [(\mathcal{E}/c) - G] + \mu(c/n). \quad (1.12)$$

Отсюда

$$G = (\mathcal{E}/c) + \mu[c/n - c] = \mathcal{E}/nc, \quad (1.13)$$

так как

$$\mu = \mathcal{E}/c^2.$$

Таким образом, из законов сохранения для величины импульса фотона следует выражение Абрагама (1.6).

Проводя эти простые вычисления, мы, разумеется, молчаливо предполагали, что поток энергии на всем пути луча постоянен и что, следовательно, потери энергии вследствие отражения на границе среды исключены. Значит, мы молчаливо предположили, что на границах среды, в месте входа и выхода луча, нанесен переходный, «просветляющий», слой с плавным переходом показателя преломления от значения n в среде к значению

*) На первый взгляд может показаться, что ссылка на закон движения центра тяжести и приведенный здесь вывод излишни, поскольку соотношение $G = \mu(c/n) = \mathcal{E}/cn$ (см. ниже (1.12)) можно считать справедливым а priori. В таком случае и противоречий этому соотношению тензор Минковского следовало бы исключить из рассмотрения а priori, а проблему, которой посвящена данная статья, считать несуществующей и литературу по этому вопросу — плодом недоразумения. Однако в простом примере, рассмотренном ниже в гл. 6 (заряженный конденсатор движется равномерно со скоростью β), мы сталкиваемся со следующей ситуацией. Импульс электромагнитного поля G не равен $\mu\beta c$ (здесь электромагнитная масса μ равна \mathcal{E}/c^2 , \mathcal{E} — энергия поля). Как видно из выражения (6.2) тензора и.-э. поля (W), в данном случае (причем одинаково как по Минковскому, так и по Абрагаму)

$$G = 2\beta\mathcal{E}/c(1 + \beta^2) \neq \mu\beta c.$$

его l вне среды. Такие приемы «просветления» граней среды в настоящее время широко используются в лазерной технике. Теоретически, в пределе (а в какой-то мере и практически) могут быть реализованы условия, при которых потери на отражение сведены до сколь угодно малой величины.

Кроме того, следует отметить, что мы отождествляли групповую скорость света с фазовой скоростью, что также может быть реализовано с любой желаемой точностью, если диапазон длин волн выбран так, что полосы аномальной дисперсии находятся где-то в отдаленной области спектра и не оказывают влияния (показатель преломления в данном диапазоне от длины волны не зависит).

Выбор выражения для плотности импульса (количества движения) поля приводит однозначным образом и к определенному выводу о плотности сил воздействия волнового поля на среду.

2. ТЕОРЕМА МАКСВЕЛЛА, ПОНДЕРОМОТОРНЫЕ СИЛЫ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ КОЛИЧЕСТВО ДВИЖЕНИЯ

Напомним те исходные данные о пондеромоторных силах, к которым приводят уравнения Максвелла, и прежде всего теорему о максвелловых натяжениях, которая позволит упростить излагаемые в дальнейшем выводы и придать им известную наглядность.

Для случая статического поля эта теорема дает: равнодействующая \mathbf{K} сил, приложенных к телам, находящимся внутри некоторой замкнутой поверхности S , выражается интегралом по поверхности (S) максвелловых натяжений:

$$\int \mathbf{T}(n) dS = \int \mathbf{f} d\Omega = \mathbf{K}, \quad (2.1)$$

где $d\Omega$ — элемент объема и \mathbf{f} — плотность силы.

Поскольку дальше придется часто ссылаться на уравнение (2.1) и поскольку самое представление о тензоре напряжений вытекает из этого уравнения, напомним некоторые относящиеся сюда соотношения и определения.

Введенный под знаком интеграла в левой части уравнения вектор $\mathbf{T}(n)$ есть сила *натяжения*, действующая на элемент поверхности dS , направление внешней нормали к которому задано направлением единичного вектора \mathbf{n} . Составляющая $T_x(n)$ вектора $\mathbf{T}(n)$ определяется соотношением

$$T_x(n) = t_{xx} \cos(n, x) + t_{xy} \cos(n, y) + t_{xz} \cos(n, z). \quad (2.2)$$

Аналогичные соотношения дают компоненты T_y , T_z .

Девять величин (t_{xx} , t_{xy} , t_{xz}) плюс шесть других, входящих в аналогичные выражения для T_y и T_z , образуют трехмерный симметричный («относительный») тензор напряжений.

Четырехмерный тензор и.-э. (пространственные компоненты которого образуют так называемый «абсолютный» тензор напряжений *) получается путем обобщения трехмерного тензора T_{lm} , о чем речь у нас впереди.

Возвращаясь к прерванной линии изложения, сошлемся прежде всего на следующий результат вычислений. Если в частном случае электростатической задачи мы имеем дело с полем в отсутствие истинных электрических зарядов в «идеальном» диэлектрике с диэлектрической постоянной ϵ , то, как показывает вычисление, теорема Максвелла приводит к следующему выражению для плотности пондеромоторной силы f ,

*) Этот тензор обозначается так же, как тензор плотности потока импульса.

действующей на диэлектрик (7^a, стр. 150—154):

$$\mathbf{f} = -(E^2/8\pi) \text{grad } \varepsilon. \quad (2.3)$$

Как легко показать, если принять во внимание уравнения Максвелла, (2.3) равносильно следующему выражению:

$$\mathbf{f} = (\mathbf{P} \cdot \text{grad}) \mathbf{E} - \text{grad} (\mathbf{PE}/2), \quad (2.4)$$

где символ $(\mathbf{P} \cdot \text{grad})$ означает

$$(\mathbf{P} \cdot \text{grad}) = P_x (\partial/\partial x) + P_y (\partial/\partial y) + P_z (\partial/\partial z); \quad (2.5)$$

\mathbf{P} — поляризация диэлектрика. Формулы (2.3) и (2.4) потребуются нам в дальнейшем. Оба слагаемых в (2.4) имеют простой физический смысл, к чему мы еще вернемся.

Введя представление об электромагнитном количестве движения, Абрагам обобщил теорему Максвелла на случай полей, переменных и высокочастотных.

Положим, что мы рассматриваем электрические заряды на проводящих телах, находящихся внутри замкнутой поверхности S в вакууме. В случае электродинамической задачи преобразование интеграла максвелловых натяжений по поверхности S приводит к следующему уравнению:

$$\int \mathbf{T}(n) dS - \mathbf{K} = \int (1/4\pi c) (\partial [\mathbf{EH}]/\partial t) d\Omega, \quad (2.6)$$

где \mathbf{E} и \mathbf{H} — напряженности электрического и магнитного полей.

Как было постулировано Абрагамом, в правой части уравнения (2.6) стоит теперь производная $d\mathbf{G}/dt$, где $\mathbf{G} = \int \mathbf{g} d\Omega$ — электромагнитное количество движения поля во всем объеме внутри поверхности S и соответственно \mathbf{g} — плотность этого количества движения.

Если истинные заряды внутри поверхности S отсутствуют и, следовательно, $\mathbf{K} = 0$, то уравнение (2.6) в случае поля в вакууме имеет вид

$$\int \mathbf{T}(n) dS = (1/4\pi c) \int (\partial [\mathbf{EH}]/\partial t) d\Omega = \int (\partial \mathbf{g}/\partial t) d\Omega. \quad (2.7)$$

Отсюда \mathbf{g} (в вакууме) выражается так:

$$\mathbf{g} = (1/4\pi c) [\mathbf{EH}]. \quad (2.8)$$

Если же пространство внутри поверхности S заполнено однородной средой и истинные заряды в этом пространстве по-прежнему отсутствуют, то выполнение соответствующих преобразований поверхностного интеграла в объемный дает

$$\int \mathbf{T}(n) dS = (\partial/\partial t) \int (\varepsilon\mu/4\pi c) [\mathbf{EH}] d\Omega, \quad (2.9)$$

где соответственно ε и μ — диэлектрическая постоянная среды и ее магнитная проницаемость. В этом случае а priori нельзя однозначным образом ввести выражение для плотности электромагнитного количества движения в среде.

Если предположить, что на однородную, электрически незаряженную, прозрачную среду (и в отсутствие постоянных магнитных моментов) никакие силы также и в переменном электромагнитном поле не действуют, и вместе с тем полагать, что интерпретация по Абрагаму выражения в левой части уравнения (2.9) сохраняет силу, то по смыслу этого уравнения интеграл, стоящий в правой его части, дает количество движения поля. Согласно Минковскому и следует предположить, что плотность

пондеромоторных сил в указанных выше условиях равна нулю. Отсюда следует вывод: плотность импульса излучения равна

$$\mathbf{g}^M = (\epsilon\mu/4\pi c) [\mathbf{E}\mathbf{H}] \quad (2.10)$$

(или, если обратно предположить, что плотность \mathbf{g}^M дана выражением (2.10), придем к выводу об отсутствии пондеромоторных сил).

С другой стороны, по Абрагаму, выражение (2.8) для плотности количества движения сохраняет силу и в случае поля в материальной среде:

$$\mathbf{g}^A = (1/4\pi c) [\mathbf{E}\mathbf{H}]. \quad (2.11)$$

А это значит, что если правую часть уравнения (2.9) переписать так:

$$(1/4\pi c) \left[\int (\partial [\mathbf{E}\mathbf{H}]/\partial t) d\Omega + \int (\partial/\partial t) (\epsilon\mu - 1) [\mathbf{E}\mathbf{H}] d\Omega \right],$$

и, следовательно,

$$\int \mathbf{T}(n) dS = (d\mathbf{G}^A/dt) + \mathbf{K} = \\ = (d\mathbf{G}^A/dt) + \int (\partial/\partial t) [(\epsilon\mu - 1)/4\pi c] [\mathbf{E}\mathbf{H}] d\Omega \quad (2.12)$$

(как естественно предположить), то в подынтегральном выражении *второго* слагаемого второго уравнения (2.12) мы имеем плотность пондеромоторной силы.

Силы действия волны света на прозрачный диэлектрик (или магнито-электрик) были введены Абрагамом «гипотетически». Однако эти «силы Абрагама» имеют простой физический смысл. Вопрос подробно рассмотрен в работе ⁸. Здесь в этой связи мы приведем лишь следующие соображения.

Вернемся к выражению (2.3) для плотности силы \mathbf{f} в электростатическом поле. Это выражение (и эквивалентное ему (2.4)) справедливо лишь в том случае, если полную (внутреннюю) энергию можно отождествлять со «свободной» энергией. Оговаривая, что имеем дело с «идеальным» диэлектриком, мы и предполагаем, что это условие выполнено. Модели, которые будут рассмотрены ниже, указанному требованию удовлетворяют.

В дальнейшем мы будем рассматривать поле плоской электромагнитной волны. Первое слагаемое выражения (2.4) в таком поле роли не играет. Во втором слагаемом мы имеем градиент выражения $\mathbf{P}\mathbf{E}/2$, где \mathbf{P} — поляризация и \mathbf{E} — напряженность электрического поля.

Если для конкретности представлять себе диэлектрик в виде собрания диполей с переменным дипольным моментом электрических зарядов, удерживаемых квазиупругими силами, то $\mathbf{P}\mathbf{E}/2$ есть энергия поляризации (на единицу объема), запасенная в данном поле в данный момент времени в виде энергии этих квазиупругих сил.

Известные из электростатики механические (пондеромоторные) силы, определяемые градиентом плотности энергии, равной $\mathbf{P}\mathbf{E}/2$ *), имеют место и в поле электромагнитной волны. Но к ним добавляется еще сила Лоренца действия магнитного поля на поляризационный ток.

Рассматривая дальше для упрощения плоскую волну с нормалью, направленной по оси x , можем положить

$$\text{grad} = \partial/\partial x.$$

Кроме того, примем во внимание, что из уравнения плоской волны, как легко убедиться, следует

$$\partial/\partial x = -(n/c) \partial/\partial t, \quad (2.13)$$

*) В связи с этим ссылаются, в частности, на опыты Квинке по втягиванию жидкого диэлектрика в поле конденсатора.

где n — показатель преломления среды и c — скорость света в пустоте. Плотность силы Лоренца

$$f_{\text{Л}} = (1/c) [(\partial \mathbf{P}/\partial t) \mathbf{H}]. \quad (2.14)$$

В указанных нами условиях

$$f_{\text{Л}} = (1/c) (\partial P/\partial t) H. \quad (2.15)$$

Полная плотность пондеромоторной силы

$$f = f_{\text{Л}} + f_{\text{Р}}, \quad (2.16)$$

где

$$f_{\text{Р}} = -(\partial/\partial x) (\mathbf{P}\mathbf{E}/2) = (\partial/\partial t) (n/c) (\mathbf{P}\mathbf{E}/2). \quad (2.17)$$

Если принять во внимание уравнения Максвелла и соотношение

$$H = nE \quad (2.18)$$

(n — показатель преломления), которое следует из этих уравнений для поля плоской волны, то, проделав простые выкладки, можно убедиться в том, что

$$f = [(\varepsilon - 1)/4\pi c] \partial (EH)/\partial t. \quad (2.19)$$

Если принять во внимание (2.18), выражение (2.19) плотности силы (опять же для поля плоской волны) можно переписать так:

$$f = [(n^2 - 1)/cn] \partial u(t)/\partial t, \quad (2.20)$$

где $u(t)$ — плотность энергии. Мы полагали, что $\mu = 1$ и $n^2 = \varepsilon$. Формула (2.20) справедлива и в более общем случае ($\mu \neq 1$) при $n^2 = \varepsilon\mu$. Вывод формулы (2.20) в таком более общем виде дан в приложении 1 в конце статьи.

Далее, согласно (2.13)

$$f = -[(n^2 - 1)/n^2] \partial u(t, x)/\partial x. \quad (2.21)$$

Соотношение (2.21) можно прочесть так: плотность пондеромоторной силы численно выражается градиентом (с обратным знаком) давления (света на среду), равного

$$p_{\text{св}} = [(n^2 - 1)/n^2] u(t, x). \quad (2.22)$$

Если (как это и имеется в виду далее) предположить, что средой является тело с очень большим коэффициентом упругости — в пределе — идеально твердое тело — и что, кроме того, *границы волнового пакета находятся внутри среды*, то давление в любой момент времени и в любом сечении уравновешено упругостным натяжением среды:

$$|T_{\text{ср}}| = [(n^2 - 1)/n^2] u(t, x). \quad (2.23)$$

Производная $du/\partial t$ в среднем по времени (или производная $du/\partial x$ в среднем по пространству) в поле плоской синусоидальной волны равна нулю. Следовательно, и плотность пондеромоторной силы (2.21) в этих условиях в среднем равна нулю.

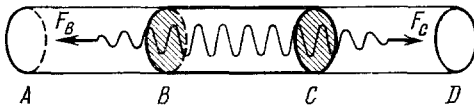
Давление же света и (при указанных выше граничных условиях) равное и противоположное ему упругостное натяжение среды в среднем по абсолютной величине равны

$$[(n^2 - 1)/n^2] \bar{u}, \quad (2.24)$$

где \bar{u} — среднее по времени значение плотности энергии.

Для пояснения и имея в виду выводы, которые потребуются в дальнейшем, применим теорему Максвелла — Абрагама в трех ситуациях,

обозначенных на рис. 2. Рассмотрим цилиндр CD . Легко убедиться в том, что боковая поверхность его не дает вклада в интеграл $\int \mathbf{T}(n) dS$. Из двух торцевых поверхностей (площадь которых положим равной единице)



такой вклад дает только одна — заштрихованное основание цилиндра CD . В рассматриваемом случае, следовательно, в левой части уравнения (2.12) стоит величина $\int \mathbf{T}(n) dS = u$, так как *)

$$T(n) = -T_x = -t_{xx} = u(t, x).$$

В правой части первого из двух уравнений (2.12) стоит сумма двух членов $F_c + (dG^A/dt)$, где F_c (в уравнении (2.12) — \mathbf{K}) — сила, действующая на среду в объеме цилиндра, и dG^A/dt — приращение за единицу времени электромагнитного количества

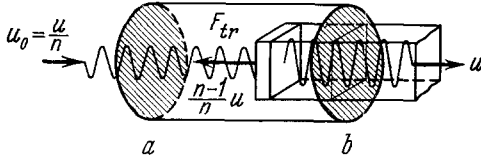


Рис. 2.

движения в этом же объеме. Величина dG^A/dt может быть выражена как произведение плотности количества движения на скорость света c/n :

$$dG^A/dt = gc/n = [u(t, x)/cn] c/n = u/n^2 \tag{2.25}$$

(согласно постулату Абрагама, так как $g^A = (1/4\pi c) |[\mathbf{E}\mathbf{H}]| = nE^2/4\pi c = u/(nc)$). Следовательно (см. первое из уравнений (2.12)),

$$u = F_c + (u/n^2), \quad F_c = [(n^2 - 1)/n^2] u(t, x). \tag{2.26}$$

Сила F_c равна давлению волны света, о котором шла речь выше.

Те же соображения, примененные к цилиндру AB , дают противоположно направленную (по величине равную F_c) силу давления света на заднем фронте волны. В формуле (2.26) $u(t, x)$ — мгновенное значение плотности энергии поля на данном поперечном сечении (x).

Наконец, рассматривая цилиндр (ab) рис. 2, получаем среднее значение действующей на переходный слой силы F_{tr} как разность средних максвелловых натяжений (давлений) на заштрихованных торцевых поверхностях цилиндра ab :

$$|F_{tr}| = u - u_v = [(n - 1)/n]u, \tag{2.27}$$

где u и u_v — плотности энергии в среде и в вакууме соответственно. (По предположению, $u_v = u/n$: поток энергии среде uc/n равен потоку энергии nvc в вакууме.) Сила F_{tr} тянет переходный слой в сторону вакуума — в направлении против луча света. Электромагнитное количество движения в объеме цилиндра ab в среднем остается неизменным. Следовательно, результат вычисления силы F_{tr} не зависит от предположения о величине плотности количества движения, в связи с чем к этому результату одинаково приводят обе гипотезы — как Минковского, так и Абрагама. Вычисление F_{tr} можно также легко провести, если пользоваться соотношением (2.3) (см. приложение 2).

*) Здесь t_{xx} есть (максвеллово) натяжение.

Еще одно замечание терминологического характера. Выше, в связи с уравнением (2.25), мы положили поток количества движения равным gc/n , т. е. равным произведению плотности количества движения на скорость света (или скорость переноса количества движения). Поток вычислялся как поток жидкости с плотностью g . Однако количество движения, передаваемое полем через единицу площади поперечного сечения, вообще говоря, больше величины, рассчитанной по методу, указанному выше. А именно, в том случае, если налицо пондеромоторные силы поля, через единицу площади поперечного сечения передается еще механическое количество движения, равное давлению излучения на среду. Полное количество движения, переносимое за единицу времени через единицу поверхности (равное сумме указанных выше двух слагаемых), равно максвеллову давлению (или натяжению с обратным знаком). В 1908 г. Планк¹¹ предложил интерпретировать максвеллово давление как плотность полного потока электромагнитного количества движения поля. Если принять вытекающую отсюда терминологию, можно констатировать, что величина полного потока количества движения по Абрагаму и по Минковскому определяется одинаково (см. (2.9), (2.10) и (2.12)). К этому замечанию мы еще вернемся в конце статьи.

3. ОБ ОПЫТАХ ПО ИЗМЕРЕНИЮ СВЕТОВОГО ДАВЛЕНИЯ

Прежде чем перейти к рассмотрению форм тензора и-э., затронем вкратце вопрос об экспериментальной проверке гипотез Минковского и Абрагама.

В связи с этим вопросом дискутировались результаты опытов Джонса и Ричардса¹² по измерению светового давления на зеркало, находящееся в различных преломляющих средах. Авторы работы нашли, что при заданной, одинаковой для различных сред величине потока энергии, световое давление на зеркало пропорционально показателю преломления среды.

Если волновой пакет, о котором у нас шла речь выше, рассматривать как модель фотона и в согласии с Минковским приписать этому фотону импульс, равный $nh\nu/c$, то результат опытов Джонса — Ричардса¹² получается непосредственно. При отражении зеркалу передается импульс, равный удвоенному импульсу фотона. Поскольку при заданной интенсивности света (в различных средах) число фотонов на единицу поверхности за единицу времени и на единицу телесного угла для всех этих сред одинаково, импульс на единицу поверхности, передаваемый зеркалу за единицу времени (другими словами, давление на зеркало), пропорционален импульсу отдельного фотона в данной среде. Если принять выражение Минковского, то, следовательно, этот импульс пропорционален показателю преломления, что и дает эксперимент¹².

Однако, независимо от каких-либо допущений о плотности импульса излучения в среде, из теоремы об интеграле максвелловых натяжений непосредственно следует, что давление света на зеркало в некоторой среде пропорционально плотности излучения у поверхности зеркала. А плотность излучения пропорциональна вместе с тем показателю преломления, если интенсивность света задана и остается неизменной ($uc/n = \text{const}$; следовательно, $u \propto n$).

Если на основе допущения Минковского об импульсе излучения можно прийти к правильному выводу о зависимости давления света в средах от показателя их преломления, то обратное заключение из данных эксперимента о правильности выражения Минковского можно сделать лишь в том случае, если заранее произвольным образом предположить, что

пондеромоторные силы при распространении света в прозрачной среде равны нулю.

То, что при наблюдении стационарных потоков к однозначному выводу о плотности количества движения света в среде прийти невозможно, видно из следующей схемы. Поток радиации, исходящий из источника S_1 , после отражения от зеркала R «замыкается» на приемник S_2 (тот и другой находятся в вакууме). Предполагаем, что потери на границах среды исключены. Силы давления света на зеркало, на источник и на приемник,

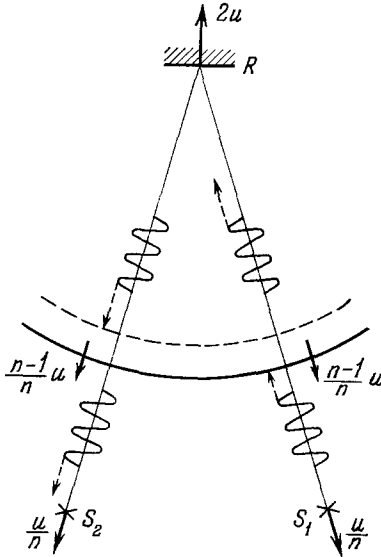


Рис. 3.

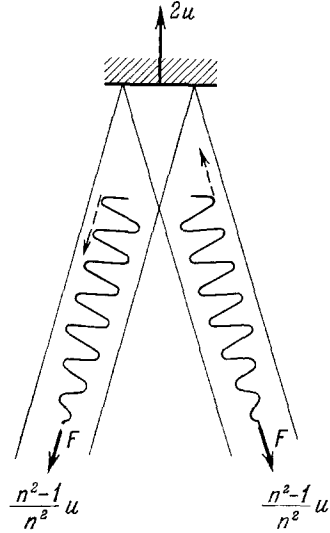


Рис. 4.

а также и в граничном слое показаны на рис. 3. Они не зависят от предположений о плотности импульса излучения. Баланс количества движения выполнен.

Иная ситуация, однако, возникла бы, если бы в экспериментах с отдельным импульсом света удалось измерить как силу давления на зеркало при отражении от него «цуга» волн, так одновременно и «отдачу», получаемую средой.

Для упрощения рассмотрим (не вполне корректно *) отражение при некотором достаточно малом угле с нормалью к зеркалу, как показано на рис. 4. За счет показанного на рис. 4 давления на диэлектрик переднего и заднего фронтов волн (отраженной и падающей) среда получает импульс i , значение которого выражается произведением указанного выше давления на время отражения τ .

Если энергия цуга волн есть \mathcal{E} (на единицу площади поперечного сечения), то время отражения $\tau = (\mathcal{E}/uc) n$, и для величины импульса получаем

$$i = 2 [(n^2 - 1)/n] \mathcal{E}/c.$$

Импульс I/τ , сообщаемый зеркалу за единицу времени, равен $2u$ и за все время отражения $I = 2u\tau = 2 \mathcal{E} n/c$ (на единицу поверхности). Баланс количества движения выполняется, если принять по Абрагаму

*) Можно было бы привести и более точный, также простой расчет.

$g = u/cn$. В самом деле, обозначим, как и раньше, через G импульс фотона. Уравнение баланса импульса дает тогда

$$2G = 2g \mathcal{E}/u = I - i = 2\mathcal{E} n/c - (2\mathcal{E}/c) [(n^2 - 1)/n] = 2 \mathcal{E}/nc;$$

здесь \mathcal{E}/u — длина «цуга» волн.

Измерение I и i дало бы возможность определить g . Как показывает приведенный выше расчет, силы отдачи могут быть того же порядка величины, что и давление на зеркало. Поскольку световое давление удается измерять, в принципе и силы Абрагама также могли бы быть измерены. Следовательно, хотя обычно приводимые в учебниках и монографиях ссылки на то, что силы эти пренебрежимо малы, и нельзя признать правильными, но возможность осуществления описанного эксперимента в импульсном режиме все же сомнительна. Однако приведенные выше (казалось бы, вполне «прозрачные») соображения, апеллирующие только к законам сохранения, позволяют, видимо, прогнозировать результаты такого *мысленного* эксперимента. Если так, то, следовательно, величина импульса излучения, которая в принципе могла бы быть получена экспериментально, равна \mathcal{E}/nc .

Вместе с тем, как мы видели, если согласно Минковскому ввести некоторую вспомогательную величину $\mathcal{E}n/c$ как «эффективную» величину импульса излучения (исключив при этом взаимодействие света с прозрачной средой), то результаты измерений Джонса и Ричардса¹² также непосредственно объясняются.

В квантовой теории излучения Черенкова автор работы¹³ основывался на выражении Минковского $nh\nu/c$. Здесь также это выражение дает правильное значение «эффективной» величины импульса. Применить простые модельные представления для согласования указанного «эффективного» значения с истинным значением импульса в случае квантового эффекта несколько сложнее. В конце статьи мы еще вернемся к этому вопросу.

4. ТЕНЗОР ИМПУЛЬС-ЭНЕРГИИ ПОЛЯ

Мы многократно ссылались на теорему о преобразовании интеграла фиктивных максвелловых натяжений.

Если соотношение (2.6), вытекающее из этой теоремы, и определения относительного тензора напряжений применить к элементу объема (прямоугольному параллелепипеду $dx dy dz$), то получится следующий результат:

$$[(\partial t_{xx}/\partial x) + (\partial t_{xy}/\partial y) + (\partial t_{xz}/\partial z)] dx dy dz = [f_x + (dg_x/dt)] dx dy dz;$$

здесь слева — сумма x -компоненты натяжений по шести граням поверхности параллелепипеда, справа — произведение соответствующих плотностей на объем параллелепипеда.

В дифференциальной форме уравнение (2.6) записывается, следовательно, так:

$$(\partial t_{xx}/\partial x) + (\partial t_{xy}/\partial y) + (\partial t_{xz}/\partial z) = f_x + (\partial g_x/\partial t). \quad (4.1)$$

Аналогичные уравнения могут быть написаны и для двух других компонент f и g .

Введя обозначения

$$S_{l_4} = icg_l \quad \text{и} \quad S_{lm} = -t_{lm} \quad (4.2)$$

(где $l, m = 1, 2, 3$ и $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$, а $x_4 = ict$), перенеся член $\partial S_{l_4}/\partial x_l = \partial g_l/\partial t$ уравнения (4.1) в его левую часть, перепишем

уравнение (4.1) в виде

$$-\partial S_{1m}/\partial x_m = f_1 \quad (4.3)$$

или вообще

$$-\partial S_{lm}/\partial x_m = f_l; \quad (4.4)$$

здесь, как и в дальнейшем, предполагается суммирование по повторяющемуся индексу (в данном случае m).

В уравнении (4.4), которое можно переписать еще так:

$$-\text{Div } S_{lm} = f_l, \quad (4.5)$$

значения $m = 1, 2, 3, 4$, тогда как $l = 1, 2, 3$. Символом Div обозначена четырехмерная дивергенция. К указанным выше компонентам добавляются еще следующие:

$$S_{4m} = (i/c) \Phi_m \quad (m = 1, 2, 3) \quad (4.6)$$

и

$$S_{44} = -u, \quad (4.7)$$

где Φ — плотность потока энергии, а u — плотность энергии.

Если среда неподвижна, то силы поля не совершают работы. В этом случае закон сохранения энергии выражается уравнением непрерывности потока энергии, которое записывается так:

$$\partial S_{4m}/\partial x_m = 0. \quad (4.8)$$

Постулируется, что совокупность указанных выше величин (при l и $m = 1, 2, 3, 4$) образует четырехмерный тензор — «мировой тензор» (Welt-tensor).

Компоненты четырехмерного вектора, определяемого дивергенциями тензора S_{lm} , для статической системы отсчета (системы, в которой среда покоится) указаны выше и могут быть представлены следующей схемой:

$$(f_1, f_2, f_3, 0). \quad (4.9)$$

Здесь f_m , как мы видели, являются компонентами плотности пондеромоторной силы.

Если компоненты 4-вектора даны в какой-то одной допустимой системе отсчета, то они определены и для любой другой инерциальной системы. Как известно (и как можно непосредственно проверить, если выполнить преобразования Лоренца в данном частном случае), четвертой (временной) компонентой 4-вектора плотности силы является помноженная на i/c плотность мощности, затрачиваемой силами поля и передаваемой полем потоку среды:

$$f_4 = -\partial S_{4m}/\partial x_m = (i/c) fw, \quad (4.10)$$

где f — плотность пондеромоторной силы и w — скорость среды.

Как уже было отмечено, предложено два выражения для плотности g электромагнитного количества движения:

$$g^A = (1/4\pi c) [\mathbf{EH}] \text{ и соответственно } S_{i4}^A = (i/4\pi) [\mathbf{EH}]_i \quad (4.11)$$

— по Абрагаму и

$$g^M = (1/4\pi c) [\mathbf{DB}] \text{ и } S_{i4}^M = (i/4\pi) [\mathbf{DB}]_i \quad (4.12)$$

— по Минковскому. Для упрощения, а в сущности — только для сокращения письма, мы будем полагать $\mu = 1$ и $B = H$.

Если компоненты S_{i4}^A и S_{i4}^M различны, то компоненты S_{4m}^A и S_{4m}^M , так же как и остальные девять компонент S_{lm} обоих тензоров (в случае неподвижной среды), одинаковы.

Тензор Минковского асимметричен, $S_{i4}^M \neq S_{4i}^M$, тогда как тензор Абрагама симметричен. Как может быть показано в общем виде⁹ *), это свойство асимметрии тензора приводит к противоречию с законом движения (сохранения скорости) центра тяжести системы «излучение + среда» (если принять принцип инертности энергии). В этом мы уже убедились на простом примере, рассмотренном выше. Таким образом, тензор Минковского не удовлетворяет одному из «правил отбора», о которых у нас шла речь в начале статьи.

С другой стороны, вслед за Лауэ в литературе и до сих пор удерживается мнение, что тензор Абрагама, удовлетворяющий только что упомянутому критерию, не согласуется якобы с другим требованием, а именно, что он не удовлетворяет критерию Лауэ, о котором выше также шла речь (см. введение). Лауэ сделал отсюда следующие выводы:

Во-первых, из двух тензоров (Абрагама и Минковского) следует принять тензор Минковского.

Во-вторых, в результате этого, поскольку смешанные (пространственно-временные) компоненты тензора S_{im}^M асимметричны ($S_{i4}^M \neq S_{4i}^M$), следует признать ошибочным постулат Планка (а тем самым и соотношение Эйнштейна $\mathcal{E} = mc^2$).

Под постулатом Планка Лауэ понимал соотношение

$$g = \Phi/c^2, \quad (4.13)$$

где Φ — плотность потока энергии. В связи с дальнейшим остановимся на этом подробнее.

В случае тензора Абрагама S_{im}^A (так же как и Минковского) Φ есть плотность потока электромагнитной энергии, определяемая вектором Пойнтинга

$$\Phi = (c/4\pi) [\mathbf{E}\mathbf{H}]. \quad (4.14)$$

Поскольку согласно (4.6) $S_{4i}^A = (i/c) \Phi_i$, а согласно (4.2)

$$S_{i4}^A = icg_i \quad \text{и} \quad S_{4i}^A = S_{i4}^A = (i/c) \Phi_i = icg_i,$$

соотношение (4.13) прямо вытекает из тензора Абрагама. Вместе с тем асимметрия тензора Минковского ($S_{4i} \neq S_{i4}$) несовместима с соотношением (4.13) **).

Формулы существенно упрощаются, если в общем случае движущейся среды в выражения компонент тензора ввести, как параметр, плотность энергии u_0 , относящуюся к системе отсчета, в которой среда покоится. (Здесь и в дальнейшем u_0 обозначает плотность энергии в среде.) Такую систему отсчета будем обозначать как «нулевую» (или «нештрихованную»).

*) В предположении, что механический тензор и.-э. среды симметричен.

**) Имея в виду историческую справку, а также и в связи с тем, что будет изложено ниже, поясним, что Планк¹¹ впервые указал, что соотношение (4.13) должно иметь место для потока любых форм энергии. В частности, при распространении света в движущейся среде, в форме работы силы давления света ($p_{св}$) среде через единицу площади поперечного сечения за единицу времени передается энергия $w p_{св}$ (здесь w — скорость среды). Поэтому «конвекционный» член (hw , где h — плотность энергии) в выражении (Φ) потока энергии должен быть дополнен произведением $w p$:

$$\Phi = hw + wp. \quad (4.15)$$

В соответствии с постулатом Планка выражение для плотности количества движения (g) может быть, следовательно, записано так:

$$g = (hw/c^2) + (wp/c^2). \quad (4.16)$$

Составляющие вектора wp определяются так: $(wp)_m = wip_{im}$.

Ограничивая рассмотрение случаем плоской, плоскополяризованной, волны и «специальным» *) преобразованием Лоренца, будем полагать, что нормаль к плоскости волны параллельна оси x .

В этом случае, как будет показано, по существу без ущерба для общности рассуждений, при написании формул можно ограничиться двумя измерениями: x, t (пространственные координаты y и z исключаются; соответствующие им компоненты тензора равны нулю).

Общую схему тензоров представляет, следовательно, такая таблица:

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{14} \\ X_{41} & X_{44} \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

Формулы преобразования компонент X_{lm} ($l, m = 1, 4$) напишутся так:

$$X'_{lm} = \alpha_{lk} \alpha_{ms} X_{ks} \quad (4.18)$$

$(k, l, m, s = 1, 4; \quad x_1 = x, \quad x_4 = ict).$

Коэффициенты α_{lm} дает следующая таблица:

$$\begin{matrix} & \alpha_{11} & \alpha_{14} \\ \alpha_{4l} & \begin{pmatrix} \gamma & i\beta\gamma \\ -i\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}, & \gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}. \end{matrix} \quad (4.19)$$

Тогда согласно (4.2), (4.6), (4.7) в нулевой системе тензор Абрагама в указанных обозначениях записывается в виде

$$S^{A0} = \begin{pmatrix} u_0 & i \frac{u_0}{n} \\ i \frac{u_0}{n} & -u_0 \end{pmatrix}. \quad (4.20)$$

Для асимметричного же тензора Минковского схема его компонент имеет вид

$$S^{M0} = \begin{pmatrix} u_0 & inu_0 \\ i \frac{u_0}{n} & -u_0 \end{pmatrix}; \quad (4.21)$$

здесь $n = (\epsilon\mu)^{1/2}$ — показатель преломления среды.

Выполнение преобразований по формулам (4.18) в соответствии с таблицей (4.19) дает следующий результат:

$$S^{A'} = \frac{u_0}{n} \gamma^2 \begin{pmatrix} n(1 + \beta^2) - 2\beta & i(1 - 2\beta n + \beta^2) \\ i(1 - 2\beta n + \beta^2) & -[n(1 + \beta^2) - 2\beta] \end{pmatrix}, \quad (4.22)$$

$$S^{M'} = \frac{u_0}{n} \gamma^2 \begin{pmatrix} (n - \beta)(1 - n\beta) & i(n - \beta)^2 \\ i(1 - n\beta)^2 & -(n - \beta)(1 - n\beta) \end{pmatrix}. \quad (4.23)$$

*) Речь идет о преобразовании (без вращения осей) к системе координат, начало которой движется параллельно оси x .

Наряду с тензором и.-э. электромагнитного поля в дальнейшем будем рассматривать также соответствующие механические тензоры среды и полный тензор «квазизамкнутой» системы (поле + среда).

Пространственные компоненты механического тензора («абсолютных напряжений») представлены суммой двух слагаемых

$$p_{lm} + g_l w_m, \quad (4.24)$$

где p_{lm} — компоненты «относительного» тензора упругостных напряжений, g_l и w_m — компоненты плотности импульса и скорости среды.

5. ДВЕ МОДЕЛИ ИДЕАЛИЗИРОВАННОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СРЕДЫ

Рассмотрим две модели, соответствующие двум возможным предельным случаям, а именно:

а) в «нулевой» системе (см. выше) (4.24) сводится к одному *первому* слагаемому, это случай «идеально твердого» тела;

б) в той же «нулевой» системе отличен от нуля только *второй* член суммы (4.24), это случай так называемой «пылевой материи».

Определим форму тензоров в первом из только что указанных случаев. На переднем и заднем фронтах волнового пакета среда испытывает давление света с силой, равной, как мы видели, $[(n^2 - 1)/n^2] u_0$. (Сейчас мы имеем в виду нулевую систему отсчета.)

Поскольку в любой точке поля в этих условиях процессы стационарны, давление электромагнитного поля (при указанных выше граничных условиях) уравновешено упругостным натяжением среды.

Мы рассматриваем одномерную (в пространственных координатах) задачу. Полный механический тензор и.-э. в нулевой системе в данных условиях может быть записан так:

$$\begin{matrix} X_{lm}^0 \\ \left(\begin{array}{cc} -\frac{n^2-1}{n^2} u_0 & 0 \\ 0 & -\mu_0 c^2 \end{array} \right), \end{matrix} \quad (5.1)$$

где μ_0 — плотность массы среды.

В составляющую X_{41}^0 , вообще говоря, должна была бы войти слагаемым плотность упругостной энергии. Это слагаемое мы положили равным нулю, поскольку рассматривается предельный случай идеально твердого тела, т. е. случай сколь угодно большой силы упругости при сколь угодно малой энергии деформации (пропорциональной квадрату самой деформации).

Механический тензор среды *в отсутствие поля*, в нулевой системе сводится к одной компоненте и записывается в виде

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\mu_0 c^2 \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

Этот тензор следует вычесть из тензора (5.1) так как целесообразно рассматривать только ту часть P_{lm} тензора (5.1), которая связана с электромагнитным полем и реакцией среды на силы давления поля.

Зависящая от поля компонента механического тензора среды записывается, следовательно, так:

$$P_{lm}^0 = P_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

Преобразование к штрихованной системе приводит к следующему выражению для тензора:

$$\gamma^2 p_0 \begin{pmatrix} P'_{im} \\ 1 & -i\beta \\ -i\beta & -\beta^2 \end{pmatrix}; \quad (5.4)$$

здесь p_0 — давление среды, в условиях данного примера отрицательное: $p_0 = -[(n^2 - 1)/n^2] u_0$.

Для уяснения физического смысла компонент P'_{im} целесообразно учесть соображения, изложенные в приложении 3.

Согласно (4.22) и (5.4), получаем

$$\begin{aligned} T'_1 &= S^{A'} + P'_{im}, \\ \frac{u_0}{n} \gamma^2 \left\{ \begin{pmatrix} n(1 + \beta^2) - 2\beta & i(1 - 2\beta n + \beta^2) \\ i(1 - 2\beta n + \beta^2) & -[n(1 + \beta^2) - 2\beta] \end{pmatrix} - \frac{(n^2 - 1)}{n} \begin{pmatrix} 1 & -i\beta \\ -i\beta & -\beta^2 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \frac{u_0}{n^2} \gamma^2 \begin{pmatrix} (n\beta - 1)^2 & i(n - \beta)(1 - \beta n) \\ i(n - \beta)(1 - \beta n) & -(n - \beta)^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

К полученному нами выражению тензора T'_1 мы вскоре вернемся.

Предварительно, однако, рассмотрим другую идеализированную модель среды и упомянутый уж^ выше противоположный предельный случай: силы упругости равны нулю, компоненты тензора «абсолютных» напряжений совпадают с произведением $g_{il} w_m$. В этом случае речь идет о модели диэлектрической среды в виде «пылевой материи». Частицы этой материи будем предполагать сколь угодно массивными. (В пределе положим плотность массы материи $\mu_0 = \infty$.) Вместе с тем плотность, определяемую *числом частиц* на единицу объема, будем полагать достаточно малой *) и взаимодействие между частицами пренебрежимо малым **). Малая концентрация частиц не влечет за собой малости диэлектрической постоянной, поскольку дипольные моменты частиц этой искусственной среды можно полагать сколь угодно большими. Дисперсией по-прежнему пренебрегаем. Такую разреженную среду можно представлять себе заключенной в цилиндрическую оболочку. Для удобства представлений можно предположить, что вся система находится в состоянии невесомости. Входное отверстие цилиндрического контейнера, содержащего преломляющую среду, закрыто оконцем, обеспечивающим впуск луча света без потерь.

Как следует из выполненных выше вычислений (2.27), после впуска светового луча цилиндрическая оболочка среды движется равномерно в направлении к источнику света, обладая механическим импульсом, равным

$$(n - 1) \mathcal{E}/c, \quad (5.6)$$

где \mathcal{E} — полная энергия светового поля.

Уравнения «сохранения» (1.7), (1.9) и (1.11) можно применить к любой автономной системе. Эти уравнения позволяют определить в общем виде обе неизвестные — импульс (Mv) материальной компоненты системы и количество движения излучения.

*) В «нулевой» системе эту плотность и вместе с тем показатель преломления можно будет считать независимыми от напряженности поля, поскольку масса частиц как угодно велика.

***) Здесь имеется в виду механическое взаимодействие — связи, вызванные силами упругости, или обмен механическим импульсом (при столкновении частиц).

Для величины Mv из указанных уравнений получаем в общем виде выражение

$$Mv = (\mathcal{E}/c) (n - 1)/n. \quad (5.7)$$

В данном примере Mv — разность двух величин — импульса среды (i) и импульса оболочки «контейнера». Следовательно, согласно (5.6) и (5.7)

$$(\mathcal{E}/c) (n - 1) n = i - (\mathcal{E}/c) (n - 1),$$

$$i = (\mathcal{E}/c) \{[(n - 1)/n] + n - 1\} = [(n^2 - 1)/n] \mathcal{E}/c. \quad (5.8)$$

Далее (см. ниже формулу (5.13)) мы убедимся в том, что i действительно равно импульсу сил Абрагама.

Поскольку выражение (5.6) не зависит от предположений о плотности импульса и к выражению (5.6) приводят одинаково как тензор Минковского, так и тензор Абрагама, на данном примере видно непосредственно, что и силы Абрагама получаются как следствие основных законов сохранения.

Отметим, что сумма связанного с волной света импульса среды (i) и импульса поля (G) равна

$$G + i = n \mathcal{E}/c. \quad (5.9)$$

Полный импульс $i + G$ в данном случае совпадает с импульсом поля по Минковскому.

Если уравнение луча в зоне синусоидальной волны записать в виде

$$E = E_0 \sin \{\omega [t - (xn/c)]\} \quad \text{и} \quad H = nE_0 \sin \{\omega [t - (xn/c)]\} \quad (5.10)$$

и принять во внимание оговоренные выше упрощения, то путем простых вычислений *) можно убедиться в том, что давление света сообщает среде движение, имеющее следующий характер. В момент времени $t = (k\pi/\omega) + (xn/c)$ (где k — целое число при заданном $x = \text{const}$) скорость движения частиц в точке x равна нулю. В интервале времени $(k\pi/\omega) + (xn/c) < t < (k + 1)(\pi/\omega) + (xn/c)$ скорость движения изменяется от нуля до некоторого максимального значения и затем снова до нуля. В среднем, следовательно, скорость поступательного движения частиц отлична от нуля и положительна.

Давление света вызывает «дрейф» пылевой материи в направлении луча. Скорость дрейфа в предположенных нами условиях пренебрежимо мала. Как увидим (см. ниже (5.24)), эта скорость, обозначаемая далее через $\beta_0 c$, равна $\beta_0 c = [(n^2 - 1)/n\mu_0 c] u_0 = [(n^2 - 1) n/4\pi\mu_0 c] E_0^2 \sin^2 \{\omega [t - (xn/c)]\}$. С этим «дрейфом» частиц связано также и то, что в пределах освещенной области, как мы сейчас увидим, имеет место в среднем некоторое уплотнение среды, причем плотность массы оказывается флуктуирующей или осциллирующей) — зависящей от времени **).

*) Для этого можно предположить, что фронт пакета волн описывается следующими уравнениями: $E = E_0 \sin \{\omega [t - (xn/c)]\} - E_0 (\omega/\omega_0) \sin \{\omega_0 [t - (xn/c)]\} e^{-\alpha [t - (xn/c)]}$, причем $H = nE$ при $x < ct/n$ и $E = H = 0$ при $x > ct/n$, где ω — частота света, ω_0 — собственная частота молекулярных диполей; $\alpha \gg 1$ и $\omega_0/\omega \gg 1$. Переменные E , H удовлетворяют уравнениям Максвелла. E , H и их первые производные непрерывны при $x = ct/n$.

**) В этой связи процитируем работу Танг и Мекснер¹⁴, рассмотревших в определенном приближении вопрос о тензоре и.-э. света в реальной жидкости с учетом и вязкости этой среды. Согласно полученным этими авторами результатам, осциллирующие движения среды приходится учитывать, когда рассматривается распространение света и в реальной жидкости. При этом оптически совершенно прозрачная жидкость вследствие внутреннего трения оказывается в какой-то мере (хотя и ничтожно слабо) поглощающей свет. По вычислениям авторов цитируемой работы, при сделанных им и (для определенного конкретного примера) допущениях, луч света за счет этого эффекта ослабляется наполовину на длине порядка тысячи километров.

Сказанное вытекает из следующего простого расчета. Мы видели (см. (2.19)), что плотность силы в «ненулевой» системе выражается так:

$$f = [(n^2 - 1)/4\pi c] \partial (EH)/\partial t. \quad (5.11)$$

Отсюда непосредственно следует, что плотность количества движения

$$g_\mu = \int f dt = [(n^2 - 1)/4\pi c] (EH) \quad (5.12)$$

(постоянная интегрирования равна нулю, так как при $t = 0$ можно положить $E = H = 0$).

Поскольку уравнения Максвелла для плоской волны дают $H = nE$ и плотность энергии $u_0 = nEH/4\pi$, формулу (5.12) можно переписать в виде

$$g_\mu = [(n^2 - 1)/nc] u_0(t); \quad (5.13)$$

здесь $u_0(t)$ — плотность энергии поля в данный момент времени и g_μ — плотность количества движения материи.

Если плотность массы в отсутствие поля обозначим через μ_0 и плотность в каждый данный момент через

$$\mu(t) = \mu_0 + \Delta\mu_0, \quad (5.14)$$

то для скорости «дрейфа» ($\beta_0 c$) уравнение (5.13) приводит к выражению

$$\beta_0 c = (n^2 - 1) u_0 / nc [\mu_0 + \Delta\mu_0(t)]. \quad (5.15)$$

Простой расчет дает

$$\Delta\mu_0 = [(n^2 - 1)/c^2] u_0(t) *). \quad (5.16)$$

Если перейти к пределу $\mu_0 = \infty$, в допустимом приближении величиной $\Delta\mu_0$ в знаменателе (5.15) можно пренебречь. Следовательно,

$$\beta_0 \mu_0 c^2 = [(n^2 - 1)/n] u_0. \quad (5.21)$$

Произведение $\beta_0 \mu_0 c^2$ при переходе к указанному пределу остается конечным, а произведение $\beta_0^2 \mu_0 c^2$ стремится к нулю. Поэтому членами порядка $\beta_0^2 \mu_0 c^2$ будем пренебрегать.

Принимая во внимание (5.16), выражение (5.14) перепишем теперь в виде

$$\mu(t) = \mu_0 + [(n^2 - 1)/c^2] u_0(t). \quad (5.22)$$

Выпишем компоненты X_{lm}^0 механического («кинетического») тензора «пылевой» материи в поле электромагнитной волны. Пространственными компонентами в этом случае являются компоненты потока количества движения, равного

$$w^2 \mu_0 = \beta_0^2 c^2 \mu_0. \quad (5.23)$$

*) Напишем уравнение непрерывности плотности массы:

$$(\partial/\partial t) (\mu_0 + \Delta\mu_0) + (\partial/\partial x) c [(\mu_0 + \Delta\mu_0(t)) \beta_0(t)] = 0. \quad (5.17)$$

Примем во внимание, что

$$\partial/\partial x = -(n/c) \partial/\partial t. \quad (5.18)$$

Согласно (5.15) и (5.17) получим

$$(\partial/\partial t) [\mu_0 + \Delta\mu_0(t)] = \partial\Delta\mu_0/\partial t = (\partial/\partial t) \{[(n^2 - 1)/c^2] u_0(t)\}. \quad (5.19)$$

Отсюда, интегрируя, находим

$$\Delta\mu_0(t) = [(n^2 - 1)/c^2] u_0(t) \quad (5.20)$$

(так как при $t = 0$ $u_0 = 0$ и $\Delta\mu_0 = 0$).

Сокращенная схема тензора X_{lm}^0 имеет вид

$$X_{lm}^0 \begin{pmatrix} \beta_0^2 \mu_0 c^2 & i \frac{n^2-1}{n} u_0(t) \\ i \frac{n^2-1}{n} u_0(t) & -\mu_0 c^2 - (n^2-1) u_0(t) \end{pmatrix}. \quad (5.24)$$

Выражение члена X_{44}^0 вытекает из (5.22).

Вычтя также и в этом случае из тензора X_{lm} тензор k_{lm} «пылевой» материи в отсутствие поля,

$$k_{lm} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\mu_0 c^2 \end{pmatrix}, \quad (5.25)$$

получим ту «пылевую» часть K_{lm}^0 кинетического (механического) тензора, которая связана с электромагнитным полем:

$$K_{lm}^0 = X_{lm}^0 - k_{lm}^0 \begin{pmatrix} \beta_0^2 \mu_0 c^2 & i \frac{n^2-1}{n} u_0(t) \\ i \frac{n^2-1}{n} u_0(t) & -(n^2-1) u_0(t) \end{pmatrix}. \quad (5.26)$$

В «пылевой» кинетический тензор вошла дополнительная плотность энергии $(n^2 - 1) u_0(t)$. Эта плотность энергии связана с «дрейфом» материи и вызванным им уплотнением среды.

Отметим, что согласно (5.24) и (5.21) плотность импульса среды выражается в виде

$$[(n^2 - 1)/nc] u_0 = \mu_0 \beta_0 c. \quad (5.27)$$

Таким образом, это — плотность импульса «пылевой» материи (плотность которой μ_0), движущейся с весьма малой скоростью дрейфа ($\beta_0 c$).

Интересно, что та же плотность импульса (5.27) может быть выражена совершенно иначе, а именно — как произведение плотности *дополнительной* массы ($\Delta \mu_0$) на скорость (c/n) «движения» этой массы, переносимой вместе с полем волны света. Действительно, согласно (5.20)

$$\Delta \mu_0 c/n = [(n^2 - 1)/cn] u_0,$$

что совпадает с (5.27). Если теперь, при заданной величине $u_0(t)$ перейти к пределу $\mu_0 = \infty$, то тензор K_{lm}^0 можно представить в следующем виде *):

$$K_{lm}^0 \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & -n \end{pmatrix} u_0(t). \quad (5.28)$$

Выполнение преобразований к «штрихованной системе» дает следующую формулу:

$$K'_{lm} \begin{pmatrix} n\beta^2 - 2\beta & i(1 + \beta^2 - n\beta) \\ i(1 + \beta^2 - n\beta) & -(n - 2\beta) \end{pmatrix} \frac{n^2-1}{n} u_0(t) \gamma^2. \quad (5.29)$$

*) В (5.24) мы уже пренебрегли членом порядка $u^2 \mu_0$ в выражении компоненты X_{44}^0 .

Так же как в случае ранее рассмотренного примера, полный тензор получится как сумма тензоров S_{lm}^A и K_{lm} :

$$T'_2 = S^{A'} + K' \\ u_0 \gamma^2 \begin{pmatrix} (n\beta - 1)^2 & i(n - \beta)(1 - n\beta) \\ i(n - \beta)(1 - n\beta) & -(n - \beta)^2 \end{pmatrix}. \quad (5.30)$$

Возвращаясь к предыдущему примеру и сравнив выражения (5.5) и (5.30) тензоров T'_1 и T'_2 , убеждаемся в том, что в этих двух противоположных случаях предельных условий образованные, как указано, тензоры отличаются только множителем $1/n^2$. Таблица компонент тензора T'_2 получается из (5.30), если в (5.30) положить $\beta = 0$.

Модель «пылевой» материи удобна для сопоставления тензоров Абрагама и Минковского. К сравнению их мы еще вернемся в конце статьи. Сейчас же обратим внимание на следующее. Поскольку даны компоненты T'_{41} и T'_{44} , можно определить скорость потока энергии c^* , если разделить плотность потока энергии $(c/i) T'_{41}$ на плотность самой энергии — T'_{44} .

Обе таблицы (как (5.5), так и (5.30)) дают одну и ту же величину указанной скорости, которую при этом можно определить и как отношение icT'_{41}/T'_{44} :

$$c^* = -(c/i) T'_{41}/T'_{44} = icT'_{41}/T'_{44} = c(1 - n\beta)/(n - \beta). \quad (5.31)$$

Поскольку в нулевой системе $c^* = c/n$, формула (5.31) означает, что скорость c^* преобразуется как скорость материальной точки. Отсюда напрашивается вывод, что, для того чтобы получить правильное значение скорости переноса энергии света, следует рассматривать, как это выше и было сделано, тензор *полной* энергии (и соответствующий импульс), включая в этот тензор также и сопутствующие световому полю механические формы энергии и импульса. Такая мысль была уже высказана, впрочем, вскользь, одним автором (см. ¹⁵, стр. 91) и вскоре же отвергнута другим (^{4a}, стр. 40).

В следующей главе мы покажем, что высказанное только что предположение может быть обосновано. Поскольку же вопрос в течение длительного времени оставался (и остается) дискуссионным, на анализе выводов, приводимых обычно в этой связи, остановимся более подробно, хотя соображения, которые будут изложены, в сущности вполне тривиальны.

6. О ПОТОКЕ ЭНЕРГИИ И СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ СВЕТОВОЙ ВОЛНЫ

Вопрос (или парадокс), о котором идет речь, разрешается, если учесть тот факт, что при распространении волны света в среде потоки электромагнитной энергии и импульса, с одной стороны, и потоки сопутствующих им механической (в частности, упругостной) энергии и импульса, с другой стороны, взаимосвязаны.

Быть может, вычисления, относящиеся к распространению света, которые будут приведены ниже, покажутся более убедительными, если существо вопроса пояснить предварительно на простом примере — движущейся «электростатической» системы. Имеется в виду следующий пример. Заряженный конденсатор движется равномерно в направлении, перпендикулярном к направлению силовых линий (речь идет о направлении поля в центральной его части). Скорость переноса энергии в этом случае заранее задана. Она равна скорости движения конденсатора. Эта скорость может быть сопоставлена с соотношением между плотностью потока энергии и плотностью самой энергии. На передней грани движущегося, как показано на рис., 5, конденсатора электромагнитные силы

совершают работу против сил упругости диэлектрической пластины. На задней грани конденсатора эта энергия возвращается полю за счет работы сил упругости против электрических сил. Поэтому ясно, что поток электромагнитной энергии через неподвижную плоскость поперечного сечения (определяемый компонентой W_{41} тензора и.-э. поля) не равен произведению плотности энергии поля на скорость движения конденсатора, а больше этого произведения. Следовательно, частное от деления потока электромагнитной энергии на плотность ее не равна скорости движения конденсатора (скорости переноса энергии), а больше нее.

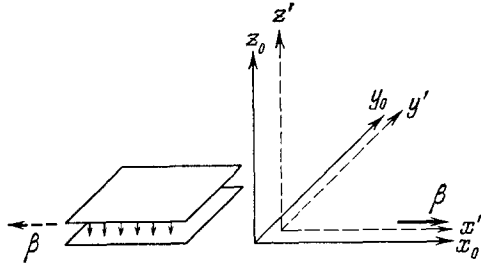


Рис. 5.

Рассмотрим в подробности имеющую место (с точки зрения неподвижного наблюдателя) циркуляцию потоков энергии и импульса в движущемся конденсаторе.

Направления магнитного и электрического полей, так же как и в случае поля волны света, взаимно перпендикулярны и перпендикулярны к направлению движения — направлению переноса энергии.

Плоский конденсатор образован пластиной диэлектрика, на грани которой (параллельные плоскости X_0, Y_0) напылен металл. Заряженный конденсатор движется в направлении отрицательной оси x' с постоянной скоростью (равной $w = -\beta c$) относительно штрихованной системы (x', y', z') на рис. 5. В дальнейшем (вплоть до формулы (6.15)) множитель c опускаем. Конденсатор неподвижен в нулевой системе.

Схемы тензора и.-э. W (причем в данном примере одинаково для тензора как Абрагама, так и Минковского) в случае двух указанных выше систем отсчета могут быть представлены соответственно в следующем виде:

$$\frac{\epsilon E_0^2}{8\pi} \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{6.1}$$

$$\frac{\epsilon E_0^2}{8\pi} \gamma^2 \begin{pmatrix} (1 + \beta^2) & 0 & 0 & -2i\beta \\ 0 & \frac{1}{\gamma^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\gamma^2} & 0 \\ -2i\beta & 0 & 0 & -(1 + \beta^2) \end{pmatrix}. \tag{6.2}$$

Представим себе плоскость y', z' поперечного сечения конденсатора, неподвижную в штрихованной системе отсчета. (Плоскость неподвижна, конденсатор движется относительно нее.)

Поток электромагнитной энергии через эту плоскость в данный момент времени t' , определяемый компонентой W_{41} тензора и.-э. W' , равен

$$-(2\beta\epsilon E_0^2/8\pi) \gamma^2 \tag{6.3}$$

(согласно (6.2); площадь поперечного сечения конденсатора полагаем равной единице). Плотность потока энергии Φ' в данном примере равна также $(1/4\pi)$ [Е'Н'].

Разделив плотность потока энергии на плотность энергии, получим скорость

$$w^* = -2\beta/(1 + \beta^2). \tag{6.4}$$

Скорость w^* не равна скорости $-\beta$ движения конденсатора, $|w^*| > \beta$.

Будем условно говорить о «фронте потока» энергии. Имеется в виду условная граница поля — некоторая плоскость y_0, z_0 вне конденсатора, движущаяся в системе (x', y', z') вместе с конденсатором. Спрашивается, чему равна скорость dx_0/dt' движения «фронта потока» с точки зрения наблюдателя, неподвижного в системе (x', y', z') ?

В уравнении баланса энергии необходимо учесть работу L пондеромоторной силы F' , действующей на диэлектрик конденсатора на переднем его крае. В нулевой системе отсчета сила F_0 , определяемая максвелловыми натяжениями (в данном случае — давлением), численно равна плотности энергии u_0 . Как известно, продольная составляющая силы при переходе к движущейся системе остается неизменной:

$$F' = F_0 = u_0. \quad (6.5)$$

Отсюда

$$L' = u_0 \beta. \quad (6.6)$$

(Площадь поперечного сечения конденсатора принята равной единице.)

Уравнение баланса энергии, следовательно, должно быть написано так:

$$|dx_0/dt'| = (|\Phi'_{эм}| - F'\beta)/u' = (|\Phi'_{эм}| - u_0\beta)/u', \quad (6.7)$$

где u' — плотность энергии в штрихованной системе, $u' = -W'_{44}$, и, следовательно, согласно (6.2)

$$u' = u_0 (1 + \beta^2) \gamma^2 = u_0 (1 + \beta^2)/(1 - \beta^2). \quad (6.8)$$

Вместе с тем компонента W'_{41} (6.2) дает

$$|\Phi'_{эм}| = 2\beta u_0 \gamma^2 = 2\beta u_0/(1 - \beta^2). \quad (6.9)$$

Подставляя (6.8) и (6.9) в (6.7), получим

$$|dx_0/dt'| = \{2\beta u_0/(1 - \beta^2) - u_0\beta\} (1 - \beta^2)/[u_0 (1 + \beta^2)] = \beta, \quad (6.10)$$

как и должно быть.

Поток электромагнитной энергии частично компенсируется противотоком упругостной энергии. Согласно приведенной выше схеме (5.4), для плотности $\rho^{M'}$ зависящей от скорости компоненты *упругостной энергии*, принимая во внимание, что $p' = p_0 = -u_0$ *), получим

$$\rho^{M'} = -\beta^2 u_0 \gamma^2. \quad (6.11)$$

Отсюда согласно (6.8) и (6.11) плотность *полной* энергии равна

$$\rho' = u' + \rho^{M'} = u_0 \gamma^2 (1 + \beta^2 - \beta^2) = u_0 \gamma^2. \quad (6.12)$$

Плотность потока **) *упругостной* энергии согласно (5.4) равна

$$(1/i) P'_{41} = -p_0 \beta \gamma^2 = u_0 \gamma^2 \beta. \quad (6.13)$$

Направление этого потока противоположно направлению движения среды.

Наконец, в соответствии с (6.2) и (6.13) плотность потока *полной* энергии есть

$$u_0 \gamma^2 (-2\beta + \beta) = -\beta u_0 \gamma^2. \quad (6.14)$$

Скорость «фронта» потока *полной* энергии, полученная в результате деления *полного* потока (6.14) на плотность *полной* энергии (6.12), равна

$$dx_0/dt' = -\beta u_0 \gamma^2 / u_0 \gamma^2 = -\beta, \quad (6.15)$$

как и должно быть.

В более общем виде по существу те же соображения были развиты Лауэ^{2а} в связи с обсуждением классического опыта Траутона и Нобля, предполагавших обнаружить эффект ориентации перпендикулярно к направлению движения Земли свободно подвешенного плоского конденсатора.

Уравнения баланса, определяющие соотношение между плотностью потока и плотностью энергии в плоской волне, вполне аналогичны только что рассмотренным нами на примере движущегося конденсатора. Напомним, что

$$\partial S'_{4m} / \partial x'_m = i/c L'_{эм}, \quad (6.16)$$

*) См. приложение 3. Значения p_0 здесь и в (5.4) не совпадают. То, что, в отличие от (5.4), поперечные составляющие давления ($p'_{yy} = p'_{yy}$ и $p'_{zz} = p'_{zz}$) не равны нулю, роли не играет.

**) Плотность потока не равна произведению плотности энергии на скорость среды.

где S'_{41} — «смешанные» компоненты] тензора и.-э., а $L'_{эм}$ — *мощность*, расходуемая в единице объема поля.

В условиях рассматриваемых нами систем отсчета и специального преобразования Лоренца уравнение баланса энергии (6.16) может быть переписано так:

$$-\partial\Phi'_{41}/\partial x' = (\partial u'/\partial t') + L'_{эм}, \quad (6.17)$$

где Φ'_{41} — плотность потока энергии и u' — плотность энергии;

$$L'_{эм} = wf' = -\beta cf^0\gamma, \quad (6.18)$$

где f' и f^0 — плотность силы в штрихованной и нулевой системах соответственно и $w = -\beta c$ — скорость движения среды в штрихованной системе.

В случае плоской волны в движущейся среде имеет место соотношение

$$\partial/\partial t' = -c^* \partial/\partial x', \quad (6.19)$$

где c^* — фазовая скорость, в нашем случае по предположению совпадающая с групповой. Как известно *),

$$c^* = c(1 - \beta n)/(n - \beta). \quad (6.20)$$

Подставляя (6.19) в (6.17), получим

$$-(\partial/\partial x')(\Phi'_{эм} - c^*u') = L'_{эм}. \quad (6.21)$$

Примем во внимание следующие соотношения. Согласно (6.18)

$$L'_{эм} = \gamma\beta c [(n^2 - 1)/n^2] (\partial u_0/\partial x)_t, \quad (6.22)$$

так как

$$f_0 = -(\partial/\partial x) [(n^2 - 1)u_0/n^2]. \quad (6.23)$$

Но

$$\left(\frac{\partial u_0}{\partial x'}\right)_{t'} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)_t \left(\frac{dx}{dx'}\right)_{t'} + \left(\frac{\partial u_0}{\partial t}\right)_x \left(\frac{dt}{dx'}\right)_{t'} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)_t \frac{\gamma(n - \beta)}{n}. \quad (6.24)$$

Формулу (6.24) легко получить, если основываться на формулах преобразования Лоренца $(x, t) \rightarrow (x', t')$ и принять также во внимание (2.13).

Подстановка $(\partial u_0/\partial x)_t$ из (6.24) в (6.22) дает

$$L'_{эм} = \beta c [(n^2 - 1)/n(n - \beta)] (\partial u_0/\partial x')_{t'} \quad (6.25)$$

и согласно (6.21)

$$-(\partial/\partial x')\{\Phi'_{эм} - c^*u' + \beta c [(n^2 - 1)/n(n - \beta)]u_0\} = 0. \quad (6.26)$$

Интегрируя от x' до $x' = \infty$, получим

$$\int_{x'}^{\infty} -(\partial/\partial x')\{\Phi'_{эм} - c^*u' + c[\beta(n^2 - 1)/n(n - \beta)]u_0\} = 0, \quad (6.27)$$

или

$$\Phi'_{эм} - c^*u' + [c\beta(n^2 - 1)/n(n - \beta)]u_0 = 0. \quad (6.28)$$

Уравнение (6.28) можно проверить непосредственно, если подставить в (6.28) выражения для Φ' и u' , которые дает таблица (4.22) тензора

*) Напомним, что (6.20) есть следствие инвариантности фазы (см. ³, стр. 57).

Абрагама $S^{A'}$, а именно,

$$\Phi'_{эм} = u_0 c \frac{1 - 2n\beta + \beta^2}{(1 - \beta^2)n}, \quad u' = u_0 \frac{n(1 + \beta^2) - 2\beta}{(1 - \beta^2)n} \quad (6.29)$$

и c^* согласно (6.20). Значения $\Phi'_{эм}$ и u' относятся к сечению x' .

Как видно из вывода, последний член в левой части уравнения (6.28) дает работу с обратным знаком (отрицательную, если $\beta > 0$ *) электромагнитных сил в единицу времени в области поля от выбранного сечения x' до фронта волны. Из вывода видно также, что если иметь в виду *средние* значения, то отличный от нуля вклад в интеграл (6.27) дает только узкий интервал вблизи фронта волны: производную $-\partial u_0/\partial x'$ можно условно рассматривать как δ -функцию (помноженную на u_0), если фронт волнового пакета достаточно крутой. Среднее же значение (по времени и по пространству) *плотности* силы (производной $\partial u_0/\partial x$) в зоне синусоидальной волны равно нулю.

Таким образом, $-c\beta [(n^2 - 1)/n(n - \beta)] u_0$ дает мощность (на единицу площади поперечного сечения), затрачиваемую полем на фронте волны.

Обозначив через c^{**} скорость перемещения фронта волны, запишем уравнение баланса энергии в интегральной форме:

$$\Phi'_{эм} - c^{**}u' - L'_{эм} = \Phi'_{эм} - c^{**}u' + c[\beta(n^2 - 1)/n(n - \beta)]u_0 = 0; \quad (6.30)$$

здесь $\Phi'_{эм}$ — поток электромагнитной энергии через некоторое поперечное сечение в зоне синусоидальной волны. Сопоставление уравнений (6.30) и (6.28) показывает следующее.

Во-первых, разделив величину потока электромагнитной энергии на ее плотность, мы получаем скорость, не равную скорости потока энергии (скорости c^{**} фронта волны).

Во-вторых,

$$c^{**} = c^*, \quad (6.31)$$

т. е. скорость фронта волны (скорость переноса энергии) в рассмотренных нами условиях равна фазовой скорости и преобразуется, следовательно, как скорость материальной точки.

Аналогичные уравнения можно написать для соотношений между потоком $\Phi^{M'}$ энергии среды, плотностью $\rho^{M'}$ энергии среды и работой сил реакции среды $L^{M'}$ (сил упругости, сил инерции):

$$\Phi^{M'} - c^*\rho^{M'} - L^{M'} = 0. \quad (6.32)$$

Силы реакции среды равны и противоположны силам воздействия на среду поля:

$$L^{M'} = -L'_{эм}. \quad (6.33)$$

Поэтому

$$\Phi^{M'} - c^*\rho^{M'} - \beta c[(n^2 - 1)/n(n - \beta)]u_0 = 0. \quad (6.34)$$

В случае приведенных выше примеров (5.4) и (5.29) имеем согласно (5.4):

$$\Phi^{M'} = c[(n^2 - 1)/n^2][\beta/(1 - \beta^2)]u_0, \quad (6.35)$$

$$\rho^{M'} = -[(n^2 - 1)/n^2][\beta^2/(1 - \beta^2)]u_0, \quad (6.36)$$

тогда как согласно (5.29)

$$\Phi^{M'} = c[(1 + \beta^2 - n\beta)(n^2 - 1)/n(1 - \beta^2)]u_0, \quad (6.37)$$

$$\rho^{M'} = [(n - 2\beta)(n^2 - 1)/n(1 - \beta^2)]u_0. \quad (6.38)$$

*) Среда движется против давления поля.

Если подставить в уравнение (6.34) в одном случае (6.35) и (6.36), а в другом случае (6.37) и (6.38), можно убедиться в том, что в обоих случаях уравнение (6.34) удовлетворяется. Наконец, складывая уравнения (6.30) и (6.34) и полагая

$$\Phi'_{\text{эм}} + \Phi^{M'} = \Phi', \quad (6.39)$$

$$u' + \rho^{M'} = \rho', \quad (6.40)$$

убеждаемся в том, что уравнение

$$\Phi' - c^* \rho = 0$$

справедливо, если под Φ' и ρ' понимать соответствующие плотности, относящиеся к *полной* энергии.

Частное $\Phi'_{\text{эм}}/u$ от деления потока электромагнитной энергии на плотность ее в движущейся среде дает скорость распространения только в том случае, если поперечные силы волны света отсутствуют. А это имеет место лишь в случае тензора Минковского и к какой-либо другой форме тензора и.-э. поля, вообще говоря, не применимо.

Поэтому, действительно, как и отмечалось уже в литературе, трактовка вопроса в книге Мёллера ³ неправильна. В этой превосходной книге автор пишет: «Этому условию (имеется в виду $c^* = \Phi'_{\text{эм}}/u$. — Д. С.) удовлетворяет тензор Минковского, но не тензор Абрагама, и это сильный аргумент в пользу теории Минковского» (³, стр. 207).

В следующей главе, опираясь на доказательство, приведенное самим Мёллером, мы сможем обобщить только что рассмотренный вывод.

7. О КРИТЕРИИ МЁЛЛЕРА

В цитированной нами книге ³ автор дал общий формальный критерий, которому должен удовлетворять какой-либо тензор и.-э. T_{lm} для того, чтобы скорость, определенная как

$$u_m^* = -(c/i) T_{4m}/T_{44}, \quad (7.1)$$

преобразовывалась как скорость материальной точки.

Соображения, подробно развитые в предыдущей главе, подсказывают предположение, что равенство нулю всех четырех дивергенций T_{lm} должно служить таким критерием.

Действительно, можно показать для плоской волны в общем виде, что условия

$$\text{Div } T_{lm} = 0 \quad (7.2)$$

и упомянутое нами условие Мёллера эквивалентны. При этом мы имеем в виду, что тензор T_{lm} симметричен. Условие Мёллера записывается в виде следующего уравнения (³, стр. 165):

$$R_{ik} = T_{ik} + (T_{im} U_m^* U_k^*/c^2) = 0; \quad (7.3)$$

здесь компоненты U_m^* определены так:

$$U_m^* = \frac{u_m^*}{[1 - (u^{*2}/c^2)]^{1/2}} \quad (m=1, 2, 3) \quad \text{и} \quad U_4^* = \frac{ic}{[1 - (u^{*2}/c^2)]^{1/2}},$$

где u_m^* определены формулой (7.1) и

$$u^{*2} = u_1^{*2} + u_2^{*2} + u_3^{*2}.$$

Предполагается, что скорость u^* , определенная согласно (7.1), меньше скорости света.

По Мёллеру, (7.3) есть условие, необходимое и достаточное для того, чтобы компоненты U^* определяли 4-вектор. А это вместе с тем есть условие, необходимое и достаточное для того, чтобы скорость u^* преобразовывалась как скорость материальной точки. Мёллером было показано, что если уравнение (7.3) выполняется в какой-либо определенной допустимой системе отсчета, то оно выполняется

и в любой другой инерциальной системе. Значит, если оно выполнено в одной определенной системе отсчета, то U^* — 4-вектор, а R_{ik} — тензор.

Поэтому без ущерба для общности вывода мы можем провести сравнение уравнений (7.2) и (7.3), предположив, что ось x параллельна лучу света и что, следовательно, тензор T_{il} представлен двухрядной схемой. В этой системе отсчета сумма, стоящая в выражении (7.3), сводится к трем слагаемым и условие (7.3) — к двум уравнениям (при $i = 1$ и $i = 4$). Выпишем эти уравнения:

$$\begin{aligned} T_{11} - \frac{T_{11}T_{41}^2}{T_{44}^2 + T_{41}^2} - \frac{T_{14}^2 T_{44}}{T_{44}^2 + T_{41}^2} &= -T_{44} \frac{T_{14}^2 - T_{11}T_{44}}{T_{44}^2 + T_{41}^2} = 0, \\ T_{41} - \frac{T_{11}T_{41}T_{44}}{T_{44}^2 + T_{41}^2} - \frac{T_{14}T_{44}^2}{T_{44}^2 + T_{41}^2} &= T_{41} \frac{T_{14}^2 - T_{11}T_{44}}{T_{44}^2 + T_{41}^2} = 0. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Вместе с тем два уравнения, которые получаются из условия

$$\partial T_{im}/\partial x_m = \partial T_{4m}/\partial x_m = 0, \quad (7.5)$$

для симметричного тензора дают

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{11}}{\partial x'} + \frac{\partial T_{14}}{ic \partial t'} &= \frac{\partial}{\partial x'} \left(T_{11} - \frac{c^*}{ic} T_{14} \right) = 0, \\ \frac{\partial T_{41}}{\partial x'} + \frac{\partial T_{44}}{ic \partial t'} &= \frac{\partial}{\partial x'} \left(T_{41} - \frac{c^*}{ic} T_{44} \right) = 0, \end{aligned} \quad (7.6)$$

где c^* — то же, что в (6.20), и где принято во внимание (6.19). В рассматриваемом случае специального преобразования Лоренца уравнения (7.6) показывают непосредственно, что скорость u^* совпадает с фазовой скоростью c^* и преобразуется как скорость материальной точки.

Обе системы уравнений (7.4) и (7.6) приводят одинаково к соотношениям

$$T_{11}T_{44} = T_{41}^2 = T_{14}^2, \quad T_{11}/T_{14} = T_{14}/T_{44}, \quad (7.7)$$

и, следовательно, в данной системе отсчета условия (7.3) Мёллера и условие (7.2) эквивалентны. Но если (7.3) выполнено в одной определенной системе, то оно справедливо и в любой другой системе (x, t) . Так же, если все четыре дивергенции тензора равны нулю в одной системе, то они равны нулю и в любой другой системе отсчета. Следовательно, и в любой системе координат условия (7.2) и (7.3) эквивалентны.

Мы уже предположили, что тензор T симметричен. По определению и принимая во внимание (7.7), имеем

$$U_1^* = \frac{-(ci) T_{41}/T_{44}}{[1 - (1/i)^2 (T_{41}/T_{44})^2]^{1/2}} = \frac{icT_{41}}{(T_{44}^2 + T_{41}^2)^{1/2}} = \frac{icT_{41}}{T_{44}^{1/2} (T_{44} + T_{41})^{1/2}}, \quad (7.8)$$

$$U_4^* = icT_{44}/(T_{44}^2 + T_{41}^2)^{1/2} = icT_{44}^{1/2}/(T_{44} + T_{11})^{1/2}. \quad (7.9)$$

Как показывают равенства (7.8) и (7.9), сумма $T_{44} + T_{11} > 0$. Обозначим:

$$T_{44} + T_{11} = \Sigma. \quad (7.10)$$

Величина Σ в уравнении (7.10) представляет собой сумму диагональных членов («след» тензора T — инвариант). То, что инвариант Σ тензора T больше нуля, есть следствие двух принятых нами предположений: 1) тензор удовлетворяет критерию Мёллера, 2) тензор симметричен. Заметим тут же, что равенство нулю всех дивергенций является характерной особенностью тензора Минковского. Вместе с тем Σ в случае тензора Минковского, так же как и Абрагама, равна нулю.

Из приведенного вывода следует, что, если сумма диагональных членов равна нулю, то налицо альтернатива: или тензор удовлетворяет критерию Мёллера и тогда он неизбежно симметричен (случай Минковского); или же, если тензор симметричен и сумма его диагональных членов равна нулю, он не может удовлетворять критерию Мёллера (случай Абрагама).

Для данного частного случая расположения координатных осей согласно (7.8) и (7.9) имеем

$$U_m^* = icT_{4m}/T_{44}^{1/2}\Sigma^{1/2}. \quad (7.11)$$

Поскольку мы знаем, что при указанных выше предположениях компоненты U_m^* определяют 4-вектор, соотношение (7.11) должно иметь место и при любой ориентации

осей координат. Отсюда можно видеть, что тензор T может быть представлен как следующее произведение двух 4-векторов:

$$T_{lm} = (-\Sigma/c^2) U_l^* U_m^*. \quad (7.12)$$

Для того чтобы убедиться в том, что соотношение (7.12) выполняется при любой ориентации осей координат, достаточно проверить подстановкой (7.8) и (7.9) в (7.12), что оно справедливо в рассмотренном выше частном случае.

Подстановкой (7.12) в (7.3) можно непосредственно проверить, что тензор вида (7.12) удовлетворяет уравнению (7.3). Для этого достаточно заметить, что $U_l^* U_m^* = -c^2$. Соотношение (7.12) легко проверить также на примере тензоров (5.5) и (5.30).

Легко убедиться в том, что тензор (7.12) имеет следующую структуру:

$$T_{lm} = T_{l4} T_{4m} / T_{44}.$$

Замечая, что согласно (7.1)

$$T_{4m} / T_{44} = -(i/c) u_m^*, \quad \text{а} \quad T_{l4} = i c g_l,$$

где g_l — плотность составляющей по оси с индексом l количества движения, а u_m^* — составляющая скорости по оси с индексом m , и что, таким образом, $T_{lm} = g_l u_m^*$, мы видим, что T_{lm} — плотность потока в направлении оси m слагающей по оси l количества движения поля.

Тензор T_{lm} есть тензор поля *тока*, не имеющего «источников» и «стоков». Только в случае тензора такой структуры *скорость* потока энергии равна частному от деления плотности потока энергии на плотность самой энергии.

Уравнения (7.5) являются уравнениями непрерывности потока компонент количества движения и потока энергии такого поля. Эти уравнения должны выполняться, если T_{lm} — тензор *полной энергии* замкнутой системы. Предъявление же требования о выполнении критерия Мёллера к тензору и.-э. поля вообще неправомерно.

8. О МОМЕНТЕ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ СТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Если мы имеем дело с наложением электрического и магнитного статических полей, векторы которых взаимно перпендикулярны, то такое поле может быть носителем момента количества движения. Видимо, Пуанкаре впервые обратил на это внимание*).

Если в поле находится диэлектрическая среда, то значения полного момента количества движения поля в целом, которые можно получить, если вычислить их в одном случае по Абрагаму, в другом — по Минковскому, различны. Закон сохранения вращательного момента позволяет, следовательно, и в данной ситуации сделать выбор между двумя выражениями (2.10) и (2.11).

Представим себе цилиндрический заряженный конденсатор (достаточно длинный), находящийся внутри соленоида, создающего продольное (по отношению к оси конденсатора) однородное магнитное поле, замыкающееся где-то на большом расстоянии от конденсатора. Положим сначала, что внутри конденсатора и соленоида — вакуум. Согласно (2.10) (а также (2.11)) момент относительно оси конденсатора электромагнитного количества движения в слое $r + dr - r$ (на единицу длины этой оси) равен

$$dI_{эм} = ([\mathbf{E}\mathbf{H}]/4\pi c) \cdot 2\pi r^2 dr. \quad (8.1)$$

Если заряд конденсатора есть Q , то $E = 2Q/r$ и полный момент количества движения на единицу длины равен

$$I_{эм} = \int_0^R (H Q r / c) dr = H Q R^2 / 2c, \quad (8.2)$$

где R — радиус внешней обкладки конденсатора.

При выключении тока, создающего поле H , на заряд Q действует сила (индуцированного вихревого поля), момент интегрального импульса

*) Цитировано по Лауэ²⁶.

которой равен

$$I_{\text{мех}} = Q\Delta\Phi/2\pi c; \quad (8.3)$$

$\Delta\Phi$ — изменение потока магнитной индукции:

$$\Delta\Phi = \Phi = H\pi R^2. \quad (8.4)$$

Подстановка (8.4) в (8.3) дает

$$I_{\text{мех}} = I_{\text{эм}} = HQR^2/2c. \quad (8.5)$$

Если внешняя обкладка конденсатора может свободно вращаться и механическая система автономна, то выключение тока приведет цилиндрическую обкладку конденсатора во вращение *) с механическим моментом, равным моменту исчезнувшего электромагнитного количества движения поля.

Предположим теперь, что внутри конденсатора находится цилиндрический слой диэлектрика (пусть твердого), заполняющий почти полностью весь объем конденсатора (зазор между поверхностями диэлектрика и внешней обкладки пренебрежимо мал).

Внешняя обкладка конденсатора и диэлектрический цилиндр могут вращаться вокруг общей оси свободно и независимо.

Говоря о механическом вращательном моменте вихревой электродвижущей силы, теперь надо иметь в виду момент, сообщаемый как истинным зарядам Q обкладки конденсатора, так и свободным зарядам q_d диэлектрика. В расчете на единицу длины (оси конденсатора)

$$q_d = -2\pi PR; \quad (8.6)$$

здесь P — поляризация диэлектрика,

$$P = (D - E)/4\pi, \quad D = \epsilon E, \quad (8.7)$$

где ϵ — диэлектрическая постоянная. Согласно (8.6) и (8.7)

$$q_d = -(DR/2) + (ER/2) = Q(1 - \epsilon)/\epsilon, \quad (8.8)$$

так как $D = 2Q/R$. Как следует из изложенного выше, при размыкании тока соленоида обкладкам конденсатора и диэлектрику будут сообщены механические вращательные моменты I_k и I_d противоположных знаков:

$$I_k = Q\Delta\Phi/2\pi c, \quad (8.9)$$

$$I_d = q_d\Delta\Phi/2\pi c, \quad (8.10)$$

или, принимая во внимание (8.8),

$$I_d = Q[(1 - \epsilon)/\epsilon] \Delta\Phi/2\pi c. \quad (8.11)$$

Складывая (8.9) и (8.10) и подставляя $\Delta\Phi = H\pi R^2$, получим

$$I_k + I_d = (Q/\epsilon) HR^2/2c. \quad (8.12)$$

Задавшись тем или иным выражением для плотности импульса электромагнитного поля, можем определить полный вращательный момент $I_{\text{эм}}$ всего объема поля.

*) $I_{\text{мех}}$ — момент э.д.с. Если предположить, что внешней обкладкой конденсатора служит очень хороший проводник (почти сверхпроводник), то в начальный момент времени $I_{\text{мех}}$ есть вращательный момент носителей тока, и видимое вращение обкладки ускоряется до значения (8.5) постепенно, по мере затухания тока. Конечно, предполагается очевидным, что при выключении тока в каком-либо (не несущем на себе электрические заряды) контуре его собственное исчезающее магнитное поле не приводит этот контур во вращение (а также что с механизмом закорачивания контура не связано сообщение ему вращательного момента).

Сохранение момента количества движения требует выполнения равенства

$$I_{\text{к}} + I_{\text{д}} = I_{\text{эм}}. \quad (8.13)$$

Если для плотности количества движения принять выражение Абрагама

$$g^{\text{А}} = EH/4\pi c, \quad (8.14)$$

где

$$E = 2Q/er, \quad (8.15)$$

то для величины $I_{\text{эм}}$ получим

$$I_{\text{эм}} = \int_0^R (2QH/er \cdot 4\pi c) \cdot 2\pi r^2 dr = QHR^2/2ce, \quad (8.16)$$

и, как показывает сравнение с (8.12), баланс момента количества движения выполняется. Вместе с тем мы убеждаемся в том, что предположение Минковского $g^{\text{М}} = \epsilon EH/4\pi c$ не оправдывается.

Таким образом, мы снова приходим к тому же выводу, что тензор Минковского противоречит законам сохранения.

9. СРАВНЕНИЕ ТЕНЗОРОВ АБРАГАМА И МИНКОВСКОГО И ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Основываясь также на законах сохранения, но допустив ошибку в самой постановке вопроса, Коста де Борегар^{16а} пришел к противоположному выводу. Однако совсем недавно тот же автор^{16б} (стр. 164), рассмотрев вопрос с точки зрения законов движения центра тяжести, пришел к заключению о справедливости выражения Абрагама. Соображения, на которых он основывается в заметке^{16б}, перекрываются с изложенными в той части данной статьи (в ее начале), которая была уже написана, когда автору ее стала известна эта заметка *). Самый же факт несовместимости тензора Минковского с законом постоянства скорости центра тяжести был отмечен уже давно.

За указанной только что заметкой последовало опубликование ряда других^{16в-г,17}. К выводам одной из них мы еще вернемся.

Получив в работе¹⁶ для импульса «фотона» выражение Абрагама, автор высказывает предположение о двойственном значении этой величины: «макроскопическом» — по Абрагаму и «квантовом» — по Минковскому.

Для литературы вопроса характерна эта тенденция к признанию (вопреки фактам) правильности тензора Минковского как «канонически» установленной. Авторы обзорных и оригинальных статей склонны игнорировать аргументы, которые, казалось бы, однозначным образом приводят к выводу о неприемлемости постулата Минковского. Этой тенденцией проникнут, например, обзор Бревика⁴, недавно опубликованный в солидном научном издании. Основной тезис автора и лейтмотив его обширного труда — утверждение, что при «правильном истолковании» тензоры Абрагама и Минковского оказываются «адекватными и эквивалентными в большинстве простых физических ситуаций, которые рассматриваются»^(46, стр. 5). Правильное истолкование формулируется так: «Сила Абрагама возбуждает диполи в составе материала и создает механический импульс, который переносится вместе с полем. Если учесть этот механический импульс вместе с импульсом Абрагама как импульс поля, то мы получим

*) Соображения эти были доложены Ученому совету ФИАН СССР, и они изложены в стенографическом отчете заседания указанного совета от 24. XI 1969 г. Сообщение, о котором идет речь, было сделано в связи с обсуждением одной работы лаборатории колебаний ФИАН.

тензор Минковского» (46, стр. 7). А на стр. 7 в 4а читаем: «Компоненты напряжений и импульса, определенные выше, приводят к силе, которая может возбудить небольшой механический импульс составляющих частиц (диполей)» ... «Сравнивая с экспериментами Джонса и Ричардса, мы находим, что это предположение (suggestion) действительно подтверждается».

Если обратиться к рассмотренным выше моделям, то можно сразу же убедиться в том, что такая «интерпретация» не выдерживает критики. Наша модель пылевой материи, правда, отвечает отчасти ситуации, описанной в только что приведенной цитате (хотя соответствующий полный тензор отнюдь не совпадает с тензором Минковского). Но в твердом диэлектрике диполи закреплены и ни о каком результирующем импульсе (кроме количества поступательного движения среды в целом) не может быть речи.

На стр. 26 обзора 46 автор излагает результаты работы Балажа 10. Приведя два уравнения — уравнение сохранения количества движения и уравнение сохранения скорости центра тяжести (которое, если учесть различные обозначения, совпадает с (1.10)), — автор обзора голосовоно заявляет, что он «не может согласиться с его (Балажа) выводом о правильности выражения Абрагама», так как первое из только что указанных уравнений (совпадающее с нашим уравнением (1.9)) написано якобы неправильно — оно «неполно» (incomplete). Как именно должно быть дополнено это уравнение, автор обзора не поясняет, предоставляя читателю об этом догадываться.

Но ведь речь идет о таком уравнении, которое нельзя записать как-то по-разному, в зависимости от тех или иных гипотез, и вопрос, по существу, не может быть предметом дискуссии, если только не отказаться от таких основных положений механики, как, например, то, что суммарный импульс системы частиц равен сумме масс этих частиц, помноженной на скорость движения их центра тяжести.

В заметке 16в (стр. 1119) Коста де Борегар иначе подходит к той же задаче: согласовать выражения величины импульса — Абрагама ($h\nu/nc$) и «канонического» — «квантового» — Минковского ($nh\nu/c$). Насколько можно понять, автор упомянутой заметки основывается на том, что при излучении фотона источник света (находящийся в среде) передает среде дополнительный механический импульс, равный

$$[(n^2 - 1)/n] h\nu/c \quad (9.1)$$

(что это действительно так, выяснится из изложенного ниже). Складывая оба импульса $h\nu/nc$ (фотона) и $[(n^2 - 1)/n] h\nu/c$ (среды), автор получает

$$\{[(n^2 - 1)/n] + (1/n)\} h\nu/c = nh\nu/c \quad (9.2)$$

— выражение Минковского. Однако ясно, что интерпретировать два слагаемых выражения (9.2) как компоненты импульса фотона невозможно. Второму слагаемому соответствует величина плотности импульса u/nc , имеющая вполне определенный смысл плотности импульса электромагнитного поля (фотона). Говорить же о плотности импульса, соответствующей первому слагаемому выражения (9.2), вообще бессмысленно. Если, например, средой является твердое, неподвижно закрепленное тело, то импульс (9.1) передается Земле и плотность этого импульса равна нулю.

При плотности импульса, равной нулю, поток импульса не равен нулю. Плотность этого потока равна давлению p света на диэлектрик:

$$p = [(n^2 - 1)/n^2] u, \quad (9.3)$$

где u — плотность энергии поля.

Плотность потока импульса в этом случае (но не плотность самого импульса) имеет определенный физический смысл.

За время испускания света среде передается импульс, равный

$$[(n^2 - 1)/n^2] u\tau = [(n^2 - 1)/n^2] u\mathcal{E}n/uc = [(n^2 - 1)/n] \mathcal{E}/c, \quad (9.4)$$

т. е. импульс, равный (9.1) ($\tau = \mathcal{E}n/uc$ — время испускания, u — плотность энергии излучения).

Мы остановились подробнее на этих соотношениях, поскольку они подводят к четкому ответу на вопрос, в чем сходство и в чем различие двух тензоров — Минковского и Абрагама?

В конце гл. 2 мы упомянули о предложении Планка интерпретировать максвеллово давление как плотность полного потока количества движения поля. В таком понимании (по Планку) два выражения *потока* количества движения — Минковского и Абрагама (в статической системе отсчета) — совпадают.

По Минковскому, силы давления на среду отсутствуют и плотность потока количества движения для случая двумерной (двухрядной) схемы тензора равна

$$\varphi^M = gc/n = (nu/c) c/n = u = S_{11}^M. \tag{9.5}$$

По Абрагаму,

$$\varphi^A = g(c/n) + p = (u/nc)(c/n) + [(n^2 - 1)/n^2] u = u = S_{11}^A, \tag{9.6}$$

где p — давление света на среду.

$$S_{11}^A = S_{11}^M. \tag{9.7}$$

Следовательно, величина полного потока количества движения (в указанном выше смысле) по Абрагаму — та же, что и по Минковскому. Однако в то время как φ^M выражается как произведение плотности (импульса) на скорость, по Абрагаму полный поток импульса складывается из двух компонент — компоненты (назовем ее «токовой», равной gc/n) и компоненты, равной давлению света $p = [(n^2 - 1)/n^2] u$ *).

Рассмотрим с точки зрения двух компонент механизм переноса *полного* количества движения (материи и поля) волной света, распространяющейся в пылевой материи. «Токовая» компонента переноса *механического* количества движения среды в нулевой системе пренебрежимо мала; компонента тензора $K_{ii}^0 \approx \beta_0^2 \mu_0 c^2$ (см. (5.26)). Сумма «токовых» компонент (потока количества движения поля и среды) в этом случае равна, следовательно, «токовой» компоненте электромагнитного количества движения:

$$(u/cn) c/n = u/n^2. \tag{9.8}$$

Однако в поле волны среда испытывает давление света, равное $[(n^2 - 1)/n^2] u$. Результирующая F^{**} сил давления света вблизи фронта волны является *источником* механического импульса (количества движения), связанного с «дрейфом» среды).

В пространстве, ограниченное некоторой плоскостью поперечного сечения (положим, плоскостью S_2 ; рис. 6), в синусоидальной зоне волны передается за единицу времени в сумме количество движения, равное

$$(u/n^2) + [(n^2 - 1)/n^2] u = u = (nu/c) c/n, \tag{9.9}$$

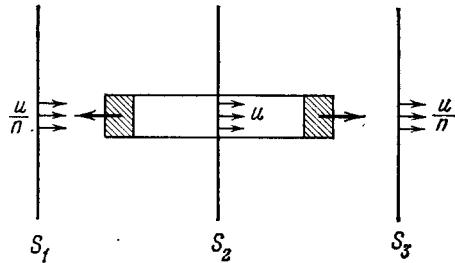


Рис. 6.

*) Импульс (9.1), переданный среде за время τ испускания света его источником, равен произведению $p\tau = [(n^2 - 1)/n] \mathcal{E}/c$.

***) $F = \int_x (-\partial p/\partial x) dx = [(n^2 - 1)/n^2] u$, где x сколь угодно близко к x_0 (x_0 —

координата «фронта волны»), $\int_{x_1}^{x_2} (-\partial p/\partial x) dx = 0$ при $x_1 < x_0$ и $x_2 < x_0$.

где $[(n^2 - 1)/n^2] u$ — приращение за единицу времени механического импульса в указанном выше пространстве. Приращение механического импульса в этом пространстве равно давлению света, действующему на средду на граничной плоскости S_2 (см. рис. 6).

На заднем фронте волны противоположно направленное давление дает результирующую силу ($-F$), которая действует как «сток», поглощающий такое же механическое количество движения. Здесь движение «дрейфа» материи погашается.

Полное количество движения переносится вместе с волной света и, следовательно, со скоростью c/n и может быть выражено, как показано в правой части уравнения (9.9).

Рассмотрим еще на основе тех же представлений баланс количества движения в другой обстановке — при прохождении без потерь стационарного потока света сквозь преломляющую твердую среду.

Рассмотрим пространства S_2S_3 (ограниченное плоскостями S_2 и S_3) и S_1S_2 (границами которого являются плоскости S_1 и S_2) (см. рис. 6). Плотность излучения в среде равна u . Направление от S_2 к S_3 считаем положительным. Поток через плоскость S_2 складается из давления на среду, равного $[(n^2 - 1)/n^2] u$, и потока («тока») импульса излучения (u/n^2) .

Полный поток, поступающий в пространство S_2S_3 через плоскость S_2 , равен

$$u \{[(n^2 - 1)/n^2] + (1/n^2)\} = u. \quad (9.10)$$

В «стоке» F_2 (сила $F_2 = [(n - 1)/n] u$) теряется в единицу времени количество движения, равное $[(n - 1)/n] u$, и u/n уходит через внешнюю границу пространства — плоскость S_3 .

Приращение количества движения в пространстве между плоскостями S_2 и S_3 равно, следовательно,

$$u \{1 - [(n - 1)/n] - (1/n)\} = 0. \quad (9.11)$$

Баланс количества движения выполнен.

Соответствующее уравнение для S_1S_2 запишем, считая теперь направление от S_2 к S_1 положительным. Тогда приращение (в единицу времени) количества движения в пространстве S_1S_2 согласно тем же соображениям выразится такой же, равной нулю суммой

$$u \{[(n^2 - 1)/n^2] + (1/n^2) - [(n - 1)/n] - (1/n)\} = 0.$$

При написании уравнений баланса мы учитывали только электромагнитную компоненту потока импульса. Но в твердой среде имеет место противоток импульса упругостного; в среде в виде «пылевой» материи такой *противоток отсутствует*.

При граничных условиях, которые мы рассматривали выше, предполагалось, что излучение ограничено областью пространства, находящейся целиком внутри твердой среды. В этих условиях «противоток» упругостного импульса *компенсирует* компоненту электромагнитного количества движения, передаваемого за счет давления света. Другими словами, давление света на среду уравновешено натяжением среды.

В только что рассмотренной ситуации компонента потока электромагнитного импульса, передаваемого за счет давления света на среду $[(n^2 - 1)/n^2] u$, превышает встречный поток упругостного импульса $[(n - 1)/n] u$. Избыток

$$\{[(n^2 - 1)/n^2] - [(n - 1)/n]\} u = [(n - 1)/n^2] u \quad (9.12)$$

вместе с «токовой» компонентой электромагнитного количества движения u/n^2 дает в сумме плотность потока количества движения u/n , передаваемого через плоскость S_3 вовне.

Ясно, что если принять выражения Минковского для плотностей импульс-энергии поля, то условия баланса количества движения в стационарном потоке также будут выполнены, поскольку полный поток импульса обоими тензорами определен одинаково.

Если можно было бы изложить теорию эффекта Черенкова в терминах *потока* импульса, то в такой редакции для теории также было бы безразлично, который из двух тензоров — Минковского или Абрагама — взят за основу.

В связи с этим вернемся еще к проводимой в обзоре Бревика ⁴ тенденции к затушевыванию различия между двумя сопоставляемыми тензорами. В цитируемом обзоре, как и в других трудах, обычны ссылки на то, что разложение полного тензора системы (поле + среда) на две компо-

ненты условно и произвольно. Конечно, можно произвольным образом разбить тензор на два слагаемых — тензоры подсистем. Однако в пределах рассматриваемой здесь схемы (идеализированных сред) разложение на две компоненты (тензор и.-э. поля и тензор среды) осуществляется *однозначно*, если придерживаться требования (или определения), согласно которому тензор поля S_{im} должен удовлетворять условию

$$-\partial S_{im}/\partial x_m = f_i. \quad (9.13)$$

(*Существование* такого тензора постулируется как предпосылка.) Так, во всяком случае, обстоит дело в случае поля плоской волны. Это особенно ясно видно, если выбором системы отсчета схема тензора сведена к двухрядной матрице, что, конечно, не является ограничением общности.

Действительно, мы убедились в том, что в пределах указанной приближенной схемы выражение плотности импульса (а следовательно, и плотности пондеромоторных сил) вытекает из законов сохранения. Но если это выражение дано, то определена компонента S_{14} тензора S_{im} . Кроме того, едва ли могут возникнуть разногласия в выборе выражения члена S_{44} , который равен плотности электромагнитной энергии со знаком минус. (Здесь речь идет о значениях компонент тензора в той системе отсчета, в которой среда неподвижна. Выражения S_{44}^A и S_{44}^M — Абрагама и Минковского — совпадают.)

Далее, S_{41} получается из условия

$$\partial S_{4m}/\partial x_m = 0. \quad (9.14)$$

Соотношение (9.14) есть следствие неподвижности среды: работа сил поля, определяемая выражением левой части (9.14), равна нулю, и уравнение (9.14) является в этом случае выражением непрерывности потока энергии. Отсюда следует, что S_{41} — вектор Пойнтинга (с множителем i/c). А поскольку $S_{i4} = icg_i = (i/4\pi) [EH]_i$, то $S_{41} = S_{14}$ и, следовательно, тензор S_{im} симметричен.

Наконец, S_{11} определяется (для плоской волны непосредственно) из условия (9.13), которое для данной схемы дает

$$-\partial S_{1m}/\partial x_m = f \quad (m = 1; 4).$$

(Напоминаем, что плотность силы « f » дана, если дано выражение для плотности импульса.)

S_{11} можно было бы определить и из другого условия: сумма диагональных членов («след») равна нулю.

Предположение $\Sigma = 0$ кажется естественным по аналогии с тензором и.-э. поля, создаваемого зарядами в вакууме, и по аналогии с тензором потока частиц материи. В этом последнем случае

$$\Sigma = -\mu_0 c^2,$$

где μ_0 — плотность массы покоя частиц (равная нулю для поля фотонов*).

Поскольку прослеженная сейчас цепь рассуждений, приводящая к построению тензора S , дает в результате симметричный тензор (Абрагама) и поскольку тензор и.-э. полной системы (поле + среда) должен быть симметричен, отсюда вытекает, что механический тензор U_{im} материальной компоненты системы (среды) симметричен, что естественно.

Асимметрия же тензора Минковского влечет за собой асимметрию механического тензора U_{im} материальной среды.

*) Однако если фотону приписать энергию, равную полной энергии ($-T_{44}$) формул (5.5) и (5.30), то масса покоя такого «фотона» оказывается конечной (см.8).

Резюмируя изложенное в этой статье, можно сформулировать некоторые положения прежде всего негативного характера.

а) Отвод Лауэ, Мёллером и др. тензора Абрагама как не удовлетворяющего критерию Лауэ нельзя признать убедительным. Доводы этих авторов отпадают, если учесть условия баланса двух компонент потока энергии — электромагнитной и механической.

б) Тензор Минковского неприемлем как противоречащий основным законам сохранения, а также и фундаментальным представлениям о взаимодействии электромагнитного поля с веществом (за исключением сил Лоренца, действующих на токи поляризации).

в) Обобщая выводы, полученные на основе рассмотренных выше простых моделей, можно, видимо, утверждать, что тензор Абрагама является адекватной формой тензора поля, удовлетворяющего перечисленным выше требованиям. Как предложили венгерские теоретики ⁸, из тензора Абрагама целесообразно выделить («токовую») компоненту (S^{cr} *), удовлетворяющую условию

$$\text{Div } S^{cr} = 0. \quad (9.15)$$

Другая компонента S^{ts} удовлетворяет требованию

$$-\partial S_{lm}^{ts} / \partial x_m = f_l. \quad (9.16)$$

Тензор Абрагама, представленный в виде суммы этих двух компонент (для частного случая выбранных нами координатных осей), имеет следующий вид:

$$\frac{u_0}{n^2} \gamma^2 \begin{pmatrix} (n\beta - 1)^2 & i(n - \beta)(1 - \beta n) \\ i(n - \beta)(1 - \beta n) & -(n - \beta)^2 \end{pmatrix} + u_0 \frac{n^2 - 1}{n^2} \gamma^2 \begin{pmatrix} 1 & -i\beta \\ -i\beta & \beta^2 \end{pmatrix} = S'^A \quad (9.17)$$

Только первую из этих двух компонент, S'^{cr} , следует принимать во внимание, определяя скорость распространения света как частное от деления плотности потока энергии [$c(u/n^2) \gamma^2 (n - \beta)(1 - n)$] на плотность электромагнитной энергии [$(u/n^2) \gamma^2 (n - \beta)^2$].

Тензор полной энергии T системы «поле + среда» в рассмотренных предельных случаях представляется суммой $T = S^A + U_{\text{мех}}$, если средой является идеальный диэлектрик.

В рассмотренном Марксом и Дьёрди ⁸ случае идеально твердого тела (первая из двух наших моделей)

$$U_{\text{мех}} = -S^{ts}, \quad (9.18)$$

$$T^A = S^{cr}. \quad (9.19)$$

В данном частном случае, следовательно, «токовая» компонента тензора Абрагама совпадает с полным тензором T^A всей системы «поле + среда» в целом.

В других средах сумма $S^{ts} + U_{\text{мех}} \neq 0$ и $T \neq S^{cr}$. Тензор T , вообще говоря, зависит от свойств среды. В первой нашей модели силы поля уравновешены силами упругости, в случае второй модели они уравновешены силами инерции среды **).

*) Эта компонента (выделенная из тензора Минковского) рассматривалась еще раньше Бэком ⁹, который и называет ее «токовой» (Strömungsanteil).

**) В обзоре Бревика ⁴ тензор, совпадающий с S^{cr} , обозначен через $S_{\text{рад}}$ и рассматривается как один из вариантов тензора поля, что, как следует из (9.17), неправильно.

г) Если придерживаться феноменологического подхода и приближения идеальных сред, то проблему можно свести к двум вопросам: 1) о существовании тензора и.-э. поля и 2) о пондеромоторных силах в поле волны, распространяющейся в неподвижной среде.

Если постулировать существование вышеуказанного тензора и принять выражение (2.12), определяющее пондеромоторные силы, или выражение (2.14) для плотности импульса, то не остается места для дискуссии, так как тензор для покоящейся среды тем самым определен, а его релятивистское обобщение вытекает из общих правил преобразования компонент четырехмерных тензоров.

Кстати, с исторической точки зрения интересно отметить, что Абрагам *) построил свой тензор в общем случае (для движущейся среды), не пользуясь в явном виде теорией относительности. Он шел путем экстраполяции от соотношений для неподвижной среды, опираясь на довольно произвольные допущения и крайне скудные данные эксперимента. Вывод этого тензора дан в его книге ⁷⁶ (стр. 360).

Если рассмотреть вопрос в приближении идеальных сред (может быть, и в более общем виде, чем это сделано нами), то можно было бы однозначно определить ряд общих положений — некоторую «азбуку», которой можно и необходимо было бы пользоваться (уже без разногласий) в трактовке и более сложных задач, связанных с данной проблемой. К сожалению, исторически положение парадоксально сложилось так, что и до сих пор в самой этой «азбуке» не наведен порядок. Необходимые базисные положения, на которые можно и должно было бы опираться, не установлены и до сих пор продолжают оставаться предметом дискуссий.

Предложенная вниманию читателя статья возникла в значительной степени в результате бесед автора с В. Л. Гинзбургом, которым и была указана автору литература вопроса. Кроме того, В. Л. Гинзбург взял на себя труд прочесть рукопись статьи. Такой же труд по просьбе автора был любезно выполнен также Л. В. Келдышем. Автор пользуется случаем выразить им искреннюю благодарность за помощь и многие полезные замечания.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Выражение для сил Абрагама в общем случае ($\mu \neq 1$) получается, если в дополнение к силам, рассмотренным в основном тексте, учесть также еще и следующие слагаемые. Во-первых, $-(1/2) \partial(MH)/\partial x$ (где M — магнитная поляризация и H — напряженность магнитного поля) и, во-вторых, «силы $f_{\mathcal{D}}$ Эйнштейна — Лауба»

$$f_{\mathcal{D}} = (1/c) E \partial M / \partial t = [(\mu - 1) / 4\pi c] E \partial H / \partial t. \quad (\text{П1.1})$$

Силы (П1.1) были введены в работе ¹⁸ по соображениям симметрии (или «дуальности») как аналог (2.14).

Принимая во внимание (2.13) и соотношение

$$H = (n/\mu) E, \quad (\text{П1.2})$$

которое для плоской волны вытекает из уравнений Максвелла, перепишем выражение $-(1/2) \partial(PE)/\partial x$ в виде

$$-\frac{1}{2} \frac{n}{c} \frac{\partial}{\partial t} (PE) = -\frac{1}{2} \frac{n}{c} \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \frac{\partial E^2}{\partial t} = \frac{n}{c} \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} E \frac{\partial E}{\partial t} \quad (\text{П1.3})$$

и затем, согласно (П1.2) и (П1.3),

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (PE) = \frac{n}{c} \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \frac{\mu}{n} E \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\varepsilon\mu - \mu}{4\pi c} E \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (\text{П1.4})$$

*) См. приложение 4.

По аналогии, путем таких же выкладок получим

$$-(1/2) \partial (MH)/\partial x = [(\varepsilon\mu - \varepsilon)/4\pi c] H \partial E/\partial t. \quad (\text{П1.5})$$

Наконец, полагая силы Лоренца

$$f_{\text{Л}} = (1/c) (\partial P/\partial t) H = [(\varepsilon - 1)/4\pi c] (\partial E/\partial t) H \quad (\text{П1.6})$$

и принимая во внимание (П1.1), имеем

$$f_{\text{Л}} + f_{\text{Э}} = [(\varepsilon - 1)/4\pi c] (\partial E/\partial t) H + [(\mu - 1)/4\pi c] E \partial H/\partial t. \quad (\text{П1.7})$$

Складывая (П1.4), (П1.5) и (П1.7), получим

$$f_{\text{А}} = \frac{\varepsilon\mu - \mu + \mu - 1}{4\pi c} E \partial H/\partial t + \frac{\varepsilon\mu - \varepsilon + \varepsilon - 1}{4\pi c} H \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\varepsilon\mu - 1}{4\pi c} \frac{\partial (EH)}{\partial t}.$$

Соображения, показывающие, что в данной ситуации силу Лоренца следует положить равной $(1/c) (\partial P/\partial t) H$ (а не $(1/c) (\partial P/\partial t) B$), развиты в работах ^{8, 18}.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Соотношение (2.3) дает

$$\mathbf{f} = -(1/8\pi) E^2 \text{grad } \varepsilon^* \quad (\text{П2.1})$$

в предположении $\mu = 1$. В общем случае ($\mu \neq 1$) в выражение для плотности силы входит еще аналогичный магнитоэлектрический член ($-H^2 \text{grad } \mu$) и вместо (П2.1) в этом случае (опуская в дальнейшем множитель $1/8\pi$) следует положить

$$\mathbf{f} = -E^2 \text{grad } \varepsilon - H^2 \text{grad } \mu. \quad (\text{П2.2})$$

При этом, согласно уравнениям Максвелла для плоской волны, имеем соотношение

$$H = (n/\mu) E. \quad (\text{П2.3})$$

Условие непрерывности потока энергии дает

$$E \cdot H = (n/\mu) E^2 = E_0 H_0 = E_0^2, \quad (\text{П2.4})$$

где E_0 и H_0 — значения переменных поля вне среды (в вакууме), а E , H — в среде. Далее, согласно (П2.4)

$$\left. \begin{aligned} E &= (\mu/n)^{1/2} E_0, \text{ где } n = (\varepsilon\mu)^{1/2}, \\ E^2 &= (\mu/\varepsilon)^{1/2} E_0^2, \\ H^2 &= (\varepsilon/\mu)^{1/2} H_0^2. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П2.5})$$

Силу $F_{\text{тр}}$, действующую на единицу поверхности граничного переходного слоя, вычисляем, согласно (П2.2), по формуле

$$\begin{aligned} F_{\text{тр}} &= - \int \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} E^2 + \frac{\partial \mu}{\partial x} H^2 \right] dx = - \int \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \left(\frac{\mu}{\varepsilon} \right)^{1/2} + \frac{\partial \mu}{\partial x} \left(\frac{\varepsilon}{\mu} \right)^{1/2} \right] E_0^2 dx = \\ &= - \int (\varepsilon\mu)^{1/2} \partial \lg \varepsilon\mu / \partial x E_0^2 dx = - | 2 (\varepsilon\mu)^{1/2} |_1^{\varepsilon\mu} = - 2 E_0^2 = - 2 (n-1) E_0^2. \end{aligned}$$

Восстанавливая опущенный множитель $1/8\pi$, получим:

$$F_{\text{тр}} = -(n-1) E_0^2 / 4\pi = -[(n-1)/n] u,$$

так как $E_0^2 / 4\pi = u_0 = u/n$, где u_0 и u — плотность электромагнитной энергии вне среды и в среде соответственно.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

По смыслу тензора P_{lm} , $P_{44} = -h$, где h — плотность энергии. Следовательно, согласно (5.4)

$$h' = \gamma^2 p^0 \beta^2 \quad (\text{П3.1})$$

— релятивистский, зависящий от скорости w член в выражении для плотности энергии: при сделанных нами предположениях, если $w = 0$, то $h^0 = 0$.

*) Это соотношение, выведенное для статического поля, применимо здесь, поскольку «силы Аброгама» в среднем равны нулю.

Рассмотрим компоненту P'_{11} тензора P'_{lm} . Согласно (4.24) эта компонента равна

$$P'_{11} = p'_{11} + g'_{\mu} w; \quad (\text{ПЗ.2})$$

здесь p'_{11} — компонента тензора относительных напряжений,

$$w = -\beta c. \quad (\text{ПЗ.3})$$

По смыслу «тензора абсолютных напряжений» (P_{lm}) из (5.4) следует, что плотность импульса g'_{μ} равна

$$g'_{\mu} = (1/ic) P'_{14} = -(\beta/c) p'_{11} \gamma^2. \quad (\text{ПЗ.4})$$

Отсюда согласно (ПЗ.2) и (ПЗ.3)

$$P'_{11} = p'_{11} + [\beta^2 p'_{11} / (1 - \beta^2)]. \quad (\text{ПЗ.5})$$

С другой стороны, согласно (5.4)

$$P'_{11} = \gamma^2 p'_{11}. \quad (\text{ПЗ.6})$$

Приравнявая (ПЗ.5) и (ПЗ.6), получаем

$$p'_{11} = p'_{11} \left(\frac{1}{1 - \beta^2} - \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \right) = p'_{11}. \quad (\text{ПЗ.7})$$

Как показывает (ПЗ.7), «продольная» (направленная по оси x) компонента относительных напряжений — в данном случае натяжение среды — при специальном преобразовании Лоренца остается неизменной.

Далее, согласно (4.15), поток энергии

$$\Phi' = h'w + wp'. \quad (\text{ПЗ.8})$$

Учитывая выражение (ПЗ.1) для величины h' , а также что $p' = p^0$, получаем

$$h'w = [p^0 \beta^2 / (1 - \beta^2)] (-\beta c) = -p^0 \beta^3 c / (1 - \beta^2), \quad (\text{ПЗ.9})$$

$$wp' = -\beta c p^0. \quad (\text{ПЗ.10})$$

Подстановка (ПЗ.9) и (ПЗ.10) в (ПЗ.8) дает

$$\Phi' = -[p^0 \beta^3 c / (1 - \beta^2)] - \beta c p^0 = -\beta c p^0 \gamma^2, \quad (\text{ПЗ.11})$$

$$(i/c) \Phi' = P'_{41} = -i p^0 \beta \gamma^2, \quad (\text{ПЗ.12})$$

в соответствии с (5.4).

Согласно постулату Планка

$$g'_{\mu} = \Phi' / c^2 = -\beta p^0 (i/c) \gamma^2$$

и

$$i c g'_{\mu} = P'_{14} = -i \beta p^0 \gamma^2 = P'_{41},$$

также в согласии с (5.4).

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Выражения для компонент тензора Абрагама в функции переменных поля в случае среды, движущейся в направлении оси x со скоростью $w = \beta c$, могут быть представлены в виде следующей симметричной схемы (см. ⁷⁶, формулы (199а), (201), (201а), п¹, формула (35), стр. 666):

$$S_{11} = -\frac{1}{8\pi} \left\{ 2E'_x D'_x + 2H'_x B'_x - (\mathbf{E}' \mathbf{D}' + \mathbf{H}' \mathbf{B}') + \frac{2\beta}{1 - \beta^2} ([\mathbf{D}' \mathbf{V}']_x - [\mathbf{E}' \mathbf{H}']_x) \right\},$$

$$S_{12} = S_{21} = -(1/4\pi) (E'_x D'_y + H'_x B'_y),$$

$$S_{13} = S_{31} = -(1/4\pi) (E'_x D'_z + H'_x B'_z),$$

$$S_{14} = S_{41} = (1/4\pi) [1/(1 - \beta^2)] ([\mathbf{E}' \mathbf{H}']_x - \beta^2 [\mathbf{D}' \mathbf{V}']_x),$$

$$S_{22} = -(1/8\pi) \{ 2E'_y D'_y + 2H'_y B'_y - (\mathbf{E}' \mathbf{D}' + \mathbf{H}' \mathbf{B}') \},$$

$$S_{23} = S_{32} = -(1/4\pi) (E'_y D'_z + H'_y B'_z) = -(1/4\pi) (E'_z D'_y + H'_z B'_y),$$

$$S_{24} = S_{42} = (i/4\pi) [\mathbf{E}' \mathbf{H}']_y,$$

$$S_{33} = -(1/8\pi) \{ 2E'_z D'_z + 2H'_z B'_z - (\mathbf{E}' \mathbf{D}' + \mathbf{H}' \mathbf{B}') \},$$

$$S_{34} = S_{43} = (i/4\pi) [\mathbf{E}' \mathbf{H}']_z,$$

$$S_{44} = \frac{1}{8\pi} \left\{ -(\mathbf{E}' \mathbf{D}' + \mathbf{H}' \mathbf{B}') + \frac{2\beta}{1 - \beta^2} ([\mathbf{D}' \mathbf{V}']_x - [\mathbf{E}' \mathbf{H}']_x) \right\}.$$

Формулы преобразования Лоренца дают $E' = \gamma(E - \beta B)$ (β — скорость начала системы координат (x', y', z') относительно x, y, z). Далее (в случае плоской плоскополяризованной волны в немагнитной среде),

$$H' = nE', \quad B' = \frac{n - \beta}{1 - \beta n} \frac{H'}{n} = \frac{n - \beta}{1 - \beta n} E', \quad D' = n \frac{n - \beta}{1 - \beta n} E',$$

где n — показатель преломления. Если принять это во внимание, то легко убедиться в том, что (4.22) соответствует вышеприведенным выражениям компонент S'_{im} , где, однако, β надо заменить на $-\beta$.

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР, 1971—1972 гг.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. W. Pauli, Relativitätstheorie, Enzyklopadie der mathematischen Wissenschaften Bd. V₂, Hf. 4, Art. 19, Lpz., 1921 (см. перевод: В. Паули, Теория относительности, М.—Л., ОГИЗ — Гостехиздат, 1947).
2. M. Laue, а) Ann. d. Phys. 35, 524 (1911); б) сборник «Albert Einstein: Philosoph-Scientist» (The Library of Living Philosophers, v. 7), Evanston, Ill., 1949, стр. 519; в) Zs. Phys. 128, 387 (1950).
3. C. Möller, The Theory of Relativity, Oxford, 1952, 1957.
4. J. Brevik, Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk. 37, а) No. 11 (pt. 1), б) No. 13. (pt. 2) (1970).
5. U. Schröder, Zs. Naturwiss. 242, 1356 (1969).
6. S. de Groot et al., Physica 37, 284, 297 (1967); 39, 28, 41, 61, 77 (1968).
7. а) M. Abraham, A. Föppl, Theorie der Elektrizität, Bd. 1, Lpz., 1912; б) M. Abraham, Theorie der Electricität, Bd. 2, Lpz., 1914.
8. G. Marx, G. Györgyi, Acta Phys. Hung. 3, 213 (1954); Ann. d. Phys. 16, 241 (1955).
9. F. Beck, Zs. Phys. 34, 136 (1953).
10. N. Balazs, Phys. Rev. 91, 408 (1953).
11. M. Planck, Phys. Zs. 9, 828 (1908).
12. R. Jones, J. Richards, Proc. Roy. Soc. (L.) 80, 190 (1962).
13. В. Л. Гинзбург, ЖЭТФ 10, 583 (1940).
14. C. Tang, J. Meixner, Phys. Fluids 4, 148 (1961).
15. S. de Groot, L. Suttorp, Physica 39, 84 (1968).
16. O. Costa de Beauregard, а) Nuovo Cimento 48, 2 (1967); C.R. Ac. Sci. B274, б) 164, в) 1119, г) 1299 (1972).
17. C. Imbert, G. Roosen, ibid., p. 1351.
18. A. Einstein, J. Laub, Ann. d. Phys. 26, 541 (1908).