

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

539.12.01

**ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ ВО ВСТРЕЧНЫХ ПУЧКАХ  
ЧАСТИЦ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ****В. Г. Горшков**

## СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение . . . . .	45
2. Кинематика и динамика высоких энергий . . . . .	48
а) Кинематика. Фазовый объем (48). б) Динамика. Степенная асимптотика амплитуд и сечений (51).	
3. Процессы с сечениями, не падающими с ростом энергии . . . . .	54
а) Формула Вейцекера — Вильямса (54). б) Упругое рассеяние (55). в) Тормозное излучение одного фотона (56). г) Двойное тормозное излучение (59). д) Рассеяние с рождением заряженных пар (60).	
4. Процессы с сечениями, падающими с ростом энергии . . . . .	62
а) Дважды логарифмические асимптотики (62). б) Пуассоновское распределение тормозного излучения (64). в) Многофотонная аннигиляция (66). г) Рассеяние на малые углы и углы, близкие к $180^\circ$ (72).	
Цитированная литература . . . . .	74

## 1. ВВЕДЕНИЕ

При низких энергиях все процессы квантовой электродинамики классифицируются обычно на основе теории возмущений по числу степеней постоянной тонкой структуры  $\alpha = 1/137$ , определяющих величину сечений этих процессов. Простейшие двухчастичные процессы — рассеяние электронов на электронах и позитронах, фотонов на электронах и процессы аннигиляции электрон-позитронной пары в фотонную и  $\mu$ -мезонную пару — протекают во втором порядке теории возмущений и имеют сечение порядка  $r_0^2 = \alpha^2/m^2 \sim 10^{-25} \text{ см}^2$ . В многочастичных электродинамических процессах на каждую дополнительно испущенную частицу приходится лишний множитель  $\alpha$  в сечении. Поэтому процессы с большим числом конечных частиц в квантовой электродинамике низких энергий вообще не рассматривались. Высшие порядки теории возмущений для амплитуд двухчастичных процессов содержат так называемые *радиационные поправки*. При низких энергиях достаточно ограничиться вычислением только первой радиационной поправки, составляющей величину не более одного процента.

В области высоких энергий, значительно превышающих энергии покоя электрона и  $\mu$ -мезона, традиционная классификация процессов квантовой электродинамики в духе теории возмущений не является удовлетворительной. Величины сечений при высоких энергиях определяются в основном не числом степеней  $\alpha$ , а характером зависимости амплитуд и сечений от энергии.

Развитие физики высоких энергий последних лет привело к пониманию того, что асимптотика полных сечений различных процессов, а также дифференциальных сечений на малые углы и углы, близкие к  $180^\circ$ , определяется характером промежуточных состояний перекрестных каналов

реакции. В адронной физике этими состояниями являются полюсы и разрезы Редже с комплексным значением орбитального момента<sup>1</sup>. В электродинамике в силу наличия малой константы связи особенности перекрестных каналов определяются обычными частицами — фотонами, электронами и  $\mu$ -мезонами<sup>2,3</sup>. Реджизация этих состояний может произойти в высших порядках теории возмущений<sup>3-5</sup>.

Рецепт для определения асимптотического поведения электродинамических процессов может быть четко сформулирован. Для этого введем обычные энергетические и угловые инварианты процессов:

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2 \approx 2p_1 p_2 \gg m^2, \\ t &= (p_1 - p_1')^2, \quad u = (p_1 - p_2')^2, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $p_1, p_2$  и  $p_1', p_2'$  — 4-импульсы начальных и конечных частиц реакции на рис. 1, а. В системе центра инерции (СЦИ) ( $p_1 = -p_2$ ) инварианты (1) принимают вид \*)

$$s = 4E^2, \quad t = -s(1 - \cos \vartheta)/2, \quad u = -s(1 + \cos \vartheta)/2, \quad (2)$$

где  $E$  и  $\vartheta$  — энергия и угол рассеяния частиц. Поэтому в дальнейшем будем называть инвариант  $s$  *квадратом энергии*, а инварианты  $t$  и  $u$  — *квадратами переданных импульсов*. Прямой канал реакции с начальными частицами, образующими инвариант  $s$ , назовем *s-каналом*. Перекрестные каналы с начальными частицами, образующими инварианты  $t$  и  $u$ , назовем *t- и u-каналами* соответственно. В случае многочастичных процессов мы будем вводить несколько переданных импульсов, образуемых импульсами начальных и конечных частиц,

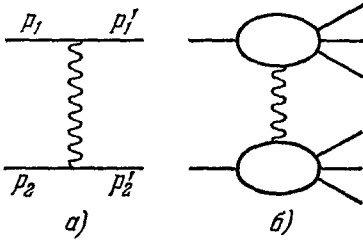


Рис. 1.

образуемые импульсами конечных частиц:

$$s_{ih} = \left( \sum_{n=i}^h p_n \right)^2. \quad (3)$$

Процессы, амплитуды которых могут быть разделены в  $t$ -канале на две части путем пересечения только фотонных линий — рис. 1, имеют полные сечения, не падающие с ростом энергии<sup>2,3</sup>. Главный вклад в сечения процесса дают диаграммы с наименьшим числом параллельных фотонов в  $t$ -канале\*\*. Диаграммы с увеличенным числом параллельных фотонов имеют такое же энергетическое поведение и представляют собой, как и в случае низких энергий, малые радиационные поправки к главным диаграммам. Во всех процессах на встречных пучках, амплитуды которых содержат фотонные деления в  $t$ -канале, возможен один промежуточный фотон. Однако в процессах типа комптон-эффекта и рассеяния света на свете (рис. 2) в силу сохранения  $C$ -четности в  $t$ -канале может быть только четное число фотонов. Отметим, что обе диаграммы дельбрюкковского типа (см. рис. 2, а, б), дающие главный вклад в постоянное сечение, представляют собой при низких энергиях радиационные поправки к диаграммам рис. 2, в, г. С ростом энергии вклад диаграмм рис. 2, в, г, не имеющих фотонов в промежуточном состоянии  $t$ -канала, быстро падает и становится меньше вклада диаграмм рис. 2, а, б при  $s^{1/2} \sim 3 \text{ Гэв}$ <sup>6,7</sup>.

\*) Все дальнейшие формулы справедливы с точностью до членов порядка  $m^2/s$ .

\*\*\*) Термины «параллельный» и «последовательный» аналогичны принятым в электрических цепях.

Кроме степенного постоянства электродинамические сечения рис. 1, б могут иметь также логарифмический рост определенной степени. Степень логарифмического роста в общем случае равна  $n - 1$ , где  $n$  — число последовательных промежуточных фотонов в  $t$ -канале на рис. 3<sup>8,9</sup>. Кроме того, если начальная частица образует с конечной частицей и промежуточным в  $t$ -канале фотоном простейшую вершину на рис. 3, б, то на этот крайний фотон приходится еще один (вейцекеровский) логарифм<sup>10-12</sup>. Таким образом, максимальная степень логарифма с учетом двух возможных краевых логарифмов равна  $(n-1) + 2$ . Из приведенной схемы выпадает только процесс упругого рассеяния электронов

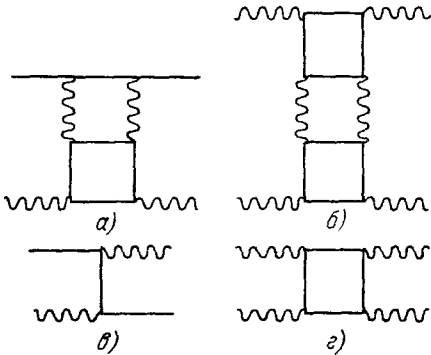


Рис. 2.

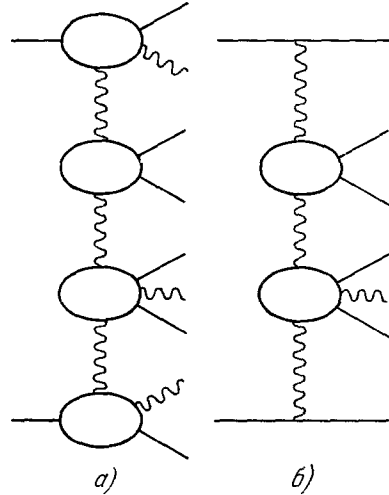


Рис. 3.

на электронах и позитронах — рис. 1, а, полное сечение которого бесконечно при любых энергиях. Нетрудно видеть, что на каждый логарифм (исключая краевые вейцекеровские логарифмы) приходится по крайней мере множитель  $\alpha^{2n}$ . Величина  $\alpha^2 \ln(s/m^2)$  мала при всех достижимых энергиях. Поэтому величина сечений процессов, содержащих  $t$ -канальные фотонные деления — рис. 3, уменьшается с ростом числа конечных частиц, и их можно классифицировать на основе теории возмущений. Непадающее полное сечение процессов — рис. 1 и 3 возникает за счет малых углов рассеяния  $\theta \sim m/s^{1/2}$ , когда переданный промежуточному фотону импульс  $t \sim m^2$ . Дифференциальные сечения любых процессов при рассеянии на большие углы, когда все переданные импульсы  $t_i \sim s$ , линейно падают с ростом  $s$ . Поэтому область больших  $t_i \sim s$  не дает вклада в полное сечение процессов на рис. 1, б. Процессы, не падающие с ростом энергии, рассмотрены в гл. 3.

Процессы, не имеющие в  $t$ -канале фотонных делений, линейно падают с ростом  $s$  при всех углах рассеяния. Падающими оказываются и полные сечения этих процессов. Однако для процессов этого типа возникает новое явление<sup>13,14</sup>. Радиационные поправки, связанные с промежуточными фотонами для этих процессов, содержат на каждую степень  $\alpha$  максимально возможную степень логарифма, равную двум (см. гл. 2). Возникающий при этом параметр разложения в ряд теории возмущений  $(\alpha/\pi) \ln^2(s/m^2)$  оказывается порядка единицы при энергиях  $s^{1/2} \sim 10$  Гэв. При этом амплитуды процессов определяются уже суммой всех радиационных поправок, содержащих параметр  $(\alpha/\pi) \ln^2(s/m^2)$ , которая при высоких энергиях существенно отличается от борновского члена (первого приближения теории возмущений). Полные сечения процессов с испусканием дополнительного числа фотонов также содержат параметр  $(\alpha/\pi) \ln^2(s/m^2)$

на каждый испущенный фотон. Поэтому эти процессы, идущие в разных порядках теории возмущений, имеют при достаточно высоких энергиях сечения одного порядка. При очень высоких энергиях, когда параметр  $(\alpha/\pi) \ln^2(s/m^2) \gg 1$ , сечение процессов с испусканием заданного числа фотонов может стать больше сечений процессов с испусканием меньшего числа фотонов. Так, трехфотонная аннигиляция электронно-позитронной пары превышает двухфотонную при энергиях  $s^{1/2} \gtrsim 50 \text{ Гэв}$  и  $\omega_{\min} \sim m$ <sup>15</sup>.

Дважды логарифмические члены бывают разной природы<sup>3</sup>. При рассеянии заряженных частиц на большие углы  $\theta \sim 1$  возникает дважды логарифмический вклад от реальных и виртуальных тормозных фотонов, имеющий классическую природу и удовлетворяющий распределению Пуассона<sup>14, 16-18</sup>. При плохом энергетическом ( $\Delta E \sim E$ ) или угловом ( $\Delta\theta \sim \theta$ ) разрешении, когда излучается большое число реальных тормозных фотонов высокой энергии, дважды логарифмический вклад этих фотонов из-за их пуассоновской природы отсутствует.

При рассеянии на малые углы или углы, близкие к  $180^\circ$ , возникает дважды логарифмический вклад от фотонов, не имеющий классического аналога<sup>3, 14</sup>. Этот вклад не удовлетворяет распределению Пуассона и связан с наличием у электрона полужелого спина<sup>3, 14</sup>. Процессы с падающими сечениями рассмотрены в гл. 4.

Высокие энергии электронов  $s^{1/2} \sim 1-10 \text{ Гэв}$  достижимы в настоящем и ближайшем будущем, по-видимому, только на установках со встречными пучками<sup>19, 20</sup>, ибо соответствующие энергии в лабораторной системе (ЛС)  $E_{\text{ЛС}} \approx s/2m$  имеют порядок  $10^3-10^5 \text{ Гэв}$  и пока недоступны для ускорителей с покоящейся мишенью. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать только процессы, которые имеют место в ускорителях со встречными пучками, с электрон-электронной или электрон-позитронной парой в качестве начальных частиц.

## 2. КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

Для того чтобы выяснить характер поведения сечений электродинамических процессов при высокой энергии относительно изменения инвариантов  $s$  и  $t$ , рассмотрим подробно кинематику и динамику процессов в области  $s \gg m^2$ .

а) К и н е м а т и к а. Ф а з о в ы й о б ъ е м. Главная цель этого раздела — получить выражение для фазового объема (см. ниже формулы (17), (21) и (24)), а также познакомить читателя с судаковскими переменными, которыми мы будем неоднократно пользоваться в дальнейшем.

Введем обычную инвариантную амплитуду образования  $n$  конечных частиц  $M$ , нормированную условием

$$S = 1 + (2\pi)^4 i\delta(p_1 + p_2 - \sum_i p_i) (2E_1 \cdot 2E_2)^{-1/2} [\prod_i (2E_i)^{1/2}]^{-1} M^n, \quad (4)$$

где  $p_i$ ,  $E_i$  и  $p'_i$ ,  $E'_i$  — 4-импульсы и энергии начальных и конечных частиц. Нормировочный объем положен равным единице. Для сечения образования  $n$  конечных частиц получим выражение

$$d\sigma_n = (2s)^{-1} \sum_j |M^n|^2 d\Gamma_n, \quad (5)$$

$$d\Gamma_n = \prod_{j=1}^n [d^3 p'_j / (2\pi)^3 2E_j] (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - \sum_{j=1}^n p'_j). \quad (6)$$

Символ  $\sum_j$  в (5) означает суммирование по спиновым состояниям конечных частиц; кроме того, в (5) подразумевается усреднение по поля-

ризациям начальных частиц. Эти операции можно выполнить в выражении для сечения (5), (6) с помощью известных формул

$$A^{\nu} \equiv \sum_{\lambda} \epsilon_{\mu}^{\lambda} \epsilon_{\nu}^{\lambda} = \delta_{\mu\nu} - (k_{\mu} k_{\nu} / k^2), \quad (7)$$

$$A^e \equiv \sum_{\lambda} u_p^{\lambda} \bar{u}_p^{\lambda} = \hat{p} + m, \quad \hat{p} = \gamma_{\mu} p_{\mu}, \quad (8)$$

где  $\epsilon_{\mu}$  и  $u_p$  — поляризационные функции фотона с импульсом  $k$  и электрона с импульсом  $p$  (биспинор Дирака). В силу определения (4) электронные функции нормированы условием

$$j_{\mu} = \bar{u}_p \gamma_{\mu} u_p = 2p_{\mu}, \quad \bar{u}_p u_p = 2m. \quad (9)$$

Условие сохранения тока, как обычно, позволяет отбросить последний член в (7).

Замечая, что

$$d^3p / (2\pi)^3 2E_{\pm} = [d^4p / (2\pi)^4] \cdot 2\pi\delta(p^2 - m^2) |_{E>0}, \quad (10)$$

можно переписать фазовый объем (6) в виде

$$d\Gamma_n = \prod_{j=1}^{n-1} \{ [d^4p / (2\pi)^4] \cdot 2\pi\delta(p_j^2 - m^2) \} 2\pi\delta(p_n^2 - m^2). \quad (11)$$

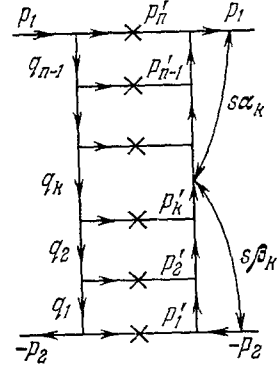


Рис. 4.

Учитывая (11), (7) и (8), замечаем, что  $M^n M^{n+d\Gamma_n}$  представляет собой амплитуду диаграммы рис. 4<sup>14, 21</sup>. Левая часть рис. 4 есть амплитуда  $M^n$ , правая — комплексно-сопряженная амплитуда  $M^{n+}$ , у которой направления всех заряженных линий заменены на противоположные\*). Всем промежуточным линиям амплитуд  $M^n$  и  $M^{n+}$  соответствуют по-прежнему электронные или фотонные пропагаторы, всем конечным частицам — промежуточным перечеркнутым линиям, соединяющим амплитуды  $M^n$  и  $M^{n+}$  — множители  $2\lambda A_j \delta(p_j^2 - m_j^2)$ . Эти множители отличаются от пропагаторов заменой полюса  $(p_j^2 - m_j^2 + i\epsilon)^{-1} |_{\epsilon \rightarrow 0}$  на его удвоенную мнимую (абсорбционную) часть  $2\pi\delta(p_j^2 - m_j^2)$ . Диаграмма рис. 4 представляет собой, после интегрирования по всем инвариантам, входящим в (11), вообще говоря, неполную удвоенную мнимую (абсорбционную) часть амплитуды упругого рассеяния вперед  $\text{Im } M_{\text{упр}}^n(0)$ <sup>24, 25</sup>. Полная мнимая часть возникает при суммировании по всевозможному числу конечных частиц  $\text{Im } M_{\text{упр}} = \sum_n \text{Im } M_{\text{упр}}^n$ . Она связана с полным сечением оптической теоремой  $\sigma = \text{Im } M_{\text{упр}}(0)/s$ .

Мы преобразуем фазовый объем, выделяя переменные, интегрирование по которым может привести к большим логарифмам  $\ln(s/m^2)$ \*\*). Этими переменными, очевидно, являются энергии конечных частиц и переданные импульсы, зависящие от углов  $\vartheta$  между импульсами вылетевших частиц и направлением пучков. Угловые переменные в плоскости, перпендикулярной пучкам, не зависят от энергии в теории возмущений. Таким образом, для каждой конечной частицы (кроме двух) мы, вообще говоря, можем получить не более двух больших логарифмов. На оставшиеся две

\*) Для простоты мы изобразили амплитуду  $M^n$  на рис. 4, состоящей из простейших полюсных диаграмм, зависящих от переданных импульсов в  $t$ -канале<sup>22, 23</sup>, однако такое рассмотрение можно использовать и при произвольном виде  $M^n$ .

\*\*\*) Возможность появления при интегрировании по фазовому объему только логарифмически больших величин есть специфика электродинамической теории возмущений, в чем мы убедимся ниже.

частицы может возникнуть только один логарифм. В двухчастичной реакции этот логарифм возникает при интегрировании по единственному переданному импульсу. Всего, следовательно, при интегрировании по фазовому объему  $n$  конечных частиц может возникнуть максимум  $2n - 3$  больших логарифма <sup>26</sup>.

Интегрирование по конечным частицам удобно проводить, переходя от переменных  $p_j$  к переданным импульсам  $-q_j = p_2 - \sum_{i=1}^j p_i$  (см. рис. 4). Разложим  $q_j$ , следуя Судакову <sup>13</sup>, на инвариантные продольные и поперечные части:

$$q = p_1\beta - p_2\alpha + q_{\perp}, \quad p_1q_{\perp} = p_2q_{\perp} = 0, \quad (12)$$

$$-t = q^2 = -s\alpha\beta + q_{\perp}^2, \quad (13)$$

$$d^4q = (s/2) d\alpha d\beta d^2q_{\perp} = \pi (s/2) d\alpha d\beta dt (d\varphi/2\pi). \quad (14)$$

В СЦИ составляющая  $q_{\perp}$  представляет собой пространственный вектор, перпендикулярный линии движения пучков, поэтому  $q_{\perp}^2 < 0$ . Величины  $s\beta_k$  ( $s\alpha_k$ ) имеют простой физический смысл. Они совпадают в асимптотике с энергетическими инвариантами  $s_{1k}$  ( $s_{kn}$ ) частей амплитуды на рис. 4 с импульсами граничных частиц  $p_2$  и  $q_k$  ( $p_1$  и  $q_k$ ). Действительно,

$$s_{1k} = \left( \sum_{i=1}^k p_i \right)^2 = (p_2 + q_k)^2 = s\beta_k - 2m^2\alpha_k + m^2 - t_k \approx s\beta_k \gg m^2, t_k, \quad (15)$$

$$s_{kn} = \left( \sum_{i=k+1}^n p_i \right)^2 = (p_1 - q_k)^2 = s\alpha_k - 2m^2\beta_k + m^2 - t_k \approx s\alpha_k \gg m^2, t_k.$$

Величина  $s/2m$  (1) представляет собой энергию частицы с импульсом  $p_2$  в системе покоя частицы с импульсом  $p_2 = 0$ . Аналогично величины  $s\beta_k/2m$  ( $s\alpha_k/2m$ ) представляют собой энергии частиц с импульсом  $q_k$  в системе покоя частицы с импульсом  $p_2 = 0$  ( $p_1 = 0$ ).

Из условия положительности энергий конечных частиц получаем

$$1 > \beta_{n-1} > \beta_{n-2} > \dots > \beta_2 > \beta_1 > 0, \quad (16a)$$

$$1 > \alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_{n-2} > \alpha_{n-1} > 0. \quad (16b)$$

Условия (16) очевидны с точки зрения только что данной интерпретации  $s\beta$  и  $s\alpha$ . Действительно, в системе покоя частицы 1,  $p_1 = 0$  (покоя частицы 2,  $p_2 = 0$ ), энергии промежуточных частиц должны возрастать (убывать) при движении от частицы 2 к частице 1 на рис. 4.

В области максимальной логарифмичности ни одна из переменных не может быть порядка другой, ибо в противном случае мы теряем логарифмы по одной из этих переменных. Это условие значительно упрощает выкладки. Все неравенства (16) следует, таким образом, понимать в усиленном смысле. Во всех  $\delta$ -функциях (11) достаточно оставлять только произведение наибольших  $\alpha_i$  на наибольшие  $\beta_i$ . В случае лестничной амплитуды на рис. 4 (зависящей от переданных импульсов  $t_i$ )  $d\varphi/2\pi$  в (14) можно заменить единицей. Выполняя интегрирование  $\delta$ -функций в (11) по  $d\alpha_i$ , получим

$$d\Gamma_n = 2\pi [dt_{n-1}/(4\pi)^2 s] \prod_{j=n-1}^2 ds\beta_j [dt_{j-1}/(4\pi)^2 s\beta_j]. \quad (17)$$

Ограничения на переменные  $s\beta_j$  определены неравенствами (16a). Ограничения на переменные  $t_j$  следуют из равенств нулю аргументов  $\delta$ -функций (11) после их интегрирования по  $d\alpha_i$  и определения (13), которое в силу  $q_{\perp}^2 < 0$  и  $s\alpha\beta > 0$  следует читать как неравенство

$$t > s\alpha\beta \quad \text{или} \quad t \gg s\alpha\beta. \quad (18)$$

Результирующие ограничения на переменные  $t_j$  можно записать в виде цепочки неравенств<sup>13</sup>

$$1 = t_1/s\beta_1 \gg t_2/s\beta_2 \gg \dots \gg t_{n-1}/s\beta_{n-1} \gg m^2/s. \quad (19)$$

Таким образом, окончательно пределы изменения переменных фазового объема (17) ограничены условиями (16а) и (19).

Выражение для фазового объема (17) имеет простую интерпретацию. Двухчастичный фазовый объем равен

$$d\Gamma_2 = 2\pi dt/(4\pi)^2 s. \quad (20)$$

Многочастичный фазовый объем (17) получается следующим образом. Сначала по формуле (20) вычисляется двухчастичный фазовый объем блока сечения, ограниченного частицами с импульсами  $p_2$  и  $q_2$  с энергетическим инвариантом  $s_{12} = s\beta_2$ . Затем по формуле (20) вычисляется двухчастичный фазовый объем блока сечения, ограниченного частицами с импульсами  $p_2$  и  $q_3$  с энергетическим инвариантом  $s_{13} = s\beta_3$ , причем конечные частицы 1' и 2' играют роль одной частицы с эффективной массой, равной  $s_{12} = s\beta_2$ , по которой следует проинтегрировать в очевидных пределах  $s\beta_3 \gg s\beta_2 \gg m^2$  (см. (16а)), и т. д. Последний дифференциал имеет вид двухчастичного фазового объема для всего сечения, в котором роль первой частицы выполняет весь блок сечения с  $n - 1$  конечными частицами и эффективной массой  $s\beta_{n-1}$ , по которой производится интегрирование вплоть до полной энергии  $s$ . Приведенную интерпретацию фазового объема можно математически записать в виде рекуррентного соотношения

$$d\Gamma_n(s, t) = [dt'/(4\pi)^2 s] ds' d\Gamma_{n-1}(s', t'), \quad (21)$$

$$s > s', \quad t/s < t'/s', \quad d\Gamma_1(s, t) = 2\pi\delta(s - t), \quad (22)$$

$$d\Gamma_n \equiv d\Gamma_n(s, m^2). \quad (23)$$

Выражение для одночастичного фазового объема (22) справедливо при  $t \gtrsim m^2$ ; при  $t \ll m^2$  нулевое значение аргумента  $\delta$ -функции (22) соответствует равенству (15).

На основании изложенной интерпретации фазового объема выражение для (21) можно записать еще одним способом. Выберем какую-либо ячейку на рис. 4 с номером  $k$  и разобьем график для сечения рис. 4 на два блока — левый и правый относительно ячейки  $k$ . Тогда фазовый объем всего процесса можно записать через фазовые объемы этих блоков в виде

$$d\Gamma_n = (2\pi)^{-1} d\Gamma_{n-k-1}(s_{1k}, t_k) ds_{1k} [dt_k/(4\pi)^2 s] ds_{kn} d\Gamma_k(s_{kn}, t_k) \quad (24)$$

$$(s_{1k}, s_{kn} \ll s).$$

Это выражение имеет вид двухчастичного фазового объема, где левый блок с эффективной массой  $s_{1k}$  выполняет роль первой частицы, а правый с эффективной массой  $s_{kn}$  — роль второй частицы. Формулу (24) можно непосредственно получить путем интегрирования  $\delta$ -функции по  $d\beta$  сверху вплоть до  $k$ -й ячейки и по  $d\alpha$  вниз, начиная с  $k$ -й ячейки.

б) Динамика. Степенная асимптотика амплитуд и сечений. Цель этого раздела — получить формулы для асимптотики амплитуд (28), (29) и (30). Рассмотрим динамику, связанную с поведением амплитуд  $M$  при высокой энергии. В том случае, когда все переданные импульсы  $t_i$  велики,  $t_i \sim s$ , безразмерная величина  $|M|^2 d\Gamma$  (6) должна быть порядка единицы, ибо  $M$  в борновском приближении

описывается набором простых полюсов по различным инвариантам\*). Отсюда, в частности, следует, что все сечения рассеяния и рождения частиц на большие углы (5) порядка  $1/s$ , т. е. падают с увеличением энергии.

Не так обстоит дело, если переданные импульсы  $q_i^2 = t_i$  малы:  $t_i \ll m^2$ . В этом случае поведение амплитуды зависит от спина частиц с импульсом  $q_i$ , обмен которыми происходит в  $t$ -канале. Выясним степенную по  $s$  зависимость амплитуды от спина промежуточных частиц в  $t$ -канале, не интересуясь пока возможными логарифмами.

Рассмотрим простейшую полюсную диаграмму Фейнмана рис. 1, а с фотоном в промежуточном состоянии  $t$ -канала. При малом  $t \ll m^2$  импульсы начальных и рассеянных частиц можно считать совпадающими,  $p_1 \approx p'_1$ ,  $p_2 \approx p'_2$ . Токи переходов частиц 1 и 2 на рис. 1, а принимают вид (9)

$$\bar{u}'_{p_1} \gamma_\mu u_{p_1} = 2p_{1\mu}, \quad \bar{u}'_{p_2} \gamma_\mu u_{p_2} = 2p_{2\mu}.$$

Поэтому амплитуда на рис. 1, а с учетом (1) равна

$$M_1 = 4\pi\alpha \cdot 2s/t. \quad (25)$$

С точки зрения  $t$ -канала, где  $t$  является энергией, безразмерная амплитуда  $M$  (см. рис. 1, а) с одним фотоном в промежуточном состоянии состоит из одной парциальной волны с  $l = 1$  и должна иметь вид<sup>1 \*\*</sup>)

$$M_1 = f_1(t) P_1(z) = f_1(t) \cdot 2s/t. \quad (26)$$

Из (25) следует, что  $f_1(t) = 4\pi\alpha$  при  $t \sim m^2$ . В случае обмена скалярной частицей амплитуда состояла бы из нулевой парциальной волны и была бы пропорциональна константе (для скалярных частиц константа  $\alpha$  в (25) имеет размерность  $m^2$  и  $s$  в числителе отсутствует).

Рассмотрим теперь обмен спинорной частицей (рис. 2, в). При  $t \sim m^2$  пропагатор спинорной частицы в силу наличия числителя (8) пропорционален  $t^{1/2}$ . Спиноры  $u_p$  двух электронов в СЦИ пропорциональны  $p^{1/2} \sim s^{1/4}$ . Для всей амплитуды — рис. 2, в получаем величину порядка

$$M_{1/2} \sim s^{1/2}/t^{1/2}. \quad (27)$$

Таким образом, амплитуды, содержащие обмен одной частицей в  $t$ -канале, ведут себя при  $t \sim m^2$

$$M_\sigma \sim s^\sigma, \quad (28)$$

где  $\sigma$  — спин промежуточной частицы<sup>1, 2, 27</sup>.

В случае обмена двумя частицами в  $t$ -канале со спинами  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  (волнистые линии на рис. 5) каждая из амплитуд, содержащая волнистую линию, ведет себя по закону (28). Однако в силу малости  $t \sim m^2$  фазовый объем интегрирования по замкнутой петле мал:  $d\Omega \sim \pi dt'/s \sim m^2/s^{***}$ ). Поэтому общее поведение амплитуды — рис. 5, а при малых  $t$  имеет вид<sup>4, 27, 28</sup>

$$M \sim s^{\sigma_1 + \sigma_2 - 1}. \quad (29)$$

\*) Это утверждение справедливо только в рамках теории возмущений, когда все амплитуды описываются борновскими членами, т. е. диаграммами Фейнмана с наименьшим числом виртуальных частиц. При очень высоких энергиях, когда эффективные параметры теории возмущений велики,  $\alpha \ln^2(s/m^2) \gg 1$  или  $\alpha \ln(s/m^2) \gg 1$ , суммирование рядов теории возмущений может существенно изменить поведение амплитуды (см. гл. 4).

\*\*\*) В СЦИ  $t$ -канала  $p_1 - p'_1 = 0$ ,  $s = -(t/2)(1 - \cos \vartheta)$ , откуда  $\cos \vartheta = (2s/t) + 1 \approx 2s/t$ ,  $s \gg t$ .

\*\*\*\*) В случае постоянной асимптотики амплитуды, возникающей при обмене двумя спинорными частицами ( $\sigma_1 + \sigma_2 = 1$ ), вклад от больших  $t' \sim s$  того же порядка, что и вклад от малых  $t' \sim t \sim m^2$ .



Нетрудно обобщить наше рассмотрение и на обмен произвольным числом частиц в  $t$ -канале. Обмен каждой частицей будет давать множитель (22), а интегрирование по фазовому объему каждой замкнутой петли будет давать малость  $\sim m^2/s$ . Поэтому общее поведение амплитуды при обмене  $n$  частицами со спинами  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$  имеет вид <sup>4, 27, 28</sup>

$$M \sim s^{jn},$$

$$j_n = \sum_{k=1}^n \sigma_k - (n-1) = \sum_{k=1}^n (\sigma_k - 1) + 1. \quad (30)$$

Поведение амплитуды вида (30) можно получить также, если подставить на рис. 5 в качестве одной из виртуальных частиц в  $t$ -канале всю амплитуду (29) и провести те же рассуждения, что и при получении формулы (29).

Выражения (29) и (30) справедливы и в общем случае, когда вместо горизонтальных сплошных линий на рис. 5, *а, б* стоят произвольные амплитуды  $A$  и  $B$  на рис. 5, *в* и *г*, содержащие правые и левые разрезы по своим парциальным энергиям <sup>28</sup>. Асимптотика всей амплитуды рис. 5, *в, г* будет определяться максимальным значением  $j_n$  (30) из всех наборов промежуточных частиц в  $t$ -канале, содержащихся в амплитуде рис. 5, *в, г*. Таким образом, из (30) мы видим, что только обмен фотонами (причем любым их числом) в  $t$ -канале приводит к линейно растущей с ростом  $s$  амплитуде и, следовательно (см. (5)), к постоянному сечению. Полное сечение в этом случае также постоянно и определяется малыми  $t \sim m^2$ , что соответствует преимущественному вылету частиц реакции под очень малыми углами  $\vartheta \sim m/s^{1/2}$ . Сечения же процессов, определяемые графиками с одной спинорной частицей в  $t$ -канале, будут падающими с ростом энергии. В последнем случае обмена двумя спинорными частицами малые  $t \sim m^2$  не являются выделенными и полное сечение определяется областью, приводящей к максимальному числу больших логарифмов.

Все сказанное относилось к асимптотике диаграмм Фейнмана для амплитуд процессов. Формулы (29) и (30) с учетом (5) правильно описывают также и асимптотики диаграмм для сечения рис. 4, если в качестве промежуточных частиц в  $t$ -канале учитываются только виртуальные частицы, не принадлежащие к конечным продуктам реакции, другими словами, если в  $t$ -канале учитываются только частицы при горизонтальном делении диаграммы рис. 4, но не при косом делении, когда пересекаются конечные реальные частицы.

Диаграммы для сечений являются более экономичными, чем диаграммы для амплитуд. Если располагать конечные частицы в виде горизонтальных параллельных линий, можно исследовать горизонтальные деления виртуальных частиц в  $t$ -канале и определить по формулам (29), (30) и (5) асимптотику сечения. Таким способом сразу же выявляются амплитуды, интерференция которых мала (см. ниже рис. 9, *б*). Ниже везде, говоря о делениях в  $t$ -канале и промежуточных состояниях в диаграммах для сечений, мы будем иметь в виду только горизонтальные деления и промежуточные состояния, связанные с виртуальными частицами.

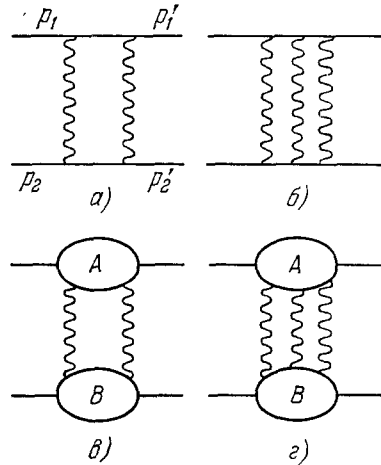


Рис. 5.

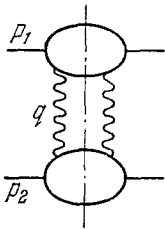


Рис. 6.

## 3. ПРОЦЕССЫ С СЕЧЕНИЯМИ, НЕ ПАДАЮЩИМИ С РОСТОМ ЭНЕРГИИ

а) Формула Вейцекера — Вильямса. Как мы видим, все амплитуды, содержащие обмены произвольным числом параллельных фотонов в  $t$ -канале, приводят к постоянному сечению. Однако с каждым добавочным параллельным фотоном амплитуда умножается на малую величину  $\alpha$ . Логарифмов при этом не возникает \*)<sup>2, 8</sup>.

Таким образом, главный вклад в сечение дают диаграммы, содержащие наименьшее число параллельных фотонов в  $t$ -канале. Для процессов во встречных пучках с постоянным сечением всегда возможен обмен одним фотоном в  $t$ -канале.

Рассмотрим общий вид диаграммы для сечения процесса, содержащего обмен одним фотоном в  $t$ -канале (рис. 6). Используя формулу (24), мы можем записать сечение рис. 6 в виде

$$d\sigma = (2s)^{-1} (2\pi)^{-1} d\Gamma_1(s_1, t) f_{i\mu\nu}(s_1, t) ds_1 [dt / (4\pi)^2 s] t^{-2} ds_2 d\Gamma_2(s_2, t) f_{2\mu\nu}(s_2, t), \quad (31)$$

где  $f_{i\mu\nu}$  — квадраты модулей амплитуд верхнего и нижнего блоков, разделенных фотонными линиями. Функции  $f_{i\mu\nu}$  удовлетворяют условию градиентной инвариантности

$$q_\mu f_{i\mu\nu} = q_\nu f_{i\mu\nu} = 0, \quad t = q^2. \quad (32)$$

При  $t = 0$  функции  $f_{i\mu\nu}$  связаны с сечением процесса фоторождения, определяемым нижним или верхним блоком диаграммы рис. 6:

$$(2s_i)^{-1} \overline{\varepsilon_\mu \varepsilon_\nu} d\Gamma_i f_{i\mu\nu}(s_i, 0) = d\sigma_i(s_i), \quad (33)$$

где усреднение по поляризациям фотона можно выполнить с помощью формулы (7).

Условия (32) и (33) позволяют написать для  $f_{i\mu\nu}$  с точностью до членов порядка  $t/q^2$  следующее выражение:

$$\begin{aligned} d\Gamma_i f_{i\mu\nu}(s_i, t) = & \\ = 2d\sigma_i(s_i) [4p_{i\mu} p_{i\nu}(t/s_i) - 2(p_{i\mu} q_\nu + p_{i\nu} q_\mu) + \delta_{\mu\nu} s_i] + & \\ & + b(\delta_{\mu\nu} q^2 - q_\mu q_\nu), \quad (34) \\ s_i = 2p_i q. & \quad (35) \end{aligned}$$

При подстановке (34) в (31) только члены, содержащие  $p_{i\mu} p_{i\nu}$  в  $f_{i\mu\nu}$ , приведут к образованию произведения  $[2(p_1 p_2)]^2 = s^2$ , необходимого для сокращения  $s^2$  в знаменателе (31) и получения постоянного сечения. Поэтому второй и третий члены в квадратных скобках (34), а также величину  $b$  можно отбросить. Обратим внимание на появление множителя  $t/s_i$  у первого главного члена (34). Этот множитель приводит к сокращению одного фотонного пропагатора в (31) и улучшению сходимости интеграла по  $s_i$ . Множитель  $t/s_i$  отсутствует, если блок на рис. 6 содержит в качестве конечной частицы один электрон или позитрон. В этом случае (33) пропорционально  $\delta$ -функции (22); в результате  $t \approx s_i$  и главный член выражения (34) превращается в произведение двух элементарных токов (вершинных частей) (9):

$$d\Gamma_2 f_{2\mu\nu} = 4\pi\alpha \cdot 4p_{2\mu} p_{2\nu} \cdot 2\pi\delta(s_2 + t, s_2 = 2p_2 q = s\beta - 2m^2\alpha). \quad (36)$$

Мы выписали в (36) точное выражение для аргумента  $\delta$ -функции  $(p_2 + q)^2 -$

\*) Например, суммирование диаграмм типа рис. 5, 6 со всевозможными перестановками фотонных линий приводит в логарифмическом приближении к домножению первой диаграммы с одним фотоном в  $t$ -канале на кулоновскую фазу  $\exp(i\alpha \ln t/\lambda^2)$  ( $\lambda$  — масса фотона), которая содержит лишь  $\ln t$  и не дает вклада в сечение.

—  $m^2$  (15), справедливое при малых  $t \ll m^2$ , ибо обе формулы (34) и (36) получены с точностью до членов порядка  $t/m^2$ .

Подстановка формулы (36) в оба блока рис. 6 дает сечение упругого рассеяния при малых  $t$  (формулу Резерфорда):

$$d\sigma = 4\pi\alpha^2 dt/t^2, \quad m^2 \gg t \geq 0. \quad (37)$$

Если только один из блоков, например второй, содержит единственную конечную частицу, комбинация из (34) и (36) дает для сечения (31) выражение вида <sup>10, 11</sup>

$$d\sigma = (\alpha/\pi) (dt/t) (ds_1/s_1) d\sigma_1(s_1), \quad (38)$$

$$m^2 \gg t \gtrsim m^2 s_1^2/s^2. \quad (39)$$

Ограничение на  $t$  снизу (39) следует из  $\delta$ -функции (36), определения (15), (35) и условия  $t \geq s\alpha\beta$  ( $-q_1^2 \geq 0$ ) (18). В результате сокращения одного фотонного пропагатора множителем  $t/s_1$  в (34) сечение (38), в противоположность сечению упругого рассеяния (37), содержит лишь логарифмический дифференциал по  $t$ , который называют *вейцзекер-вильямсовским*. Главный вклад в логарифмический интеграл по  $t$  дает область (39), которая, таким образом, определяет с логарифмической точностью полное сечение (38).

В случае, когда оба блока на рис. 6 описываются формулой (34), сечение (31) приобретает вид <sup>2, 8</sup>

$$d\sigma = (4\pi^3)^{-1} dt (ds_1/s_1) d\sigma_1(s_1) (ds_2/s_2) d\sigma_2(s_2), \quad t \ll m^2. \quad (40)$$

В противоположность формуле (38) формула (40) не содержит логарифмического дифференциала по  $t$ , ибо оба фотонных полюса сокращаются множителями  $t/s_i$  в (34). Полное сечение из-за отсутствия вейцзекер-вильямсовского логарифма определяется областью  $t \sim m^2$  и не может быть получено из формулы (40), которая дает лишь его порядок величины.

Формулы (38) и (40) обладают важными особенностями. Если сечение (31) имеет только одно фотонное деление в  $t$ -канале — рис. 6, то верхний и нижний блоки, не содержащие фотонных линий, имеют падающие сечения. Поэтому при вычислении полных сечений главный вклад будет давать область малых парциальных энергий  $s_1^{1/2}, s_2^{1/2} \ll m$ , ибо в силу падения сечений  $d\sigma_1, d\sigma_2$  с ростом  $s_1, s_2$  интегралы по этим переменным быстро сходятся.

Таким образом, если сечение содержит одно фотонное деление в  $t$ -канале, то может возникнуть только один вейцзекер-вильямсовский логарифм.

Пусть теперь сечение  $d\sigma_1$  в (31) само определяется графиком с фотонными делениями. В этом случае сечение  $d\sigma_1$  является не падающим с ростом энергии  $s_1^{1/2}$ . Интегрирование по  $s_1$  приводит теперь к добавочному логарифму. Нетрудно видеть, что число возникающих при этом логарифмов равно  $n - 1$ , где  $n$  — число фотонных делений в  $t$ -канале плюс один или два краевых вейцзекер-вильямсовских логарифма, возникающих в случае, если одна или обе начальные частицы связываются с промежуточными фотонами в  $t$ -канале путем вершинных частей (см. рис. 5, а и 3, б). Амплитуда процесса определяется диаграммами рис. 3, при этом энергетические инварианты  $s_i$  всех блоков, не содержащих фотонных делений в  $t$ -канале, оказываются, так же как и на рис. 6, порядка  $m^2$ , т. е. эти блоки находятся не в асимптотических условиях.

б) У п р у г о е р а с с е я н и е. Рассмотрим теперь все процессы, обладающие не падающими с энергией сечениями. Простейшим таким процессом является  $e^+e^-$ - и  $e^-e^-$ -рассеяние. Амплитуда  $e^+e^-$ -рассеяния описывается диаграммами рис. 7, а, б. В  $e^-e^-$ -рассеянии диаграмма

рис. 7, б невозможна. Вместо него к диаграмме рис. 7, а, у которой следует изменить направление линии с импульсом  $p_2$ , должна быть добавлена аналогичная диаграмма с переставленными конечными линиями  $p'_1$  и  $p'_2$  на рис. 7, а'. В  $e^-e^-$ -рассеянии обе диаграммы имеют в  $t$ -канале фотоны, в то время как в  $e^+e^-$ -рассеянии этим свойством обладает только диаграмма рис. 7, а.

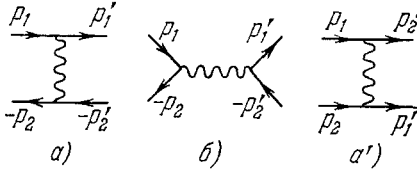


Рис. 7.

Диаграмма рис. 7, б мала в асимптотике и может быть отброшена при учете рассеяния на малые углы. Сечение этих процессов изображается одной диаграммой рис. 5, а с рассеянными горизонтальными линиями и импульсами  $p_1 = p'_1$  и  $p_2 = p'_2$ .

Полное сечение этих процессов расходуется из-за наличия фотонного полюса в физической области, соответствующего кулоновскому дальнему действию. Поэтому в экспериментах на встречных пучках измеряют обычно рассеяние  $e^+e^-$  и  $e^-e^-$  на большие углы, близкие к  $90^\circ$ <sup>29</sup>. При этом преимущество обмена фотоном теряется, ибо процессы при рассеянии на конечные углы ( $\vartheta \sim 1$ ) падают с ростом энергии. В  $e^+e^-$ -рассеянии обе диаграммы рис. 7, а, б дают одинаковый вклад при рассеянии на большие углы. Сечение  $e^+e^-$ -рассеяния имеет вид<sup>30</sup>

$$d\sigma_{e^+e^-} = 4\pi\alpha^2 \frac{dt}{s^2} \left[ \frac{s^2 + u^2}{2t^2} + \frac{u^2 + t^2}{2s^2} + \frac{u^2}{ts} \right], \quad (41)$$

где  $s$ ,  $t$  и  $u$  определены формулой (1). При малых  $t$  (41) переходит в формулу Резерфорда (37).

Отметим, что процесс  $e^-e^-$ - и  $e^-e^+$ -рассеяния является единственным процессом с непадающим сечением, амплитуда которого описывается простейшими полюсными диаграммами рис. 7, а сечение соответственно пропорционально  $\alpha^2$ . Все другие процессы с сечением  $\sim \alpha^2$ :  $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$  — аннигиляция (рис. 7, б) с  $\mu$ -мезонами в конце,  $e^-e^+ \rightarrow 2\gamma$  — аннигиляция (рис. 2, в), а также рождение  $\rho$ ,  $\omega$ ,  $\varphi$ -резонансов и одиночных адронов (рис. 7, б) — описываются полюсными диаграммами, не имеющими фотонов в промежуточном состоянии  $t$ -канала. Сечение этих процессов падает с ростом энергии. Сечения всех остальных процессов, не падающих с ростом энергии, пропорциональны высшим степеням  $\alpha$ .

в) Тормозное излучение одного фотона. Тормозное излучение при больших энергиях в  $e^+e^-$ -рассеянии описывается диаграммами рис. 8. Амплитуда этого процесса имеет дополнительно  $e$ , а следовательно, сечение имеет дополнительно  $\alpha = 1/137$  по сравнению с  $e^+e^-$ -рассеянием. Для описания тормозного излучения в  $e^-e^-$ -рассеянии нужно лишь изменить на рис. 8 направление стрелок в нижней электронной линии и добавить диаграммы с переставленными конечными электронами.

Кружок на диаграммах рис. 8 означает, что амплитуды  $A$  и  $B$  включают также диаграммы с испусканием фотона конечным электроном в  $A$  и позитроном в  $B$ . Только сумма этих диаграмм удовлетворяет условию градиентной инвариантности (32).

Диаграммы для сечения тормозного излучения имеют вид рис. 9, а и симметричной с рис. 9, а диаграммы относительно замены  $p_1$  на  $p_2$  (верх на низ). Эти диаграммы соответствуют квадратам каждой из амплитуд — рис. 8. Сечения, соответствующие диаграммам для интерференции амплитуд на рис. 9, б, падают с ростом энергии, ибо они не имеют горизонтальных фотонных делений в  $t$ -канале, связанных с рассеянием только виртуальных частиц. По обоим парным энергиям  $s_1$  и  $s_2$  одна из амплитуд

на рис. 9, б содержит фотон в  $t$ -канале и является растущей, а вторая, не содержащая фотона в  $t$ -канале, является постоянной \*). Поэтому диаграмму для сечения рис. 9, б следует отбросить. Рассмотрим ряд хорошо известных характерных особенностей этого процесса <sup>30-35</sup>, которые нам понадобятся для понимания физики других процессов.

Процесс на рис. 9 имеет три частицы в конечном состоянии. При этом блок, обведенный кружком и не имеющий фотона в промежуточном состоянии  $t$ -канала, должен находиться не в асимптотическом режиме, т. е. все величины, от которых он зависит (энергии и переданные импульсы), оказываются порядка массы электрона  $m$ . В СЦИ все частицы, образующиеся в таком блоке, будут лететь в одном направлении, отклоняясь друг от друга на углы  $\vartheta \sim m/s^{1/2}$ . В нашем случае это означает, что обра-

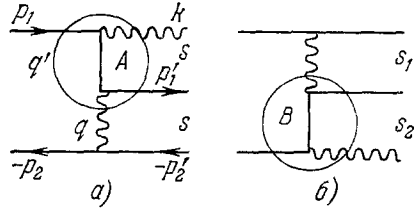


Рис. 8.

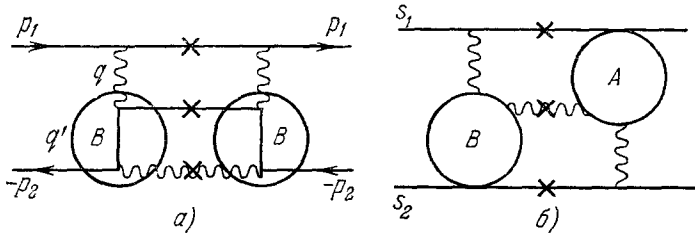


Рис. 9.

зующийся фотон будет лететь в направлении полета электрона или позитрона, т. е. вперед или назад <sup>29</sup>.

Для получения степени  $s$  в амплитуде промежуточный фотон должен иметь малый импульс  $t = q^2 \sim m^2$ , т. е. электроны и позитроны должны при рассеянии отклоняться на углы  $\vartheta \sim m/s^{1/2}$ .

В квадрате амплитуды  $B$  на рис. 9, а после сложения двух диаграмм возникает множитель  $t/s^2$  (34), числитель которого сокращает один из фотонных пропагаторов на рис. 9, а. В результате сечение тормозного излучения приобретает вид (38), где  $d\sigma_1$  представляет собой сечение комптоновского рассеяния, определяемое амплитудой  $B$  на рис. 9, а. Для комптоновского рассеяния минимальное значение величины  $s_2$  при  $t \rightarrow 0$  в (39) равно

$$s_{2\min} = 2p_2q = 2p_2k = 2\omega(E_2 - p_2 \cos \vartheta)_{\min} = 2\omega(E_2 - p_2) \sim \omega m^2/s^{1/2}. \quad (42)$$

Поэтому область изменения  $t$ , в которой справедлива формула (38), принимает в случае тормозного излучения вид

$$m^6 \omega^2/s^3 \ll t \ll m^2. \quad (43)$$

Интегрирование по этой области приводит к вейцекер-вильямсовскому логарифму. Подчеркнем, что вейцекер-вильямсовский логарифм является следствием нулевой массы фотона. Таким образом, главный вклад в тормозное излучение дают очень малые углы рассеяния заряженных

\*) Фейнмановская диаграмма для амплитуды упругого рассеяния, получающейся из рис. 9, б путем замены перечеркнутых линий обычными пропагаторами, имеет трехфотонное деление и пропорциональна  $s$ . Это связано с наличием у такой диаграммы других мнимых частей, соответствующих процессам без излучения фотона. Они представляют собой радиационные поправки к упругому рассеянию электрона на позитроне и электроне.

частиц  $m^3\omega/s^2 \ll \Phi \ll m/s^{1/2}$ . Если мы будем специально отбирать углы рассеяния  $\Phi \sim m/s^{1/2}$ , то потеряем вейцекер-вильямсовский логарифм  $\ln(s/m^2)$ . Наконец, если мы будем изучать рассеяния на конечные углы  $\Phi \sim 1$ , то потеряем степень: сечение начнет падать с ростом энергии<sup>29</sup>.

Сечение процесса остается постоянным при излучении фотонов с  $\omega \ll s^{1/2}/2$ . При излучении фотонов с  $s^{1/2}/2 - \omega \sim m$  сечение уже не будет постоянным и начнет убывать с ростом энергии<sup>30</sup>. Фотоны с  $\omega \ll s^{1/2}/2$  соответствуют в системе покоя излучающего электрона  $p_1 = 0$  инфракрасным фотонам с энергией  $\omega' \ll m$ . В этой, наиболее интересной экспериментально, области сечение комптоновского рассеяния (41) совпадает с классическим томсоновским пределом  $\sigma_0$  при  $\omega \rightarrow 0$ . Заменяя переменную  $s_2$  (42) на  $\omega$  и учитывая обе диаграммы рис. 9, а, соответствующие излучению электрона и позитрона — рис. 8, получим для сечения тормозного излучения следующее выражение:

$$d\sigma = 2\sigma^{(0)} (\alpha/\pi) (dt/t) d\omega/\omega, \quad \sigma^{(0)} = (8\pi/3)r_0^2, \quad r_0 = \alpha/m. \quad (44)$$

Выполняя интегрирование по  $dt$  в пределах (46), получим

$$d\sigma = 16r_0^2\alpha [\ln(s/m^2) + (2/3) \ln(m/\omega)] d\omega/\omega. \quad (45)$$

Формула (45) справедлива с точностью до постоянного слагаемого. Общий вид асимптотики сечения тормозного излучения, справедливый при любых  $\omega$ , с точностью до членов порядка  $m^2/s$  описывается формулой<sup>33, 34</sup>

$$d\sigma = 4r_0^2\alpha \frac{d\omega}{\omega} \frac{\varepsilon - \omega}{\varepsilon} \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon - \omega} + \frac{\varepsilon - \omega}{\varepsilon} - \frac{2}{3} \right) \left[ \ln \frac{4\varepsilon^2(\varepsilon - \omega)}{\omega} - \frac{1}{2} \right], \quad \varepsilon = \frac{s^{1/2}}{2}. \quad (46)$$

При интегрировании сечения по  $\omega$  возникает логарифмическая расходимость при малых  $\omega$ . Эта расходимость связана с тем, что все процессы с заряженными частицами сопровождаются излучением не одного, а бесконечного числа очень мягких классических фотонов, для которых теория возмущений (разложение по  $\alpha$ ) неприменима. Нижний предел для частоты одиночного фотона, который может быть зарегистрирован в эксперименте, определяется разрешающей способностью прибора по энергии, которая принципиально не может быть безгранично малой. В опытах на встречных пучках  $\omega_{\min} \sim 1 - 10$  Мэв. Формула (46) имеет смысл при  $\omega \geq \omega_{\min}$ .

Излучение классического фотона происходит независимо от основного процесса в нашем случае упругого рассеяния, так как его частота  $\omega$  много меньше всех переменных основного процесса. Поэтому при  $\omega \ll t/s^{1/2}$  ( $p_1 k \ll t$ ) сечение тормозного излучения можно записать в виде произведения сечения упругого рассеяния (41) на вероятность излучения классического фотона  $da$ . Выражение для  $da$  определяется квадратом классического тока, равного сумме диаграмм Фейнмана для излучения, испускаемого начальной и конечной частицами:

$$da = |M|^2 d^3k/(2\pi)^3 2\omega, \quad M = (4\pi\alpha)^{1/2} \varepsilon_\mu j_\mu, \quad (47)$$

$$j_\mu = (p_{1\mu}/p_1 k) - (p'_{1\mu}/p'_1 k). \quad (48)$$

Суммирование по поляризациям фотонов  $\varepsilon_\mu$  приводит к известной формуле для вероятности излучения классических фотонов

$$da = (\alpha/2\pi^2) (d\omega/\omega) [(p_{1\mu}/p_1 n) - (p'_{1\mu}/p'_1 n)]^2 d\Omega_n, \quad (49)$$

где  $n_\mu = k_\mu/\omega$ . Последний множитель зависит только от массы электрона  $m$  и переданного импульса  $t' = (p'_1 - p_1)^2$  и обращается в нуль при  $t' \rightarrow 0$  \*).

\*) Удваивая (49) в соответствии с излучением электрона и позитрона, разлагая интеграл по  $d\omega$ , по  $t'$  и домножая полученный результат на резерфордское сечение (37), мы приходим к формуле (44)<sup>35</sup>.

Из формулы (49) непосредственно следует причина возникновения логарифмического интеграла по  $d\omega$  в (44). Из (48) мы видим, что при тормозном излучении фотонов с  $\omega \ll s^{1/2}$  поляризации последних имеют составляющие, параллельные импульсам  $p_1$  и  $p'_1$ . Фотоны с  $\omega \ll s^{1/2}$ , обладающие перпендикулярной импульсам  $p_1$  и  $p'_1$  поляризацией, не излучаются.

По механизму тормозного излучения может происходить также рождение  $C$ -нечетных векторов  $\rho$ -,  $\omega$ - и  $\phi$ -мезонов<sup>37</sup>, а также единичных адронов<sup>38</sup>. Диаграммы для сечений этих процессов имеют вид рис. 9, а, в котором образующийся тормозной фотон превращается в векторный мезон или группу адронов. Сечение рождения векторных мезонов по механизму рис. 9, а имеет порядок  $10^{-34} \text{ см}^2$ , причем аналогично тормозному фотону рожденный векторный мезон летит преимущественно в направлении движения пучков под углами  $\vartheta \sim m_\rho/s^{1/2}$ .

Сечение рассеяния с излучением двух фотонов в одном направлении можно получить, подставляя в нижний блок — рис. 9, а дополнительный фотон. Это сечение в  $\alpha$  раз меньше сечения однократного тормозного излучения (44).

г) Двойное тормозное излучение. Двойное тормозное излучение с разлетом фотонов в противоположные стороны позволяет фиксировать оба фотона методом совпадений. Этот процесс представляет большой интерес для опытов на встречных пучках, поскольку он используется в качестве монитора для регистрации столкновения пучков и нормировки сечений исследуемых процессов<sup>35, 39</sup>. Сечение процесса определяется диаграммой рис. 10, где, как и на рис. 9, под блоками, обведенными кружками, подразумевается сумма диаграмм с фотоном, испущенным начальным и конечным электроном (позитроном). При малых  $t \ll m^2$  сечение процесса описывается формулой (40). Как и в случае одностороннего излучения, обведенные кружком блоки, не содержащие фотонов в  $t$ -канале, находятся не в асимптотических условиях. Следствием является то, что фотоны летят под малыми углами  $\vartheta \sim m/s^{1/2}$  по отношению к испускающим их частицам, которые в свою очередь в силу малости  $t = q^2 \sim m^2$  отклоняются на малые углы  $\vartheta \sim m/s^{1/2}$ . Вейцекер-вильямсовский логарифм для этого процесса отсутствует, ибо квадрат каждого блока пропорционален  $t$  при малых  $t$ , что сокращает оба полюса фотонных пропагаторов рис. 10. Фотоны с энергиями  $\omega \ll s^{1/2}/2$  соответствуют, как и в случае одностороннего излучения, инфракрасным классическим фотонам<sup>35</sup>. Излучение двух таких фотонов происходит независимо друг от друга. Между вылетом двух жестких фотонов с энергией  $\omega \sim s^{1/2}$  ( $(s^{1/2}/2) - \omega \sim s^{1/2}$ ) существует корреляция, однако она численно мала ( $< 1\%$ ). Поэтому сечение может быть приближенно представлено в виде произведения множителей, каждый из которых зависит от одного фотона<sup>35, 36</sup>:

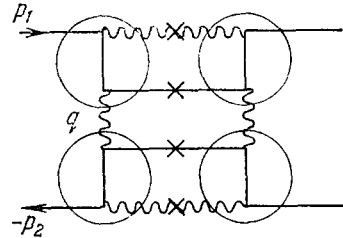


Рис. 10.

$$d\sigma = (8r_0^2\alpha^2/\pi) R(\omega_1) (d\omega_1/\omega_1) R(\omega_2) d\omega_2/\omega_2, \quad (50)$$

$$R(\omega) = \eta_1^{1/2} [1 - (\omega/E)] + \eta_3^{1/2} (\omega^2/E^2), \quad (51)$$

$$\eta_1 = (5/4) + (7/8) \zeta(3), \quad \eta_3 = (7/8) \zeta(3) = 1,052. \quad (52)$$

Эта мультипликативность наблюдалась экспериментально<sup>29</sup>.

По механизму двойного тормозного излучения также может происходить рождение одного или двух  $C$ -нечетных векторных мезонов  $\rho$ ,  $\omega$  и  $\phi$ . При этом один или оба тормозных фотона на рис. 10 превращаются в векторные мезоны. По порядку величины сечение рождения векторного мезона и фотона, разлетающихся в противоположные стороны вдоль направления движения пучков, должно быть  $\sim 10^{-35} - 10^{-36} \text{ см}^2$ .

д) Рассеяние с рождением заряженных пар. Следующим процессом является процесс образования пары  $e^+e^-$  и  $\mu^+\mu^-$ . Сечение этого процесса описывается диаграммой рис. 11. Кругок вокруг центрального блока  $\mathcal{Z}$ , как и раньше, означает, что должна быть взята сумма диаграмм с переставленными фотонными линиями.

Степенное постоянство сечения этого процесса возникает в случае, если средний блок  $\mathcal{Z}$  с электронами в промежуточном состоянии в  $t$ -канале

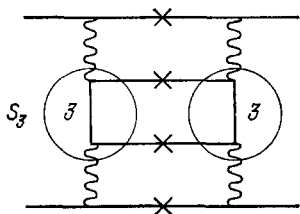


Рис. 11.

находится не в асимптотической области  $s_3 \sim m^2$ . Диаграмма рис. 11 имеет два последовательных фотонных деления в  $t$ -канале, что приводит к возникновению одного большого логарифма  $\ln(s/m^2)$ . Кроме того, амплитуда — рис. 11 имеет два вейцекер-вильямсовских логарифма — по одному на каждый промежуточный фотон амплитуды, ибо квадрат блока  $\mathcal{Z}$  пропорционален произведению  $t_1 t_2$  при  $t_1, t_2 \rightarrow 0$ . Эти логарифмы, как уже объяснялось, возникают от очень малых

углов рассеяния  $\vartheta \ll m/s^{1/2}$  частиц пучка. Они исчезают, если рассеяние происходит на углы  $\vartheta \lesssim m/s^{1/2}$ . Таким образом, полное сечение рождения  $e^+e^-$ -пары в главном логарифмическом приближении пропорционально  $\ln^3(s/m^2)$ . Общее выражение для полного сечения с точностью до членов  $\sim m^2/s$  имеет вид <sup>40,41</sup>

$$\sigma_{4l} = (28\alpha^2/27\pi) r_0^2 [\rho^3 - 6,35\rho^2 - 11,35\rho + 100], \quad \rho = \ln(s/m_0^2). \quad (53)$$

Последние два члена в квадратных скобках возникают как из диаграмм рис. 11, так и из диаграмм, в которых один из крайних (верхний или нижний) блоков с фотонами в промежуточном состоянии  $t$ -канала, совместно с электронным блоком  $\mathcal{Z}$  (виртуальный комптон-эффект), заменен диаграммами для сечения, одна или обе амплитуды которого не содержат фотона в  $t$ -канале. Вклад последних трех членов в квадратных скобках (53) составляет величину от 40 до 20% при энергиях  $s^{1/2}$  от 1 до 1000 Гэв.

Максимальная величина сечения ( $\sim \ln^3(s/m^2)$ ) возникает, когда рождающаяся пара летит в направлении пучков с большими скоростями и малым относительным углом разлета. Рождение такой пары чрезвычайно сложно зарегистрировать. Экспериментально обычно регистрируются заряженные пары высокой энергии, разлетающиеся под большими углами по отношению к пучкам и друг к другу <sup>29</sup>. При этом энергетический инвариант  $s_3$  блока  $\mathcal{Z}$  оказывается велик,  $s_3 \sim s$ , а зависимость от массы  $m$  в этом блоке выпадает. Сечение при такой кинематике уже не обладает степенным постоянством, а падает как  $1/s_3$ . Области интегрирования по вейцекер-вильямсовским переменным  $t_1$  и  $t_2$  (39) превращаются в

$$m^2 \ll t_i \ll s_3 \sim s, \quad (54)$$

интегрирование по которым по-прежнему приводит к двум большим логарифмам ( $\ln^2(s_3/m^2)$ ) <sup>40, 42</sup>. Третий энергетический логарифм превращается в  $\ln(s/s_3)$  и становится порядка единицы. Условие (54) соответствует углам разлета рассеивающихся частиц

$$m/s^{1/2} \ll \vartheta_i \ll 1. \quad (55)$$



В Новосибирске для сечения рождения пар в указанной кинематике была зарегистрирована величина  $\sim 10^{-31} \text{ см}^2$ <sup>29</sup>.

Наряду с рождением электронной пары может происходить также рождение  $\mu$ -мезонной пары. Сечение рождения этой пары имеет вид (53), куда вместо  $r_0 = e/m_e$  следует подставить  $r_0 = e/m_\mu$ , где  $m_\mu$  — масса  $\mu$ -мезона. При этом первые два члена в квадратных скобках (53), содержащие  $\rho^3$  и  $\rho^2$ , совпадают со случаем рождения электронной пары. Однако последние два члена принимают вид  $-290 \rho + 2000$ <sup>40, 41</sup>. Столь большая величина этих членов существенно изменяет вклад первых двух членов. При энергии  $s^{1/2} \sim 10 \text{ Гэв}$  суммарный вклад квадратной скобки в четыре раза меньше вклада первых двух членов. При энергиях  $s^{1/2} \sim 1 \text{ Гэв}$  сечение рождения  $\mu$ -мезонных пар, вычисленное по формуле (53), отрицательно<sup>40</sup> и пользоваться формулой нельзя (члены  $\sim m^2/s$  должны компенсировать эту отрицательную величину).

Электрон-позитронная пара на рис. 11 может образовываться в связанном состоянии — позитронии. Сечение рождения позитрония также содержит три логарифма, но блок 3 имеет фазовый объем, в  $\alpha^3$  раз меньший, чем фазовый объем свободной пары, ибо средний относительный импульс частиц в позитронии равен  $\bar{p}_{\text{поз}} = m\alpha$  и, следовательно,  $\bar{p}_{\text{поз}}^3/p^3 \sim m^3\alpha^3/m^3 \sim \alpha^3$ . Это сечение имеет порядок  $10^{-33} \text{ см}^2$  при  $s^{1/2} = 7 \text{ Гэв}$ <sup>43</sup>.

Все перечисленные процессы, описываемые рис. 11, могут сопровождаться одновременным излучением одного или нескольких тормозных фотонов. Сечение с излучением одного фотона возникает при подстановке реального фотона в блок 3 (верхнюю и нижнюю электронные линии) на рис. 11 и содержит три (два) логарифма. Сечение рождения пар с излучением двух фотонов в противоположные стороны вдоль пучков определяется диаграммами типа рис. 11 с двумя фотонами, подставленными в обе крайние электронные линии, и содержит только один логарифм.

Диаграмму рис. 11 можно обобщить на случай рождения двух или более заряженных пар частиц (рис. 12)<sup>44, 45</sup>. Диаграмма рождения двух пар содержит три блока в асимптотическом режиме с фотонами в  $t$ -канале, что дает два энергетических логарифма. Совместно с двумя вейцекер-вильямсовскими логарифмами (на каждую пару крайних фотонов) это сечение содержит, таким образом,  $\ln^4(s/m^2)$ . При  $s^{1/2} = 7 \text{ Гэв}$  полное сечение рождения двух  $e^+e^-$ -пар оказывается порядка  $10^{-31} \text{ см}^2$ <sup>44, 45</sup>.

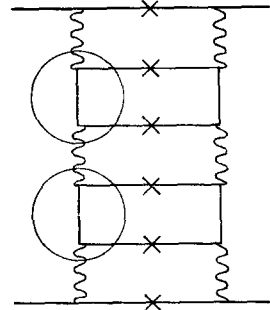


Рис. 12.

В диаграммах типа рис. 12 на каждую рожденную пару приходится малость порядка  $\alpha^2 \ln(s/m^2)$ . Можно просуммировать последовательность на рис. 12 с произвольным числом родившихся пар<sup>8, 9</sup>. Так как каждый  $n$ -й член последовательности положителен и обладает логарифмическим ростом степени  $[\alpha^2 \ln(s/m^2)]^{n+1}$ , сумма при фантастически больших энергиях обладает степенным ростом с показателем, равным  $(11/32) \alpha^2$ <sup>8, 9</sup>.

С помощью механизма рис. 11 может происходить рождение отдельных  $S$ -четных адронов<sup>46</sup>, резонансов<sup>47</sup> и групп адронов<sup>42, 48</sup>. Сечение рождения отдельных адронов и резонансов содержит, как и рождение позитрония, три логарифма и имеет порядок  $10^{-33} - 10^{-34} \text{ см}^2$  при  $s^{1/2} \sim 7 \text{ Гэв}$ . Сечение рождения группы адронов возникает при замене блока 3 на рис. 11 адронным блоком. Если считать, что образование группы адронов двумя фотонами (блок 3) имеет постоянное сечение, то блок 3 следует взять в асимптотическом режиме при  $s_3 \gg m^2$ . Постоянство сечения мож-

но получить, если считать, что блок  $Z$  имеет в промежуточном состоянии  $t$ -канала (при малых  $t$ ) частицу со спином единица (вакуумный полюс). В этом случае все блоки на рис. 11 находятся в асимптотическом режиме. Учитывая два вейцекер-вильямсовских логарифма, мы получим, что сечение рождения группы адронов, как и сечение рождения двух пар на рис. 12, пропорционально  $\ln^4(s/m^2)$  (два из этих логарифма, возникающие при интегрировании по энергетическим переменным (см. (17)), содержат отношение  $s$  к адронным массам). В случае рождения адронов  $r_0^2 = \alpha^2/m_e^2$  в (53) заменяется на  $\alpha^2/m_\pi^2$ . Так как приближенно  $\alpha \sim m_e/m_\pi$ , сечения рождения двух электрон-позитронных пар и группы адронов оказываются одного порядка. Детальные оценки<sup>48</sup> для полного сечения рождения адронов дают величину  $\sigma \sim 10^{-32} \text{ см}^2$  при  $s^{1/2} \sim 7 \text{ ГэВ}$ .

#### 4. ПРОЦЕССЫ С СЕЧЕНИЯМИ, ПАДАЮЩИМИ С РОСТОМ ЭНЕРГИИ

а) Д в а ж д ы л о г а р и ф м и ч е с к и е а с и м п т о т и к и. Мы видели, что все процессы рассеяния на большие углы имеют падающие с ростом энергии сечения. Падающими сечениями обладают также процессы рассеяния на малые углы, не имеющие в промежуточном состоянии  $t$ -канала фотонов, а также процессы рассеяния на углы, близкие к  $180^\circ$  ( $u \sim m^2$ ).

Для всех этих процессов радиационные поправки, связанные с испусканием как виртуальных, так и реальных фотонов, малые в случае процессов с постоянным сечением, содержат максимально возможное число логарифмов  $s$ . При этом на каждую фотонную линию, т. е. на каждую степень  $\alpha$ , возникает  $\ln^2(s/m^2)$ . Параметр разложения в ряд теории возмущений превращается в  $(\alpha/\pi) \ln^2(s/m^2)$  и не является малым ( $(\alpha/\pi) \ln^2(s/m^2) \sim 1$  при  $s^{1/2} \sim 10 \text{ ГэВ}$ ). Возникает, таким образом, необходимость суммирования всех членов теории возмущений, содержащих этот параметр, которые называют дважды логарифмическими (ДЛ) членами. При  $(\alpha/\pi) \ln^2(s/m^2) \gtrsim 1$  и  $(\alpha/\pi) \ln(s/m^2) \ll 1$  суммирование последовательности ДЛ членов дает правильную асимптотику всей амплитуды, справедливую вплоть до очень высоких энергий ( $(\alpha/\pi) \ln(s/m^2) \sim 1$  при  $s^{1/2} \sim 10^{100} \text{ ГэВ}$ ). При этом радиационная поправка, содержащая однологарифмические члены, может быть учтена на основе теории возмущений.

Важная особенность ДЛ приближения заключается в том, что любая сложная диаграмма Фейнмана дает ДЛ вклад только в том случае, если любые его внутренние блоки находятся в асимптотическом режиме и содержат ДЛ вклад по своим внешним переменным. Если это не так и какой-либо блок входит не в асимптотике или не имеет ДЛ вклада, то он содержит определенное число степеней малого параметра  $\alpha$ , не компенсируемое квадратами больших логарифмов. В силу этого достаточно отыскать простейшие диаграммы Фейнмана, содержащие ДЛ вклад. В частности, можно сразу же отбросить все диаграммы, включающие замкнутые заряженные петли, ибо последние не содержат ДЛ вклад.

Для нахождения ДЛ диаграмм Фейнмана разделим все фотоны на две группы в зависимости от их поляризации по отношению к импульсам начальных частиц  $p_1$  и  $p_2$ , образующих большую переменную  $s$  (1). Разложим поляризации всех реальных и виртуальных фотонов на продольную и поперечные части<sup>13, 14</sup>

$$\gamma_\mu = \gamma_\mu^{\parallel} + \gamma_\mu^{\perp}, \quad \gamma_\mu^{\parallel} \hat{p}_i + \hat{p}_i \gamma_\mu^{\parallel} = 2p_{i\mu}, \quad \gamma_\mu^{\perp} \hat{p}_i + \hat{p}_i \gamma_\mu^{\perp} = 0. \quad (56)$$

Фотоны, обладающие параллельной поляризацией, будем называть «тормозными» и обозначать штриховыми линиями (рис. 13). Именно эти фотоны дают вклад в амплитуду сопровождающего тормозного излучения (49).

Фотоны с перпендикулярной поляризацией будем называть «лестничными» и обозначать волнистыми линиями (см. рис. 13).

Удобство разделения на тормозные и лестничные фотоны заключается в том, что эти два типа фотонов дают ДЛ вклад в противоположных ситуациях, а именно — виртуальный или реальный тормозной фотон дает ДЛ вклад только в том случае, если он соединяет заряженные линии диаграммы амплитуды или сечения с большой передачей импульса; лестничные

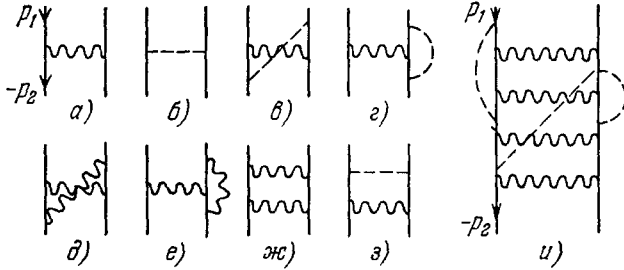


Рис. 13.

фотоны, наоборот, дают ДЛ вклад только в том случае, если они соединяют заряженные линии с малой передачей импульса.

Рассмотрим, например, диаграммы двухчастичного процесса — рис. 13 при условии, что (см. (1))

$$s \gg m^2, \quad t \ll s, \quad u \sim s. \quad (57)$$

Нетрудно видеть, что при условии (57) из диаграмм рис. 13, а, б, в которых один фотон соединяет электронные линии с малой передачей импульса  $t$ , выживает только график а) с лестничным фотоном. Действительно, в СЦИ, например, параллельные составляющие поляризации тормозного фотона  $\gamma_{\mu}^{\parallel}$  можно записать в виде

$$\gamma_0 = (\hat{p}_1 + \hat{p}_2)/s^{1/2}, \quad \gamma_3 = (\hat{p}_1 - \hat{p}_2)/s^{1/2}. \quad (58)$$

Заряженным спинорным концам диаграмм рис. 13 соответствуют биспиноры Дирака  $u_p$  (9). Учитывая уравнение Дирака  $\hat{p}u_p = tu_p$ , получим, что диаграмма рис. 13, б с тормозным фотоном оказывается порядка  $m^2/s$  по отношению к диаграмме рис. 13, а с лестничным фотоном, содержащим поляризации  $\gamma_{\mu}^{\perp}$  ( $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  в СЦИ \*).

Из диаграмм рис. 13, е—е главными будут диаграммы в) и г), в которых тормозные фотоны соединяют линии с большой передачей импульса. Пронося импульсы  $\hat{p}_1$  и  $\hat{p}_2$  в спинорных числителях этих диаграмм по направлению к соответствующим свободным концам, мы получим от коммутации  $\hat{p}_1$  и  $\hat{p}_2$  с  $\gamma_{\mu}$  величину  $4p_1p_2=2s$  для диаграмм рис. 13, в, г и величину порядка  $m^2$  — для диаграмм рис. 13, д, е. Таким образом, при наличии большой передачи импульса всегда выгоднее испускать тормозной, а не лестничный фотон. В диаграммах рис. 13, ж, з тормозной фотон дает меньший вклад по сравнению с лестничным по той же причине, что и в диаграммах рис. 13, а, б. В диаграммах рис. 13, ж с двумя параллельными лестничными фотонами ДЛ вклад возникает вследствие

\*) В случае, если диаграммы рис. 13 представляют собой внутреннюю часть сложной диаграммы Фейнмана с импульсами виртуальных электронных линий  $q_1, q_2$  и  $q'_1, q'_2$  (12), по-прежнему удовлетворяющим условиям вида (57), то диаграмма рис. 13, б оказывается порядка  $\alpha \ll 1$  или  $\beta \ll 1$  по отношению к диаграмме рис. 13, а, что эквивалентно лишь логарифмической малости.

компенсации одного спинорного знаменателя двумя спинорными числителями<sup>3, 14</sup>.

Резюмируя сказанное, можно утверждать, что все ДЛ диаграммы имеют вид лестничных диаграмм с лестничными фотонами в качестве перекладин, в которые произвольным образом вставляются тормозные фотоны так, чтобы последние соединяли заряженные линии с большой передачей импульса (диаграмма рис. 13, *u*).

б) Пуассоновское распределение тормозного излучения. В диаграммах, содержащих тормозные фотоны (рис. 13, *в*, *г*, *u*), удобно выбрать в качестве

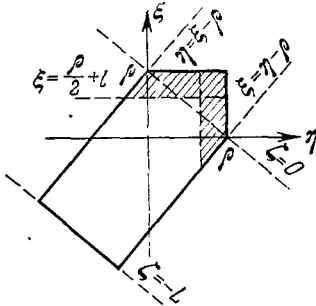


Рис. 14.

переменных интегрирования импульсы тормозных фотонов  $k$ , а не переменные  $q$  (рис. 14). Для реального тормозного фотона следует заменить пропагатор тормозного фотона на  $\delta(k^2 - \lambda^2)$ . Масса фотона  $\lambda$  введена для ликвидации инфракрасной расходимости. Квадрат логарифма в тормозном излучении виден непосредственно из формулы (49). При больших  $t \sim s$  интегрирование последнего множителя по углам дает  $\ln(t/m^2)$ . Второй логарифм возникает при интегрировании по  $d\omega$ .

Интеграл (47) по фазовому объему удобно вычислять в инвариантных переменных (12):

$$k = p_1\beta - p'_1\alpha + k_{\perp}, \quad t \approx 2p_1 \cdot p'_1 \gg m^2, \quad (59)$$

$$2p_1k = t\alpha + 2m^2\beta, \quad 2p'_1k = t\beta + 2m^2\alpha. \quad (60)$$

Снимая  $\delta(k^2 - \lambda^2)$  (10) интегрированием по  $d^2k_{\perp}$  (14) и выделяя только ДЛ вклад, получим для (47)

$$a = (\alpha/\pi) \int_0^1 (t\alpha)^{-1} dt\alpha \int (t\beta)^{-1} dt\beta = (\alpha/\pi) \int d\xi \int d\eta \quad (61)$$

при условии

$$\begin{aligned} t \gg t\alpha \gg m^2\beta, \\ t \gg t\beta \gg m^2\alpha, \end{aligned} \quad -k_{\perp}^2 = t\alpha\beta \gg \lambda^2,$$

или

$$\begin{aligned} \rho > \xi > \eta - \rho, \\ \rho > \eta > \xi - \rho, \end{aligned} \quad \xi + \eta - \rho \equiv \zeta > -L, \quad (62)$$

где

$$\begin{aligned} \xi = \ln(t\alpha/m^2), \quad \eta = \ln(t\beta/m^2), \quad \rho = \ln(t/m^2), \\ L = -\ln(\lambda^2/m^2), \quad \zeta = \ln(-k_{\perp}^2/m^2). \end{aligned} \quad (63)$$

Вычисление интеграла (61) в пределах (62) удобно выполнять графически<sup>14, 49</sup> (см. рис. 14). В логарифмических переменных интеграл (61) равен площади обведенной фигуры, равной  $\rho L + (\rho^2/2)$ . Такой вклад возникает, если экспериментально излучение тормозных фотонов не ограничивается; он совпадает с вкладом виртуальных тормозных фотонов\*).

\*) Для виртуального тормозного фотона на рис. 13, *в*, *г* ДЛ вклад в различных областях переменных (59) возникает также и от полюсов электронных пропагаторов, однако суммарный вклад совпадает с вкладом одного фотонного полюса в пределах (62).

При малой передаче импульса между электронными линиями с импульсами  $p_1$  и  $p'_1$  ( $t \sim m^2$ ) ДЛ вклад тормозного фотона исчезает.

1) Как видно из рис. 14, ДЛ вклад возникает как от больших  $-k_{\perp}^2 \gg m^2$  ( $\zeta > 0$ ), так и от малых  $-k_{\perp}^2 \ll m^2$  ( $\zeta < 0$ ). Вклад от малых  $k_{\perp}$  связан с нулевой массой фотона и исчезает при  $\lambda^2 \sim m^2$  ( $L = 0$ ). Несмотря на столь тесную связь с инфракрасными расходимостями, ДЛ вклад от малых  $k_{\perp}$  тормозных фотонов содержится не только в инфракрасно расходящихся диаграммах (см., например, рис. 13, *u*). Однако суммарный ДЛ вклад всех диаграмм обладает классическим свойством пуассоновского распределения, так же как и вклад инфракрасных фотонов<sup>50, 51</sup>, а именно ДЛ вклад, связанный с малыми  $-k_{\perp}^2 \ll m^2$  реальных и виртуальных фотонов, выделяется в виде пуассоновского множителя для любых процессов, включая процессы с участием адронов, сопровождаемых большой передачей импульса между двумя заряженными частицами:

$$d\sigma_n = d\sigma^{(0)} (a^n/n!) e^{-a}, \quad (64)$$

$$a = (a/\pi) \rho L. \quad (65)$$

где  $a^n/n!$  — вклад  $n$  реальных фотонов,  $e^{-a}$  — вклад виртуальных фотонов. Вероятность излучения тормозного фотона  $a$  с  $k_{\perp}^2 \ll m^2$  равна площади обведенной фигуры левее линии  $\zeta = 0$  на рис. 14;  $d\sigma^{(0)}$  — сечение основного процесса, не содержащее ДЛ вклад от виртуальных тормозных фотонов с  $-k_{\perp}^2 \ll m^2$ ;  $d\sigma^{(0)}$  содержит, вообще говоря, вклад от тормозных фотонов с  $-k_{\perp}^2 \gg m^2$ .

Из (64) непосредственно видно, что при  $\lambda \rightarrow 0$  сечение с образованием конечного числа фотонов с  $k_{\perp}^2 \ll m^2$  обращается в нуль, и, следовательно, такие процессы не могут быть зарегистрированы. При излучении бесконечного числа тормозных фотонов с  $-k_{\perp}^2 \ll m^2$  пуассоновский фактор обращается в единицу и сечение совпадает с  $d\sigma_0$ . Ниже мы будем предполагать, что все процессы сопровождаются испусканием бесконечного числа тормозных фотонов, ограниченных условием  $-k_{\perp}^2 \ll m^2$  ( $\zeta < 0$ ), и изучать только вклад тормозных фотонов с  $-k_{\perp}^2 \gg m^2$  ( $\zeta > 0$ )\*, не зависящих от величин массы фотона  $\lambda$ .

В случае, если излучаемые реальные тормозные фотоны с малыми  $-k_{\perp}^2 \ll m^2$  экспериментально ограничены дополнительными условиями, сечение процесса следует домножить на экспоненту, показатель которой равен разности вкладов реальных и виртуальных тормозных фотонов. По заданным экспериментальным ограничениям он легко может быть найден из рис. 14. Частные случаи подобной ситуации рассмотрены ниже. Перейдем теперь к рассмотрению конкретных процессов, содержащих ДЛ вклад.

2) Тормозное излучение при рассеянии на большие углы, когда направление полета зарядов резко меняется, является дважды логарифмическим. В этом случае между всеми заряженными линиями возникает большая передача импульса и вклады лестничных фотонов отсутствуют. Тормозные же фотоны дают вклад при соединении любых пар заряженных линий. Так как при больших энергиях и углах рассеяния (когда  $s \sim |t| \sim |u| \gg m^2$ ) зависимость от массы электрона  $m$  выпадает, тормозные фотоны можно считать классическими (инфракрасными), не влияющими на основной процесс, если выполнено условие  $\omega \ll s^{1/2}$  или  $p_1 k, p_2 k \ll s$  (вместо условия  $\omega \ll m, p_1 k, p_2 k \ll m^2$  при конечных энергиях). Так как все логарифмы возникают именно от этих областей (области  $p_1 k \sim s, k_{\perp}^2 \sim s$  не дают логарифма), весь ДЛ вклад тормозного излучения

\* Очевидно, что фотоны с  $-k_{\perp}^2 \sim m^2$  ( $\zeta = 0$ ) не приводят к ДЛ вкладу (см. рис. 14).

возникает от классических фотонов<sup>16-18</sup>. Классические тормозные фотоны излучаются независимо друг от друга и от основного процесса. Сумма их вклада определяется пуассоновским множителем (64), где  $d\sigma^{(0)}$  не содержит вклада тормозных фотонов и описывает сечение основного процесса в борновском приближении\*). Величина  $a$  в (64) равна полной площади обведенной фигуры на рис. 14, умноженной на число заряженных линий процесса  $r$ :

$$a = r (\alpha/2\pi) (\rho^2 + 2\rho L), \quad L = -\ln(\lambda^2/m^2), \quad \rho = \ln(s/m^2); \quad (66)$$

$r = 1$  для процессов  $e^+e^- \rightarrow 2\gamma, 3\gamma$ ,  $r = 2$  для  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$  и  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  процессов\*\*).

Если излучение реальных фотонов экспериментально не регистрируется, то сумма по  $n$  в (64) дает единицу и сечение совпадает с  $d\sigma^{(0)}$ . В случае, если излучается бесконечное число реальных фотонов с  $-k_{\perp}^2 \ll m^2$  и зарегистрировано излучение  $n$  фотонов с  $-k_{\perp}^2 \gg m^2$ , то из  $a$  (66) должен быть вычтен вклад фотонов с  $-k_{\perp}^2 \ll m^2$ ; сечение такого процесса описывается формулой (64) с величиной  $a$ , определяемой формулой (66) при  $L = 0$ .

В большинстве экспериментов, однако, фиксируется излучение фотонов с  $\omega \geq \omega_{\min}$ <sup>29</sup>. Упругим событием считается событие при отсутствии излучения фотонов с  $\omega \geq \omega_{\min}$ . В этом случае из  $a$  (66) должен быть вычтен вклад фотонов с  $\omega \leq \omega_{\min}$ , который может быть легко найден с помощью рис. 14. При  $\omega \leq \omega_{\min}$  имеем

$$\omega = k_0 = p_{10}\beta - p_{20}\alpha = (s^{1/2}/2) (\beta - \alpha) \leq \omega_{\min} < s^{1/2},$$

или  $\xi < (\rho/2) + l$ ,  $\eta < (\rho/2) + l$ ,  $l = \ln(2\omega_{\min}/m) < \rho/2$ . В результате получаем

$$\Delta = a - a|_{\omega < \omega_{\min}} = r (\alpha/2\pi) (\rho^2 - 2l\rho). \quad (67)$$

Таким образом, сечение процесса с излучением фиксированного числа  $n$  фотонов с  $\omega \geq \omega_{\min}$  дается формулой (64) с заменой  $a$  на  $\Delta$  (67) ( $L$  на  $-l$ ). Так как мы отбрасывали однологарифмические члены, выражение (67) справедливо при условии  $(\rho/2) - l \gg 1$ . При  $\omega_{\min} \sim s^{1/2}/2$  ДЛ вклад тормозного излучения отсутствует.

Отметим, что та же формула справедлива и для фиксированной потери энергии электроном на излучение  $\epsilon$ . Следует лишь заменить  $\omega_{\min}$  на  $\epsilon$ . Однако энергии конечных электронов в опытах на встречных пучках пока не измерялись.

Другим способом ограничения реального тормозного излучения являются ограничения, накладываемые на угол неколлинеарности упругого процесса. Выражение для  $\Delta$  (67) в этом случае также может быть легко найдено с помощью диаграммы рис. 14. ДЛ вклад тормозного излучения оказывается существенным только в том случае, если угол неколлинеарности мал,  $1 \gg \Delta\theta \gg m/s^{1/2}$ . Для современных встречных пучков  $\Delta\theta \sim 1^\circ$ , при этом ДЛ вклад тормозных фотонов почти нацело компенсируется и становится сравним с однологарифмическим<sup>29</sup>.

в) Многофотонная аннигиляция. 1) Рассмотрим теперь процесс многоквантовой аннигиляции пары  $e^+e^-$ <sup>53</sup>. Этот процесс описывается диаграммой вида рис. 15 при  $t = 0$  ( $p_1 = p'_1, p_2 = p'_2$ ) с за-

\*) При энергиях  $s^{1/2}$  выше 550 Гэв борновский член процессов  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$  и  $e^+e^- \rightarrow$  нейтральные лептоны при  $s \sim |t| \sim |u|$  будет определяться уже не электромагнитными, а слабыми взаимодействиями, амплитуды которых растут с ростом энергии как  $(Gs)^2$ , где  $G \approx m_p^{-2} \cdot 10^{-5}$ <sup>52</sup>.

\*\*) Для процесса  $e\bar{e} \rightarrow \mu\bar{\mu}$   $a$  следует заменить на сумму двух членов с  $m = m_e$  и  $m = m_\mu$ .

меной всех пропагаторов как тормозных, так и лестничных фотонных линий, соединяющих две электронные линии, на  $\delta$ -функции (10) с положительной энергией. При наличии лестничных фотонов ДЛ вклад тормозных фотонов с  $-k_{\perp}^2 \gg m^2$  зависит от лестничных переменных в месте испускания и поглощения тормозного фотона. Однако при фиксированном месте испускания и поглощения тормозные фотоны испускаются независимо друг от друга и удовлетворяют распределению Пуассона<sup>54</sup>. При вычислении полного сечения аннигиляции в произвольное число фотонов, т. е. при отсутствии ограничений на тормозные фотоны, вклады реальных и виртуальных тормозных фотонов взаимно уничтожаются, так же как и в случае (64). С помощью диаграмм это выражается в том, что при фиксированном месте испускания и поглощения фотонов каждой группе виртуальных фотонов, соединяющих одну и ту же заряженную линию, соответствует группа реальных фотонов, соединяющих различные заряженные линии, с противоположным по знаку вкладом каждого фотона.

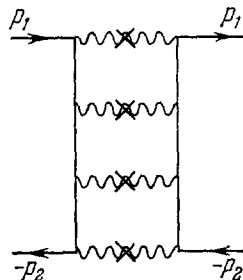


Рис. 15.

В результате вклад тормозных фотонов сокращается и полное сечение многоквантовой аннигиляции определяется только последовательностью лестничных диаграмм для сечения рис. 15.

Для вычисления вклада лестничных диаграмм рис. 15 воспользуемся переменными Судакова и уже готовым выражением для фазового объема (21). Обе амплитуды, образующие лестницу на рис. 15, зависят только от электронных пропагаторов  $(\hat{q}_i + m)/(q_i^2 - m^2)$ , квадрат которых при больших  $t_i$ ,

$$s \gg t_i = q_i^2 \gg m^2, \tag{68}$$

пропорционален  $1/t_i$ .

Спиновая структура числителей лестницы при условии (68) может быть легко найдена. Рассмотрим первую диаграмму типа лестницы на рис. 13, ж, соответствующую аннигиляции в два лестничных фотона, и произвольное число тормозных фотонов.

Спиновая структура числителей при условии (68) может быть записана в виде

$$\gamma_{\mu_2}^{\perp} \hat{q} \gamma_{\mu_1}^{\perp} \cdot \gamma_{\mu_1}^{\perp} \hat{q} \gamma_{\mu_2}^{\perp}, \quad \hat{q} = \gamma_{\mu} q_{\mu}. \tag{69}$$

В (69) спиноры Дирака  $u_{p_i}$  опущены, точка разделяет числители двух спинорных линий. Параллельная компонента вектора  $q$ , равная  $p_1\beta - p_2\alpha$ , после коммутации с  $\gamma_{\mu}^{\perp}$  и использования уравнения Дирака  $\hat{p}_i u_{p_i} = m u_{p_i}$  дает малую величину порядка  $\alpha$ ,  $\beta \ll 1$  (16) (что эквивалентно потере двух логарифмов). Остающиеся перпендикулярные компоненты вектора  $q$  следует брать с одинаковыми проекциями в обеих электронных линиях (69), чтобы возникшие квадраты составляющих  $q_i^2$  могли скомпенсировать один спинорный знаменатель. Производя усреднение по углу  $\varphi$  в перпендикулярной плоскости и используя равенство

$$\overline{q_1^2} = q_{\perp}^2 \cos^2 \varphi = \overline{q_2^2} = q_{\perp}^2 \sin^2 \varphi = q_{\perp}^2 / 2, \tag{70}$$

получим следующее выражение для числителя (69):

$$\gamma_{\mu_2}^{\perp} \hat{q} \gamma_{\mu_1}^{\perp} \cdot \gamma_{\mu_1}^{\perp} \hat{q} \gamma_{\mu_2}^{\perp} = (1/2) q_{\perp}^2 \gamma_{\mu_2}^{\perp} \gamma_{\sigma}^{\perp} \gamma_{\mu_1}^{\perp} \cdot \gamma_{\mu_1}^{\perp} \gamma_{\sigma}^{\perp} \gamma_{\mu_2}^{\perp} = 2q_{\perp}^2 \gamma_{\mu_1}^{\perp} \cdot \gamma_{\mu_2}^{\perp}, \tag{71}$$

где все индексы  $\gamma$ -матриц пробегают только два значения 1 и 2, соответствующих перпендикулярной плоскости в СЦИ. Таким образом, мы

видим, что спинорная структура квадрата на рис. 13, *ж* приводится к спинорной структуре простейшей полюсной диаграммы. Добавляя к рис. 13, *ж* еще одну перекладину и производя с числителем аналогичные преобразования, получим

$$\gamma_{\mu_3}^\perp \hat{q}_2 \gamma_{\mu_2}^\perp \hat{q}_1 \gamma_{\mu_1}^\perp \cdot \gamma_{\mu_1}^\perp \hat{q}_1 \gamma_{\mu_2}^\perp \hat{q}_2 \gamma_{\mu_3}^\perp = 2q_{1\perp}^2 2q_{2\perp}^2 \gamma_{\mu_1}^\perp \cdot \gamma_{\mu_1}^\perp \quad (72)$$

и т. д. Если учесть далее (48) и (68), можно выражение для произведения лестничных амплитуд, входящих в диаграмму для сечения с  $n$  перекладинами рис. 15, записать в виде

$$|M^n|^2 = 4\pi\alpha \gamma_\mu^\perp \cdot \gamma_\mu^\perp \prod_{i=1}^{n-1} (2/t_i) \vartheta(t_i - m^2) \quad (73)$$

Подставляя (73) и (47) в (5), используя рекуррентное соотношение (24), (22), (23) и выполняя интегрирование по всем инвариантам, получим, что вклад в сечение лестничной диаграммы с  $n$  перекладинами  $\sigma_n = (2s)^{-1} |M^n|^2 d\Gamma_n$  удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\sigma_n = \sigma_n(s, m^2), \quad (74)$$

$$\sigma_n(s\beta, t) = (s\beta)^{-1} (\alpha/2\pi) \int (t')^{-1} dt' \int ds\beta' \sigma_{n-1}(s\beta', t'), \quad (75)$$

$$t'/s\beta' \gg t/s\beta, \quad s\beta \gg s\beta', \quad t' \gg m^2, \quad (76)$$

$$\sigma_1(s\beta, t) = \pi \bar{f}_0 \delta(s\beta - t), \quad (77)$$

$$f_0 = (4\pi\alpha/s) \gamma_\mu^\perp \cdot \gamma_\mu^\perp, \quad \bar{f}_0 = 4\pi\alpha \text{Sp}(\hat{p}_2 \gamma_{\mu\perp} \hat{p}_1 \gamma_{\mu\perp})/4s = 4\pi\alpha, \quad (78)$$

где  $f_0$  в (78) — вклад полюсной диаграммы рис. 13, *а*, а черта над  $f_0$ , т. е.  $\bar{f}_0$ , в (78) и (77) означает усреднение по начальным поляризациям электронов и позитронов.

Выражение  $\sigma_1$  в (77) представляет собой мнимую часть полюсной диаграммы рис. 13, *а* и обращается в нуль при  $s\beta = s$  и  $t = m^2$ , что соответствует невозможности превращения электрон-позитронной пары в реальный фотон. Полное сечение равно сумме членов (74) от  $n = 2$  до бесконечности. Однако в силу обращения (77) в нуль для реальных частиц суммирование можно проводить от  $n = 1$ . Суммируя обе части равенства (75) по  $n$  от  $n = 1$ , получим

$$\sigma_{\infty\gamma} = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n = \sigma(s, m^2), \quad (79)$$

$$\sigma(s\beta, t) = \sigma_1(s\beta, t) + (s\beta)^{-1} (\alpha/2\pi) \int (t')^{-1} dt' \int ds\beta' \sigma(s\beta', t'), \quad (80)$$

где  $\sigma_1$  определено в (77) и выполняются условия (76); Для решения уравнения (80) удобно перейти к логарифмическим переменным

$$\rho = \ln(s/m^2), \quad \xi = \ln(t/s\beta) + \rho, \quad \eta = \rho - \ln s\beta, \quad (81)$$

$$(s\beta = s, t = m^2) \rightarrow (\xi = \eta = 0). \quad (82)$$

Домножая (80) на  $s\beta$ , учитывая, что

$$s\beta \delta(t - s\beta) = \delta(\rho - \xi),$$

и вводя новую функцию

$$s\beta \sigma(s\beta, t) = \pi \bar{f}_0 (\partial/\partial\rho) \vartheta(\rho - \xi) A(\rho; \xi, \eta), \quad (83)$$

получим для  $A(\rho; \xi, \eta)$  уравнение вида

$$A(\rho; \xi, \eta) = 1 + (\alpha/2\pi) \int_{\xi}^{\rho} d\xi_1 \int_{\eta}^{\xi_1} d\eta_1 A(\rho; \xi_1, \eta_1). \quad (84)$$



Решение этого уравнения <sup>3</sup> \*) дает

$$A(\rho, 0, 0) = (2/x) I_1(x), \quad x^2 = (2\alpha/\pi) \rho^2, \quad (85)$$

где  $I_1(x)$  — бesselева функция от мнимого аргумента.

С помощью (85), (83) и (79) получаем

$$\sigma_{\infty\gamma} = s^{-1} \bar{f}_0 \pi (\partial/\partial\rho) (2/x) I_1(x). \quad (86)$$

После вычисления производной в (86) имеем окончательно <sup>53</sup>

$$\sigma_{\infty\gamma} = \sigma_{2\gamma}^{(0)} [(8/x^2) I_2(x)]; \quad x^2 = (2\alpha/\pi) \rho^2, \quad \rho = \ln(s/m^2), \quad (87)$$

$$\sigma_{2\gamma}^{(0)} = (2\pi\alpha^2/s) \rho, \quad (8/x^2) I_2(x) = 1 + (x^2/12) + \dots + [x^{2n}/n! (2+n)! 2^{2n-1}], \quad (88)$$

где  $\sigma_{2\gamma}^{(0)}$  — сечение двухквантовой аннигиляции в борновском приближении. Член разложения (88) степени  $n$  имеет смысл сечения аннигиляции в  $n + 2$  лестничных кванта, сопровождаемой излучением произвольного числа тормозных фотонов.

С логарифмической точностью для функции, зависящей только от  $\ln s$ , можно написать

$$\text{Im } F(\rho) = (2i)^{-1} [F(\ln(s/m^2)) - F(\ln(-s/m^2))] = \pi (\partial/\partial\rho) \bar{F}(\rho), \quad (89)$$

поэтому

$$\sigma_{\infty\gamma} = s^{-1} \text{Im } \overline{F(\rho, 0)}, \quad F(\rho, 0) = f_0 (2/x) I_1(x). \quad (90)$$

Равенство (90) представляет собой выражение оптической теоремы, где амплитуда  $F(\rho, 0)$  есть амплитуда лестничной диаграммы рис. 15, у которой все  $\delta$ -функции фотонных линий заменены на обычные фотонные пропагаторы. Так как  $\sigma_{\infty\gamma}$  (86) есть полное сечение аннигиляции в произвольное число фотонов без учета образования электрон-позитронных пар в конце,  $F(\rho, 0)$  не совпадает с амплитудой упругого рассеяния. Главный вклад в амплитуду упругого рассеяния дают диаграммы рис. 9—12, содержащие фотоны в промежуточном состоянии  $t$ -канала, которые в  $s$  раз больше амплитуды (90), не имеющей фотонов в  $t$ -канале. Мнимые части диаграмм рис. 9—12 в  $t$ -канале соответствуют сечениям с электрон-позитронными парами в конечном состоянии.

Если сложить сечения с различным числом тормозных и лестничных фотонов при фиксированном общем числе фотонов, можно получить сечение аннигиляции в заданное число неполяризованных фотонов. Борновское приближение двухквантовой аннигиляции совпадает в ДЛ приближении с сечением аннигиляции в два лестничных кванта, сопровождаемых излучением бесконечного числа тормозных фотонов. Сечение истинно двухквантовой аннигиляции с излучением двух лестничных фотонов без излучения тормозных фотонов с  $-k_{\perp}^2 \gg m^2$  описывается  $s$ -канальной мнимой частью диаграммы рис. 13,  $\mathcal{J}$  с произвольным числом виртуальных тормозных фотонов, соединяющих части одной и той же электронной линии \*\*), и имеет вид <sup>3</sup>

$$\sigma_{2\gamma} = \sigma_{2\gamma}^{(0)} \exp(-\alpha\rho^2/2\pi) \int_0^{\rho} \exp(\alpha y^2/2\pi) dy, \quad (91)$$

$$\sigma_{2\gamma}^{(0)} = 2\pi\alpha^2\rho/s$$

\*) В работах <sup>3</sup> решается уравнение, получающееся из (84) после замены  $\rho \rightarrow -\xi = \eta'$  и  $\rho \rightarrow \eta = \xi'$ .

\*\*) Сечение двухквантовой аннигиляции с образованием одного лестничного и одного тормозного фотонов определяется мнимой частью диаграммы рис. 13,  $z$ . В силу независимости испускания (пуассоновости тормозных фотонов в ДЛ приближении это сечение пропорционально мнимой части полюсной диаграммы рис. 13,  $a$  (77) и равно нулю.

Приведем также сечение аннигиляции в три неполяризованных фотона, один из которых может быть тормозным с  $-k_{\perp}^2 \gg m^2$  <sup>53</sup>:

$$\sigma_{3\gamma} = \frac{2\alpha^3}{s} \int_0^{\rho} d\xi \exp \left[ -\frac{\alpha}{\pi} \left( \zeta \rho - \frac{\zeta^2}{2} \right) \right] \left[ \rho \zeta - \frac{\zeta^2}{2} + \frac{\pi}{\alpha} \int_0^{\zeta} \frac{dx}{x} \left\{ \exp \left[ \frac{\alpha}{\pi} (\rho - \zeta) x \right] - 1 \right\} \right], \quad (92)$$

$$\sigma_{3\gamma}^{(0)} = \frac{\alpha^3}{s} \rho^3.$$

Формула (91), как и (92), справедлива в случае, если происходит излучение бесконечного числа тормозных фотонов с  $-k_{\perp}^2 \ll m^2$  \*).

Все ДЛ члены в рассмотренных формулах возникают от области больших  $t_i$ , удовлетворяющих неравенству (68). Такие  $t_i$  соответствуют следующим углам рассеяния фотонов  $\vartheta$ :

$$1 \gg \vartheta \gg m/s^{1/2}. \quad (93)$$

Если мы фиксируем углы рассеяния фотонов вблизи верхней или нижней границы (93), то ДЛ члены исчезают и сечение многоквантовой аннигиляции совпадает в ДЛ приближении с двухквантовой. До сих пор на встречных пучках проводилось измерение двухквантовой аннигиляции на большие углы  $\vartheta \sim \pi/2$  <sup>29</sup>.

Таким образом, для измерения ДЛ сечения многоквантовой аннигиляции необходимо обязательно перекрывать область углов (93). При этом при измерении на встречных пучках возникают серьезные трудности, связанные с необходимостью отличить многоквантовую аннигиляцию (МА) от процессов типа двойного тормозного излучения (ДТИ) (см. рис. 10), содержащих в конечном состоянии электрон-позитронную пару. Эти процессы обладают непадающими сечениями и протекают в основном при углах рассеяния  $\vartheta \sim m/s^{1/2}$  (2). Полное сечение (50) превосходит (87) при энергиях  $s^{1/2} \sim 1$  Гэв (табл. I). Без ущерба для ДЛ вклада в МА можно вырезать малые углы  $\vartheta \sim m/s^{1/2}$  и измерять образование двух фотонов при углах (93). При этом в сечении ДТИ произойдет потеря степени. Для оценки можно считать, что сечение ДТИ при углах вылета фотонов (93) будет составлять величину порядка  $m/s^{1/2}$  от полного сечения. В этом случае, как видно из табл. I, сечение ДТИ начинает превос-

Таблица I

Величины сечений электромагнитных процессов

$\sigma_{tot}, \text{см}^2$	$s^{1/2} = 2E, \text{Гэв}$ :					Формула для сечения
	1	3	10	100	1000	
$\ln(s/m_l)$	15,2	17,4	20,6	24,4	29,0	
$e^+e^-\gamma, \omega_{\min} \sim m$	$10^{-25}$	$10^{-25}$	$2 \cdot 10^{-25}$	$2 \cdot 10^{-25}$	$3 \cdot 10^{-25}$	(46)
$e^+e^-2\gamma, \omega_{\min} \sim m$	$10^{-27}$	$10^{-27}$	$10^{-27}$	$10^{-27}$	$10^{-27}$	(50)
$e^+e^-e^+e^-$	$3 \cdot 10^{-27}$	$3 \cdot 10^{-27}$	$6 \cdot 10^{-27}$	$10^{-26}$	$2 \cdot 10^{-26}$	(53)
$e^+e^-\mu^+\mu^-$		$10^{-32}$	$7 \cdot 10^{-32}$	$10^{-31}$	$2 \cdot 10^{-31}$	(53)
$2\gamma$	$3 \cdot 10^{-30}$	$3 \cdot 10^{-31}$	$4 \cdot 10^{-32}$	$5 \cdot 10^{-34}$	$6 \cdot 10^{-36}$	(88), (91)
$3\gamma$	$10^{-30}$	$10^{-31}$	$2 \cdot 10^{-32}$	$3 \cdot 10^{-34}$	$6 \cdot 10^{-36}$	(92)
$\mu^+\mu^-$	$10^{-31}$	$10^{-32}$	$10^{-33}$	$10^{-35}$	$10^{-37}$	(94)
$e^+e^-, \frac{d\sigma}{d\Omega}, s =$	$10^{-31}$	$10^{-32}$	$10^{-33}$	$10^{-35}$	$10^{-37}$	(41)
$=  t  =  u $						
$e^+e^-, \mu^+\mu^-, \frac{d\sigma}{du},$	$10^{-37}$	$10^{-39}$	$10^{-41}$	$10^{-45}$	$10^{-49}$	(96)
$u \sim m^2$						

\* При обрезании мягких фотонов при условии  $\omega_{\min} \sim m$  (67)  $\sigma_{3\gamma}^{(0)}$  (92) увеличивается в два раза <sup>15</sup>, в чем легко убедиться с помощью рис. 14.

ходить сечение МА при энергиях  $s^{1/2} \sim 3 \text{ Гэв}$ . При больших энергиях для того, чтобы отличить МА от ДТИ, необходимо измерение рассеянной электрон-позитронной пары под углами  $\theta \sim m/s^{1/2}$ .

Можно также при фиксированной энергии увеличивать число регистрируемых фотонов. При этом сечение тормозного излучения с каждым новым фотоном будет уменьшаться в  $\alpha$  раз, а в МА каждое  $\alpha$  будет компенсироваться двойным логарифмом. При любой заданной энергии можно найти число регистрируемых фотонов, при котором сечение МА превосходит сечение ДТИ.

Другим способом отделения сечения МА от сечения ДТИ является измерение поляризаций фотонов. Сечение МА с излучением двух фотонов, поляризация которых перпендикулярна плоскости  $p_1, k$ , и бесчисленным множеством остальных фотонов равно четверти выражения (88). При энергиях фотонов  $\omega \ll s^{1/2}$ , дающих главный вклад в формулу (50), тормозные фотоны в ДТИ имеют продольную по отношению к импульсам  $p_1$  и  $p_2$  поляризацию (49).

Кроме ДТИ образование нескольких фотонов может происходить с непадающим сечением по механизму диаграммы рис. 11 с образованием  $\pi^0$ -мезонов и последующим распадом последних на фотоны. Однако сечение этого процесса становится равным сечению МА при энергиях  $s^{1/2} \gtrsim \gtrsim 100 \text{ Гэв}$ . По-видимому, единственным способом отличить эти процессы от процесса рис. 11 является регистрация конечных электронов и позитронов вплоть до чрезвычайно малых углов, соответствующих  $t \sim m^4/s$ , которые, как мы видели, дают основной вклад в сечение процесса на рис. 11 \*).

2) Аналогично многоквантовой аннигиляции можно найти ДЛ асимптотику сечения аннигиляции в  $\mu$ -мезонную пару с излучением произвольного числа фотонов. Диаграммы для сечения этого процесса имеют вид диаграммы рис. 13,  $u$  со вставкой в один лестничный или тормозной фотон (соединяющий разные электронные линии) рассеянной  $\mu$ -мезонной петли с  $\delta$ -функциями вместо мюонных пропагаторов. Каждую из диаграмм рис. 13,  $u$  следует просуммировать по всевозможным положениям этой петли. Вклад тормозных фотонов, излучаемых не только электронами, но и  $\mu$ -мезонами, сокращается, как и в случае многофотонной аннигиляции, вследствие излучения бесконечного числа реальных тормозных квантов. Мы приведем лишь выражение для этого процесса с рождением  $\mu$ -пары только лестничным квантом <sup>55, 56</sup> \*\*):

$$\begin{aligned} \sigma_{2\mu, \infty \nu}^{\perp} &= \sigma_{2\mu}^{(0)} \operatorname{ch} x, \quad x = (2\alpha/\pi) \ln(s/m_e^2) \ln(s/m_{\mu}^2), \\ \sigma_{2\mu}^{(0)} &= (4\pi\alpha^2/3) 1/s, \quad d\sigma_{2\mu}^{(0)}/dt = (4\pi\alpha^2/s^4) (t^2 + u^2)/2. \end{aligned} \quad (94)$$

Формула (94) справедлива по крайней мере с точностью до членов порядка  $[\alpha \ln^2(m_{\mu}^2/m_e^2)]^2$ . Первый борновский член в разложении (94) по  $\alpha$  соответствует отсутствию лестничных фотонов, второй — излучению одного, третий — излучению двух лестничных фотонов, и т. д. Так как дифференциальное сечение мезонной аннигиляции в борновском приближении

\*) При использовании обычных ускорителей с покоящейся мишенью регистрация конечных позитронов и отделение их от электронов первоначального пучка возможны при любых углах.

\*\*)  $\mu$ -пары, рожденные лестничным фотоном, обладают только перпендикулярной импульсам начальных частиц составляющей мюонного тока  $j_{\mu}^{\perp} = \bar{u}_{\mu} \gamma_{\mu}^{\perp} u_{\mu}$ . Отделить их от  $\mu$ -пар, рожденных тормозным фотоном с параллельной составляющей тока  $j_{\mu}$ , сложно. Однако вклад пар, рожденных тормозным фотоном, возникает при одновременном излучении не менее двух реальных лестничных фотонов (в четвертом порядке теории возмущений) и численно невелик. Он должен несколько увеличивать сечение (94), ибо интерференция рождения  $\mu$ -пар тормозными и лестничными фотонами отсутствует.

$d\sigma_{2\mu}^{(0)} \sim dt/s^2$  (94), главный вклад в первый член (94) дают  $u \sim t \sim s$ , т. е. углы вылета  $\mu$ -мезонов  $\vartheta \sim 1$ . В то же время главный вклад во второй, третий и т. д. члены (94) с дополнительными фотонами дают энергии  $\mu$ -мезонной пары  $s_\mu$ , удовлетворяющие неравенству

$$s \gg s_\mu \sim t_\mu \gg m^2.$$

Такие значения  $t_\mu$  соответствуют углам вылета  $\mu$ -мезонов вида (93). Если измерять углы вылета  $\mu$ -мезонов  $\vartheta \sim 1$ , то все ДЛ члены исчезают ( $s_\mu \sim s$ ) и сечение  $\mu$ -мезонной аннигиляции совпадает с борновским членом  $\sigma_{2\mu}^{(0)}$ . Если измерять область углов (93), то вклад борновской диаграммы оказывается пренебрежимо малым и в (94) останется только второй, третий и т. д. члены. Можно получить также сечение аннигиляции  $e^+e^-$  в две и более  $\mu$ -мезонные пары, сопровождаемые излучением произвольного числа фотонов <sup>56</sup>.

К процессу  $\mu$ -мезонной аннигиляции примыкают процессы аннигиляции в адроны. Для этих процессов также применима формула (94), если борновское сечение аннигиляции в адроны аналогично  $\sigma_{2\mu}^{(0)}$  пропорционально  $1/s$ . Если борновское сечение падает быстрее чем  $1/s$ , что имеет место в случае рождения  $\rho$ -,  $\omega$ - и  $\phi$ -резонансов, то главный вклад определяется диаграммами с испусканием одного или нескольких магнитных фотонов, в которых адронная петля может находиться в резонансной области. Главные члены таких диаграмм вычислены в работе <sup>57</sup>, соответствующее им сечение рождения  $\rho^0$ -мезона имеет порядок  $10^{-34} \text{ см}^2$ .

У процесса аннигиляции в пару  $\mu^+\mu^-$  есть также серьезный конкурент — процесс рождения пары  $\mu^+\mu^-$  с помощью механизма рис. 11. Последний процесс, однако, сильно подавлен из-за наличия  $\mu$ -мезонной массы в знаменателе  $r_0^2$ . Полные сечения обоих процессов становятся совпадающими при энергиях  $s^{1/2} \sim 3 \text{ Гэв}$  (табл. II). Поэтому при энергиях  $s^{1/2} \sim 3-5 \text{ Гэв}$  сечение процесса аннигиляции в пару  $\mu^+\mu^-$  в ДЛ

Таблица II

Зависимость дважды логарифмических асимптотик процессов от энергии

$\sigma/\sigma_0$	$s^{1/2} = 2E, \text{ Гэв:}$					Формула для сечения
	1	3	10	100	1000	
$(2\alpha/\pi) \ln^2(s/m^2)$	1	1,4	2	3	4	
$(2\alpha/\pi)^{1/2} \ln m\bar{l}^{-2}$	1,03		1,41	1,68	1,98	
$\sigma_{\infty\gamma}/\sigma_{2\gamma}^{(0)}$	1,09		1,15	1,20	1,38	(87)
$\sigma_{2\mu, \infty\gamma}/\sigma_{2\mu}^{(0)}$	1,19		1,48	1,86	2,44	(94)
$d\sigma_{e^+e^-}/d\sigma_{e^+e^-}^{(0)}, u \sim m^2$	0,25	0,19	0,092	0,040	0,0058	(96)

области  $1 \gg \vartheta \gg m/s^{1/2}$  больше процесса рождения  $\mu^+\mu^-$ . Одновременное излучение фотонов в процессе аннигиляции значительно расширяет область энергий, где этот процесс доминирует. В области очень высоких энергий, по-видимому, единственным способом выделения этого процесса, так же как и в сечении многоквантовой аннигиляции, является регистрация поляризации сопровождающих  $\gamma$ -квантов или рассеянных электронов и позитронов.

г) Рассеяние на малые углы и углы, близкие к  $180^\circ$ . Кроме сечений многофотонной и  $\mu$ -мезонной аннигиляции лестничные фотоны дают вклад в процессы рассеяния на очень малые углы  $\vartheta \sim m/s^{1/2}$  ( $t \sim m^2$ ) и углы, близкие к  $180^\circ$  ( $u \sim m^2$ ).

1) Процесс  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  — аннигиляции вперед, т. е. на малые углы, описывается суммой лестничных диаграмм для амплитуды вида рис. 15 с заменой правой электронной линии на  $\mu$ -мезонную. Под малыми углами здесь понимается область, когда определенный заряд в реакции не меняет своего направления:  $\mu^-$  ( $\mu^+$ ) движется в направлении  $e^-$  ( $e^+$ ). ДЛ вклад тормозного излучения, как и в случае МА, в этом процессе отсутствует, что является прямым физическим следствием прямолинейного движения зарядов в процессе реакции. Амплитуда процесса для нулевого угла имеет вид (90). Сечение процесса, справедливое при  $t \gg m_\mu^2$ , равно <sup>3</sup>

$$d\sigma = d\sigma^{(0)} (4/x^2) I_1^2(x), \quad x^2 = (2\alpha/\pi) \ln^2(s/t), \quad t \gg m_\mu^2, \quad (95)$$

$$d\sigma^{(0)} = (2\pi\alpha^2/s^2) dt.$$

Сечение (95) отличается от борновского только при  $t \sim m_\mu^2$  ( $\theta \sim m_\mu/s^{1/2}$ ). При этом  $dt \sim m_\mu^2$  и  $d\sigma^{(0)} \sim 4\pi\alpha^2 m_\mu^2/s^2$ , т. е. квадратично падает с ростом  $s$ .

2) Электрон-позитронное рассеяние назад ( $u \sim m^2$ ) содержит ДЛ вклад от лестничных диаграмм с электронными линиями, направленными в одну сторону на рис. 13,  $u$ . В этом случае два сталкивающихся заряда изменяют направления их движения на противоположные. Поэтому возникает мощное тормозное излучение. Это проявляется в том, что ДЛ вклад дают диаграммы с тормозными фотонами, произвольным образом вставленными в лестничную последовательность на рис. 13,  $u$ , причем вклады фотонов, соединяющих одну и ту же и разные электронные линии рис. 13,  $u$ , складываются. Эти тормозные фотоны по-прежнему излучаются независимо друг от друга, имеет вид экспоненты, зависящей от переменных основного процесса (в данном случае — лестницы).

Суммирование всех диаграмм приводит к уравнению вида (84) с экспоненциальным ядром, решение которого приводит к сечению вида <sup>3</sup>

$$d\sigma = d\sigma^{(0)} J^2(x_u), \quad x_u^2 = (2\alpha/\pi) \ln^2(s/u), \quad u \gg m_e^2, \quad (96)$$

$$d\sigma^{(0)} = (4\pi\alpha^2/s^2) du, \quad J(x) = (2i/\pi) \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{lx} (\partial/\partial l) \ln D_{-1/4}(l) dl,$$

$$J(x) = \begin{cases} 1 - (5/8)x^2 + (35/192)x^4 + \dots, & x \ll 1; \\ -8 [e^{-2,26x} \cos 1,84x + e^{-3,44x} \cos 3,05x + \dots], & x \gg 1, \end{cases} \quad (97)$$

где  $D_{-1/4}(l)$  — функция параболического цилиндра.

Функция  $J(x)$  отлична от 1 при больших  $x_u^2 \sim 1$ , т. е. при углах рассеяния  $\pi - \theta \lesssim m/s^{1/2}$ . Формула (96) справедлива также для процесса  $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$  — аннигиляции назад при  $u \gg m_\mu^2$ . При очень высоких энергиях,  $x_u^2 = (2\alpha/\pi) \ln^2(s/u) \gg 1$ , амплитуда (98) имеет вид быстро затухающих осцилляций.

Как уже упоминалось, для того чтобы ДЛ вклад в (95) и (96) был существен, необходимо рассматривать очень малые углы рассеяния вперед или назад, при которых  $-t \sim m^2$  или  $-u \sim m^2$  ( $dt \sim du \sim m^2$ ). При этом борновский член в (95) и (96) равен  $4\pi\alpha^2 m^2/s^2$ . Эта величина при  $s^{1/2} \sim 1$  Гэв порядка  $10^{-37}$  см<sup>2</sup> (см. табл. I и II). При светимостях установки ВЭПП-2'  $10^{32}$  сек<sup>-1</sup>см<sup>-2</sup> процессы такого сечения будут происходить примерно раз в 3—4 дня. ДЛ вклад несколько увеличивает сечение процесса (95) и уменьшает сечение процесса (96) (см. табл. II). При  $s^{1/2} \sim 1$  Гэв сечение  $e^+e^-$ -рассеяния назад в четыре раза меньше борновского члена и будет происходить на установке ВЭПП-2 примерно раз в две недели, вместо одного раза в 3—4 дня.

3) Формула (96), как и все предыдущие, справедлива в случае испускания произвольного числа тормозных фотонов с  $-k_\perp^2 \ll m^2$ . Это соответствует углу неколлинеарности рассеянных частиц  $\Delta\theta = k_\perp/s^{1/2} \ll$

$\ll m/s^{1/2}$ . При испускании тормозных фотонов с большими  $-k_{\perp}^2 \gg m^2$  не происходит компенсации вкладов виртуальных и реальных тормозных фотонов (как в полном сечении многофотонной аннигиляции). Это связано с тем, что фотоны с большими  $k_{\perp}$  не являются классическими, при их испускании меняется кинематика процесса. Обозначим

$$u_1 = (p_1 - p_2')^2, \quad u_2 = (p_2 - p_1')^2.$$

В случае испускания тормозных фотонов с большими  $k_{\perp}^2 \gg m^2$ ,  $u_1 \neq u_2$  можно получить дифференциальное сечение процесса при испускании заданного числа  $n$  тормозных фотонов, проинтегрированное по всем  $u_2$  при фиксированном  $u_1 \sim m^2$ . Это сечение в общем случае имеет довольно сложный вид<sup>49</sup>. В случае не слишком больших  $((\alpha/\pi) \ln^2(1/m^2) \ll 1)$  и очень высоких  $((\alpha/\pi) \ln^2(s/m^2) \gg 1)$  энергий это сечение имеет вид<sup>49</sup>

$$\frac{d\sigma_n}{du_1} = \begin{cases} \frac{d\sigma^{(0)}}{du_1} \frac{(2x^2)^n}{(2n)!}, & x^2 = \frac{2\alpha}{\pi} \ln^2\left(\frac{s}{u_1}\right), \quad x \ll 1, \\ \frac{d\sigma^{(0)}}{du_1} 0,773 \frac{(0,762)^n}{(n-1)!} \frac{1}{x} [\ln^{n-1} x + O(\ln^{n-2} x)], & x \gg 1. \end{cases} \quad (98)$$

При суммировании по  $n$  формулы (98) с учетом всех (не только старших) логарифмов получаем в случае сверхвысоких энергий<sup>49</sup>

$$d\sigma/du_1 = 0,78 d\sigma^{(0)}/du_1, \quad x^2 = (2\alpha/\pi) \ln^2(s/u_1) \gg 1. \quad (99)$$

Отношение сечения электрон-позитронного рассеяния назад с излучением тормозных фотонов (98) к борновскому члену падает с ростом (как  $1/\ln(s/u_1)$ ), в противоположность процессу без испускания фотонов (96), (97), для которого это отношение падает экспоненциально. Суммирование по числу тормозных фотонов  $n$  приводит к тому, что указанное отношение становится константой (99).

Автор благодарен В. Н. Байеру, И. Ф. Гинзбургу, В. Н. Грибову, Л. Н. Липатову, Э. А. Кураеву, В. Г. Сербо, Г. В. Фролову и В. А. Хозе за ряд ценных замечаний и советов.

Физико-технический институт  
им. А. Ф. Иоффе АН СССР

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. В. Н. Грибов, Лекции по теории комплексных моментов, Препринт ХФТИ 70/47, Харьков, 1970.
2. H. Cheng, T. T. Wu, Phys. Rev. **182**, 1852, 1868, 1873, 1899 (1969).
3. В. Г. Горшков, В. Н. Грибов, Л. И. Липатов, Г. В. Фролов, ЯФ **6**, 129, 361, 579 (1967).
4. M. Gell-Mann, M. L. Goldberger, F. E. Low, E. M. Stein, F. Zachariasen, Phys. Rev. **B133**, 145 (1964).
5. G. V. Frolov, V. G. Gorshkov, V. N. Gribov, Phys. Lett. **22**, 662 (1966); Л. Н. Липатов, ЯФ **54**, 1520 (1968).
6. H. Cheng, T. T. Wu, Phys. Rev. Lett. **22**, 666 (1969).
7. Л. Н. Липатов, Г. В. Фролов, Письма ЖЭТФ **10**, 399 (1969).
8. G. V. Frolov, V. N. Gribov, L. N. Lipatov, Phys. Lett. **B31**, 34 (1970); ЯФ **12**, 994 (1970).
9. H. Cheng, T. T. Wu, Phys. Rev. Lett. **23**, 670 (1969).
10. C. Weizsacker, Zs. Phys. **88**, 612 (1934); E. Williams, Phys. Rev. **45**, 729 (1934).
11. В. Н. Грибов, В. А. Колкунов, Л. Б. Окунь, В. М. Шехтер, ЖЭТФ **41**, 1315 (1961).
12. Л. Ландау, Е. Лифшиц, Sov. Phys. **6**, 244 (1934).
13. В. В. Судаков, ЖЭТФ **30**, 87 (1956).
14. А. А. Абрикосов, *ibid.*, p. 386, 544.
15. Б. В. Гешкенбейн, М. В. Терентьев, ЯФ **8**, 119 (1968).

16. S. Okubo, *Nuovo Cimento* **18**, 70 (1960); K. E. Erikson, *ibid.* **19**, 1010 (1961); P. R. Yenpi, S. C. Frautschi, U. Suura, *Ann. Phys. (N.Y.)* **13**, 379 (1961).
17. В. Н. Байер, С. А. Хейфец, *ЖЭТФ* **40**, 613 (1961).
18. Г. А. Милехин, Е. С. Фрадкин, *ЖЭТФ* **45**, 1926 (1963).
19. В. Н. Байер, *УФН* **78**, 619 (1962).
20. А. И. Алиханьян, С. А. Хейфец, *УФН* **101**, 217 (1970).
21. В. Е. Тирринг, *Принципы квантовой электродинамики*, М., «Высшая школа», 1964, стр. 150.
22. D. Amati, S. Fubini, A. Stanghellini, *Nuovo Cimento* **26**, 896 (1962).
23. И. М. Дрёмин, И. И. Ройзен, Р. Б. Уайт, Д. С. Чернавский, *ЖЭТФ* **48**, 952 (1965).
24. S. Mandelstam, *Phys. Rev.* **112**, 1344 (1958).
25. R. E. Cutkosky, *J. Math. Phys.* **1**, 429 (1960).
26. А. М. Ророва, К. А. Тер-Мартirosian, *Nucl. Phys.* **60**, 607 (1964).
27. Я. И. Азимов, *ЖЭТФ* **43**, 2321 (1962).
28. S. Mandelstam, *Nuovo Cimento* **30**, 1113, 1127, 1143 (1963).
29. А. Г. Хабахпашев, *Препринт СО АН СССР, ИЯФ 112-70*, Новосибирск, 1970; V. E. Balakin et al., *Phys. Lett.* **B34**, 663 (1971).
30. А. И. Ахизер, В. Б. Берестецкий, *Квантовая электродинамика*, М., «Наука», 1969.
31. H. Bethe, W. Heitler, *Proc. Roy. Soc.* **146**, 83 (1934).
32. Г. М. Гарибян, *Изв. АН Арм. ССР* **5**, 3 (1952).
33. J. A. Altarelli, F. Buccella, *Nuovo Cimento* **34**, 1337 (1964).
34. В. Н. Байер, В. С. Фадин, В. А. Хозе, *ЖЭТФ* **51**, 1135 (1966).
35. V. N. Baier, V. M. Galitskiĭ, *Phys. Lett.* **13**, 355 (1964); *Письма ЖЭТФ* **2**, 259 (1965).
36. В. Н. Байер, В. С. Фадин, В. А. Хозе, *ЖЭТФ* **53**, 2194 (1967).
37. Э. А. Чобан, *ЯФ* **13**, 624 (1971); А. М. Алтухов, *ЯФ* **14** 391 (1971); В. Н. Байер, В. С. Фадин, *Письма ЖЭТФ* **13** 293 (1971).
38. V. N. Baier, V. S. Fadin, *Phys. Lett.* **B27**, 223 (1968); В. Н. Байер, В. А. Хозе, *ЖЭТФ* **48**, 1708 (1965).
39. В. С. Сынах, *ЖЭТФ* **48**, 1111 (1965).
40. В. Н. Байер, В. С. Фадин, *ЖЭТФ* **61**, 476 (1971).
41. Э. А. Кураев, Л. И. Липатов, *Письма ЖЭТФ* **15**, 229, (1972); *ЯФ* **16**, 1060 (1972).
42. S. J. Brodsky, T. Kinoshita, H. Terazawa, *Phys. Rev. Lett.* **25**, 972 (1970).
43. Г. В. Меледин, В. Г. Сербю, А. И. Сливков, *Письма ЖЭТФ* **13**, 98 (1971).
44. В. Г. Сербю, *ibid.* **12**, 50 (1970).
45. Л. И. Липатов, Г. В. Фролов, а) *Материалы, представленные на 15-ую Международную конференцию по физике высоких энергий, Киев, 1970*; б) *ЯФ* **13**, 588 (1971).
46. F. E. Low, *Phys. Rev.* **120**, 582 (1960).
47. В. М. Буднев, А. И. Сливков, *Письма ЖЭТФ* **12**, 523 (1970).
48. В. Е. Балакин, В. М. Буднев, И. Ф. Гинзбург, см. сборник <sup>45а</sup>; В. М. Буднев, И. Ф. Гинзбург, *Препринт СО АН СССР ТФ-55*, Новосибирск, 1970; *Письма ЖЭТФ* **13**, 519 (1970); М. В. Терентьев, *ЯФ* **14**, 178 (1971); Э. А. Чобан, В. М. Шехтер, *ibid.* **19**, 190.
49. Л. Н. Липатов, *ЯФ* **6**, 570 (1967); **14**, 396 (1971).
50. В. Н. Грибов, *ibid.* **5**, 399.
51. В. Г. Горшков, *ЖЭТФ* **56**, 597 (1959).
52. А. Д. Долгов, В. И. Захаров, Л. Б. Окунь, *ЯФ* **14**, 1044, 1247 (1971).
53. В. Г. Горшков, Л. Н. Липатов, *ЯФ* **9**, 818 (1969).
54. Э. А. Кураев, А. И. Калинин, *ЯФ* **12** 122 (1970).
55. Ю. И. Ольшанский, *Дипломная работа (ЛПИ, Ленинград, 1970)*.
56. Э. А. Кураев, М. М. Нестеров, Ю. И. Ольшанский, *ЯФ* **13**, 825 (1971).
57. Э. А. Чобан, *Письма ЖЭТФ* **11**, 505 (1970).