

О ПРИЛОЖЕНИИ МАСШТАБНОЙ ИНВАРИАНТНОСТИ В ФИЗИКЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

В. М. Дубовик

В статье Р. Джэкива (стр. 743) в простой и увлекательной форме рассказывается об одном из интереснейших явлений в физике элементарных частиц — свойстве масштабной инвариантности, обсуждаемом в связи с результатами экспериментального изучения процессов глубоко-неупругого взаимодействия лептонов с адронами. За полтора года, прошедшие со времени написания статьи Джэкива, в области изучения и применения масштабной инвариантности были получены новые важные результаты, о которых уместно было бы здесь кратко рассказать. Нам хотелось бы также познакомить читателя с некоторыми из основных работ советских физиков в этой области, внесших в ее развитие существенный вклад.

Идея о масштабной инвариантности в физике не нова. В развитие этой идеи, связанной с идеей о независимости законов природы от выбора единиц измерения, внесли вклад такие классики науки, как Ньютон, Фурье, Рэлей и др. Строгая математическая формулировка ее при исследовании ряда задач газо- и гидродинамики, например задачи о сильном «точечном» взрыве, была дана в 50-х годах Седовым, Ландау и Станюковичем¹ и получила название принципа автомодельности. В задачах подобного типа, в областях, где значения кинематических переменных (например, координат) сильно отличаются по своему масштабу от размерных параметров, решение перестает зависеть от этих параметров. Тогда при преобразованиях размерности, т. е. при растяжении величин с размерностью длины, можно преобразовывать только координаты. Такие преобразования имеют геометрический смысл и называются масштабными преобразованиями. Эта методика, являющаяся весьма общей и составляющая основу так называемого математического моделирования, позволяет описывать не только гидро-газодинамические явления различных масштабов — от взрыва атомной бомбы до пробоя среды в фокусе лазерного луча, — но и явления в самых разнообразных областях физики. Можно, например, вспомнить описание эволюции звезды с ядерным источником энергии, использующее гидродинамические уравнения и законы излучения², или модель турбулентного движения Колмогорова³.

Новейшие применения принципа масштабной инвариантности возникли в физике высоких энергий в связи с изучением процессов глубоко-неупругого взаимодействия лептонов с адронами и множественного рождения частиц в адрон-адронных столкновениях при высоких энергиях.

М. А. Марков еще в 1963 г. указал^{4а} на возможность «точечноподобного» поведения сечений неупругого взаимодействия нейтрино с нуклоном, связанного с исчезновением параметров, характеризующих размеры нуклона, при суммировании по всем открытым каналам реакции. Возможность исследования глубоко-неупругих процессов отмечалась вслед за Марковым рядом советских и зарубежных ученых^{4б}. И действительно, результаты, полученные на СЛЯК для реакции⁵ $e^- + p \rightarrow e^- +$ адроны при энергии налетающего электрона около 20 Гэв и затем в ЦЕРН для реакции⁶ $\nu_\mu + N \rightarrow \mu^- +$ адроны, подтвердили «точечную» картину взаимодействия. Тем самым было обнаружено новое явление масштабно-инвариантного поведения форм-факторов указанных процессов.

Начиная с 1967 г. в работах А. А. Логунова с сотрудниками^{7а} в рамках квантовой теории поля были изучены процессы глубоко-неупругого взаимодействия адронов в тех случаях, когда в конце реакции регистрируются одна, две и т. д. частицы. Впоследствии такие процессы получили название инклюзивных.

Экспериментальное изучение инклюзивных процессов^{7б} с одним выделенным типом частиц $p + p \rightarrow \pi, K +$ адроны, проведенное на Серпуховском ускорителе при энергиях налетающего протона до 70 Гэв , также обнаружило масштабные свойства, характерные для динамики сильных взаимодействий.

На важную роль масштабных преобразований в глубоко-неупругих процессах обратил внимание Н. Н. Боголюбов, указав на возможную аналогию между процессом глубоко-неупругого электророждения и динамикой «точечного» взрыва. Исходя из этой аналогии, Матвеев, Мурадян и Тавхелидзе^{8а} сформулировали принцип приближенной автомодельности, предполагающий, что масштабно-инвариантное поведение присуще всем глубоко-неупругим процессам взаимодействия лептонов с адронами. В этом подходе с помощью методов анализа размерностей и подобия единым образом исследовалось асимптотическое поведение различных процессов глубоко-неупругого взаимодействия и установлен ряд правил сумм. Полученные в этой схеме результаты^{8б} качественно правильно описывают экспериментальные данные группы Ледермана^{8в} по изучению процесса рождения мюонных пар в адрон-адронных столкновениях при больших передаваемых импульсах $p + U \rightarrow \mu^+ \mu^- +$ адроны ($E_p = 30 \text{ Гэв}$).

В дальнейшем принцип автомодельности был обобщен для случая чисто адрон-адронных столкновений, исходя из аналогии с «плоским» взрывом в гидродинамике⁹. Адрон в процессе столкновения в пределе крайне высоких энергий рассматривается здесь как протяженный объект, сплюснутый благодаря лоренцеву сокращению в бесконечно тонкий диск с конечными поперечными размерами. Физические величины, наблюдаемые в адрон-адронных столкновениях при высоких энергиях, характеризуются определенными масштабными свойствами при растяжении вдоль оси столкновения z шкалы продольных импульсов p_z : $p_z \rightarrow \lambda p_z$, $p_{\perp} \rightarrow p_{\perp}$, $p_0 \rightarrow \lambda p_0$, $(m^2 + p_{\perp}^2)/2p_z^2 \ll 1$, где p_0 — энергия, а p_{\perp} — поперечный импульс вторичной частицы, ограниченный значением $\sim 0,4 \text{ ГэВ}/c$, что известно из экспериментов.

Подобную наглядную физическую картину высокоэнергетического взаимодействия адронов развили многие авторы, начиная с Гейзенберга; она была использована Янгом с сотрудниками¹⁰ и Фейнманом¹¹ при построении моделей множественного рождения частиц («предельная фрагментация» и модель «партонов» соответственно). Гипотеза автомодельности и анализ размерностей с двумя шкалами длины p_{\perp} и p_z позволяют продумать⁹ модельно-независимым способом основные предсказания в подходах Янга и Фейнмана (например, постоянство полных сечений, закономерности одночастичных и двухчастичных распределений вторичных частиц и т. д.).

Соображения о применимости масштабной инвариантности к столкновениям составных систем высказал Балдин^{12а}. Для конкретного процесса — столкновения релятивистских ядер — им был предсказан эффект передачи энергии группы нуклонов одной вторичной частице, названный кумулятивным. Этот эффект, назного прервосходящий эффект импульсного распределения нуклонов в ядре, обнаружен^{12б} экспериментально на Дубненском синхрофазотропе в реакции $d + \text{Cu} \rightarrow \pi^- + \dots$. $\dots (E_{\pi}^{\text{кин}} > E_d^{\text{кин}}/2 \approx 4 \text{ ГэВ})$.

Следует отметить, что закономерности, присущие инклюзивным реакциям, проявляются также при изучении процессов множественного рождения в космических лучах. Так, масштабная инвариантность высокоэнергетической части спектра вторичных частиц («лидирующих») была известна еще с начала 50-х годов, поскольку были установлены такие факты, как постоянство коэффициента неупругости $(K = \langle E \rangle / \langle E_0 \rangle)$, где E — энергия, уносимая вторичными частицами) и постоянство избытка положительных мюонов в интервале энергий $E_0 \sim 10 - 10^4 \text{ ГэВ}$. Желающим познакомиться с этой областью рекомендуем обзор Фейнберга^{13а} и его обзор^{13б}, в котором даны более детальные модели множественного рождения частиц.

Среди работ, посвященных теоретической интерпретации масштабной инвариантного и автомодельного поведения глубоко-неупругих процессов, следует отметить работы¹⁴, в которых развивается, образно говоря, «физика на световом конусе».

Как заметили Иоффе и др.¹⁴, в предположении об асимптотическом режиме указанные процессы позволяют непосредственно измерять коммутатор двух электромагнитных токов, заданных в окрестности светового конуса в конфигурационном пространстве. Это очень интересно с теоретической точки зрения, поскольку в лагранжиановых моделях теории поля локальные операторы наиболее сингулярны именно на световом конусе и характер их поведения на конусе позволяет выяснить одни из важнейших принципиальных вопросов, изменяются ли коммутационные соотношения в теории взаимодействующих полей или мы можем их записывать по аналогии с теорией свободных полей.

За последние годы возникло новое направление в изучении свойств масштабной инвариантности и автомодельного поведения глубоко-неупругих процессов лентонов с адронами, основанное на использовании лишь самых общих принципов локальной квантовой теории поля¹⁵. Строгое обоснование его на основе аксиоматического подхода было дано в работах Боголюбова, Владимирова и Тавхелидзе¹⁶. В них развиты методы, позволяющие эффективно использовать такое фундаментальное требование, как условие причинности, и дать на его основе строгое доказательство существования автомодельных асимптотик. Результаты этих работ дали последовательное обоснование связи автомодельного поведения форм-факторов глубоко-неупругих процессов с характером сингулярностей коммутатора локальных токов на световом конусе. Результаты этих исследований получили дальнейшее развитие в ряде последующих работ¹⁷.

В недавних работах Логунова и сотрудников¹⁸ было также продолжено изучение закономерностей множественного рождения частиц при сильных взаимодействиях. Так, в работе^{18а}, исходя из общих требований унитарности и аналитичности, исследуется роль «мягких» частиц, рожденных в процессах столкновения адронов высоких энергий, и устанавливаются определенные масштабные соотношения автомодельного типа. В работе^{18б} развивается «статистический» метод исследования инклюзивных спектров. Успехи этого направления освещены в обзоре^{18в}.

Перейдем к вопросу о связи масштабной инвариантности моделей квантовой теории поля со свойствами их перенормируемости. В масштабной инвариантных моделях предполагается существование набора унитарных преобразований вида $U(\rho) \Phi(x) \times \times_1 U^{-1}(\rho) = \rho^d \Phi(\rho x)$. Константа d при этом называется размерностью поля $\Phi(x)$.

и находится с помощью коммутации инфинитезимального оператора растяжений D (введен в статье Джэкива) с оператором $\Phi(x)$. Уилсоном было замечено¹⁹, что размерность перенормированного поля $\Phi_R(x)$, вычисленная приближенно путем суммирования графов по теории возмущений или найденная в точно решаемой модели квантовой теории поля, может становиться аномальной: $d = d_0 + f(g)$, где d_0 — обычная или каноническая размерность, а f — функция константы связи g . Следует отличать введенное таким образом понятие размерности от понятия обычной размерности. Обычная размерность показывает, как изменяется поле, если подвергнуть растяжению все величины размерности длины, т. е. координаты, комптоновские длины частиц, импульсы и т. д., и совпадает, таким образом, с физической размерностью поля. Аномальная размерность характеризует изменение поля при растяжениях одних только координат (или импульсов). В ряде случаев при перенормировке поле приобретает размерный множитель $m^{f(g)}$, не изменяющийся при рассмотренных выше растяжениях координат, поэтому аномальная размерность отличается от обычной некоторой добавкой $f(g)$.

Напомним, что явления типа аномальных размерностей фактически известны давно. Оно обнаруживалось при исследовании инфракрасного поведения матричных элементов в квантовой электродинамике²⁰, при нахождении точных решений модели Тирринга (см.²¹), при рассмотрении ренормализационной инвариантности теорий взаимодействующих полей^{22а}. Последний вопрос детально разбирался Боголюбовым, Ширковым и Гинзбургом^{22б} с помощью общего метода ренормализационной группы.

В недавней работе Ширкова²³ идея о возможной взаимосвязи масштабно-инвариантного характера ультрафиолетовых асимптотик в квантовой теории поля с гипотезой о конечности перенормировок зарядов была обоснована из анализа уравнений ренормализационной группы. Аномальные размерности исследовались также Грибовым и Мигдалом²⁴ в реджиионном подходе в связи с проблемой самосогласованности полюса Померанчука, и Поляковым^{25а} и Мигдалом^{25б} в приложении к фазовым переходам в различных статистических системах.

В ряде работ изучался вопрос о характере асимптотического поведения факторов в глубоко-неупругой области исходя из анализа графов теории возмущений²⁶. Грибовым и Липатовым^{26б} было показано, что в логарифмическом приближении, т. е. когда $g^2 \ln(g^2/M^2) \sim 1$ (где g — константа связи, причем $g^2 \ll 1$), суммирование ряда теории возмущений приводит к отклонению от бёркеновского поведения структурных функций. Отмеченное поведение соответствует ситуации «нуль заряда». Противоположный случай рассматривался Ефремовым и Гинзбургом^{26в}, которые в рамках предположения о конечности перенормировки заряда сделали вывод о возможности автоматического асимптотического поведения амплитуд, определяемых всей совокупностью графов теории возмущений. Эти авторы^{26г} затем развили общий метод, основанный на анализе и суммировании графов теории возмущений в высокоэнергетической области, и получили ряд качественных предсказаний гипотезы о масштабной инвариантности для процессов рассеяния адронов, множественного рождения и глубоко-неупругого рассеяния.

Далее заметим, что масштабная инвариантность не является единственной симметрией, которая может проявиться в области высоких энергий. Наряду с упомянутыми Джэкивом киральными теориями отметим теории, инвариантные относительно группы конформных преобразований²⁷ (15-параметрическая группа преобразований пространства-времени, изоморфная группе $O(4,2)$).

Конформная симметрия может оказаться приближенной симметрией в природе, справедливой в пределе больших импульсов, когда массы покоя частиц могут стать несущественными. На это обстоятельство указал Вигнер²⁸, связывая его с точной конформной инвариантностью уравнений Максвелла в пустоте (описывающих частицы с нулевой массой покоя), которая была обнаружена еще в начале века²⁹.

Сделаем несколько замечаний о работах, связанных с изучением конформно-инвариантных теорий. Кроме результатов, которые следуют уже из масштабной симметрии, из рассмотрений конформной симметрии пока не удается получить существенные предсказания, которые можно было бы проверять в эксперименте. Однако в чисто теоретическом направлении имеется определенный успех. Напомним, что в рамках лагранжевых формулировок квантовой теории поля возникновение аномальных размерностей, упомянутых Джэкивом, связано с бесконечной перенормировкой операторов теории поля. Требование инвариантности относительно конформной группы преобразований в сочетании с идеей об аномальных размерностях позволило практически однозначно (с точностью до одной константы) определить вершинные функции в квантовой теории поля³⁰. (Любопытно отметить, что этот результат был впервые получен Поляковым³¹ не в теории элементарных частиц, а при теоретико-полевом изложении гипотезы о конформной инвариантности флуктуаций в точке фазового перехода.) Для нахождения высших функций Грина Мак и Годоров³² сформулировали «скелетную» диаграммную технику, и содержащую ультрафиолетовых расходимостей.

Было бы трудно в рамках небольшой статьи осветить состояние этой бурно развивающейся области физики элементарных частиц. Более широкую и специальную информацию, касающуюся развития конформно- и масштабно-инвариантных теорий,

можно найти, например, в материалах Международной конференции по математическим проблемам квантовой теории поля и квантовой статистики (Москва, МИАН СССР, декабрь 1972 г.)³³ и в обзорах³⁴.

В заключение отметим, что предположение о масштабной инвариантности и конформной симметрии — плодотворная физическая идея. Как приближенный принцип в физике элементарных частиц масштабная инвариантность проявляется в процессах, когда становятся несущественными массы всех частиц, а поиск способов нарушения конформной симметрии может сыграть эвристическую роль в ходе построения более совершенных теорий.

Автор благодарен А. М. Балдину, А. В. Ефремову, А. А. Мигдалу, Р. М. Мурадян, И. Т. Тодорову, Я. А. Смородинскому, Е. Л. Фейнбергу, Д. В. Ширкову и особенно В. А. Матвееву за информацию и полезные обсуждения по ряду вопросов, затронутых в статье.

Объединенный институт ядерных исследований,
Дубна

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Л. И. Седов, Методы подобия и размерности в механике, М., Гостехиздат, 1957; Л. Д. Ландау, Собрание сочинений, М., «Наука», 1969, стр. 504; К. П. Станюкович, Неуставившиеся движения сплошной среды, М., Гостехиздат, 1958.
2. G. G a m o v, Phys. Rev. **53**, 595 (1938).
3. А. И. Колмогоров, ДАН СССР **30**, 301 (1941).
4. а) М. А. Марков, Нейтрино, М., «Наука», 1964, а также: Препринты ОИЯИ (Дубна), Д2-1269 (1963), Е2-4370 (1969); б) S. A d l e r, Phys. Rev. **143**, 1144 (1966); J. D. V j o r k e n, Lecture in Varenna School, Varenna, 1967, Course 41; Р. М. Мурадян, сборник «Вопросы теории элементарных частиц» (Труды Международного семинара по теории элементарных частиц в Варне, 1968), Дубна, ОИЯИ, 1968.
5. W. K. H. P a n o f s k y, Proc. of the 4th Intern. Conference on High-Energy Physics (Vienna, Sept. 1968), ed. by J. Prentki, Geneva, CERN Sci. Inform. Service, 1969; E. D. B l o o m, D. H. C o w a r d, H. D e S t a e b l e r, J. D r e s s, G. M i l l e r, L. W. M o, R. E. T a y l o r, M. B r e i d e n b a c h, J. L. F r i e d m a n, G. S. H a r t m a n n, H. W. K e n d a l l, Phys. Rev. Lett. **23**, 930 (1969); M. B r e i d e n b a c h, J. L. F r i e d m a n, H. W. K e n d a l l, E. D. B l o o m, D. H. C o w a r d, H. D e S t a e b l e r, J. D r e s s, L. W. M o, R. E. T a y l o r, *ibid.*, p. 935.
6. J. B u d a g o v, D. C. C u n d y, C. F r a n z i n e t t i, W. B. F r e t t e r, H. W. K. H o p k i n s, C. M a n t r e c l o t t i, G. M y a t t, E. A. N e z r i c k, M. N i c o l i c, T. B. N o v e y, R. B. P a l m e r, J. B. P a t t i s o n, D. H. P e r k i n s, C. A. R a m m, B. R o e, R. S t u m p, W. V e n u s, H. W. W a c h s m u t h, H. Y o s h i k i, Phys. Lett. **B30**, 364 (1969); D. H. P e r k i n s, Proc. of Topical Conference on Weak Interactions, v. 1, Geneva, CERN, 1969, 69-7; G. M y a t t, D. P e r k i n s, Phys. Lett. **B34**, 542 (1971).
7. а) А. А. Логунов, М. А. Мествиришвили, Nguen Van Hieu, Phys. Lett. **B25**, 611 (1967); А. А. Логунов, Нгуен Ван Хью, О. А. Хрусталёв, сборник «Проблемы теоретической физики», посвященный Н. Н. Боголюбову в связи с его шестидесятилетием, М., «Наука», 1969; А. А. Логунов, М. А. Мествиришвили, О. А. Хрусталёв, ТМФ **9**, 3, 153 (1971); б) Ю. Б. Бушнин, Ю. П. Горин, С. П. Денисов, С. В. Донсков, А. Ф. Дунайцев, В. А. Качанов, В. И. Котов, В. М. Кутьин, А. И. Петрухин, Ю. Д. Прокошкин, Е. А. Разуваев, Д. А. Стоянова, Ю. С. Ходырев, Р. С. Шувалов, Дж. В. Аллаби, Ф. Бинон, А. М. Везерелл, Дж. Джакомелли, А. П. Дидденс, П. Дютейль, Р. Менье, Ж.-П. Пенъё, К. А. Стольбрандт, Ж.-П. Строот, К. Шлюпманн, Препринт ИФВЭ 69-18, Серпухов, 1969; ЯФ **10**, 585 (1969); Ф. Бинон, С. П. Денисов, П. Дютейль, В. А. Качанов, В. М. Кутьин, Ж.-П. Пенъё, Ю. Д. Прокошкин, Е. А. Разуваев, М. Спигель, Ж.-П. Строот, Р. С. Шувалов, Препринт ИФВЭ 69-78, Серпухов, 1969; ЯФ **11**, 636 (1970).
8. а) В. А. Матвеев, Р. М. Мурадян, А. Н. Тавхелидзе, Препринт ОИЯИ P2-4578, Дубна, 1969; Проблемы физики элементарных частиц и атомного ядра (ЭЧАЯ) **2**, 7 (1971); см. также библиографию работ авторов, приведенную в цитируемом обзоре; б) В. А. Матвеев, Р. М. Мурадян, А. Н. Тавхелидзе, Сообщения ОИЯИ P2-4543, P2-4824, Дубна, 1969; в) J. H. C h r i s t e n s o n, G. S. H i c k s, L. M. L e d e r m a n, P. J. L i m o n, B. G. P a r e, E. Z a v a t t i n i, Bull. Am. Phys. Soc. **15**, 579 (1970).

9. V. A. Matveev, R. M. Muradyan, A. N. Tavkhelidze, JINR Preprint E2-6638, Dubna, 1972; Lett. Nuovo Cimento 5, 907 (1972); см. также: M. Bander, Phys. Rev. D6, 164 (1972).
10. а) J. Венеске, T. T. Chou, Chen Ning Yang, E. Yen, *ibid.* 188, 2459 (1969); б) C. N. Yang, сборник «High-Energy Collisions», ed. by J. A. Cole et al., N.Y.—L., Gordon and Breach, 1969.
11. R. P. Feynman, Phys. Rev. Lett. 23, 1415 (1969); сборник¹⁰⁶, p. 237. Представления о партонах см. в переводах популярной статьи Г. Кедала и В. Пановского (УФН 106, 315 (1972)) и статьи С. Дрелла (*ibid.*, стр. 321).
12. а) А. М. Балдин, Кр. сообщ. физ. (ФИАН СССР), № 1, 35 (1971); см. также сборник «Международная конференция по физике тяжелых ионов», Дубна, ОИЯИ, 1971, стр. 607, и Сообщение ОИЯИ P7-5808, Дубна, 1971; б) А. М. Балдин, Н. Гнордэнеску, В. Н. Зубарёв, А. Д. Кириллов, В. А. Кузнецов, Н. С. Мороз, В. Б. Радоманов, В. Н. Рамжин, В. А. Свиридов, В. С. Ставинский, М. И. Яцута, Препринт ОИЯИ P1-5819, Дубна, 1971; см. также Particles and Fields — 1971 (Proc. of the Rochester Meeting of PAS/DFP, August 1971), ed. by A. C. Mellisinos and P. F. Slatery, v. 1 (1), N.Y.—L., Am. Inst. Phys., 1971, p. 131.
13. Е. Л. Фейнберг, а) Phys. Repts. 5C, No. 5 (1972); б) УФН 104, 539 (1971).
14. В. L. Ioffe, Phys. Lett. B30, 123 (1969); см. также: J. D. Bjorken, Phys. Rev. 148, 1467 (1966); В. Н. Грибов, Б. Л. Иоффе, И. Я. Померанчук, ЯФ 6, 587 (1967); L. S. Brown, 1969 Boulder Lectures in Theoretical Physics (v. XIIB), ed. by K. T. Mahanthappa and W. E. Brittin, N.Y.—L., Interscience Publ. Inc.—Gordon and Breach, 1971.
15. R. Brandt, Phys. Rev. D1, 2808 (1970); H. Leutwyler, J. Stern, Nucl. Phys. B20, 77 (1970); R. Jakiw, R. van Royen, G. B. West, Phys. Rev. 160, 1366 (1971).
16. Н. Н. Боголюбов, В. С. Владимиров, А. Н. Тавхелидзе, Сообщения ОИЯИ P2-6342, E2-6490, Дубна, 1972; ТМФ 12, 3, 305 (1972).
17. П. Н. Боголюбов, Сообщение ОИЯИ, P2-6637, Дубна, 1972; П. Н. Боголюбов, В. А. Матвеев, Сообщение ОИЯИ D2-6735, Дубна, 1972.
18. а) А. А. Логунов, М. А. Мествиришвили, Препринт ИФВЭ СТФ-71, Серпухов, 1971; б) В. В. Ежела, А. А. Логунов, М. А. Мествиришвили, Препринт ИФВЭ СТФ-72-54, Серпухов, 1972; в) V. V. Zhela, A. A. Logunov, M. A. Mestvirishvili, V. A. Petrov, Proc. of the 1972, CERN School of Physics, Geneva, CERN, Sci. Inform. Service, 1972, p. 491.
19. K. Wilson, Phys. Rev. 179, 1499 (1969); D2, 1473, 1478 (1970).
20. Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосов, И. М. Халатникова, ДАН СССР 95, 497, 773, 1177 (1954); А. В. Свидзинский, ЖЭТФ 31, 324 (1956).
21. V. Glaser, Nuovo Cimento 9, 990 (1958); М. Майер, Д. Ширков, ДАН СССР 122, 45 (1956).
22. а) M. Gell-Mann, F. Low, Phys. Rev. 95, 1300 (1954); б) N. N. Bogolubov, D. V. Shirkov, Nuovo Cimento 3, 845 (1956); И. Ф. Гинзбург, Д. В. Ширков, Науч. докл. высш. школы 2, 143 (1958); И. Ф. Гинзбург, *ibid.*, стр. 152.
23. Д. В. Ширков, Материалы школы молодых ученых по физике высоких энергии (Сухуми, октябрь 1972 г.), Дубна, ОИЯИ P2-6867, 1973.
24. В. Н. Грибов, А. А. Мигдал, ЖЭТФ 55, 1498 (1968).
25. а) А. М. Поляков, *ibid.*, p. 1026; б) А. А. Мигдал, *ibid.*, стр. 1964.
26. а) S. L. Adler, Wu-Ki Tung, Phys. Rev. D1, 2846 (1970); P. M. Fishbane, J. D. Sullivan, *ibid.* D4, 2516 (1971); б) V. N. Gribov, L. N. Lipatov, Phys. Lett. B37, 78 (1971); ЯФ 15, 781 (1972); в) А. В. Ефремов, I. F. Ginzburg, Phys. Lett. B36, 371 (1971); г) А. В. Ефремов, Препринт ОИЯИ E2-6612, Дубна, 1972; И. Ф. Гинзбург, Препринт ИМ СО АН СССР ТФ-74, Новосибирск, 1972.
27. Кроме литературы, процитированной в статье Джеквива (см. стр. 753), отметим: G. Mask, A. Salam, Ann. Phys. (N.Y.) 52, 174 (1969); P. Carruthers, Phys. Repts 1C, 1 (1971); C. G. Callan, Jr., сборник «Lectures in Theoretical Physics (Les Houches)», P., Hermann—Gordon and Breach, 1971.
28. Е. Вигнер, Этюды о симметрии, М., «Мир», 1971, стр. 56.
29. E. Cunnigham, Proc. Lnd. Math. Soc. 8, 77 (1909); Н. Ватеман, *ibid.* 8, 223 (1910).
30. А. А. Мигдал, Phys. Lett. B37, 98, 386 (1971).
31. А. М. Поляков, Письма ЖЭТФ 12, 538 (1970).
32. А. Маск, I. Тодоров, Preprint ICTP/139, Trieste, 1971.
33. Тезисы докладов. Сообщение ОИЯИ D2-6823, Дубна, 1972.
34. Р. М. Мурадян, Препринт ОИЯИ P2-6762, Дубна, 1972; А. М. Поляков, Landau Inst. Theor. Phys. Preprint, Chernogolovka, 1972; I. T. Todorov, JINR Preprint E2-66-52, Dubna, 1972.