1973 г. Апрель *Том 109, вып. 4*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ФИЗИКА НАШИХ ДНЕЙ

530.1 (023)

МАСШТАБНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ

Анализ размерностей и соображения подобия помогают находить решения самых разнообразных физических задач. Эти методы нашли плодотворные применения в теории элементарных частиц, после того как эксперименты, выполненные на ускорителе электронов до энергий 20 *Гэв* в Стэнфорде, по неупругим адрон-адронным столкновениям и эксперименты, проведенные на ускорителе протонов до энергий 70 *Гэв* в Серпухове, показали, что инвариантные сечения рассеяния зависят от безразмерных отношений некоторых кинематических переменных. Подобные закономерности наблюдались затем в экспериментах на встречных пучках — электрон-позитронных во Фраскати и протон-протонных в ЦЕРН (Женева). Это вызвало большой интерес к масштабно-инвариантным теориям.

Успехи в создании теорий такого рода освещаются в помещенном ниже переводе статьи Р. Джэкива. Для понимания ее необходимо знакомство с основами квантовой механики и квантовой теории поля. На более популярном уровне дан (в виде приложения) компилированный материал («Масштабная инвариантность и гравитация»), посвященный приложению идеи о масштабной инвариантности в теории гравитации. Помещенная вслед за этим статья В. М. Дубовика дополняет обзор Р. Джэкива и подчеркивает важный вклад, внесенный в эту область советскими физиками-теоретиками. Редакция предполагает еще раз обратиться к этим интересным и актуальным вопросам на страницах журнала.

[530.1+539.12.01] (023)

ЗНАКОМЬТЕСЬ С МАСШТАБНОЙ СИММЕТРИЕЙ*)

Р. Джэкив

Результаты некоторых экспериментов по рассеянию, полученные группами исследователей из Массачусетского технологического института и Стэнфордского центра линейных ускорителей, вызвали интерес к теории динамических величин, не зависящих от размерных параметров.

Когда существуют симметрии, решение почти любой физической задачи упрощается, поскольку мы можем понять свойства системы без полного решения всех уравнений, описывающих эту систему. В физике высоких энергий принципы симметрии изучались с целью обойти два препятствия в понимании природы элементарных частиц — отсутствие точного знания сил, действующих между частицами (за исключением электромагнитных), и математические трудности любой реалистической модели, которая пытается объяснить явления, наблюдаемые в физике частиц.

---

*) Roman Jackiw, Introducing Scale Symmetry, Phys. Today 25 (1), 23 (1972). Перевод Владимира М. Дубовика.

Р. Джэкив — сотрудник Центра теоретической физики при Массачусетском технологическом институте, США.

Полезные симметрии и связанные с ними законы сохранения бывают двух видов: «пространственно-временны́е» и «внутренние». При пространственно-временны́х симметриях сохраняются такие кинематические величины, как энергия и импульс. При внутренних симметриях сохраняются такие величины, как заряд или барионное число. Теоретики, занимающиеся физикой высоких энергий, нашли удобным рассматривать *приближенные* симметрии, а не только *точные*. Симметрии такого типа не существуют в природе строго, но физические предсказания, сделанные на их основе, достаточно хороши. До сих пор успешно применялись только внутренние приближённые симметрии. Примером является изотопический спин, введенный Гейзенбергом ($SU(2)$), сохраняющийся точно только в том случае, когда мы пренебрегаем электромагнитными взаимодействиями; другой пример — киральность ($SU(2) \times SU(2)$), возникающая при преобразованиях, введенных М. Гелл-Манном, Ф. Гюрши, М. Леви, Й. Намбу, Ю. Швингером и С. Вейнбергом, которые расширили понятие изоспина путем введения изоспина с положительной и с отрицательной четностью. Киральность становится точной симметрией только тогда, когда масса пиона равняется нулю. Это соответствует возможности изменения четности состояния без изменения его массы (путем испускания безмассового пиона).

Здесь мы будем рассматривать приближенную пространственно-временную симметрию, дающую *масштабную инвариантность*, или *инвариантность относительно растяжений* (dilatation invariance), которой с недавнего времени уделяется большое внимание из-за результатов экспериментов [1] по неупругому электрон-нуклонному рассеянию, выполненных на Стэнфордском линейном ускорителе (СЛАК) в сотрудничестве с Массачусетским технологическим институтом (МТИ). Мы увидим, что эта симметрия оказывается точной только в том случае, если мы имеем дело с безмассовыми частицами; таким образом, она явно нарушается сильными взаимодействиями. Если бы эта симметрия была точной, то можно было бы изменять масштаб явления, «растягивая» или «сокращая» пространственно-временны́е координаты, в которых оно описывается, без изменения его физического смысла. Если мы изучим, как работает принцип приближенной инвариантности, нам легче будет понять сложное поведение физических систем при очень высоких энергиях, таких, которые достигнуты на СЛАК и в Национальной лаборатории ускорителей (НАЛ). При этих энергиях мы можем надеяться, что рассматриваемая симметрия становится точной, так как в данной кинематической области можно пренебрегать массами. Эта точка зрения была выдвинута довольно давно Каструпом и Уэссом [2].

ПРИРОДА МАСШТАБНОЙ ИНВАРИАНТНОСТИ

Масштабная инвариантность в ее наиболее интуитивной форме связана с анализом размерностей. Рассмотрим любую динамическую величину, например сдвиг фазы при рассеянии частицы, вычисляемый в квантовой механике. Он зависит от соответствующих кинематических переменных, таких, как энергия и импульс, а также от фундаментальных размерных параметров, имеющихся в теории. К ним относятся постоянная Планка h (с размерностью углового момента) и скорость света c (с размерностью скорости); для удобства мы можем выбрать наши единицы так, что они окажутся равными единице. Остальные размерные параметры должны, конечно, также входить в теорию; это, например, массы фундаментальных частиц (если они есть), длины, описывающие различные фундаментальные взаимодействия (если они имеются), и т. п.

Однако предположим теперь, что в действительности никаких таких дополнительных параметров не существует: это является условием масштабной инвариантности. Мы можем тогда найти, как рассматриваемая величина зависит от кинематических переменных. Так, если мы рассматриваем сдвиг фазы, который, вообще говоря, зависит от относительной энергии рассеивающихся частиц, то точная масштабная инвариантность требует, чтобы никакой зависимости от энергии не было. Таким образом, масштабная инвариантность определяет сдвиг фазы с точностью до константы. Причина этой инвариантности состоит в том, что сдвиг фазы является безразмерной величиной и нельзя даже написать зависимость от энергии, когда нет соответствующих размерных параметров. Использование *приближенной* масштабной инвариантности при высоких энергиях (когда зависимостью от размерных параметров можно пренебречь) предполагает тогда, что сдвиг фазы стремится к постоянной в этой области энергии.

Обнаружение этого простого свойства, а именно того, что характеристика системы не зависит от размерных параметров, является задачей теории масштабной инвариантности. Легко найти класс динамических моделей, который обладает этим свойством. Рассмотрим одночастичный гамильтониан $\mathscr{H}$, пропорциональный $p^n + ar^{-n}$, где a — безразмерная константа, а $p(t)$, $r(t)$ — зависящие от времени импульс и координата частицы соответственно. (Общая мультипликативная константа не введена, поскольку это никак не влияет на наше дальнейшее обсуждение.) Известно, что инвариантность системы (точнее, ее гамильтониана) при временных трансляциях

$$t \to t + \delta,\ r(t) \to r(t + \delta),\ p(t) \to p(t + \delta)$$

ведет к сохранению полной энергии $E = \mathscr{H}$. Аналогично масштабное преобразование

$$t \to \rho t,\ r(t) \to \rho^{-1/n}\ r(\rho t),\ p(t) \to \rho^{1/n}\ p(\rho t)$$

(определяющее преобразование растяжения в этой модели) оставляет поведение системы, описываемой этим гамильтонианом, неизменным и вводит новую сохраняющуюся величину D. Этот интеграл движения связан с вириалом pr, и его зависимость в данной модели имеет вид

$$D = -(1/n)\ pr + Et.$$

Явное вычисление сдвига фазы рассеяния подтверждает этот общий вывод: сдвиг фазы действительно не зависит от энергии, что можно найти с помощью квазиклассического ВКБ (Вентцеля, Крамерса и Бриллюэна)-приближения, в котором сдвиг фазы вычисляется по формуле

$$\delta(E) = \int [(E - ar^{-n})^{1/n} - E^{1/n}]\ dr = \int [(1 - ax^{-n})^{1/n} - 1]\ dx.$$

Во второй строке «немая» переменная интегрирования r заменена на $E^{-1/n}x$, и в этой форме записи видно, что зависимость от энергии действительно исчезает.

В нерелятивистской физике, где кинетическая часть гамильтониана пропорциональна p^2 (т. е. $n = 2$ в рассмотренном выше примере; рис. 1 *)), наше обсуждение масштабно-инвариантных систем показывает, что только

*) Добавлен к двум (следующим далее) рисункам автора редакцией журнала «Physics Today». (*Прим. перев.*)

потенциал r^{-2} обладает этой симметрией. Так как такой потенциал не представляет явного физического интереса, рассмотрение масштабных преобразований в нерелятивистской физике частиц не очень плодотворно. Однако в релятивистской физике кинетическая часть гамильтониана пропорциональна $(p^2 + m^2)^{1/2}$. Когда m в точности исчезает или при высоких энергиях, когда m^2 можно пренебречь по сравнению с p^2, кинетическая часть ведет себя, как p, и масштабно-инвариантен потенциал $1/r$. Таким образом, мы делаем вывод, что для безмассовых частиц или для частиц, энергии которых значительно превышают массы, имеется масштабная инвариантность релятивистской системы в том случае, когда силы спадают как обратная величина радиуса на малых расстояниях (т. е. при больших импульсах). Зависимость электромагнитных и сильных (юкавских) взаимодействий как раз такого типа, так что приближенная масштабная инвариантность может быть полезным понятием в релятивистской физике частиц, если обсуждаются только эти взаимодействия. (Поведение слабых взаимодействий на малых расстояниях пока еще не известно.)

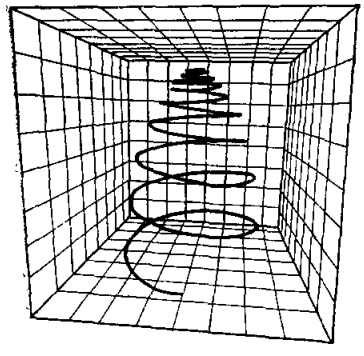

Рис. 1. Траектория нерелятивистской частицы, движущейся в потенциальном поле $V(\mathbf{r}) = -1/2\mathbf{r}^2$. Время откладывается по вертикальной оси. Гамильтониан, с помощью которого описывается движение частицы с единичной массой, имеет вид $\mathscr{H} = (\mathbf{p}^2/2) - (1/2\mathbf{r}^2)$. Этот случай соответствует $n=2$ в общей формуле, приведенной в тексте. Уравнения движения этой частицы инвариантны при преобразовании $t \to \rho t$, $\mathbf{r} \to \rho^{1/2}\mathbf{r}$, $\mathbf{p} \to \rho^{-1/2}\mathbf{p}$, что ведет к новому закону сохранения $dD/dt = 0$, где $D = (\mathbf{pr}/2) + \mathscr{H}t$.

БОЛЕЕ РЕАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ

Рассмотренный выше одночастичный гамильтониан, конечно, не может служить серьезной моделью в релятивистской теории частиц. Однако обсужденные общие черты масштабной инвариантности не столь уж отличны для более подходящих примеров, таких, как лагранжевская теория поля. Если систему описывать с помощью поля $\Phi(x)$, то масштабным преобразованиям подвергается координатный 4-вектор $\mathbf{x}^\mu$, переходящий в $\rho\mathbf{x}^\mu$, а поле $\Phi(x)$ переходит в $\rho^d\Phi(\rho x)$. Это масштабное преобразование связано с симметрией в том случае, если плотность лагранжиана не содержит никаких размерных параметров и если мы выбираем масштабную размерность d поля $\Phi(x)$ надлежащим образом.

Для того чтобы масштабное преобразование было эффективным в простых моделях, надо, чтобы d определялось естественной размерностью поля, выраженной в единицах массы. Эта «естественная размерность» есть просто энергетическая нормировка поля, определяемая с помощью обычного анализа размерностей; для фермионного поля $d = 3/2$, а для бозонного поля $d = 1$. Ниже мы рассмотрим возможные модификации этого правила.

Чтобы узнать, связано ли данное преобразование с симметрией, используется вариант теоремы Нётер и находится масштабный «ток» [3]

$$D^\mu(x) = (x)_\nu \Theta^{\mu\nu}(x);$$

здесь $\Theta^{\mu\nu}(x)$ — симметричный тензор энергии-импульса *). Когда существует масштабная симметрия, $D^\mu(x)$ является сохраняющимся «током»,

) В рамках общей теории относительности подобный тензор был получен Черниковым и Тагировым [12]. (*Прим. перев.*)

аналогичным сохраняющемуся току $J^\mu(x)$, связанному с сохранением заряда. Ток $D^\mu(x)$ также аналогичен сохраняющимся величинам $\Theta^{\mu\nu}(x)$ и $x^\mu\Theta^{\nu\alpha}(x) - x^\nu\Theta^{\mu\alpha}(x)$, связанным с другими пространственно-временными симметриями, так называемыми «пуанкаре-симметриями»— трансляциями, вращениями и лоренцевыми преобразованиями. Не зависящую от времени константу движения D получают из тока обычным способом:

$$D = \int D^0(x)\, d^3x.$$

Величина D вместе с 4-импульсом

$$p^\mu = \int \Theta^{0\mu}(x)\, d^3\mathbf{x}$$

и четырехмерным угловым моментом

$$L^{\mu\nu} = \int [x^\mu\Theta^{\nu 0}(x) - x^\nu\Theta^{\mu 0}(x)]\, d^3\mathbf{x}$$

удовлетворяет алгебре перестановочных соотношений:

1) $$i\,[p^\alpha,\ p^\beta] = 0,$$
2) $$i\,[L^{\alpha\beta},\ p^\mu] = g^{\alpha\mu}p^\beta - g^{\beta\mu}p^\alpha,$$
3) $$i\,[L^{\alpha\beta},\ L^{\mu\nu}] = g^{\alpha\mu}L^{\beta\nu} - g^{\beta\mu}L^{\alpha\nu} + g^{\alpha\nu}L^{\mu\beta} - g^{\beta\nu}L^{\mu\alpha},$$
4) $$i\,[D,\ D] = 0,$$
5) $$i\,[D,\ L^{\mu\nu}] = 0,$$
6) $$i\,[D,\ p^\mu] = p^\mu.$$

Первые три коммутатора относятся к обычной группе Пуанкаре, в то время как остальные три показывают, как объединить растяжение с преобразованиями Пуанкаре для образования более широкой группы, если имеется масштабная инвариантность; она действительно имеется, если D — сохраняющаяся величина.

МАСШТАБНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НЕ МОГУТ БЫТЬ ТОЧНЫМИ

Мы видим теперь, что масштабная инвариантность, в противоположность инвариантности относительно группы Пуанкаре, не связана с точной симметрией мира адронов (теории сильных взаимодействий). В самом деле, если имеется коммутационное соотношение 6), то, следуя обычным правилам алгебры коммутаторов, получаем

$$i\,[D,\ M^2] = 2M^2,$$

где

$$M^2 \equiv p^\mu p_\mu$$

и собственные значения массового оператора M^2 (массы) либо равны нулю, либо дают непрерывный спектр и неприемлемы в качестве массового спектра адронов *). Следовательно, этот последний коммутатор

*) В самом деле, определим массовый оператор следующим образом: $M^2 \equiv \sum p^\mu p_\mu \equiv (p^0)^2 - (\mathbf{p})^2$, и привлечем коммутатор 6) $i\,[D,\ p^\mu] = p^\mu$, т. е. $i\,[D,\ p^0] = p^0$, $i\,[D,\ p^1] = p^1$ и так далее, вплоть до $\mu = 3$. Видим тогда, что $i\,[D,\ M^2] = iM\,[D,\ M] + i\,[D,\ M]\,M = M^2 + M^2 = 2M^2$. Рассмотрим теперь унитарный оператор $e^{i\alpha D}$, где α — произвольная постоянная. Если его понимать как ряд по степеням D, то с помощью полученной выше формулы легко получить соотношение $e^{i\alpha D}M^2e^{-i\alpha D} = e^{2\alpha}M^2$. Далее, пусть $|\,a\,\rangle$ — собственное состояние с собственным значением m^2. Тогда вектор состояния $e^{-i\alpha D}|\,a\,\rangle$ также принадлежит к данному набору состояний и должен быть собственным состоянием оператора M^2 с собственным значением $e^{2\alpha}m^2$ в силу найденного выше закона коммутации. Учитывая теперь, что α — *произвольная* постоянная и для любого ее значения должна найтись в массовом спектре (наперед заданная) масса, равная $e^{2\alpha}m^2$, делаем вывод, что при наличии масштабной инвариантности либо непрерывен массовый спектр, либо m^2 тождественно равно нулю.

следует модифицировать так, чтобы симметрия стала приближенной, переходящей в точную только тогда, когда массовый спектр несуществен, например при высоких энергиях (если это вообще где-нибудь справедливо).

Итак, мы ожидаем, что масштабные токи в природе не сохраняются, т. е. дивергенция от $D^\mu(x)$ не исчезает:

$$\partial_\mu D^\mu(x) = \Theta^\mu_\mu(x) \neq 0.$$

Тогда D уже зависит от времени, и возникает возможность модифицировать коммутатор 6), и оказывается возможным изменить коммутационное соотношение 6) так, чтобы избежать трудностей с массовым спектром. Члены в плотности лагранжиана делятся в этом случае на два типа. Одни являются масштабно-инвариантными и поэтому не дают вклада в $\Theta^\mu_\mu(x)$. Это, например, бозонная или фермионная кинетическая энергия $\partial_\mu\Phi(x)\,\partial^\mu\Phi(x)$ и $i\overline{\Psi}(x)\,\gamma^\mu\partial_\mu\Psi(x)$, фермион-бозонное взаимодействие типа Юкавы (например, $\overline{\Psi}(x)\,\Psi(x)\,\Phi(x)$) и различные самовзаимодействия (такие, как $\Phi^4(x)$, $[\overline{\Psi}(x), \Psi(x)]^{4/3}$ и т. д.). Другие члены не являются масштабно-инвариантными и дают вклад в $\Theta^\mu_\mu(x)$; это — бозонные или фермионные массовые члены, $m^2\Phi^2(x)$ или $m\overline{\Psi}(x)\,\Psi(x)$ и различные взаимодействия, характеризующиеся константами связи с размерностями степеней длины: $\lambda\Phi^3(x)$, $g\overline{\Psi}(x)\,\gamma^\mu\Psi(x)\,\overline{\Psi}(x)\,\gamma_\mu\,\Psi(x)$ и т. д.

В приложениях предполагается, что константы взаимодействия обязательно безразмерные и что $\Theta^\mu_\mu(x)$ включает в себя только массовые члены. Надежда, что масштабная симметрия окажется полезной приближенной симметрией, выражается в том, что $\Theta^\mu_\mu(x)$ (т. е. массовые члены) считают «малыми» операторами, матричные элементы которых исчезают при высоких энергиях. Когда следствия этих идей заключены в абстрактные рамки квантовой теории поля, мы получаем, не имея точных решений, результаты, подобные найденному выше для сдвига фазы. Можно обобщить их, утверждая, что при высоких энергиях безразмерные величины являются функциями безразмерных отношений кинематических переменных, в которых описывается данный процесс.

ПРИМЕНЕНИЕ К РАБОТАМ МТИ — СЛАК

Изложенные выше идеи нашли широкое экспериментальное подтверждение прежде всего в работах МТИ — СЛАК по неупругому рассеянию электронов на нуклонах [1]. Этот процесс схематически изображен на рис. 2, где тонкие линии представляют входящий и выходящий электроны, жирная линия — нуклонную мишень с 4-импульсом p, а совокупность выходящих из вершины линий — конечное адронное состояние. Поскольку электроны способны к непосредственным сильным взаимодействиям с адронами, предполагается, что процесс на рис. 2, *а* идет за счет обмена виртуальным фотоном, переносящим 4-импульс q; на рис. 2, *б* фотон обозначен волнистой линией. Предполагается, что взаимодействие фотона с электронами известно в наинизшем порядке теории возмущений в квантовой электродинамике, а его взаимодействие с адронной системой параметризовано с помощью (неизвестного) матричного элемента $\langle p \mid J^\mu(0) \mid n\rangle$, где $J^\mu(x)$ — электромагнитный ток. Следовательно, мы можем эффективно полностью пренебрегать электронами и рассматривать этот процесс как рассеяние на нуклоне нефизического фотона с «массой» q^2. Полное сечение, т. е. сумма по всем состояниям n, может быть выражено через нуклонный матричный элемент от токового

коммутатора для рассеяния вперед:

$$C^{\mu\nu}(pq) = \int e^{iqx} \langle p \mid [J^{\mu}(x),\ J^{\nu}(0)] \mid p\rangle\, d^4x.$$

Это следует из оптической теоремы, которая связывает полное сечение с мнимой частью амплитуды упругого рассеяния вперед; эта амплитуда — матричный элемент по состояниям мишени в начале и в конце процесса.

Поскольку фотон, возникающий при рассеянии электрона, является нефизическим, он обладает продольной поляризацией наряду с поперечной. Таким образом, даже в том случае, если нуклон в начальном состоянии не поляризован, мы можем говорить о двух независимых сечениях — σ_L, соответствующем продольно поляризованным фотонам, и σ_T, соответствующем поперечно поляризованным фотонам. Полное сечение σ

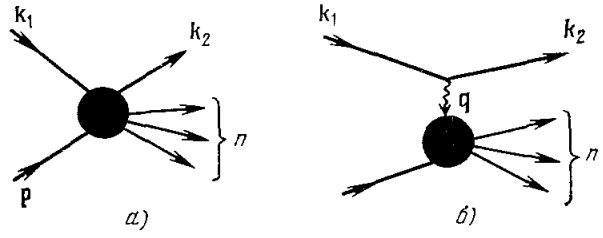

Рис. 2. Неупругое рассеяние электрона на нуклоне.
Экспериментальные данные МТИ — СЛАК по этому процессу, полученные для глубоко-неупругой области, подтвердили идею о масштабной инвариантности.

равняется $\sigma_L + \sigma_T$. Сечения являются функциями двух инвариантных величин: «массы» фотона q^2, которая отрицательна (пространственноподобна), и скалярного произведения $\nu = pq$, которое определяется энергетическими потерями рассеивающегося электрона в системе покоя мишени. Бьёркен [4] предположил, что в области, где значения q^2 и ν становятся большими, но так, что их отношение $\omega = -q^2/2\nu$ остается при этом фиксированным, величины $\nu\sigma_L$ и $\nu\sigma_T$ становятся функциями *только* ω. Это — как раз та закономерность, которая впоследствии была найдена экспериментаторами группы МТИ—СЛАК в «глубоко-неупругой» области (так называется кинематическая область, к обсуждению которой мы приступим); при этом $\nu\sigma_L$ и $\nu\sigma_T$ описываются функциями от ω, обычно обозначаемыми через $F_1(\omega)$ и $F_2(\omega)$. Они являются двумя «структурными функциями», описывающими процесс глубоко-неупругого рассеяния электронов на нуклонах.

Эту замечательную закономерность, найденную при высоких энергиях, легко объяснить введением приближенной инвариантности относительно масштабных преобразований, и именно эксперимент по глубоко-неупругому рассеянию определяет большую часть интереса, проявляемого к данной теоретической проблеме. Заметим, что произведения $\nu\sigma_L$ и $\nu\sigma_T$ — безразмерные величины: размерность сечения — квадрат длины, или в единицах, которые мы используем,— обратный квадрат массы, а размерность ν — как раз наоборот — квадрат массы. В масштабно-инвариантном мире эти безразмерные объекты ($\nu\sigma_L$ и $\nu\sigma_T$) могут зависеть от соответствующих кинематических переменных q^2 и ν только через их безразмерное отношение $\omega = -q^2/2\nu$. Следовательно, мы можем понять закономерности данных о глубоко-неупругом рассеянии, предполагая, что в области высоких энергий масштабная инвариантность становится точной. При этом, однако, непонятно, почему масштабная инвариантность проявляется при столь низких энергиях — несколько гигаэлектрон-вольт?

АНАЛОГИЧНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Другой процесс, поддающийся подобному анализу,— это аннигиляция электрон-позитронных пар в адроны. Эта реакция изображена на рис. 3 с теми же самыми обозначениями, что и на рис. 2. Полное сечение σ (которое согласно рис. 3, *б* зависит от одной кинематической переменной q^2, «массы» конечного адронного состояния) определяется матричным элементом коммутатора токов между состояниями, в которых отсутствуют частицы (вакуумными состояниями):

$$C^{\mu\nu}(q) = \int e^{iqx} \langle 0 | [J^{\mu}_{\mu}(x),\ J^{\nu}(0)] | 0 \rangle\, d^4x.$$

Это выражение совершенно аналогично формуле для полного сечения рассеяния электрона на нуклоне, за исключением того, что нуклонное

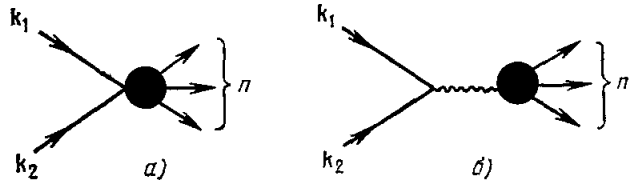

Рис. 3. Аннигиляция электрон-позитронной пары в адроны является другим примером процесса, который может быть проанализирован точно таким же образом, как и рассеяние электрона на нуклоне.

состояние $|p\rangle$ заменяется вакуумным состоянием $|0\rangle$. Здесь безразмерное отношение можно образовать только так: $q^2\sigma(q^2)$. Следовательно, для больших значений q^2, когда масштабная инвариантность становится точной, $q^2\sigma(q^2)$ стремится к постоянной, а потому $\sigma(q^2) \sim 1/q^2$.

Эта закономерность не противоречит данным о реакциях с пионами на встречных пучках во Фраскати; однако однозначного подтверждения указанного предсказания следует ждать из дальнейших экспериментов (см. [5*]). Масштабный анализ был также применен к рождению пар мюонов, но экспериментальные результаты пока еще не вполне достоверны [6].

В дополнение к описанным выше применениям приближенной масштабной инвариантности в области *высоких энергий*, имеются попытки использовать те же самые представления и в области *низких энергий*. Начато это было Маком и позднее Гелл-Манном [7] и его сотрудниками, которые заметили, что имеется определенная аналогия между приближенной масштабной инвариантностью и приближенной киральной инвариантностью: действительно обе симметрии нарушаются не равными нулю массами. Теория приближенной киральной симметрии ведет к пониманию низкоэнергетической динамики *псевдоскалярных* мезонов, особенно пионов. Дело в том, что аксиальный векторный ток, который сохранялся бы, если бы симметрия была точной, имеет не равную нулю дивергенцию, которую можно рассматривать как поле, описывающее частицу с квантовыми числами этой дивергенции — нулевым спином и отрицательной четностью, соответствующими физическому пиону. Аналогично, можно надеяться, что неисчезающая дивергенция «масштабного тока», которая соответствует нулевому спину и положительной четности, может точно так же служить в качестве поля скалярных мезонов и что низкоэнергетическая динамика этих мезонов может быть понята в таком подходе.

Теперь легко видеть, что, используя модель коммутаторов на световом конусе, можно вычислить структурные функции для глубоко-неупругого рассеяния. Вычислять коммутаторы мы умеем в случае свободных полей, а потому соблазнительно постулировать, что тот же самый рецепт справедлив и в теории взаимодействующих полей; аналогичным образом, равновременной коммутатор

$$[J^{\mu}(x),\ J^{\nu}(0)] \text{ при } x^0 = 0$$

нечувствителен к природе взаимодействия. Недавно несколько групп теоретиков с успехом провели довольно изящные исследования структуры токовых коммутаторов на световом конусе и научились вычислять коммутаторы на световом конусе при наличии *взаимодействия*. Результат вычислений оказался действительно не зависящим от взаимодействия [11*]).

Коммутатор токов на световом конусе составлен из операторов, которые обычно не используются в физике. Это так называемые «билокальные» токи. В противоположность обычному току $J^{\mu}(x)$, билокальный ток зависит от *двух* различных точек $J^{\mu}(x \mid y)$, где $(x-y)^2 = 0$; в пределе $x \to y$ он стремится к $J^{\mu}(x)$. Например, в модели, где ток построен из фермионных полей:

$$J^{\mu}(x) = \overline{\Psi}(x)\,\gamma^{\mu}\Psi(x),$$

билокальный ток равняется

$$J^{\mu}(x \mid y) = \overline{\Psi}(x)\,\gamma^{\mu}\Psi(y).$$

Матричные элементы таких билокальных токов определяют глубоко-*неупругие* структурные функции

$$p^{\mu}\int e^{i\omega xp}\,F(\omega)\,d\omega \sim \langle p \mid J^{\mu}(x \mid 0)\,p\rangle,$$

подобно тому как матричные элементы обычных токов определяют *упругие* форм-факторы. Это показывает, что билокальные токи являются операторами, аналогичными с физической точки зрения локальным токам.

В настоящее время многие теоретики изучают самым тщательным образом коммутаторы на световом конусе, билокальные токи и т. д. Их интригует то обстоятельство, что билокальные токи сохраняются в теории свободных полей. Следовательно, эти токи характеризуются определенной симметрией, свойства которой еще не полностью поняты. Мы можем спекулятивно предполагать, что в теории взаимодействующих полей, где билокальные токи уже не сохраняются, остаются следы симметрии свободных полей и что *приближенная* симметрия все-таки существует. Я не могут предсказать направления будущих исследований, но все же можно утверждать, что некоторое время понятия масштабной инвариантности и светового конуса будут доминировать при обсуждении процессов при высоких энергиях, особенно глубоко-неупругих процессов.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА**)

1. Г. Кендал, В. Пановский, УФН **106**, 315 (1972).
2. H. A. Kastrup, Ann. d. Phys. **7**, 388 (1962); J. Wess, Nuovo Cimento **18**, 1086 (1960).
3. C. G. Callan, Jr., S. Coleman, R. Jackiw, Ann. Phys. (N.Y.) **59**, 42 (1970).
4. J. D. Bjorken, Phys. Rev. **179**, 1547 (1969).

*) Заметим, что строгих результатов при этом получено не было. (*Прим. перев.*)
**) Звездочкой помечена литература, добавленная при переводе. (*Прим. ред.*)

5*. B. Bartali, B. Coluzzi, F. Felicetti, G. Goggi, G. Marini, F. Massa, D. Scannicchio, V. Silvestrini, F. Vanoli, Nuovo Cimento **A70**, 603, 615 (1970); см. также: Phys. Rev. **D6**, 2374 (1972).
6. S. D. Drell, D. J. Levy, T. M. Yan, Phys. Rev. **D1**, 2035 (1970).
7. G. Mack, Nucl. Phys. **B5**, 499 (1968); M. Gell-Mann, Cal. Inst. Tech. Rept No. CALT-68-244 (1968).
8. S. L. Adler, сборник «Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory», v. 1, ed by S. Dever et al., Cambridge, Mass., MIT Press, 1970; R. Jackiw, сборник «Lectures on Current Algebra and Its Applications», Princeton, N.J., Princeton Univ. Press, 1972.
9. *а*) V. Wilson, Phys. Rev. **D2**, 1473, 1478 (1970); *б*) C. G. Callan, Jr., ibid., p. 1951; K. Symanzik, Comm. Math. Phys. **18**, 227 (1970); S. Coleman, R. Jackiw, Ann. Phys. (N.Y.) **67**, 552 (1971).
10*. S. D. Drell, Proc. of the Amsterdam Intern. Conference on Elementary Particles (June 30 — Juli 6, 1971), ed. by A. G. Tenner and M. J. G. Veltman, Amsterdam, North-Holland, 1972 (см. также: УФН **106**, 331 (1972)).
11. J. M. Cornwall, R. Jackiw, Phys. Rev. **D4**, 367 (1971); H. Fritsch, M. Gell-Mann, сборник «Coral Gables Conference on Fundamental Interactions at High Energy», v. 2, ed. by M. Dal Cin et al., N.Y., Gordon and Breach, 1972; D. J. Gross, S. Treiman, Phys. Rev. **D4**, 1059 (1971).
12*. N. A. Chernikov, E. L. Tagirov, Ann. Inst. H. Poincaré **A9**, 109 (1968).