

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

533.95

ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНОЙ И НЕЛИНЕЙНОЙ ТРАНСФОРМАЦИИ ВОЛН В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

Н. С. Ерохин, С. С. Моисеев

СОДЕРЖАНИЕ

I. Введение	225
II. Линейная трансформация волн в равновесных и неравновесных неоднородных средах	227
1. Классификация (227). 2. Трансформация I типа (228) 3. II и III типы трансформации (232). 4. Некоторые особенности трансформации волн при взаимодействии пучка с плазмой (237). а) Анизотропия излучения поперечных волн (237). б) Замечания о проблеме нагрева и срыва неустойчивостей в плазме (239).	
III. Некоторые нелинейные и кинетические нелокальные эффекты, возникающие при распространении волн в неоднородной плазме	241
5. Линейное нелокальное отражение волн в неоднородной плазме (241). 6. Линейная регенерация необыкновенной волны в неоднородном магнитном поле (245). 7. Нелинейное «просветление» неоднородной плазмы (247). а) Собственное продольное эхо поперечных волн в неоднородной плазме (247). б) Эхо на суммарной частоте (248). 8. Генерация второй гармоники. при падении электромагнитной волны на неоднородную плазму (249). 9. Нелинейная генерация электромагнитного излучения при распространении плазменной волны в неоднородной плазме (253). 10. Особенности нелинейных взаимодействий волн в неоднородной плазме (254). а) Нелинейное смещение волн (254). б) Распад волны с большой амплитудой (255).	
Цитированная литература	256

I. ВВЕДЕНИЕ

В последнее десятилетие электродинамика неоднородных сред достигла существенного прогресса. Прогресс этот обусловлен последовательным применением асимптотических методов к решению дифференциальных уравнений второго и более высокого порядка, а также к интегро-дифференциальным уравнениям. В результативном плане электродинамика неоднородных сред привела к двум качественно новым следствиям: первое относится к собственным частотам колебаний таких сред, а второе — к собственным решениям. Что касается первого следствия, то здесь прежде всего следует отметить появление новых ветвей колебаний, отсутствующих в однородных средах, и, что самое важное, среди них оказались колебания с раскачкой, т. е. возникли неустойчивости. Возникла важная область электродинамики — проблема устойчивости неоднородных сред и возникновения турбулентности. Достижения в этой области уже неоднократно освещались в обзорных статьях (см., например, ¹⁻⁴).

Второе качественно новое следствие электродинамики неоднородных сред, исследованию влияния которого и посвящен настоящий обзор, —

это зацепление собственных решений, относящихся к различным ветвям колебаний. Зацепление собственных решений приводит к явлениям линейной трансформации волн в неоднородных средах⁵⁻¹⁰, а также влияет, в свою очередь, на дисперсионное уравнение для частот собственных колебаний¹¹⁻¹⁴. Кроме того, при этом существенно меняются нелинейные и кинетические явления (см., например,^{15, 16}). Так, например, своеобразное взаимодействие модулированных потоков частиц с волнами в плазме приводит к аномальному повышению ее прозрачности¹⁶. Указанные эффекты важны не только с научной, но и с практической точки зрения и интенсивно обсуждаются в последнее время в литературе.

Назовем некоторые применения упоминавшейся выше регулярной линейной трансформации волн в неоднородной плазме:

1) Преобразование электромагнитных волн в плазменные (ионные или электронные) можно применить для нагрева плазмы до термоядерных температур, причем нагрев возможен в устойчивой ламинарной плазме, если поле волны не превышает некоторого критического значения^{8, 17}. Такой нагрев может оказаться особенно эффективным в СВЧ диапазоне для крупномасштабных термоядерных реакторов^{8, 18} и может быть весьма полезен при учете поверхностных явлений в проблеме получения высоких температур с помощью фокусировки лазерного излучения на твердые мишени¹⁹.

2) Трансформация волн может быть использована для улучшения связи, например — «просветление» с помощью трансформации барьера непрозрачности для излученных источником волн.

3) Трансформация плазменных волн в электромагнитные может стать основой для создания плазменных источников электромагнитного излучения. По существу, речь идет о перенесении в лабораторные условия эффекта, который изучался в работах^{7, 20} в связи с радиоизлучением Солнца и планет, с тем, однако, отличием, что теперь мы в состоянии целенаправленно управлять параметрами плазмы, создавая оптимальные условия для излучения поперечных волн^{17, 21}. Уже первые эксперименты^{22, 23} показывают плодотворность такого подхода.

4) Трансформацию неустойчивых мод в устойчивые можно применить для стабилизации неустойчивостей^{17, 24}. Предварительные эксперименты находятся в согласии с теорией²³.

5) Трансформацию волн в плазме, параметры которой меняются со временем, можно использовать для преобразования волн различных частотных диапазонов.

Далее следует отметить, что теория колебаний неоднородных сред (плазма, ферромагнетик, механические системы), развиваемая для изучения волновых явлений, может найти интересные применения в самых разнообразных областях физики. Так, теория «пересечения» решений, которая используется при исследовании трансформации волн, начала развиваться в связи с изучением неупругих атомных столкновений²⁵, где с успехом применяется и поныне^{26, 27}. Интенсивное развитие теории и эксперимента привело к появлению в последнее время обзорных работ по теории колебаний в неоднородных плазме и жидкости^{9, 13}. Рассмотрим кратко указанные работы. В обзоре¹³ исследовалась задача на собственные значения для возмущений неоднородного течения плазмы или жидкости при наличии точек резонанса, в которых фазовая скорость возмущения совпадает со скоростью стационарного течения. Эффективно используя аналогию между указанными выше резонансами и хорошо известным в физике плазмы резонансным поглощением энергии волны отдельными частицами (затухание Ландау), автор¹³ проанализировал с единой точки зрения ряд классических и новых результатов теории неустойчивости

движущихся сплошных сред. Работа ⁹ посвящена фундаментальному исследованию теории и эксперимента линейной трансформации волн в неоднородной плазме в области гибридных резонансов, где электрическое поле волны (в холодной плазме) имеет сингулярность. В частности, в этом обзоре содержатся наиболее полные экспериментальные результаты по нагреву плазмы с помощью линейной трансформации волн, которые выполнены в ЛФТИ при участии авторов.

Однако, несмотря на наличие указанных выше обзорных статей, а также таких хорошо известных монографий, как ⁵ и ²⁰, в настоящее время ощущается заметный недостаток в дальнейшей обзорной литературе по теории распространения волн в неоднородных средах. Например, в работах ^{9, 13} отсутствуют результаты по нелинейной и кинетической теории неоднородной среды, а монографии ^{5, 20}, естественно, не охватывают результатов последних лет в этом направлении. Кроме того, в обзорной литературе отсутствует, например, изложение вопросов линейной трансформации волн в случае неравновесных сред, в особенности при учете взаимного влияния неравновесности и трансформации, в результате которого можно получить коэффициент трансформации больше 100% путем использования энергии неравновесной среды. Наконец, изученная в обзоре ⁹ трансформация волн в области гибридных резонансов неоднородной плазмы — это один из случаев трансформации. В настоящее время имеется возможность на основе дифференциального уравнения четвертого порядка с единой точки зрения дать анализ различных случаев трансформации.

Настоящий обзор является попыткой частично восполнить отмеченные выше пробелы в обзорной литературе и монографиях по теории распространения волн в неоднородных средах, а также обсудить некоторые последние эксперименты по затронутым здесь вопросам. В обзоре исследуется случай регулярных колебаний. Исключение представляет один пример линейных осцилляторов, рассмотренный в конце п. 2

В обзоре исследуется случай слабонеоднородной среды, для которой удается развить асимптотические методы изучения поведения волн (по поводу случая резкой границы в пассивных средах см., например, ²⁸⁻³⁰, а в активных средах — ³¹).

II. ЛИНЕЙНАЯ ТРАНСФОРМАЦИЯ ВОЛН В РАВНОВЕСНЫХ И НЕРАВНОВЕСНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

1. К л а с с и ф и к а ц и я. Рассмотрим в линейном приближении различные типы «пересечения» волновых решений для неоднородной среды. Поскольку весьма обычна ситуация, когда свойства среды изменяются мало на расстояниях порядка длины волны, можно применить метод ВКБ (приближение геометрической оптики). Если среда неоднородна вдоль оси x , возмущения выберем в виде $\varphi(\mathbf{r}, t) = \varphi(x) \exp(i\omega t - ik_y y - ik_z z)$. Тогда для $\varphi(x)$ в общем случае получим уравнение

$$\sum_{m=0}^n \beta^m u_{m+1}(x) (d^{2m} \varphi / dx^{2m}) = 0, \quad (1.1)$$

где β — малый параметр, характеризующий слабую неоднородность среды; для простоты предполагается, что функции $u_m(x)$ не имеют сингулярностей в интересующей нас области и хорошо аппроксимируются полиномами ($u_m \sim 1$, исключая окрестности точек, в которых они обращаются в нуль). В уравнении (1.1) опущены нечетные производные, так как в приложениях теории они часто содержат производные от функций u_m , которые дают лишнюю степень малого параметра β и поэтому не влияют

на результаты нулевого приближения. Именно в этом случае особенно удобно классифицировать различные типы «пересечения» решений. Решение уравнения (1.1) ищем в приближении ВКБ в виде

$$\varphi(x) \sim \Pi(x) \exp \left(\pm i\beta^{-1/2} \int_{x_0}^x k(x') dx' \right).$$

где $\Pi(x)$ — предэкспонента. Однако приближение ВКБ нарушается вблизи точек, в которых либо волновой вектор $k(x)$ обращается в нуль (точка поворота), либо волновые векторы, соответствующие различным типам колебаний, совпадают, т. е. $k_s = k_p$ (точка «пересечения» решений). Рассмотрим различные случаи «пересечения» решений на наглядном примере уравнения четвертого порядка. При этом удобно представить выражение для $k_{1,2}(x)$ в виде

$$k_{1,2} = (1/2)(k_1 + k_2) \pm (1/2)(k_1 - k_2),$$

а также ввести

$$\Delta(x) = u_2^2(x) - 4u_1(x)u_3(x). \quad (1.2)$$

При $\Delta = 0$ решения «пересекаются». Можно указать на три наиболее характерных, качественно различных случая трансформации³².

а) *Трансформация I типа.* В этом случае $u_m(x) \sim 1$ ($m = 1, 2, 3$), а в комплексной плоскости x находятся комплексно-сопряженные точки «пересечения» решений. Такой тип «пересечения» решений возможен, например, если $\Delta = x^2 + d^2$.

б) *Трансформация II типа.* На вещественной оси x имеется точка x_0 , в которой $u_2(x_0) = 0$ или $u_2(x_0) \approx 0$, а $u_1(x_0) \sim 1$. Из (1.2) следует, что при этом две точки «пересечения» решений «окаймляют» точку x_0 . Предполагая здесь и далее $|u_3(x)| \ll 1$ (наиболее характерный случай), видим, что при этом точки «пересечения» решений находятся в непосредственной близости к x_0 . Важным примером указанного типа является трансформация электромагнитных волн в плазменные, которая исследовалась теоретически и экспериментально в обзоре⁹.

в) *Трансформация III типа.* Функция $u_m(x) \sim 1$ ($m = 1, 2, 3$), а Δ может обращаться в нуль всего лишь в одной точке x_0 (точнее, из обращения Δ в нуль в точке x_0 не следует, что он равен нулю в какой-то другой точке). В области «пересечения» $\Delta = x - x_0$. Следует обратить внимание на то, что в случае в), в отличие от случая б), $u_2 \neq 0$ ($u_2 \sim 1$).

Рассмотрим подробнее указанные выше типы трансформации.

2. *Трансформация I типа.* «Пересечение» указанного типа в случае, когда многозначно только $k_1 - k_2$, впервые исследовалось в работе²⁵ при изучении неупругих атомных столкновений. В работе³³ метод работы²⁵ был применен для решения задачи о взаимной трансформации обыкновенной и необыкновенной волн в магнитоактивной плазме. Задача на собственные значения при таком типе «пересечения» рассматривалась в работе³⁴. Случай, когда одновременно многозначны обе функции $k_1 \pm k_2$, впервые исследовался в работе³⁵.

Некоторые особенности данного «пересечения» удобнее всего рассмотреть на примере двух связанных осцилляторов. С формальной точки зрения такая модель мало чем отличается от задачи о трансформации волн в неоднородной среде. Уравнения движения для рассматриваемого случая возьмем в виде

$$\ddot{x} + \omega_1^2(t)x = \alpha(t)y, \quad \ddot{y} + \omega_2^2(t)y = \alpha(t)x. \quad (2.1)$$

При постоянных $\omega_{1,2}$, α уравнения для нормальных координат имеют вид

$$\ddot{X} + \Omega_1^2 X = 0, \quad \ddot{Y} + \Omega_2^2 Y = 0, \quad (\Omega_1 \neq \Omega_2), \quad (2.2)$$

где Ω_1, Ω_2 — частоты нормальных колебаний, определяемые выражениями $\Omega_{1,2}^2 = (1/2) \{ \omega_1^2 + \omega_2^2 \pm [4\alpha^2 + (\omega_1^2 - \omega_2^2)^2]^{-1/2} \}$. Связь между (x, y) и нормальными координатами (X, Y) следующая:

$$\begin{aligned} X &= [(\Omega_1^2 - \omega_2^2)x - \alpha y] [\alpha^2 + (\Omega_1^2 - \omega_2^2)^2]^{-1/2}, \\ Y &= [\alpha x - (\Omega_2^2 - \omega_1^2)y] [\alpha^2 + (\Omega_2^2 - \omega_1^2)^2]^{-1/2}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Преобразование (2.3) соответствует нормировке, при которой $X \rightarrow x$, $Y \rightarrow y$, если $\alpha \rightarrow 0$ и $\omega_1^2 > \omega_2^2$.

При медленном изменении во времени коэффициентов системы уравнений (2.1) общее решение Z для нормальных координат можно представить в виде ³⁶

$$Z = A_1 X_+ + A_2 Y_+ + A_3 X_- + A_4 Y_-,$$

где

$$X_{\pm} = \Omega_1^{-1/2} \exp \left(\pm i \int^t \Omega_1(t') dt' \right), \quad Y_{\pm} = \Omega_2^{-1/2} \exp \left(\pm i \int^t \Omega_2(t') dt' \right).$$

Обозначим через A, B вектор-столбцы из постоянных коэффициентов общего решения Z соответственно слева и справа от области «пересечения» решений (резонансной области). Тогда путем использования аналитичности точного решения (2.1) нетрудно получить матрицу преобразования \hat{M} вектор-столбцов $B = \hat{M}A$. Поскольку такой вывод хорошо известен (см., например, ²⁰), приведем без доказательства матрицу \hat{M} для случая «пересечения» $\Omega_1 = \Omega_2$ ³⁶:

$$M_{11} = -M_{22}^* = ie^{-i\varphi} (1 - e^{-2\delta})^{1/2}, \quad M_{12} = M_{21} = e^{-\delta},$$

где

$$2\delta = i \oint_{\mathcal{L}} [(\Omega_1 - \Omega_2)/2] dt > 0$$

(контур \mathcal{L} охватывает обе точки «пересечения»), φ — неизвестная в методе ВКБ фаза, которая не влияет на коэффициент трансформации Q между нормальными колебаниями X_+, Y_+ , и X_-, Y_- ($Q \sim e^{-\delta}$).

В плазме полным аналогом уравнений (2.1) является, например, система уравнений, которая описывает поведение медленной и быстрой магнитозвуковых волн при медленном изменении со временем плотности плазмы. Вывод, весьма сходный с выводом уравнений для пространственно-неоднородной плазмы ³⁷, приводит нас к следующей системе уравнений:

$$\ddot{u}_1 + k_z^2 v_A^2 u_1 = -\theta k_z^2 v_0^2 u_2, \quad \ddot{u}_2 + k_z^2 c_s^2 u_2 = -\theta k_z^2 v_A^2 u_1; \quad (2.4)$$

здесь v_A, c_s — соответственно альвеновская и звуковая скорости, θ — угол между волновым вектором и магнитным полем, $\mathbf{H}_0 = H_0 \mathbf{e}_z$, $v_0 \equiv c_s(0)$, $\mathbf{h}_y = \mathbf{H}_0 u_1(t)$, $\rho = \rho_0 u_2(t)$, $\rho_0(t)$ — невозмущенная плотность; $h_y \rho$ — возмущения магнитного поля и плотности. «Пересечение» происходит в области $v_A \approx c_s$, при этом для малых углов θ имеем $\delta \sim \tau (k_z v_0) \theta^2$, где τ — характерное время изменения ρ_0 . При $\delta \rightarrow 0$ коэффициент трансформации $Q \rightarrow 1$. Однако следует подчеркнуть, что речь идет о трансформации нормальных колебаний. Поэтому сильная трансформация нормальных колебаний X и Y в данном случае отнюдь не означает большого обмена энергией между осцилляторами x и y ^{38,39}. В самом деле, пусть

при $t \rightarrow -\infty$ будет

$$x = A\omega_1^{-1/2} \exp \left(i \int_0^t \omega_1(t') dt' \right), \quad y = 0.$$

Тогда при $t \rightarrow +\infty$ получим

$$y = B\omega_2^{-1/2} \exp \left(i \int_0^t \omega_2(t') dt' \right),$$

где

$$B = (\alpha/2i) \int_{-\infty}^{+\infty} \left[x(t) \omega_2^{-1/2} \exp \left(-i \int_0^t \omega_2(t') dt \right) \right] dt = (\alpha A/\omega_0^2) (\pi \omega_0 \tau/2) \exp(-i\pi/4)$$

($\omega_1 - \omega_2 = \omega_0 \tau$, $\alpha \ll \omega_{1,2}^2$). С другой стороны, в данном случае, как нетрудно видеть, $2\delta = (\pi/2) [(\alpha/\omega_0^2) (\omega_0 \tau)^{1/2}]^2$. Отсюда следует, что уменьшение δ затрудняет перекачку энергии из колебания x в колебание y . Для примера (2.4) это означает, что если при $t \rightarrow -\infty$ энергия была сосредоточена в звуковых колебаниях, то она останется в них при $t \rightarrow +\infty$ для $\alpha \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$. Следовательно, при малых α более эффективным оказывается адиабатический переход, когда $\delta \gtrsim 1$ за счет большого времени расхождения ветвей τ .

Не представляет труда найти матрицу перехода в случае резонанса $\Omega_1 = -\Omega_2$, а также при обходе области, в которой одновременно имеются резонансы $\Omega_1 = \Omega_2$ и $\Omega_1 = -\Omega_2$ ^{35,36}.

Отсылая за подробностями к работам^{40,41}, приведем результат решения одного случая связанных осцилляторов, который понадобится в дальнейшем. Именно, возьмем следующую систему осцилляторов

$$\ddot{y} = x, \quad -(\ddot{x}/\beta) - [(t^2 + \lambda)/\beta] x = y \quad (\lambda, \beta > 0), \quad (2.5)$$

в которой x можно трактовать как осциллятор с отрицательной массой. Отсюда для осциллятора y следует уравнение

$$(d^4 y/dt^4) + (t^2 + \lambda) (d^2 y/dt^2) + \beta y = 0. \quad (2.6)$$

Частоты нормальных колебаний системы (2.5) имеют вид

$$\Omega_{1,2}^2(t) = (1/2) [(t^2 + \lambda + \sigma)^{1/2} \pm (t^2 + \lambda - \sigma)^{1/2}], \quad \sigma = (4\beta - 1)^{1/2}.$$

Из уравнения (2.6) легко получить инвариант

$$|A_1|^2 + |A_2|^2 - |A_3|^2 - |A_4|^2 = \text{invar}; \quad (2.7)$$

здесь A_1, A_2, A_3, A_4 аналогичны введенным выше для решения Z системы уравнений (2.1) и (2.2). Обозначим $\varepsilon_{1,2} = (1/2) i \oint (\Omega_1 \pm \Omega_2) dt = \pi (\lambda \pm \sigma)/2$ и устремим $\varepsilon_1 \rightarrow \infty$. Тогда имеем

$$A = \left\| \begin{matrix} S & D \\ D & S \end{matrix} \right\| B, \quad (2.8)$$

где $S_{11} = S_{22} \equiv \gamma = (1 + e^{-2\varepsilon_2})^{1/2} \cos \mu$, $S_{21} = -S_{12} \equiv \kappa = (1 + e^{-2\varepsilon_2})^{1/2} \sin \mu$, $D_{22} = -D_{11} \equiv \rho = e^{-\varepsilon_2}$, $D_{12} = D_{21} = 0$, $\mu = (\varepsilon_2/\pi) [1 - \ln(\varepsilon_2/\pi)] - \arg \Gamma((1/2) - (i\varepsilon_2/\pi))$.

Отметим, что условие (2.7) можно переписать в виде $I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = \text{const}$, где I_n является адиабатическим инвариантом при отсутствии взаимодействия между нормальными колебаниями.

В заключение данного раздела рассмотрим следующую задачу. При прохождении волн через достаточно большой объем неоднородной среды

число точек трансформации может быть очень большим. Естественно считать их распределение по объему хаотическим и заданным в виде некоторой случайной функции. Тогда возникает вопрос об эволюции волн в такой среде. Как и выше, удобнее, однако, исследовать аналогичную задачу о прохождении системы осцилляторов через резонансы в случайные моменты времени. Поскольку адиабатический инвариант каждого нормального колебания существенно изменяется только в узкой области резонанса, т. е. фактически скачкообразно, в соответствии с работой ³⁶ будем ниже говорить о столкновениях нормальных колебаний. Направление эволюции (устойчивость или неустойчивость) зависит от вида инварианта дифференциального уравнения, описывающего систему осцилляторов в области резонанса ⁴⁰. Если решение имеет вид $x = \sum_n A_n X_n$, где X_n — квазинормальное колебание, то инвариант является квадратичной формой из постоянных A_n :

$$\sum_n s_n |A_n|^2 = \text{invar} \quad (s_n = \pm 1).$$

Допустим, что все s_n одного знака, тогда $|A_n|$ ограничен сверху, т. е. движение осцилляторов финитно в фазовом пространстве. В противном случае система может быть неустойчивой. Строгое доказательство этого утверждения в общем виде затруднительно, однако в приведенных ниже частных примерах оно подтверждается.

Для одного осциллятора в случайном внешнем поле резонансами являются точки, в которых $\Omega(t) = 0$. Инвариант имеет вид $|A_+|^2 - |A_-|^2 = \text{invar}$. Таким образом, можно ожидать, что движение будет неустойчиво. Решение этой задачи в работе ⁴² подтверждает наш вывод. В работе ⁴³ рассматривалась трансформация волн в среде со случайными неоднородностями. Формально ситуация эквивалентна системе двух связанных осцилляторов с резонансами $\Omega_1 = \Omega_2$. Инвариант имел вид $|A_1|^2 + |A_2|^2 = \text{invar}$. Было найдено, что независимо от начальных условий система приближается к равновесию, в котором $I_1 = I_2$ (в согласии со сказанным выше). В работе ⁴⁰ исследовалась трансформация при случайных столкновениях, когда инвариант системы связанных осцилляторов имел вид (2.7). Система осцилляторов оказалась неустойчивой. Рассмотрим кратко этот случай, как наиболее существенный для приложений.

Пусть X_{\pm}, Y_{\pm} — нормальные колебания системы осцилляторов с частотами Ω_1, Ω_2 соответственно. Введем вектор-столбец Z с компонентами $Z_{1,2} = X_{\pm}, Z_{4,3} = Y_{\pm}$ и рассмотрим вспомогательную систему уравнений

$$dZ/dt = iKZ + \sum_n Q_n Z \delta(t - t_n), \quad (2.9)$$

где K — диагональная матрица: $K_{11} = -K_{22} = \Omega_1, K_{44} = -K_{33} = \Omega_2$, а Q_n — некоторые матрицы четвертого порядка. Решение (2.9) испытывает скачки в моменты времени t_n , причем $Z(t_n + 0) = \exp(Q_n) Z(t_n - 0)$. Если выбрать матрицу перехода Q_n совпадающей с матрицей перехода между нормальными колебаниями при столкновении, можно рассмотреть эквивалентную задачу усреднения решений системы уравнений (2.9) при случайном распределении t_n .

Выберем решение вещественным, $Z_2 = Z_1^*, Z_3 = Z_4^*$, и перейдем к вещественным переменным $\xi_{1,2} = \text{Re } Z_{1,4}, \eta_{1,2} = \text{Im } Z_{1,4}$, которые можно трактовать как координаты и импульсы некоторых осцилляторов. Как обычно для такого рода задач ^{44,45}, получим следующее кинетическое уравнение для функции распределения $f(t; \xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)$ координат

и импульсов:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \Omega_1 \left(\xi_1 \frac{\partial f}{\partial \eta_1} - \eta_1 \frac{\partial f}{\partial \xi_1} \right) + \Omega_2 \left(\xi_2 \frac{\partial f}{\partial \eta_2} - \eta_2 \frac{\partial f}{\partial \xi_2} \right) = \text{St}(f), \quad (2.10)$$

$$\text{St}(f) = -\nu f + \nu \int \int d\sigma d\lambda w(\sigma, \lambda) \bar{f}, \quad \bar{f} \equiv f(t; \bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2):$$

здесь ν — частота столкновений, распределение которых предполагалось пуассоновским; σ, λ — параметры столкновения со случайным распределением $w(\lambda, \sigma)$; в результате столкновения точка фазового пространства $(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2)$ переходит в точку $(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)$.

Выбирая в качестве матрицы перехода от $(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)$ к $(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2)$ матрицу (2.8) и отыскивая решение для вторых моментов функции распределения в виде $\sim \exp(\nu \int_0^t \Lambda(\tau) d\tau)$, получим дисперсионное уравнение ⁴⁰

$$\Lambda^3 + 4(1 - \gamma^2) \Lambda^2 + [q^2 + 4q\kappa\gamma + 4(\kappa^2 - \rho^2)] \Lambda - 2\rho^2 q^2 = 0, \quad (2.11)$$

где параметры κ, ρ, γ даны в (2.8), $q = (\Omega_1 - \Omega_2)/\nu$.

Уравнение (2.11) всегда имеет положительный корень Λ_0 . Для слабых столкновений ($2\varepsilon_2 \gg 1$) он равен $2 \exp(-2\varepsilon_2) \ll 1$. В случае сильных столкновений, когда $2\varepsilon_2 \ll 1$, имеем $\Lambda_0 \approx 2$, т. е. инкремент неустойчивости порядка частоты столкновений (напомним, что кинетическое уравнение (2.10) получено при условии малости частоты столкновений по сравнению с частотами нормальных колебаний). Важным выводом из доказанного здесь является то, что для инвариантов типа (2.7) каждое колебание при трансформации увеличивает свою амплитуду за счет энергии среды. Этот вывод может иметь существенное значение, в частности, для задач об устойчивости плазменных ускорителей.

3. II и III типы трансформации. При высоких температурах, когда частоты столкновений малы, СВЧ нагрев плазмы осуществляется при помощи трансформации электромагнитных волн в медленные плазменные колебания, которые затем затухают, главным образом вследствие бесстолкновительного затухания. Этот важный с практической точки зрения процесс происходит в области гибридных резонансов неоднородной плазмы и, как указывалось в п. 1, относится к трансформации II типа, которую также можно назвать *аномальной трансформацией*, поскольку электрическое поле и показатель преломления имеют особенность в резонансном слое холодной плазмы, а коэффициент трансформации может достигать единицы (см. ⁹ и цитированные там работы). Исследование такой трансформации основано на использовании присущей ей замечательной особенности, а именно — на равенстве коэффициента поглощения электромагнитной волны в холодной плазме и коэффициента трансформации электромагнитной волны в медленную плазменную моду в «горячей» плазме ^{10, 46–48}. Это обстоятельство позволяет существенно упростить задачу, и часто ее удается свести к исследованию дифференциального уравнения второго порядка. С помощью примененной методики авторам ⁹ удалось проанализировать большое количество задач с теоретической и экспериментальной точек зрения. Поэтому, что касается трансформации II типа, в настоящем обзоре имеет смысл обсудить только следующий вопрос: является ли анализ трансформации II типа на основе дифферен-

циального уравнения четвертого порядка нужным по существу дела или он интересен лишь с методической и математической сторон, как дополнительный способ доказательства? Важность исследования трансформации I и III типов на основе дифференциальных уравнений четвертого порядка очевидна ввиду отсутствия указанного выше свойства.

Так как в обзоре ⁹ приведена подробная библиография по трансформации II типа, здесь будут даны ссылки только на те (в основном последние) работы, которые окажутся нужными в связи с затронутым вопросом.

Перечислим основные причины, вследствие которых, по нашему мнению, важен учет в общем случае теплового движения и анализ решений дифференциального уравнения четвертого порядка *):

1) Эквивалентность поглощения волн в холодной плазме, описываемого уравнением вида $(d^2\varphi/dx^2) + (U(x)\varphi/x^m) = 0$, их трансформации в тепловые колебания, описываемой уравнением $\alpha(d^4\varphi/dx^4) + x^m(d^2\varphi/dx^2) + U(x)\varphi = 0$, доказана только для $m = 1$. В общем случае произвольного m эта эквивалентность отнюдь не очевидна ^{49, 50}.

2) Если параметр α в написанном выше уравнении четвертого порядка — комплексный, то даже при $m = 1$ необходимо дополнительное исследование указанного уравнения, чтобы убедиться в равенстве коэффициента поглощения коэффициенту трансформации длинноволнового колебания в коротковолновое (см. ⁵¹ о кажущейся и истинной сингулярности).

3) Укороченное уравнение, из которого получается правильное выражение для коэффициента поглощения, равного коэффициенту трансформации длинноволновой моды в коротковолновую, совпадает с уравнением для волн в холодной плазме лишь в пределе достаточно слабого теплового движения ⁵².

4) Совместное исследование влияния диссипации, теплового движения (в рамках дифференциального уравнения четвертого порядка) и нелинейных процессов необходимо для выяснения характера распределения энергии электромагнитной волны, падающей на область с особенностью (сингулярностью) показателя преломления. В некоторых случаях ситуация проанализирована в основном с качественной стороны ^{26, 53}.

5) Даже в тех случаях, когда исследование «холодного» уравнения дает правильную информацию о преобразовании длинноволновой моды в коротковолновую, исследование уравнения четвертого порядка может дать дополнительную информацию об этом процессе ¹⁴. В особенности это очевидно для задач на собственные значения, которые рассматривались в работах ^{11-13, 40, 54-55}.

Итак, можно сделать вывод, что трансформация длинноволновой моды в коротковолновую правильно описывается «холодным» уравнением в пределе достаточно слабого теплового движения, при малых диссипативных и нелинейных эффектах и в случае простого нуля коэффициента при второй производной для уравнения четвертого порядка. В частности, из третьего замечания вытекает, что для квазирелятивистских электронов «холодное» уравнение малопригодно.

Опуская подробный анализ сделанных выше замечаний, который находится в цитированных работах, кратко проиллюстрируем только некоторые из них.

Рассмотрим уравнение

$$\alpha\beta^2\varphi^{IV} + \beta u_2(x)\varphi^{II} + u_1(x)\varphi = 0 \quad (3.1)$$

*) Подчеркнем, что если при учете теплового движения соответствующий параметр при четвертой производной перестает быть малым, то необходимо исследование точного интегрального уравнения.

с двумя малыми параметрами α и $\beta \sim (\lambda/L)^2$, где λ , L — соответственно длина волны и длина неоднородности. Дополнительный малый параметр α связан с конкретной физической ситуацией и характеризует, например, влияние малой вязкости либо слабого теплового движения и т. д. Волновой вектор $k(x)$ удобно написать в следующем виде:

$$k_{1,2} = (1/2) \{[(u_2/\alpha) + 2(u_1/\alpha)^{1/2}]^{1/2} \pm [(u_2/\alpha) - 2(u_1/\alpha)^{1/2}]^{1/2}\}. \quad (3.2)$$

Вблизи нуля функции $u_2(x)$ имеем $u_2 = ux$, $u_1 = u_1(0)$. При этом из формулы (3.2) видно, что «пересечение» решений уравнения (3.1) происходит в точках $x_{1,2} = \pm 2(\alpha u_1(0)/u^2)^{1/2}$, в которых имеют ветвление соответственно функции $k_1 - k_2$ и $k_1 + k_2$. Расстояние между x_1 , x_2 (размер особой области) порядка $\Delta x \sim L\alpha^{1/2} \ll L$, а $|k\Delta x| \sim (\alpha/\beta^2)^{1/4}$.

Используя метод Лапласа, исследуем с единой точки зрения решения (3.1) при произвольных значениях параметра α/β^2 ¹⁴. После замены переменной $x = \beta y$ в окрестности нуля $u_2(x)$ из формулы (3.1) получим

$$\varphi^{IV} + \lambda^2(y\varphi^{II} + \gamma\varphi) = 0, \quad (3.3)$$

где $\lambda^2 = \beta^2/\alpha$, $\gamma \equiv u_1(0)$. Решение (3.3) выражается в виде контурного интеграла

$$\varphi(y) = \oint_C t^{-2} \exp[(t^3/3\lambda^2) + ty - (\gamma/t)] dt. \quad (3.4)$$

Асимптотические свойства решений уравнения (3.4) для больших значений параметра λ^2 были исследованы в работе⁵⁶. Анализ контурных интегралов (3.4) показывает, что на достаточно больших расстояниях от начала координат $y = 0$ асимптотические выражения $\varphi(y)$ имеют одинаковый вид (подобны) при любых значениях λ^2 ¹⁴. Так, например, для замкнутого контура C , охватывающего существенно особую точку $t = 0$, легко показать подобие асимптотик $\varphi(y)$ на расстояниях, удовлетворяющих условию $\lambda^2 |y|^{3/2} \gg 1$. В этом случае асимптотика $\varphi(y)$ дается выражением^{14, 56}

$$\varphi(y) \equiv V(y) \approx 2\pi i (y/\gamma)^{1/2} J_1(2(\gamma y)^{1/2}) (\lambda^2 |y|^{3/2} \gg 1), \quad (3.5)$$

где J_1 — функция Бесселя. Нетрудно видеть, что функция (3.5) удовлетворяет укороченному уравнению $y\varphi^{II} + \gamma\varphi = 0$ в полной окрестности точки $y = 0$. Указанный вывод иллюстрирует пятое замечание о важности исследования уравнения четвертого порядка. Приведем еще одно решение уравнения (3.3), асимптотически совпадающее с решением укороченного уравнения, но только в секторе окрестности точки $y = 0$. При вещественных y имеем^{8, 14, 56, 57}

$$U_2 \approx \begin{cases} -\pi |y/\gamma|^{1/2} H_1^{(1)}(2i|y\gamma|^{1/2}), & y < 0, \\ i\pi (y/\gamma)^{1/2} H_1^{(1)}(2(y\gamma)^{1/2}) + \frac{\pi^{1/2} \exp[i(\pi/4) + i(2\lambda/3)y^{3/2}]}{\lambda^{3/2} y^{5/4}}, & y > 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

$$(|y\lambda| \gg 1, |y\lambda^{2/3}| \gg 1, |y\lambda^2| \gg 1).$$

Решение (3.6) как раз и описывает аномальный переход решения укороченного уравнения в коротковолновое и является наиболее существенным в теории трансформации волн⁸. Разумеется, для аномальной трансформации, описываемой решением (3.6), помимо обращения в нуль коэффициента при второй производной необходимо еще выполнить приведенные выше неравенства. В частности, условие $|y\lambda| \gg 1$ означает малость особой области по сравнению с размерами системы. Кроме отме-

ченных выше работ, условия возникновения аномальной трансформации в магнитной гидродинамике недавно были повторены в работе ⁵⁸ *).

Здесь следует напомнить, что аномальная трансформация волн в области верхнего гибридного резонанса неоднородной плазмы была доказана в работе ⁴⁰ с помощью закона сохранения энергии.

Сделаем еще два замечания по поводу свойств решений уравнения (3.1). Во-первых, из отмеченной выше многозначности $k_1 + k_2$ и $k_1 - k_2$ вытекает возможность появления в окрестности особой области отраженных волн того же типа, что и падающие. Решения (3.5) и (3.6) не противоречат этому. Однако из них видно, что для осуществления указанной возможности необходимо придать физический смысл решению $V(y)$ (например, в условиях неустойчивости, когда имеют смысл нарастающие решения). Во-вторых, необходимо остановиться на классификации мод, тем более что трактовка этого вопроса не является единой (см., например, ^{17, 32, 58}). Наряду с (3.2) для $k(x)$ можно также воспользоваться следующим представлением:

$$k^2 = [u_2 \pm (u_2^2 - 4\alpha u_1)^{1/2}] / 2\alpha\beta. \quad (3.7)$$

Из выражения (3.7) видно различие между случаями $u_1 > 0$ и $u_1 < 0$. Если $u_1 > 0$, точки «пересечения» решений лежат на вещественной оси, и, согласно обычно принятому определению ветвей колебаний в однородной плазме (см., например, ⁵⁹), в точке $u_2 = 0$ происходит переход между двумя различными ветвями колебаний. При этом для одной из волн компоненты фазовой и групповой скоростей имеют разные знаки. В случае $u_1 < 0$ точки «пересечения» решений лежат в комплексной плоскости x и для $k_{1,2}$ вдали от точки $u_2 = 0$ имеем в соответствии с правилом определения ветвей колебаний в однородной плазме следующие выражения:

$$k_1^2 \approx \begin{cases} u_2/\alpha\beta, & u_2 > 0, \\ u_1/\beta u_2, & u_2 < 0, \end{cases} \quad k_2^2 \approx \begin{cases} u_1/\beta u_2, & u_2 > 0, \\ u_2/\alpha\beta, & u_2 < 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

Из формул (3.8) видим, что в данном случае переход от быстроосциллирующего решения к длинноволновому не является в упомянутом выше смысле переходом с одной ветви колебаний на другую (только $k_2^2 < 0$). С другой стороны, если воспользоваться представлением (3.2), то переход от длинноволнового решения к коротковолновому является таковым при любом знаке u_1 . Кроме того, в асимптотической теории дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной речь идет о переходе между сингулярными решениями укороченного уравнения, которое получается из (3.1) при $\alpha \rightarrow 0$, и быстроосциллирующими решениями (3.4). Независимо от способа определения ветвей колебаний с физической точки зрения ясно, что эта трансформация приводит к существенному изменению свойств волны, так как при $x \rightarrow \pm\infty$ выражения для $k_{1,2}^2$ резко отличаются.

Далее, следует обратить внимание на то, что подобие асимптотик уравнения (3.1) при произвольных значениях λ^2 связано с выбором коэффициентов $u_1(x)$, $u_2(x)$ в виде $u_2 = ix$, $u_1 = \text{const}$ и не является общим

* По-видимому, в силу недоразумения, автор ⁵⁸ неверно истолковывает результаты работ ^{14, 17}, а именно: при ссылке на работы ^{14, 17} не приводятся все полученные там условия, необходимые для аномальной трансформации, а только условие обращения в нуль коэффициента при второй производной. Кроме того, экспоненциальная малость коэффициента трансформации в работах ^{37, 38}, на которую делает упор автор ⁵⁸, на самом деле связана не с условиями применимости метода фазовых интегралов, а с типом трансформации. По принятой здесь терминологии в работах ^{37, 38} речь идет о надбарьерном типе трансформации.

свойством (3.1). В самом деле, при исследовании уравнения

$$\varphi^{\text{VI}} + \lambda_1^2 [x\varphi^{\text{II}} + (\beta_1 + \sigma^2 x)\varphi] = 0 \quad (3.9)$$

в работе ⁵² было показано, что трансформационные свойства (3.9) эквивалентны поглотительным свойствам следующего укороченного уравнения:

$$\xi\varphi^{\text{II}} + (\xi + 2\mu)\varphi = 0, \quad (3.10)$$

где $\xi = \sigma x - (\sigma^3/\lambda_1^2)$, $2\mu = (\beta_1/\sigma) + (\sigma^2/\lambda_1^2)$.

Как следует из (3.10), коэффициент поглощения волны равен $Q = e^{-2\mu} (1 - e^{-2\mu})$. Поскольку Q зависит от μ , т. е. в конечном счете от λ_1^2 , коэффициент трансформации и асимптотики решений уравнения (3.9) зависят от λ_1^2 . Таким образом, для (3.9) отсутствует подобие по λ_1^2 . Из (3.10) следует важный вывод, что в общем случае укороченное уравнение (если таковое существует) не сводится к «холодному» уравнению в согласии с замечанием 3) (см. стр. 233). Необходимо также отметить, что из результатов работы ⁵² вытекает отсутствие в общем случае равенства коэффициента трансформации длинноволновой моды в коротковолновую и коэффициента трансформации при обратном процессе.

В ⁹ были приведены примеры уравнений, описывающих аномальную трансформацию в плазме для случая гибридных резонансов. Укажем другие примеры аномальной трансформации:

1) Трансформация магнитозвуковых волн в пространственно-неоднородной плазме, которая описывается уравнением ³⁷

$$\varphi^{\text{IV}} + \left(\frac{\omega^2}{V_A^2} + \frac{\omega^2}{c_s^2} - k_y^2 \right) \varphi^{\text{II}} + \left[\frac{\omega^2}{V_A^2} \left(\frac{\omega^2}{c_s^2} - k_y^2 \right) - \frac{\omega^2 k_y^2}{c_s^2} \right] \varphi = 0. \quad (3.11)$$

При выводе (3.11) предполагалось, что плотность плазмы неоднородна вдоль магнитного поля, направленного по оси z . Если коэффициент при второй производной обращается в нуль, то согласно изложенной выше теории возможна аномальная трансформация между быстрой и медленной магнитозвуковыми волнами⁸. Как показано в работе ⁵⁸, она осуществляется в плотной плазме $V_A^2 \ll c_s^2$, где решения (3.11) «успевают выйти» на асимптотику (3.6).

2) В области ферромагнитного резонанса неоднородного ферромагнетика возможна аномальная трансформация длинноволновой и коротковолновой спиновых мод ^{32, 39}.

3) В работе ⁶⁰ исследована аномальная трансформация спиновых волн в электромагнитные и наоборот.

В заключение данного раздела очень кратко остановимся на трансформации третьего типа. Этот случай рассматривался в работе ¹², где были получены правила обхода точки «пересечения» решений и найден спектр колебаний для финитных задач. В работе ³² было обращено внимание на то, что для распространяющихся волн этот случай соответствует стопроцентной трансформации. Как отмечалось в п. 1, области прозрачности для обоих типов волн расположены в случае трансформации III типа по одну сторону от точки «пересечения», вблизи которой компоненты групповых скоростей волн имеют вид

$$(d\omega/dk)_{1,2} \approx \pm 2 [d(k_1 - k_2)/d\omega]^{-1}. \quad (3.12)$$

Отсюда следует, что групповые скорости антипараллельны в области точки пересечения» решений. С другой стороны, из выражения (3.2) видно, что вблизи точки «пересечения» (где $u_2^2 = 4\alpha u_1$) может измениться только внутренний знак у волнового вектора, т. е. осуществляется переход $k_1 \leftrightarrow k_2$. При использовании этого факта, формулы (3.12) и того, что

обе волны существуют лишь по одну сторону от точки «пересечения» (по другую они затухают), можно сделать вывод о характере процесса трансформации; падающая волна полностью трансформируется в волну другого типа, которая отражается назад. Этот тип трансформации можно назвать отражательным. В настоящее время известен только один пример такой трансформации. Это — случай потенциальных колебаний неизотермической, $T_i \gg T_e$, плазмы в области частот $\omega_{Hi} \ll \omega \ll \omega_{He}$ ($k_{\perp} \gg k_z$, $\omega \gg k_z V_{Te}$, $k_z V_{Ti}$), для которого $k^2(x)$ имеет вид

$$k_{1,2}^2 = -k_y^2 + \frac{\omega^4}{6\omega_{pi}^2 V_{Ti}^2} \times \\ \times \left\{ 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{He}^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} \pm \left[\left(1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{He}^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} \right)^2 - 12k_z^2 V_{Ti}^2 \frac{\omega_{pe}^2 \omega_{pi}^2}{\omega^8} \right]^{1/2} \right\}. \quad (3.13)$$

Как следует из (3.13), стопроцентная трансформация волн возможна в полупространстве, заполненном неоднородной плазмой со спадающим к границе плазмы давлением либо с нарастающим магнитным полем³².

4. Некоторые особенности трансформации волн при взаимодействии пучка с плазмой. Хорошо известно, что плазма, пронизываемая пучком заряженных частиц, представляет собой простейший пример неравновесной неустойчивой среды (см., например, ⁶¹⁻⁶³). В однородной плазме нерелятивистский пучок генерирует коротковолновые продольные колебания, не удовлетворяющие условиям распространения в вакууме. В случае неоднородной плазмы продольные и поперечные составляющие электромагнитных полей «зацеплены», и, следовательно, такая система значительно более удобна с точки зрения вывода энергии из плазмы благодаря возможности преобразования квазипродольных полей в квазипоперечные. Хотя исследование трансформации продольных колебаний в поперечные в системе плазма — пучок только начинается (см., например, ^{21-23, 63, 64}), но уже сейчас выявлен целый ряд особенностей этого процесса, которые мы проиллюстрируем на некоторых характерных примерах.

а) *Анизотропия излучения поперечных волн.* Здесь мы приведем результаты теоретических и экспериментальных исследований эффективности трансформации продольных волн в поперечные в зависимости от знака градиента плотности при движении пучка вдоль неоднородности^{23, 65}. Так, в⁶⁵ плазменная камера представляла собой стеклянную трубку длиной 50 см и внутренним диаметром 2,6 см, которая была помещена в однородное продольное магнитное поле напряженности до 2 кэ.

Плотность плазмы могла либо монотонно возрастать в направлении инжекции пучка, либо убывать в зависимости от того, с какой стороны осуществлялся напуск рабочего газа. Колебания из плазмы принимались внешними зондами, расположенными вне плазменной камеры в продольном направлении. Помимо использования зондов проводилась регистрация продольной электрической составляющей колебаний, выносимых из плазмы электронным пучком, с помощью широкополосных спиральных переходов, которые располагались в начале и конце плазменной камеры. Результаты экспериментов показывают, что в случае монотонного нарастания плотности плазмы в направлении инжекции пучка наблюдается генерация как поперечных, так и продольных колебаний. Обратный направлению распространения пучка градиент плотности плазмы резко меняет картину излучения колебаний. Наблюдается полное отсутствие генерации поперечных колебаний, регистрируемых зондами, и одновременное наличие излучения продольных компонент.

Переходя к объяснению экспериментальных результатов, прежде всего следует отметить, что, за исключением области резонанса собственных колебаний покоящейся холодной плазмы и сносных колебаний пучка (пучковой моды), для каждой из волн при $\omega_{He} \gg \omega$ дисперсионные свойства, как известно, определяются соответственно из выражений (см., например, ⁶³)

$$k_{zc}^2 = k_{\perp}^2 \omega^2 / (\omega_{pe}^2 - \omega^2), \quad \text{Re } k_{zb} = \omega / V \quad (4.1)$$

$$(\text{Im } k_z \ll \text{Re } k_z \quad \text{при} \quad n_b \ll n_p);$$

здесь ω_{pe} — плазменная частота на оси области взаимодействия, меняющаяся вдоль направления распространения пучка; k_z , k_{\perp} — компоненты волнового вектора соответственно вдоль и поперек магнитного поля; n_b , n_p — плотности пучка и плазмы, V — скорость пучка. Для возбуждающейся в плазменном волноводе медленной плазменной волны имеем ⁶⁶ $k_{\perp} \sim 1/a$ (a — радиус волновода).

При движении пучка в сторону спада плотности плазмы усиливающаяся «холодная» плазменная мода (4.1) распространяется в направлении движения пучка (при $\omega_{He} > \omega_{pe}$ фазовая и групповая скорости параллельны) и в окрестности $\omega_{pe} \approx \omega$ трансформируется в быстрозатухающую «горячую» плазменную волну с большим k_z ^{5, 8}, для которой не выполняются условия распространения в вакууме $k_z \gg \omega/c$. Этому и соответствует отсутствие сдвига энергии поперечных колебаний с пучка.

Необходимо отметить, что если плотность плазмы заметно меняется на расстояниях L , сравнимых с длиной волны λ , то следует учитывать трансформацию волн и в областях, где геометрическая оптика в первом приближении по λ/L применима ⁶⁷. С учетом этого замечания становится ясно, что при распространении усиливающегося возмущения в сторону роста плотности, когда $V \parallel \nabla n_p$ и показатель преломления N уменьшается,

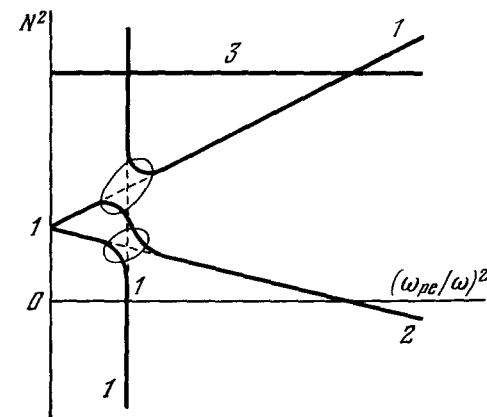


Рис. 1. Зависимость квадратов показателей преломления волн от плотности в холодной плазме при $\omega_{He} > \omega$.

1 — необыкновенная волна, 2 — обыкновенная волна, 3 — пучковая мода без учета взаимодействия пучка с плазмой. Области трансформации «холодных» плазменных мод обведены кружками.

ся, заметная доля его энергии трансформируется в волны, «вытекающие» из плазменной камеры наружу. Такой переход возможен и при $N > 1$ ⁶⁸. Далее, необходимо подчеркнуть, что если в плазменном волноводе может распространяться вторая «холодная» мода (быстрая), возможно преобразование моды с особенностью показателя преломления в быструю, которая хорошо излучается наружу. На рис. 1 области трансформации обведены кружками. Трансформация эффективна для углов $\theta \leq (2c/\pi\omega L)^{1/2}$ ⁵ (θ — угол между \mathbf{H}_0 и \mathbf{k}). Поскольку область «пересечения» пучковой и плазменной мод находится левее области трансформации, ясно, что указанный переход происходит при движении пучка в направлении роста плотности плазмы.

Выше мы не учитывали эффекты трансформации за счет поперечного градиента плотности, так как в данном случае $\omega_{He} \gg \omega_{pe} \sim \omega$, и, значит, условие указанной трансформации $\omega_{He}^2 + \omega_{pe}^2 \approx \omega^2$ не может быть выполнено.

Отметим, что при движении пучка в сторону роста плотности плазмы фазовая скорость колебаний увеличивается. При этом обнаруженный в работе ⁶⁹ квазилинейный режим мог бы привести к уменьшению рассматриваемого здесь эффекта, так как в этом случае энергия должна возвращаться обратно к пучку. Однако при достаточно сильной неоднородности $(V/\omega L) \sim 1$ указанное обстоятельство, по-видимому, несущественно.

Любопытно отметить, что переходное излучение модулированного пучка в плазме с продольным градиентом плотности также обладает выраженной анизотропией ²¹. Ограничимся при доказательстве случаем переходного излучения равномерно движущегося заряда на размытой границе плазмы без магнитного поля. С помощью стандартной процедуры получаем уравнение для магнитного поля волны с электрическим вектором, лежащим в плоскости падения (H_x, E_y, E_z) ⁷⁰:

$$\frac{d^2 H_{k\omega}}{dz^2} - \frac{d \ln \varepsilon(z, \omega)}{dz} \frac{d H_{k\omega}}{dz} + \frac{\omega^2}{c^2} (\varepsilon - \alpha^2) H_{k\omega} = \frac{ek_{\perp}}{2i\pi^2 c} \exp\left(-i \frac{\omega z}{V}\right); \quad (4.2)$$

здесь $\varepsilon = 1 - [\omega_{pe}^2(z)/\omega^2] [1 + i(v/\omega)]$ — диэлектрическая проницаемость холодной плазмы, v — частота столкновений, k_{\perp} — поперечная компонента волнового вектора, v — скорость заряда. При линейном изменении плотности в окрестности точки резонанса $\varepsilon = 0$ имеем $\varepsilon \approx -[z/L + i(v/\omega)]$. Путем использования результатов ⁷⁰ легко показать, что амплитуда поля переходного излучения заряда пропорциональна интегралу I :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-i(\omega z/v)] [H_1(z)/\varepsilon(z)] dz, \quad (4.3)$$

где $H_1(z)$ — решение уравнения (4.2) без правой части, затухающее при $z \rightarrow +\infty$. Из формулы (4.3) видно, что I равен нулю при $v < 0$ (когда заряд движется против градиента плотности), так как полюс подынтегрального выражения $\varepsilon = 0$ расположен в нижней полуплоскости z . Этот результат можно понять из качественных соображений, если учесть отмечавшуюся в п. 2 эквивалентность теплового движения диссипации в области плазменного резонанса. Процесс переходного излучения можно представить тогда как возникновение плазменных колебаний за счет синхронизма с движущимся зарядом, с последующей трансформацией их в поперечные волны. Если учитывать дисперсию плазменных волн, нетрудно видеть, что точка синхронизма, в которой фазовая скорость плазмона равна скорости заряда, расположена левее точки трансформации $\varepsilon = 0$. Поэтому при движении заряда в сторону спада плотности плазмы возбуждаемые им плазменные волны «сносятся» в направлении от точки $\varepsilon = 0$ и поперечная электромагнитная волна может возникнуть лишь в результате надбарьерных эффектов с амплитудой порядка $\exp(-\omega L/v)$. В противоположном случае движения заряда в направлении роста плотности плазменные колебания достигают точки $\varepsilon = 0$ и трансформируются в поперечные волны, излучаемые наружу. При этом амплитуда поля переходного излучения имеет порядок $\exp(-L\theta^3/\lambda)$, где θ — угол между градиентом плотности и направлением излучения, λ — длина волны поперечных колебаний.

б) *Замечания о проблеме нагрева и срыва неустойчивостей в плазме.* Проведем краткое обсуждение некоторых возможностей, связанных с трансформацией волн:

1) Вопрос о трансформации волн помимо самостоятельного интереса может оказаться существенным для проблем устойчивости плазмы ¹⁷.

В справедливости этого можно убедиться с помощью следующего рассуждения¹⁷. Пусть одна из «зацепляющихся» волн (с волновым вектором k_1) осциллирует на бесконечности, а другая (с волновым вектором k_2) затухает. Предположим, что в плазме возникло нарастающее во времени локализованное возмущение («пакет»), образованное волнами с волновым вектором k_2 . Если теперь скорость ухода энергии на бесконечность вследствие трансформации в волну k_1 превысит скорость поступления энергии в возмущение за счет источников неустойчивости, то неустойчивость не развивается, а плазма может служить генератором уходящих на бесконечность колебаний. За счет неоднородности неустойчивая мода может быть «зацеплена» с устойчивой или с более устойчивой. Ясно, что и в этом случае развитие неустойчивости может быть затруднено. Пример такой ситуации был разобран в работе²⁴, где было показано, что за счет «пересечения» «горячей» и «холодной» плазменных мод в области верхнего гибридного резонанса увеличение критического тока, выше которого развивается пучковая неустойчивость, колеблется в пределах от (V/v_{te}) до $[V/v_{te}]^3$ раз, где V — скорость пучка и v_{te} — тепловая скорость электронов плазмы.

2) В настоящий момент не существует единого мнения о том, какой метод нагрева плазмы до термоядерных температур является наиболее перспективным. Однако уже сейчас ясно, что ВЧ и СВЧ методы нагрева плазмы весьма существенны. При этом необходимо понять, какой диапазон частот является наиболее приемлемым. По крайней мере, нагрев не должен нарушать условий удержания плазмы. Поскольку коэффициент диффузии $D \sim \lambda^2$ (λ — длина волны), по-видимому, более перспективным является нагрев на коротких волнах. Эта мысль подтверждается результатами работы²³, где удавалось (при изменении распределения плотности и подаче модулирующих сигналов) проверять нагрев и удержание плазмы при возбуждении различных участков спектра волн в плазменно-пучковом разряде. При этом оказалось, что вплоть до ионных циклотронных волн возбуждаемые низкочастотные колебания, хотя и интенсивно греют плазму (отдается 30% энергии пучка), но приводят к быстрому уносу частиц и энергии из установки с коэффициентом диффузии, близким к бомовскому. С другой стороны, при нагреве волнами в районе нижней гибридной частоты диффузия мала: по-видимому, помимо малой длины волны играет роль то, что вследствие рассеяния ионов на пульсациях поля должна возрасти ион-ионная вязкость. Отметим, что этот диапазон частот представляется выгодным и потому, что в нем хорошо идет нагрев как ионов, так и электронов.

В заключение гл. II кратко упомянем еще один случай линейной трансформации, когда в неоднородной среде одновременно распространяются волны с различными знаками энергии. Как известно⁷¹, в неравновесной среде возможны колебания, энергия которых отрицательна. Тогда из общих физических соображений следует^{71,72}, что взаимодействие волн с различными знаками энергии должно приводить к их взаимному усилению и к неустойчивости. Отсюда ясно, что, при наличии в неоднородной среде волн с различными знаками энергии, эффекты линейной трансформации, подобные рассмотренным выше, могут привести к раскачке колебаний. В качестве примера можно указать на обнаруженные в работах^{73,74} неустойчивости, связанные с вытеканием волн из области неоднородной плазмы, в которой их энергия отрицательна. Из вышесказанного следует также, что в неравновесной неоднородной среде коэффициент линейной трансформации волн может быть более 100%.

III. НЕКОТОРЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ И КИНЕТИЧЕСКИЕ НЕЛОКАЛЬНЫЕ ЭФФЕКТЫ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН В НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ

Рассмотрим кинетические нелокальные эффекты, возникающие при распространении волн именно в неоднородной плазме. Под словом «нелокальные» здесь и ниже понимаются эффекты типа пространственного эха в однородной плазме, которые исследовались в работах ⁷⁵⁻⁷⁹.

Напомним, что в основе эффекта эха в плазме лежит фазовая когерентность частиц различных энергий, при выполнении которой происходит арифметическое сложение микроскопических токов отдельных частиц плазмы, приводящее к всплеску макроскопического тока, а значит, и поля. Однако в однородной плазме, вследствие теплового разброса частиц по скоростям, первоначальное возмущение необратимо затухает со временем или с расстоянием от источника. Мы имеем в виду процесс, аналогичный распаду волнового пакета за счет хаотической диффузии частиц плазмы, подробно изученный в работе ⁸⁰. По этой причине эффект эха в однородной плазме нелинеен. В случае неоднородной плазмы, когда волна в каждом слое плазмы резонансно взаимодействует с какой-то определенной группой частиц, фазовая когерентность может выполняться в линейном по амплитуде поля приближении и, следовательно, возможно наблюдать линейные нелокальные эффекты. Впервые это было сделано в работах ^{16, 81, 82}. Перейдем к рассмотрению нелокальных эффектов.

5. **Линейное нелокальное отражение волн в неоднородной плазме.** а) Дадим вначале краткое изложение метода исследования нелокальных эффектов, предложенного в работе ⁸³. Для одномерных продольных электронных колебаний неоднородной плазмы основные уравнения имеют вид

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v \frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{e}{m} v E_1 \frac{dF}{d\mathcal{E}}, \quad \frac{\partial E_1}{\partial t} + 4\pi j_1 = 0, \quad (5.1)$$

где $f_1(x, v, t)$, $F(\mathcal{E})$ — соответственно возмущенная и равновесная функции распределения, $\mathcal{E} = (v^2/2) + \Phi(x)$ — нормированная энергия, $\Phi(x) = -(m/e) \Phi(x)$ — эффективный статический потенциал, удерживающий неоднородность плазмы, который будем предполагать монотонно спадающей функцией x , причем $\Phi(-\infty) = 0$. Плотность тока определяется выражением

$$j_1(x, t) = j_{\text{ext}}(x, t) - en_0 \int_{\Phi(x)}^{\infty} d\mathcal{E} (dF/d\mathcal{E}) [f_1^{(+)}(x, \mathcal{E}, t) - f_1^{(-)}(x, \mathcal{E}, t)]; \quad (5.2)$$

здесь $f_1^{(+)}(x, \mathcal{E}, t)$, $f_1^{(-)}(x, \mathcal{E}, t)$ есть $f_1(x, v, t)$ соответственно для $v > 0$ и $v < 0$, $j_{\text{ext}}(x, t)$ — плотность тока внешнего источника, $n_0 = \text{const}$.

Разложим возмущение функции распределения в интеграл Фурье по времени:

$$f_1(x, \mathcal{E}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x, \mathcal{E}, \omega) \exp(-i\omega t) d\omega.$$

Тогда из (5.1) методом характеристик находим

$$\begin{aligned} f_1^{(+)}(x, \mathcal{E}, \omega) &= (e/m) (dF/d\mathcal{E}) \int_{-\infty}^x E_1(x', \omega) \exp[i\omega t(x, x')] dx', \\ f_1^{(-)}(x, \mathcal{E}, \omega) &= (e/m) (dF/d\mathcal{E}) \int_{x_{\mathcal{E}}}^x E_1(x', \omega) \exp[i\omega t(x', x)] dx' + \\ &\quad + (e/m) (dF/d\mathcal{E}) \int_{-\infty}^{x_{\mathcal{E}}} E_1(x', \omega) \exp[i\omega t(x_{\mathcal{E}}, x) + i\omega t(x_{\mathcal{E}}, x')] dx', \end{aligned} \quad (5.3)$$

где

$$t(x, \xi) = \int_{\xi}^x [v(y, \mathcal{E})]^{-1} dy, \quad v(y, \mathcal{E}) = \{2[\mathcal{E} - \Phi(y)]\}^{1/2}$$

и $x_{\mathcal{E}}$ — точка отражения частиц с энергией \mathcal{E} ($\Phi(x_{\mathcal{E}}) = \mathcal{E}$). После подстановки выражений (5.3) в формулу (5.2) получим сингулярное интегральное уравнение для электрического поля $E_1(x, \omega)$ продольных колебаний

$$\begin{aligned} E_1(x, \omega) &= i(\omega_p^2/\omega) \int_{\Phi(x)}^{\infty} (dF/d\mathcal{E}) \left\{ \int_{-\infty}^x E_1(x', \omega) \exp[i\omega t(x, x')] dx' + \right. \\ &\quad \left. + \int_x^{x_{\mathcal{E}}} E_1(x', \omega) \exp[i\omega t(x', x)] dx' - \right. \\ &\quad \left. - \int_{-\infty}^{x_{\mathcal{E}}} E_1(x', \omega) \exp[i\omega t(x_{\mathcal{E}}, x) + i\omega t(x_{\mathcal{E}}, x')] \right\} d\mathcal{E} + (4\pi i/\omega) j_{\text{ext}}(x, \omega), \end{aligned} \quad (5.4)$$

где $\omega_p^2 = 4\pi e^2 n_0/m$.

Рассмотрим собственные колебания слабонеоднородной плазмы. Отыскивая решение уравнения (5.4) методом ВКБ, представим электрическое поле в виде

$$E_1(x, \omega) = A_1(x, \omega) \exp \left[i \int_{x_0}^x k(x') dx' \right].$$

Положим $j_{\text{ext}} = 0$ и проинтегрируем в (5.4) дважды по частям по x . Вводя локальную диэлектрическую проницаемость $\varepsilon(\omega, k, \Phi)$ неоднородной плазмы

$$\varepsilon(\omega, k, \Phi) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega} \int_{\Phi(x)}^{\infty} \frac{\partial F}{\partial \mathcal{E}} \left[\left(k - \frac{\omega}{v} \right)^{-1} - \left(k + \frac{\omega}{v} \right)^{-1} \right] d\mathcal{E},$$

для амплитуды $A_1(x, \omega)$ имеем уравнение

$$A_1(x, \omega) \varepsilon(\omega, k, \Phi) - i(\partial \varepsilon / \partial k)^{1/2} (d/dx) [A_1 (\partial \varepsilon / \partial k)^{1/2}] = 0. \quad (5.5)$$

Приравнявая поочередно нулю члены различных порядков малости по параметру ВКБ, получаем дисперсионное уравнение колебаний $\varepsilon(\omega, k, \Phi) = 0$ (из которого находится комплексный волновой вектор $k_{\omega}(x) \equiv k(\omega, \Phi(x)) = q_{\omega}(x) + i\kappa_{\omega}(x)$), а также амплитуду

электрического поля

$$A_1(x, \omega) = \text{const} \cdot [\partial \varepsilon(\omega, k_\omega(x)) / \partial k_\omega(x)]^{-1/2}.$$

Отметим, что для медленно затухающих волн при интегрировании по частям в (5.4) возникают малые знаменатели $(k - (\omega/v))$. В этом случае вклад резонансных частиц вычисляется методом перевала⁸³ и входит в виде обычной антиэрмитовой части диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\omega, k)$.

б) Перейдем к рассмотрению линейного нелокального отражения волн в слабонеоднородной плазме. Физический механизм нелокального отражения заключается в следующем. Частицы плазмы с энергией \mathcal{E} , летящие в направлении распространения падающей волны с частотой ω , в окрестности точки $x_s(\mathcal{E})$ резонансно взаимодействуют с волной $q_\omega(x_s) = \omega/v(x_s, \mathcal{E})$, поглощая ее энергию. В результате взаимодействия волны с плазмой образуются модулированные потоки частиц различных энергий. После отражения от потенциала, удерживающего неоднородность плазмы, частицы вновь возвращаются в область $x \approx x_s$, где для них выполняется условие резонанса уже с отраженной волной и, следовательно, они могут излучить отраженную волну. Однако эффективное излучение отраженной волны происходит лишь при отсутствии интерференции излучений частиц с разными энергиями. Для этого необходимо, чтобы выполнялось некоторое условие, называемое «условием фазовой когерентности»⁸², которое заключается в том, что времена возврата частиц различных энергий \mathcal{E} к соответствующим точкам резонанса $x_s(\mathcal{E})$ должны быть одинаковы, т. е.

$$\left. \frac{\partial \tau(x, x_{\mathcal{E}})}{\partial \mathcal{E}} \right|_{x=x_s} \equiv 2 \left(\frac{\partial}{\partial \mathcal{E}} \int_x^{x_{\mathcal{E}}} \frac{dx'}{v(x', \mathcal{E})} \right) \Big|_{x=x_s} = 0. \quad (5.6)$$

Условие фазовой когерентности (5.6) определяет энергию \mathcal{E}_0 частиц, генерирующих отраженную волну, и точку генерации $x_c = x_s(\mathcal{E}_0)$. При выполнении (5.6) частицы с энергиями \mathcal{E} вблизи \mathcal{E}_0 излучают отраженную волну в окрестности точки x_c когерентно. В противном случае нелокальное отражение является надбарьерным эффектом.

Для вычисления коэффициента линейного нелокального отражения представим поле $E_1(x, \omega)$ в виде суммы падающей и отраженной волн:

$$E_1(x, \omega) = A_+(x, \omega) \exp \left(i \int_{x_0}^x k_\omega(x') dx' \right) + A_-(x, \omega) \exp \left(-i \int_{x_c}^x k_\omega(x') dx' \right), \quad (5.7)$$

где $A_+(x, \omega) = \Pi_\omega(x)/\Pi_\omega(x_0)$ — амплитуда падающей волны, а $\Pi_\omega(x) \equiv [\partial \varepsilon(\omega, k_\omega(x)) / \partial k_\omega(x)]^{-1/2}$. Подставляя (5.7) в (5.3) и учитывая, что основной вклад в интеграл происходит от точки перевала $x_s(\mathcal{E})$, находим осциллирующий фазовый распределения отраженных частиц:

$$\delta f_1^{(-)} = \frac{e\omega\kappa_s}{m\omega_p^2} \left(\frac{2\beta_s}{\pi} \right)^{1/2} \frac{dx_s/d\mathcal{E}}{\Pi_\omega(x_s)\Pi_\omega(x_0)} \times \\ \times \exp \left[i \int_{x_0}^{x_s} k_\omega(x') dx' + i\omega t(x_{\mathcal{E}}, x) + i\omega t(x_{\mathcal{E}}, x_s) - 3i \frac{\pi}{4} \right];$$

здесь $\beta_s \equiv \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[q_\omega(x) - \frac{\omega}{v(x, \mathcal{E})} \right] \right\} \Big|_{x=x_s} = -q_\omega^3(x_s) \omega^{-2} \left(\frac{dx_s}{d\mathcal{E}} \right)^{-1}$,

$$\kappa_s \equiv \kappa_\omega(x_s).$$

Затем из формулы (5.4) получаем уравнение для амплитуды отраженной волны (5.5) с правой частью

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{A_-(x, \omega)}{\Pi_\omega(x)} \right] = \frac{4\pi e n_0}{\omega} \Pi_\omega(x) \int_{\Phi(x)}^{\infty} \delta f_1^{(-)}(x, \mathcal{E}, \omega) d\mathcal{E} \exp \left[i \int_{x_c}^x k_\omega(x') dx' \right]. \quad (5.8)$$

Как видим, источник нелокального отражения, правая часть уравнения (5.8), содержит информацию о прошлом частиц — о взаимодействии их с полем падающей волны до отражения. Решение уравнения (5.8) приводится к виду ⁸²

$$\frac{A_-(x, \omega)}{A_+(x, \omega)} = 2i \exp \left[i \int_{x_0}^x k_\omega(x') dx' + i \int_{x_c}^x k_\omega(x') dx' \right] \int_{-\infty}^{+\infty} \kappa_s \exp[i\Psi(x, x_s)] dx_s, \quad (5.9)$$

где

$$\Psi(x, x_s) = \omega t(x, \mathcal{E}, x) + \int_x^{x_s} \{k_\omega(x') - [\omega/v(x', \mathcal{E})]\} dx'.$$

В случае слабонеоднородной плазмы под знаком интеграла в (5.9) стоит быстроосциллирующая функция, поэтому его величина определяется вкладом точки перевала $x_s = x_c$, в которой фаза $\Psi(x, x_s)$ имеет экстремум. Нетрудно показать, что условие экстремума $\partial\Psi(x, x_s)/\partial x_s = 0$ можно преобразовать к виду (5.6), и, таким образом, оно обеспечивает фазовую когерентность. В результате вычислений для коэффициента нелокального отражения $R = |E_-(x, \omega)/E_+(x_0, \omega)|^2$ получим выражение

$$R = 4\pi (\kappa_c^2 / |\gamma|) \exp \left[-2 \int_{x_0}^{x_c} \kappa_\omega(x') dx' - 2 \int_x^{x_c} \kappa_\omega(x') dx' \right]; \quad (5.10)$$

здесь $\kappa_c \equiv \kappa_\omega(x_c)$, $\gamma = \beta_c + (\omega/2) (d^2\tau(x, x_c)/dx_s^2)|_{x=x_c}$. По порядку величины имеем ($\gamma \sim \beta \sim q/L_q$)

$$R \sim [\kappa(L_q/q)^{1/2}]^2 \exp \left(-2 \int_{x_0}^{x_c} \kappa_\omega(x') dx' - 2 \int_x^{x_c} \kappa_\omega(x') dx' \right).$$

Область применимости полученной выше формулы (5.10) определяется оценками ⁸²

$$(qL_q)^{1/2} \gg 1, \quad (q/\kappa)^2 \gg (qL_q)^{1/2} \gg (\omega/qv_{Te})^2.$$

Кроме того, размер области резонанса частиц заданной энергии с волной $(L_q/q)^{1/2}$ должен быть мал по сравнению с длиной затухания волны κ^{-1} .

Исследуем условие фазовой когерентности (5.6) в зависимости от потенциала $\Phi(x)$. Легко показать, что фазовая когерентность выполняется, если $\Phi(x)$ имеет вид $\Phi(x) = 0$ при $x < 0$ и $\Phi(x) = v_T^2 x/L$ для $x > 0$. В случае $\Phi(x) = v_T^2 (x/L)^n$ (где $n > 0$) фазовая когерентность возможна, если существует действительное решение уравнения ($\zeta = \mathcal{E}/\Phi$)

$$[\zeta/(\zeta-1)]^{1/2} = [(1/2) - (1/n)] \zeta^{1/n} \int_1^\zeta y^{-1/n} [y(y-1)]^{-1/2} dy \quad (\zeta > 1).$$

Отсюда следует, что должно быть $n > 2$.

В заключение данного раздела сделаем два замечания. Во-первых, в случае квадратичного потенциала $\Phi(x) = \Phi_0 (x/L)^2$ все частицы — захваченные и имеют одинаковый период колебаний. При этом нелокальное отражение волн имеет высокую эффективность и, как показано в работе ⁸⁴, приводит к возникновению «регенеративных» мод колебаний плазмы с частотой, равной удвоенной частоте колебаний частиц в потенциальной яме $\Phi(x)$. Во-вторых, фазовая когерентность частиц существует не только при условии (5.6). Она автоматически выполняется, если время возврата резонансных частиц мало по сравнению с периодом волны $\omega\tau(x_s, x_g) \ll 1$, так как в этом случае расстояние между точкой отражения и точкой резонанса настолько мало, что фазового перемешивания частиц, генерирующих отраженную волну, не происходит.

6. **Линейная регенерация необыкновенной волны в неоднородном магнитном поле.** Как следует из результатов п. 5, линейные нелокальные эффекты возникают вследствие фокусировки частиц неоднородностью плазмы. Однако исследование условия фазовой когерентности показывает, что в неоднородной плазме без магнитного поля эти эффекты носят характер нелокального отражения. Вместе с тем особый интерес представляет перенос волн частицами через области непрозрачности и сильного бесстолкновительного затухания «вперед». Как показано в работе ¹⁶, линейный перенос волн частицами «вперед», который впредь будем называть *регенерацией*, возможен в плазме, находящейся в неоднородном магнитном поле.

Рассмотрим распространение необыкновенной волны вдоль слабонеоднородного магнитного поля $H(z)$, имеющего вид горба, причем $H_{\min} < mc\omega/e < H_{\max}$. Функция $H(z)$ схематически изображена на рис. 2. Напомним, что условие циклотронного резонанса частиц плазмы, имеющих скорость v_z вдоль магнитного поля, с необыкновенной волной частоты ω и волновым вектором $k_\omega = q_\omega + ik_\omega$ можно записать в виде уравнения

$$\alpha(z) \equiv [\omega - \omega_{He}(z)]/cq_\omega(z) = v_z/c, \quad (6.1)$$

из которого находится (в нашем случае многозначная) функция $z(v_z)$, определяющая положение точки циклотронного резонанса в зависимости от скорости частиц. График $\alpha(z)$ при $\omega_{pe}^2 \ll \omega^2$ также приведен на рис. 2 (кривая 2).

Пусть необыкновенная волна возбуждается источником, расположенным в точке z_0 слева в области I, и распространяется в положительном направлении оси z . Частицы плазмы, летящие в том же направлении, в точках $z_1(v_z)$ области I резонансно взаимодействуют с волной. Поглощая часть ее энергии, они пролетают через II в область III, где для них снова может выполняться условие циклотронного резонанса с необыкновенной волной, бегущей в том же направлении (предполагается, что падающая волна не проникает в область III вследствие циклотронного затухания и барьеров непрозрачности). Следовательно, в точках циклотронного

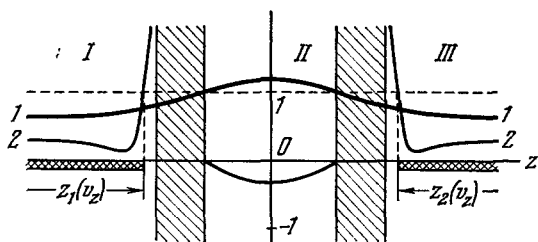


Рис. 2. Зависимость магнитного поля $eH(z)/mc\omega$ (кривая 1) и функции $\alpha(z) = [\omega - \omega_{He}(z)]/cq_\omega(z)$ (кривая 2) от координаты.

Области непрозрачности необыкновенной [волны ordinarily заштрихованы.

резонанса $z_2(v_z)$ частицы плазмы излучают (регенерируют) необыкновенную волну. Когерентная регенерация происходит при выполнении условия ^{16, 85}

$$\frac{d\Psi(v_z)}{dv_z} \equiv \frac{d}{dv_z} \int_{z_1(v_z)}^{z_2(v_z)} \left[q_\omega(z) - \frac{\omega - \omega_{He}(z)}{v_z} \right] dz = 0, \quad (6.2)$$

которое является уравнением для скорости v_0 частиц, регенерирующих необыкновенную волну.

Эффективность регенерации определяется отношением потоков энергии в регенерированной и исходной волнах $d(z, z_0) = S_R(z)/S_i(z_0)$. Вычисления, подобные проведенным в предыдущем разделе, приводят к следующему выражению для $d(z, z_0)$ ⁸⁵:

$$d = \left| \frac{8\pi}{\rho} \kappa_1 \kappa_2 \frac{dz_1(v_0)}{dv_0} \frac{dz_2(v_0)}{dv_0} \right| \exp \left[-2 \int_{z_0}^{z_1(v_0)} \kappa_\omega(z') dz' - 2 \int_{z_2(v_0)}^z \kappa_\omega(z') dz' \right], \quad (6.3)$$

где $\rho = d^2\Psi(v_0)/dv_0^2$, $\kappa_n \equiv \kappa_\omega(z_n(v_0))$ — постоянная циклотронного затухания необыкновенной волны.

Из уравнения (6.1) имеем

$$\left\{ \frac{d}{dz} \left[q_\omega(z) - \frac{\omega - \omega_{He}(z)}{v_z} \right] \right\} \Big|_{z=z(v)} = - \frac{q_\omega(z(v))}{v(dz/dv)} \sim \frac{q}{L_q}.$$

Следовательно, размер области циклотронного резонанса частиц с заданной скоростью с волной имеет порядок $\Delta z \sim (L_q/q)^{1/2}$. Тогда из (6.3) по порядку величины получим

$$d[z_2(v_0), z_1(v_0)] \sim [\kappa(L_q/q)^{1/2}]^2.$$

Отсюда видно, что с увеличением длины неоднородности L_q эффект регенерации растет и можно ожидать, что $d[z_2(v_0), z_1(v_0)]$ становится порядка единицы при $[\kappa(L_q/q)^{1/2}]^2 \sim 1$. Строго говоря, формула (6.3) получена в предположении, что $\kappa(L_q/q)^{1/2} \ll 1$.

Рассмотрим более подробно условия, при которых существует данный эффект. Во-первых, условие фазовой когерентности (6.2) приводится к виду

$$\int_{z_1(v_0)}^{z_2(v_0)} [\omega - \omega_{He}(z)] dz = 0,$$

откуда следует, что функция $[\omega - \omega_{He}(z)]$ должна проходить через нуль.

Во-вторых, циклотронное поглощение необыкновенной волны частицами плазмы возможно при выполнении неравенств ⁸⁵

$$(\omega_{pe}/\omega)^2 < 2v_0/3 \sqrt{3} c, \quad eH_{\min}/mc\omega < 1 - (3\omega_{pe}^2/2\omega^2).$$

В-третьих, в неоднородном магнитном поле продольная скорость частиц плазмы v_z зависит от поперечной скорости. Поэтому при пролете частиц между областями поглощения и регенерации волны, вообще говоря, происходит дополнительное фазовое перемешивание вследствие теплового разброса частиц по поперечным скоростям. Оно не успевает произойти при условии $|v_\perp \partial\Psi/\partial v_\perp| \ll 1$. В противном случае условие фазовой когерентности (6.2) необходимо дополнить требованием экстремума фазы Ψ по поперечным скоростям, иначе регенерация будет носить характер надбарьерного эффекта.

7. Нелинейное «просветление» неоднородной плазмы. В предыдущем разделе было показано, что уже в линейном приближении, благодаря наличию в системе «памяти», возможно аномальное проникновение необыкновенной волны в плазму, находящуюся в неоднородном магнитном поле. В связи с этим представляет интерес исследование эффектов нелинейного «просветления» неоднородной плазмы. Рассмотрим случай изотропной плазмы.

Хорошо известно утверждение, что электромагнитные волны не проникают в область плазмы, где $\omega_{pe}^2 > \omega^2$. Покажем, что в действительности проникновение возможно в эффектах типа нелинейного эха.

а) Собственное продольное эхо поперечных волн в неоднородной плазме. Пусть имеются два поперечных внешних источника

$$\mathbf{j}_{\text{ext}}(z, t) = \mathbf{e}_y \sum_{s=1}^2 j_s \delta(z - a_s) \cos \omega_s t$$

в плазме, неоднородной вдоль оси z . Для простоты будем считать основную часть плазмы почти «холодной» с плотностью $N(z)$, монотонно спадающей с ростом z , к которой добавлена «горячая» компонента с максвелловским распределением по скоростям и однородной плотностью n_0 . Частоты внешних источников $\omega_{1,2}$ принадлежат области непрозрачности, в силу чего в линейном приближении поля скиннируются вблизи точек $z = a_{1,2}$. При этих условиях во втором порядке по амплитуде поля, на расстоянии

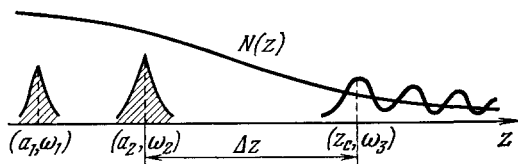


Рис. 3. Точка эха z_c и график плотности плазмы $N(z)$ в зависимости от расположения источников.

$\Delta z = (a_2 - a_1) \omega_1 / \omega_3$ от второго источника ($a_2 > a_1$), возникает продольный эховый ток «горячей» компоненты с разностной частотой $\omega_3 = \omega_2 - \omega_1 > 0$. Если точка эха z_c расположена в области прозрачности волны с частотой ω_3 ($\omega_3^2 > 4\pi e^2 N(z_c)/m$), то эховый ток возбуждает собственное продольное колебание «холодной» компоненты плазмы, распространяющееся к ее границе. Расположение источников, точки эха z_c и график плотности $N(z)$ схематически указаны на рис. 3.

В случае, когда точка эха z_c совпадает с точкой отражения плазменной волны $\omega_3^2 = 4\pi e^2 N(z_c)/m$, выражение для электрического поля эха имеет вид⁸⁵

$$E_z^{(2)} = \frac{H_1 H_2 \omega_p^2}{H_* \omega_3^2} \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon(z)} \right)^{1/4} \exp \left[\frac{i\omega_3}{V_T} \int_{z_c}^z \epsilon^{-1/2}(z') dz' - i\omega_3 t - 3i \frac{\pi}{4} \right],$$

где H_1, H_2 — магнитные поля вблизи источников на частотах ω_1, ω_2 , $H_* = 4\pi^{1/2} mc^2 \epsilon_0 / ed$, $d = z_c - a_1$, $\epsilon_0 = \left(\frac{V_T}{\omega_3 V} \right)^{-2/3}$, V_T — тепловая скорость «холодной» компоненты, L — длина неоднородности плотности $N(z)$ вблизи точки z_c , $\omega_p^2 = 4\pi e^2 n_0 / m$, $\epsilon(z) = 1 - (4\pi e^2 / m \omega_3^2) N(z)$ — диэлектрическая проницаемость «холодной» компоненты на частоте ω_3 .

С помощью рассмотренного эффекта можно передать в виде плазменных волн информацию о колебаниях от излучателей, расположенных в области непрозрачности, к границе плазмы. При этом следует отметить, что продольная плазменная волна (распространяющаяся почти нормально к резкой границе плазмы) преобразуется с коэффициентом трансформации порядка единицы в поперечную волну, которая излучается в вакуум^{86,87}.

б) *Эхо на суммарной частоте.* В неоднородной плазме существенно расширяется число типов частотных спектров эха. Если в однородной плазме эхо нелинейно, а в однородной изотропной плазме во втором порядке по амплитуде поля оно возможно только на разностной частоте, то в неоднородной плазме (как показано в пп. 5—6) могут быть линейные эховые эффекты. Покажем теперь, что в неоднородной плазме без магнитного поля возможно нелинейное эхо на суммарной частоте внешних сигналов. Этот эффект в своей основе аналогичен линейному нелокальному отражению, поскольку в обоих случаях фазовая когерентность частиц выполняется вследствие фокусирующего действия неоднородности плазмы.

Рассмотрим в качестве примера два продольных источника $j_{\text{ext}}(x, t) = \sum_{s=1}^2 j_s \delta(x - a_s) \cos \omega_s t$ в плазме с неоднородностью, описанной в п. 5.

Частицы, летящие в положительном направлении оси x , в точках a_1, a_2 взаимодействуют с внешним источником, в результате чего в плазме возникают модулированные потоки. Будем считать, что $a_1 < a_2 < x_g$, где x_g — точка отражения частиц с энергией \mathcal{E} . После отражения частиц от потенциала $\Phi(x)$, удерживающего неоднородную плазму, фаза осцилляций функции распределения второго приближения имеет вид

$$\Psi(x, \mathcal{E}) = (\omega_1 + \omega_2) \left[\int_{a_2}^{x_g} \frac{dx'}{v(x', \mathcal{E})} + \int_x^{x_g} \frac{dx'}{v(x', \mathcal{E})} \right] + \omega_1 \int_{a_1}^{a_2} \frac{dx'}{v(x', \mathcal{E})},$$

где $v(x, \mathcal{E}) = \{2[\mathcal{E} - \Phi(x)]\}^{1/2}$. При условии фазовой когерентности $\partial\Psi(x, \mathcal{E})/\partial\mathcal{E} = 0$ возникает макроскопический ток частиц плазмы, который возбуждает собственное колебание плазмы на суммарной частоте $\omega_4 = \omega_1 + \omega_2$, если точка резонанса $x_s(\mathcal{E})$, в которой $\omega_4 = q(\omega_4, x_s)v(x_s, \mathcal{E})$, находится вблизи точки фазовой когерентности частиц с энергией \mathcal{E} . Таким образом, когерентное возбуждение продольной волны на суммарной частоте происходит при условии

$$\left. \frac{\partial\Psi(x, \mathcal{E})}{\partial\mathcal{E}} \right|_{x=x_s(\mathcal{E})} = 0. \quad (7.1)$$

Уравнение (7.1) определяет энергию \mathcal{E}_0 частиц, генерирующих волну с частотой ω_4 , а также положение точки эха $x_c = x_s(\mathcal{E}_0)$. В этом примере наиболее интересен с экспериментальной точки зрения случай $2\omega_{1,2} < \omega_{pe}(a_{1,2})$, $\omega_{pe}(x_c) < \omega_4$, когда в первом и втором приближениях поля вблизи излучателей скинируются, а в области эха $x \sim x_c$ для волны на суммарной частоте имеется прозрачность.

В случае одного источника с $j_{\text{ext}} = j\delta(x - a) \cos \omega t$ эхо на суммарной частоте приводит к нелокальной генерации второй гармоники. При этом условие фазовой когерентности (7.1) означает, что времена пролета частиц (с отражением) от источника до точек резонанса x_s должны быть одинаковы. Полагая $\Phi(x) = 0$ при $x < 0$, $\Phi(x) = v_{Te}^2 x/L$ для $x > 0$ и считая, что источник и точка эха на двойной частоте расположены в области однородности плазмы $x < 0$, получим в результате вычислений следующее выражение для электрического поля второй гармоники⁸⁵:

$$E_x^{(2)} = (eE_*^2/mv_T\omega)(\kappa_2 v_T/\omega),$$

где $E_* = 2\pi j/v_T$, $\kappa_2 \equiv \text{Im } k(2\omega)$ — декремент пространственного затухания продольной волны на частоте 2ω . Отметим, что указанный здесь метод генерации гармоник в неоднородной плазме может оказаться весьма эффективным для диагностических целей.

В заключение данного раздела сделаем несколько замечаний. Рассмотренные выше нелокальные эффекты возникают в результате фазовой когерентности частиц, фокусируемых неоднородностью плазмы, и приводят к переносу волн на расстояния порядка или больше длины неоднородности фазовой скорости волн. Однако на достаточно малые расстояния, как отмечалось в работе ⁸², перенос информации о волновом движении может происходить и при отсутствии фокусировки — за счет неполной компенсации токов отдельных частиц. Такие эффекты в кусочно-однородной плазме исследовались в работах ^{88, 89}. В слабонеоднородной плазме они приводят к переносу информации на расстояния существенно меньше длины неоднородности фазовой скорости волны ⁸⁵. Кроме рассмотренных выше линейных нелокальных эффектов, в неоднородной плазме возможен новый тип трансформации — линейная нелокальная трансформация волн, относящихся к различным ветвям колебаний плазмы ^{85, 88}. Как показано в работах ^{90, 91}, эхо чувствительно к действию кулоновских столкновений и микротурбулентности, которые сглаживают быстроосциллирующие со скоростью частиц возмущения функции распределения. Поэтому проведенное выше исследование нелокальных эффектов справедливо в достаточно разреженной плазме и с малым уровнем турбулентности, когда характерные длины рассмотренных здесь процессов малы по сравнению с длиной переноса осцилляций функции распределения. К тому же на достаточно больших расстояниях вследствие механизма фазового перемешивания, близкого к изученному в работах ^{92, 93}, происходит насыщение эффектов эха и поле эховой волны имеет асимметричную зависимость от амплитуд источников ⁹⁴⁻⁹⁶. Здесь не рассматривались также эффекты временного эха в неоднородной плазме.

Для случая верхнего гибридного резонанса неоднородной плазмы временное эхо исследовалось в работе ⁹⁷.

8. Генерация второй гармоники при падении электромагнитной волны на неоднородную плазму. Как известно, в нелинейных однородных средах генерация второй гармоники может происходить только при выполнении условий синхронизма ⁹⁸

$$\omega_2 = 2\omega_1, \quad k_2 = 2k_1.$$

В однородной плазме без магнитного поля дисперсия электромагнитных волн такова, что удовлетворить условиям синхронизма невозможно. Тем не менее эксперимент показывает заметную генерацию второй гармоники при отражении электромагнитных волн от ионосферы, а также значительную примесь второй гармоники в спектре радиоизлучения солнечной короны ²⁰. При этом полоса солнечного радиоизлучения на второй гармонике в общих чертах повторяет особенности полосы радиоизлучения на первой гармонике. В связи с этим предпринимались попытки объяснить указанный эффект рэлеевским рассеиванием второй гармоники плазменной волны в электромагнитное излучение либо комбинационным рассеянием плазменных волн на тепловых флуктуациях (см. ^{6, 20}). В работе ¹⁵ был предложен другой механизм генерации второй гармоники, основанный на неоднородности плазмы и сохраняющийся в холодной плазме. Рассмотрим кратко этот случай.

1) Пусть электромагнитная волна падает на холодную изотропную плазму, неоднородную вдоль оси z . Вектор электрического поля находится в плоскости падения $E = (0, E_y, E_z)$, магнитное поле имеет компоненту H_x . Считая нелинейные эффекты малыми и представляя магнитное поле второй гармоники в виде $H_x^{(2)}(z, y, t) = H_2(z) \exp(2i\omega t - 2ik_z y)$,

получим для $H_2(z)$ уравнение¹⁵

$$\frac{d^2 H_2}{dz^2} - \frac{d\varepsilon_2}{\varepsilon_2 dz} \frac{dH_2}{dz} + \frac{4\omega^2}{c^2} (\varepsilon_2 - \alpha^2) H_2 = F(z), \quad (8.1)$$

где $\varepsilon_2 = 1 - (\omega_{pe}^2(z)/4\omega^2)$ — диэлектрическая проницаемость плазмы на второй гармонике, $F(z)$ — нелинейный источник, имеющий вид

$$F(z) = \frac{ie\varepsilon_2}{mc\omega} \left[\frac{ik_{\perp}}{2\varepsilon_2^2} E_1^2 \frac{d\varepsilon_1}{dz} - \frac{2ik_{\perp}}{\varepsilon_1\varepsilon_2} E_z^2 \frac{d\varepsilon_1}{dz} - \frac{d}{dz} \left(\frac{E_y E_z}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \frac{d\varepsilon_1}{dz} \right) \right]; \quad (8.2)$$

здесь $\varepsilon_1 = 1 - (\omega_{pe}^2(z)/\omega^2) [1 + i(\nu_{эфф}/\omega)]$ — диэлектрическая проницаемость на основной частоте, E_z, E_y — компоненты электрического поля первой гармоники. Обратим внимание на то, что $F(z)$ пропорционален градиенту плотности и исчезает в однородной плазме (в однородной изотропной плазме индуцируемые падающей волной нелинейные токи — чисто продольные). Отметим, что электрическое поле первой гармоники имеет особенность в точке плазменного резонанса, где диэлектрическая проницаемость ε_1 обращается в нуль^{5,6}.

Поле излучения на второй гармонике пропорционально матричному элементу

$$V = \int_{-\infty}^{+\infty} [F(z) H(z)/\varepsilon_2(z)] dz,$$

где $H(z)$ — решение уравнения (8.1) без правой части. В слабонеоднородной плазме величина V определяется вкладом ближайшей к вещественной оси особенности подынтегрального выражения, в данном случае — вкладом точки резонанса (в магнитном поле условия синхронизма могут выполняться, поэтому кроме вкладов особенностей необходимо учитывать конкурирующий с ним вклад точки синхронизма). Вблизи точки резонанса $\varepsilon_1 = -[i(z/L) + i(\nu_{эфф}/\omega)] \equiv -\zeta/L$, а магнитное и электрические поля первой гармоники имеют вид

$$\begin{aligned} H_x^{(1)} &= -H(0) k_{\perp} \zeta H_1^{(1)}(k_{\perp} \zeta), & H_x^{(1)}(0) &= H(0), \\ E_y^{(1)} &\approx i\rho\alpha^2 H(0) [C + \ln(k_{\perp} \zeta/2)], & E_z^{(1)} &= -\alpha L H_1^{(1)}(0)/\zeta; \end{aligned} \quad (8.3)$$

здесь C — постоянная Эйлера. Для слабонеоднородной плазмы параметр квазиклассичности $\rho = \omega L/c$ велик, поэтому заметная генерация второй гармоники происходит при малых углах падения волны на плазму, когда $\alpha = (ck_{\perp}/\omega) \ll 1$. В этом случае из формул (8.1) — (8.3), пренебрегая малыми слагаемыми порядка α , ρ^{-1} , но считая, что $\rho\alpha^3 \gg 1$, получим

$$\frac{d^2 H_2}{dz^2} + k_2^2 H_2 = -\frac{eH^2(0)L^2\alpha^3}{mc^2} \frac{d}{dz} \left[\frac{(1+C) + \ln(k_{\perp} \zeta/2)}{\zeta^2} \right], \quad (8.4)$$

где $k_2^2 = (4\omega^2/c^2)(\varepsilon_2 - \alpha^2)$. Для решения уравнения (8.4) поставим граничные условия излучения

$$H_2(z) \rightarrow C_{\pm} \exp(\mp ik_2 z) \quad \text{при} \quad z \rightarrow \pm \infty.$$

Тогда постоянные C_{\pm} задаются формулами

$$C_{\pm} = \frac{i}{2k_2} \int_{-\infty}^{+\infty} F(z) \exp(\pm ik_2 z) dz. \quad (8.5)$$

Поскольку особая точка функции $F(z)$ лежит в нижней полуплоскости z , постоянная C_+ равна нулю. Это означает, что вторая гармоника излучается из области резонанса «назад» и присутствует только в отраженном сигнале. Вычисление C_- дает

$$C_- = -\pi \sqrt{3} \frac{eH^2(0)}{mc\omega} \rho^2 \alpha^3 \left[2 + i \frac{\pi}{2} + \ln \left(\frac{\alpha}{2\sqrt{3}} \right) \right] \exp \left(-\rho \sqrt{3} \frac{v_{эфф}}{\omega} \right). \quad (8.6)$$

Сравним потоки энергии на первой и второй гармониках. Их отношение равно

$$\frac{S_z^{(2)}}{S_z^{(1)}} = 3 \left(\frac{e\alpha LH_0}{mc^2} \right)^2 \left\{ \pi^2 + \left(2 + \ln \left(\frac{\alpha}{2\sqrt{3}} \right) \right)^2 \right\} \times \\ \times \exp \left(-2\sqrt{3} \frac{\rho v_{эфф}}{\omega} - \frac{8}{3} \rho \alpha^3 \right), \quad (8.7)$$

где H_0 — магнитное поле первой гармоники в вакууме. Оценим в нашем приближении результат для максимально возможной генерации второй гармоники. Согласно¹⁵ критерий малости нелинейности имеет вид

$$eH(0)/mc\omega \ll (\rho/\alpha) (v_{эфф}/\omega)^{5/2}. \quad (8.8)$$

Подставляя (8.8) в формулу (8.7), получим

$$\frac{S_z^{(2)}}{S_z^{(1)}} \leq \alpha^2 \left(\rho \frac{v_{эфф}}{\omega} \right)^5 \exp \left(-2\rho \sqrt{3} \frac{v_{эфф}}{\omega} - \frac{4}{3} \rho \alpha^3 \right) < \alpha^2 \exp \left(-\frac{4}{3} \rho \alpha^3 \right).$$

Для сравнения укажем долю энергии, поглощаемой в области резонанса. При $v_{эфф} \rightarrow 0$ и $\rho \alpha^3 \gg 1$ она равна $W_v = 2S_z^{(1)} \exp(-4\rho \alpha^3/3)$. Таким образом, в исследованном нами случае во вторую гармонику преобразуется малая часть энергии, поглощаемой в области $\varepsilon_1 \approx 0$. Однако можно ожидать, что они становятся сравнимыми, когда $4\rho \alpha^3/3 \sim 1$ и $(eH(0)/mc\omega) \sim (\rho/\alpha) (v_{эфф}/\omega)^{5/2}$ (подробнее см.^{15,32,39}).

2) Рассмотрим теперь генерацию второй гармоники в условиях, когда столкновения достаточно редкие и становятся существенными эффекты конечной температуры плазмы. При учете теплового движения в области резонанса $\varepsilon_1 \approx 0$ в результате линейной трансформации падающей электромагнитной волны образуются плазменные колебания^{5,6,47}. Они уносят энергию из резонансной области, тем самым ограничивая электрическое поле. Как было указано в работе⁵, в этом случае можно ввести эффективную диссипацию, для которой $v_{эфф} = \omega (r_D/L)^{2/3}$, где r_D — дебаевский радиус, L — длина неоднородности плотности плазмы в области $\varepsilon_1 \approx 0$. Как видно из формулы (8.6), интенсивность излучения второй гармоники не зависит от $v_{эфф}$ при $\rho \frac{v_{эфф}}{\omega} \ll 1$. Тогда естественно ожидать, что в теплой бесстолкновительной плазме результаты по генерации второй гармоники сохранятся¹⁵. Покажем это прямым вычислением излучения на второй гармонике.

Во-первых, вместо формулы (8.2) для нелинейного источника $F(z)$ необходимо взять выражение

$$F(z) = -\frac{ie}{mc\omega} \frac{d}{dz} \left[2ik_{\perp} E_z^2 + \frac{d}{dz} (E_y E_z) \right]. \quad (8.9)$$

Далее, продольное электрическое поле имеет вид⁴⁷

$$E_z^{(1)} = i\alpha H(0) (\rho/\beta)^{2/3} \int_0^{\infty} \exp[iq\xi + (iq^2/3)] dq, \quad (8.10)$$

где

$$\beta = v_{Te}/c, \quad z = (c/\omega) (\rho\beta^2)^{1/3} \xi.$$

Для поперечной компоненты электрического поля получим

$$E_y^{(1)} = i\rho\alpha^2 H(0) \left[A - \int_0^\infty q^{-1} (e^{iq\xi} - 1) e^{iq^3/3} dq \right]; \quad (8.11)$$

здесь $A = i(\pi/3) + (1/3)C + \ln(\alpha/2) + (1/3)\ln(\rho\beta^2/3)$. Подставляя (8.9) — (8.11) в формулу (8.5) и считая, что $(\rho\beta^2)^{1/3} \ll 1$, в результате вычислений для постоянной C_- получим прежнее выражение (8.6), а постоянная C_+ оказывается равной нулю. Таким образом, излучение второй гармоники не зависит от конкретного вида механизма, ограничивающего электрическое поле в области резонанса. Иными словами, указанная выше эквивалентность теплового движения диссипации сохраняется и в нелинейном случае⁹⁹. Этот вывод остается в силе для неоднородной плазмы в магнитном поле. В связи с этим необходимо указать на имеющийся в литературе неправильный результат⁹⁹ по генерации второй гармоники электромагнитной волны, падающей на неоднородную плазму, находящуюся в неоднородном магнитном поле. Согласно⁹⁹ направление излучения второй гармоники из области гибридного резонанса $\omega_{pe}^2 + \omega_{He}^2 = \omega^2$ меняется в зависимости от того, ограничивается продольное электрическое поле в области резонанса столкновениями или уносом энергии тепловыми колебаниями. Ошибка, допущенная в этой работе, заключается в неправильном выборе интегрального представления для электрического поля выходящей из области гибридного резонанса плазменной волны.

Обратим внимание на качественное отличие генерации второй гармоники электромагнитной волны в холодной столкновительной плазме от случая генерации в теплой бесстолкновительной плазме. В холодной плазме генерация второй гармоники связана с особенностями поля исходной волны.

В теплой плазме поля волн являются аналитическими функциями (см. формулы (8.10) — (8.11)). При этом в области резонанса образуются в результате линейной трансформации падающей электромагнитной волны тепловые колебания — плазмоны. Нелинейное взаимодействие двух плазмонов, а также плазмона с падающей волной и приводит к генерации второй гармоники.

В заключение этого раздела сделаем следующие замечания. Во-первых, генерация второй гармоники при нормальном падении необыкновенной волны на холодную неоднородную плазму, находящуюся в однородном магнитном поле, исследовалась в работе¹⁰⁰. Результаты принципиально не отличаются от приведенных здесь. Во-вторых, в работе¹⁰¹ исследовались паразитные для генерации второй гармоники гистерезисные явления, возникающие в области резонанса в достаточно сильном ВЧ поле. В нашем случае, при выполнении критерия (8.8), они не существенны.

Следует также отметить, что в магнитоактивной плазме зависимость фазовой скорости волны от частоты, плотности плазмы и других параметров носит немонотонный характер, поэтому условия синхронизма могут выполняться. Например, в случае нормального падения необыкновенной волны на холодную магнитоактивную плазму синхронизм между первой и n -й гармониками выполняется вдоль кривой $\omega_{He}^2 \omega_{pe}^2 = (\omega_{pe}^2 - \omega^2)(n^2 \omega^2 - \omega_{pe}^2)$ в плоскости параметров $(\omega_{He}^2, \omega_{pe}^2)$. Указанное обстоятельство должно приводить к «рассыпанию» волны, распространяющейся через область синхронизма неоднородной плазмы²¹.

9. Нелинейная генерация электромагнитного излучения при распространении плазменной волны в неоднородной плазме. Как показано в предыдущем разделе, при падении электромагнитной волны на слабонеоднородную плазму в резонансном слое с $\epsilon_1 \approx 0$ происходит генерация второй гармоники. Однако падающая волна проникает в область с $\epsilon_1 \approx 0$ под барьером непрозрачности, поэтому эффект генерации, вообще говоря, мал и сильно зависит от угла падения волны на плазму. В связи с этим представляет интерес рассмотреть возбуждение второй гармоники электромагнитной волны плазменной волной, которая отражается непосредственно в резонансном слое. Отметим, что в однородной плазме эффект генерации электромагнитной волны одной плазменной волной отсутствует¹⁰².

Согласно работе⁵³, где решалась данная задача, магнитное поле второй гармоники подчиняется уравнению (8.1) с нелинейным источником $F(z)$, представленным в виде (8.9), в который нужно подставить возмущения, вызванные плазменной волной. Обратим внимание на то, что в однородной плазме $F(z)$ обращается в нуль, так как в этом случае индуцируемые плазменной волной нелинейные токи — чисто продольные.

Ниже будем придерживаться обозначений, введенных в п. 8, и считать параметр $\rho\beta^3$ большим. При этом условии линейная трансформация плазменной волны в электромагнитную экспоненциально мала⁴⁷. Рассмотрим вначале случай $\rho\beta^2 \ll 1$, когда характерная длина изменения поля плазменной волны в области резонанса $L(\beta/\rho)^{2/3}$ мала по сравнению с длиной волны второй гармоники электромагнитной волны c/ω . Используя результаты линейной теории^{47, 103}, для продольного электрического поля напомним выражение

$$E_z^{(1)} = A\pi^{-1/2}(\rho\beta^2)^{1/6} \int_0^\infty \left[\exp(-iq\xi - i\frac{q^3}{3}) - \exp(iq\xi + i\frac{q^3}{3}) \right] dq, \quad (9.1)$$

где $A = \text{const}$, а нормировка выбрана таким образом, что в падающей плазменной волне имеем

$$E_z^{(1)} = A \left(\frac{\omega}{ck_z} \right)^{1/2} \exp \left[-i \int_0^z k_z(z') dz' \right], \quad S_z^{(1)} = \frac{T_e}{2} \left| n_1 v_z^{(1)} \right| = \frac{c\beta^2}{8\pi} |A|^2;$$

здесь $k_z = (\omega/v_{Te})(-z/L)^{1/2}$. При условии $(\rho\beta^2)^{1/3} \ll 1$ нелинейный источник быстро осциллирует на длине волны второй гармоники, поэтому его можно усреднить. После усреднения получаем

$$\langle F(z) \rangle = (2e\alpha A^2/mc^2)(\rho\beta^2)^{1/2} (d/dz)(-c/\omega z)^{1/2} \quad \text{при } z < 0, \\ \langle F(z) \rangle = 0 \quad \text{для } z > 0.$$

Вычисление амплитуды магнитного поля второй гармоники электромагнитной волны аналогично проведенному в п. 8 и дает результат

$$C_- = -(2\pi/3)^{1/2} (e\alpha A^2/mc\omega)(\rho\beta^2)^{1/2} e^{i\pi/4}, \quad C_+ = -C_-^*. \quad (9.2)$$

Таким образом, вторая гармоника излучается из резонансного слоя в обе стороны одинаково. Коэффициент трансформации плазменной волны во вторую гармонику равен

$$(S_z^{(2)}/S_z^{(1)}) = (8\pi/3) \rho\beta^2 (e\alpha A/mv_{Te}\omega)^2. \quad (9.3)$$

В другом предельном случае $(\rho\beta^2)^{1/3} \gg 1$ нелинейный источник $F(z)$ — медленно меняющаяся функция z . Поэтому основной вклад в из-

лучение второй гармоники происходит от точки синхронизма $z_0 = -L (k_2 v_{Te}/2\omega)^2$, в которой $k_2 = 2k_1 = (2\omega/c\beta) (-z_0/L)^{1/2}$. Размер области синхронизма можно оценить из условия

$$\left| \int_{z_0}^{z_0+\Delta z} (k_2 - 2k_1) dz \right| \sim 1.$$

Отсюда следует, что $\Delta z \sim (c/\omega) (\rho\beta^2)^{1/2}$. В то же время $F(z)$ пропорционален малому множителю «поперечности» индуцированных плазменной волной нелинейных токов $|dk_1/k_1^2 dz| \sim (\rho\beta^2)^{-1}$. Окончательный результат имеет вид

$$C_- = -\frac{4}{9} \sqrt{2} \left(\frac{e\alpha A^2}{mc\omega} \right) (\rho\beta^2)^{-1/2} \exp \left(i \frac{\sqrt{3}}{4} \rho\beta^2 - i \frac{\pi}{4} \right), \quad C_+ = -C_-^*. \quad (9.4)$$

Коэффициент трансформации плазменной волны во вторую гармонику равен

$$S_z^{(2)}/S_z^{(1)} = (2/\rho\beta^2) (4e\alpha A/9mv_{Te}\omega)^2. \quad (9.5)$$

Из сравнения формул (9.2) — (9.3) и (9.4) — (9.5) видно, что в области $\rho\beta^2 \ll 1$ эффект генерации увеличивается с ростом длины неоднородности плотности плазмы L , достигает максимума при $\rho\beta^2 \sim 1$, когда $(S_z^{(2)}/S_z^{(1)}) \sim \sim (8\pi/3) (e\alpha A/mv_{Te}\omega)^2$, а затем уменьшается при дальнейшем увеличении L , в полном соответствии со случаем однородной плазмы. В заключение укажем еще, что генерация электромагнитного излучения с частотой $\omega \approx 2\omega_{pe}$ плазменными колебаниями с широким спектром волновых чисел исследовалась в однородной безграничной плазме в работе ¹⁰⁴, а в однородном плазменном слое — в работе ¹⁰⁵.

10. Особенности нелинейных взаимодействий волн в неоднородной плазме. Проведенное выше исследование генерации второй гармоники электромагнитной волны показывает, что нелинейное взаимодействие волн при наличии неоднородности плазмы обладает рядом особенностей по сравнению со случаем однородной плазмы. Ниже они будут кратко проанализированы на основе имеющейся к настоящему времени литературы ^{21, 53, 99, 106}. Отметим, что здесь мы не касаемся вопросов параметрической неустойчивости волн в неоднородной плазме.

а) *Нелинейное смещение волн.* Обсудим нелинейное смещение волн, частным случаем которого является рассмотренная выше генерация второй гармоники ^{15, 53}. В квазистационарном состоянии амплитуда $\Psi_3(\mathbf{r})$ возбуждаемой при смещении волны пропорциональна матричному элементу $V = \int \Psi_1 \Psi_2 \Psi_3^* d\mathbf{r}$, где $\Psi_{1,2}$ описывают поля исходных волн и считаются заданными. В квазиклассической области функции $\Psi_n(z)$ имеют вид

$$\Psi_n \sim \exp \left(\pm i \int^z k_n(z') dz' \right),$$

а волновой вектор $k_n(z)$ удовлетворяет дисперсионному уравнению $\omega = \omega_n(k_n)$. В слабонеоднородной плазме вопрос об оценке величины матричного элемента V вполне аналогичен вопросу об оценке величины квазиклассического матричного элемента в квантовой механике ¹⁰⁷. Рассматривая Ψ_n , k_n в комплексной плоскости переменного z (как аналитическое продолжение вещественной оси), получим, что величина матричного элемента V будет определяться конкуренцией вкладов в интеграл от особенностей (таких, как полюса и точки ветвления) функций $\Psi_n(z)$ и вкладов

точек z_0 , в которых выполняется распадное условие $k_1 + k_2 = k_3$. В последнем случае размер области генерации волны Δz можно оценить из условия

$$\left| \int_{z_0}^{z_0+\Delta z} (k_1 + k_2 - k_3) dz \right| \sim 1.$$

Таким образом, распады, запрещенные в однородной плазме (распадное условие на вещественной оси z не выполняется), в неоднородной плазме происходят с экспоненциально малой вероятностью, если поля взаимодействующих волн не имеют особенностей на вещественной оси z .

Следует обратить внимание на изменение самой постановки задачи об ограничении в неоднородной плазме амплитуд волн, нарастающих в результате нелинейного взаимодействия⁵³. В однородной плазме нелинейное взаимодействие волн приводит к перераспределению энергии по спектру волновых чисел k , однако взаимодействие идет одновременно во всем пространстве r . В случае неоднородной плазмы распад происходит в ограниченной области пространства, занятого плазмой. Поэтому распадная задача должна ставиться как задача об излучении волн из области распада, и, очевидно, при достаточно малых амплитудах вынос энергии из нее приведет к установлению квазистационарного состояния. Этим, в частности, распад в неоднородной плазме отличается от распадов в ограниченной плазме, которые изучались в работах¹⁰⁸. В качестве иллюстрации к сказанному рассмотрим систему уравнений⁵³

$$\Psi_1'' + [(z - z_1)/4\lambda^2] \Psi_1 = 0, \quad \Psi_2'' + z\Psi_2 = \Psi_1^2, \quad (10.1)$$

которая моделирует генерацию второй гармоники в неоднородной среде. Волновые векторы первой и второй гармоник равны $k_1 = (z - z_1)^{1/2} (2\lambda)^{-1}$, $k_2 = z^{1/2}$, а условие синхронизма $k_2 = 2k_1$ выполняется в точке $z_0 = z_1/(1 - \lambda^2)$. Поскольку решения уравнений (10.1) являются аналитическими функциями, генерация второй гармоники происходит только в окрестности точки синхронизма z_0 . Учитывая граничное условие излучения $\Psi_2 = Iz^{-1/4} \exp[i(\pi/4) + (2/3)iz^{3/2}]$ при $z \rightarrow +\infty$, получаем $I = \alpha \int_0^\infty v(\xi + \alpha\xi^2) d\xi$, где $v(\xi)$ — функция Эйри, $\beta = (z_1^2 z_0)^{1/3}$, $\alpha = [(z_0 - z_1)^2/16z_0 z_1]^{1/3}$.

Если $\beta \gg 1$, точка синхронизма находится в области прозрачности волн, вдали от точек отражения. При этом $I \approx (1/2)(\pi\alpha/\beta)^{1/2} \cos(2\beta^{3/2}/3)$. Отметим, что

$$\frac{2}{3}\beta^{3/2} = \int_0^{z_0} k_2 dz - 2 \int_{z_1}^{z_0} k_1 dz.$$

Для $\beta < 0$ точка синхронизма попадает в область непрозрачности, поэтому эффект генерации становится экспоненциально малым: $I \approx \approx (1/4) |\pi\alpha/\beta|^{1/2} \exp(-2|\beta|^{3/2}/3)$.

б) *Распад волны с большой амплитудой.* Рассмотрим теперь распад в слабонеоднородной среде волны большой амплитуды, называемой волной накачки. Задачи такого типа решались в работах^{106,107}. Основные черты этого распада можно проследить на следующем простом примере. Если точки отражения находятся далеко от области распада, уравнения для амплитуд $a_{1,2}(z)$ нарастающих волн можно представить в виде

$$da_{1,2}/dz = (\kappa a_0/a_c) a_{2,1}^* \exp(ik_0 z^2/L), \quad (10.2)$$

где a_0 — амплитуда волны накачки, которая считается неизменной; κ , k_0 , a_c — положительные параметры; распадное условие выполняется в точке $z = 0$, в силу чего

$$\int_0^z (k_0(z') - k_1(z') - k_2(z')) dz' = \frac{k_0 z^2}{L}.$$

Для функции $b_1(z) = a_1(z) \exp(-ik_0 z^2/2L)$ из (10.2) получим уравнение

$$(d^2 b_1/dz^2) + [(k_0/L)^2 + i(k_0/L) - (\kappa |a_0|/a_c)^2] b_1 = 0. \quad (10.3)$$

Как видно из формулы (10.3), нарастание волн происходит в области барьера $|z| < \kappa L |a_0|/k_0 a_c$, ширина которого пропорциональна амплитуде волны накачки и длине неоднородности L .

Подставим для уравнений (10.2) следующие граничные условия: $|a_1|^2 = 1$, $|a_2|^2 = 0$ при $z \rightarrow -\infty$. Решение уравнения (10.3) выражается через функции параболического цилиндра. В результате при $z \rightarrow +\infty$ имеем

$$|a_1|^2 = e^\mu |a_2|^2 = e^\mu - 1, \quad \mu = (\pi \kappa^2/k_0) \left| \frac{a_0}{a_c} \right|^2 L. \quad (10.4)$$

Таким образом, в неоднородной среде распад волны накачки приводит к конечному усилению волн a_1 , a_2 . Из (10.4) получаем условие срыва распадной неустойчивости $L < (k_0 \Lambda / \pi \kappa^2) |a_c/a_0|^2$, где Λ — число порядка пяти.

Благодарим Я. Б. Файнберга за полезные советы.

Физико-технический институт АН УССР,
Харьков

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Галеев, С. С. Моисеев, Р. З. Сагдеев, АЭ 15, 451 (1963).
2. А. Б. Михайловский, сборник «Вопросы теории плазмы», т. 3, М., Госатомиздат, 1963.
3. Б. Б. Кадомцев, *ibid.*, т. 4, 1964.
4. В. П. Силин, А. А. Рухадзе, УФН 82, 499 (1964); 96, 87 (1968).
5. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, М., «Наука», 1967.
6. Н. Г. Денисов, ЖЭТФ 31, 609 (1956).
7. В. В. Железняков, Е. Я. Злотник, Изв. вузов (Радиофизика) 5, 644 (1962).
8. С. С. Моисеев, Proc. of the Intern. Conference on Phenomena in Ionized Gases, v. 2, Beograd, Gradevinska Knjiga, 1966.
9. В. Е. Голант, А. Д. Пилия, УФН 104, 413 (1971).
10. А. Д. Пилия, В. И. Федоров, ЖЭТФ 57, 1198 (1969).
11. Г. М. Заславский, С. С. Моисеев, Р. З. Сагдеев, ДАН СССР 158, 1295 (1964).
12. А. А. Рухадзе, В. С. Саводченко, С. А. Триггер, ПМТФ, № 6, 58 (1965).
13. А. В. Тимофеев, УФН 102, 185 (1970).
14. Н. С. Ерохин, С. С. Моисеев, ПМТФ, № 2, 25 (1966).
15. Н. С. Ерохин, В. Е. Захаров, С. С. Моисеев, ЖЭТФ 56, 179 (1969).
16. А. А. Водяницкий, Н. С. Ерохин, С. С. Моисеев, Письма ЖЭТФ 12, 529 (1970).
17. С. С. Моисеев, ПМТФ, № 3, 3 (1966).
18. Ю. Н. Днестровский, Д. П. Костомаров, Н. Л. Павлова, Баланс энергии и диффузия в тороидальных плазменных установках, М., Изд. ВЦ МГУ, 1970.
19. А. В. Виноградов, В. В. Пустовалов, Письма ЖЭТФ 13, 317 (1971).
20. В. В. Железняков, Радиоизлучение Солнца и планет, М., «Наука», 1964.

21. N. S. Erokhin, V. I. Kurilko, M. B. Levin, M. G. Lyubarsky, N. G. Matsiborko, S. S. Moiseev, I. N. Onishchenko, A. P. Tolstoluzhsky, Ya. B. Fainberg, V. D. Shapiro, V. I. Shevchenko, Proc. of the 4th Intern. Conference on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research, Nucl. Fusion Suppl., 135 (1972).
22. В. О. Александров, В. Е. Голант, А. П. Жилинский, ЖТФ 41, 66 (1971).
23. A. S. Bakai, A. K. Berezin, G. P. Berezhina, L. I. Bolotin, A. M. Egorov, N. S. Erokhin, V. P. Zeidlits, B. I. Ivanov, A. N. Izmailov, A. F. Kivshik, V. A. Kiselev, O. F. Kovpik, E. A. Kornilov, Yu. E. Kolyada, S. M. Krivoruchko, V. I. Kurilko, E. I. Lutsenko, N. S. Pedenko, L. A. Mitin, S. S. Moiseev, A. P. Tolstoluzhsky, Ya. B. Fainberg, V. D. Shapiro, V. I. Shevchenko, см.²¹, p. 113.
24. В. Кореску, Czech. J. Phys. B21, 34 (1971).
25. E. C. G. Stuekelberg, Helv. Phys. Acta 5, 369 (1932).
26. В. К. Быховский, Е. Е. Никитин, М. Я. Овчинникова, ЖЭТФ 47, 750 (1964).
27. Г. В. Дубровский, Вестн. ЛГУ (Физика. Химия, в. 3), № 16, 24 (1967).
28. В. П. Силин, Е. П. Фетисов, ЖЭТФ 41, 159 (1961).
29. Н. Л. Цинцадзе, Автореферат докт. диссертации, Тбилиси, ИФ АН Груз. ССР, 1965.
30. А. Н. Кондратенко, Автореферат докт. диссертации, Харьков, ФТИ АН УССР, 1971.
31. С. С. Калмыкова, В. И. Курилко, ПММ 33, 638 (1969).
32. С. С. Моисеев, Автореферат докт. диссертации, Харьков, ФТИ АН УССР, 1969.
33. Н. Г. Денисов, Уч. зап. ГГУ (Горький) 35, 3 (1957).
34. С. С. Моисеев, Труды Международного симпозиума по проблеме многих тел в физике плазмы, М., «Наука», 1967.
35. Г. М. Заславский, С. С. Моисеев, ДАН СССР 161, 318 (1964).
36. Г. М. Заславский, Лекции по применению метода ВКБ в физике, Новосибирск, Изд-во НГУ, 1965.
37. С. С. Моисеев, В. Г. Смилянский, Магн. гидродин. 2, 23 (1965).
38. А. С. Гребинский, ЖТФ 39, 1166 (1969).
39. Н. С. Ерохин, Автореферат канд. диссертации, Харьков, ФТИ АН УССР, 1970.
40. Н. С. Ерохин, ПМТФ, № 6, 3 (1970).
41. Н. С. Ерохин, Дифф. ур-ния 7, 970 (1971).
42. Г. М. Заславский, ПМТФ, № 6, 76 (1966).
43. Г. М. Заславский, Н. Н. Филопенко, ПМТФ, № 1, 21 (1967).
44. H. L. Frisch, S. O. Lloyd, Phys. Rev. 120, 1175 (1960).
45. M. A. Leibowitz, J. Math. Phys. 4, 852 (1963).
46. В. Г. Гильденбург, ЖЭТФ 45, 1978 (1963).
47. А. Д. Пилия, ЖТФ 36, 818 (1966).
48. А. Я. Омельченко, К. Н. Степанов, УФЖ 13, 1552 (1968).
49. И. Г. Кондратьев, М. А. Миллер, Изв. вузов (Радиофизика) 11, 885 (1968).
50. В. И. Федоров, Автореферат канд. диссертации, Л., ФТИ АН СССР, 1971.
51. A. V. Timofeev, Nucl. Fusion 8, 99 (1968).
52. Н. С. Ерохин, УФЖ 14, 2059 (1969).
53. Н. С. Ерохин, С. С. Моисеев, ЖТФ 40, 1144 (1970).
54. Линь Цзя-цзяо, Теория гидродинамической неустойчивости, М., ИЛ, 1958.
55. В. Кореску, Czech. J. Phys. B21, 256 (1971).
56. W. Wasow, Ann. Math. (N.Y.) 52, 350 (1950).
57. T. H. Stix, Phys. Rev. Lett. 15, 878 (1965).
58. Т. А. Давыдова, ЖЭТФ 60, 1001 (1971).
59. А. И. Ахиезер, И. А. Ахиезер, Р. В. Половин, А. Г. Ситенко, К. Н. Степанов, Коллективные взаимодействия в плазме, М., Атомиздат, 1964.
60. Г. М. Недлин, Р. Х. Шапиро, ЖЭТФ 57, 1691 (1969).
61. А. И. Ахиезер, Я. Б. Файнберг, ЖЭТФ 21, 1262 (1951).
62. Я. Б. Файнберг, АЭ 11, 313 (1961).
63. А. Б. Михайловский, Теория плазменных неустойчивостей, М., Атомиздат, т. 1. Неустойчивости однородной плазмы, 1970, т. 2. Неустойчивости неоднородной плазмы, 1971.
64. И. Е. Сахаров, В. И. Федоров, ЖТФ 41, 1539 (1971).
65. А. К. Березин, Г. П. Березина, Н. С. Ерохин, С. С. Моисеев, Я. Б. Файнберг, Письма ЖЭТФ 14, 149 (1971).

66. И. А. Безъязычный, А. К. Березин, В. А. Буц, В. И. Курилко, Я. Б. Файнберг, АЭ 26, 256 (1969).
67. D. A. Tidman, Phys. Rev. 117, 366 (1960).
68. В. В. Шевченко, Плавные переходы в открытых волноводах, М., «Наука», 1969.
69. Б. Н. Брейзман, Д. Д. Рютов, ЖЭТФ 57, 1401 (1969).
70. А. А. Галеев, ЖЭТФ 46, 1335 (1964).
71. Б. Б. Кадомцев, А. Б. Михайловский, А. В. Тимофеев, ЖЭТФ 47, 2266 (1964).
72. В. М. Дикасов, Л. И. Рудаков, Д. Д. Рютов, ЖЭТФ 48, 913 (1963).
73. H. L. Berk, L. D. Pearlstein, J. D. Callen, C. W. Horton, M. N. Rosenbluth, Phys. Rev. Lett. 22, 876 (1969).
74. А. К. Некрасов, А. В. Тимофеев, ЖЭТФ 59, 2175 (1970).
75. R. W. Gould, T. O'Neil, J. H. Malmberg, Phys. Rev. Lett. 19, 219 (1967).
76. T. O'Neil, R. W. Gould, Phys. Fluids 11, 134 (1968).
77. T. H. Malmberg, C. B. Wharton, R. W. Gould, T. O'Neil, Phys. Rev. Lett. 20, 95 (1968).
78. А. Г. Ситенко, В. Н. Павленко, Нгуен Ван Чонг, ЖЭТФ 58, 1377 (1970).
79. М. П. Клемоклидзе, Л. П. Питаевский, ЖЭТФ 58, 1853 (1970).
80. Д. Бом, Общая теория коллективных переменных, М., «Мир», 1964, стр. 16.
81. D. E. Baldwin, Phys. Rev. Lett. 18, 1119 (1967).
82. H. L. Berk, C. W. Horton, D. E. Baldwin, M. N. Rosenbluth, R. N. Sudan, Phys. Fluids 11, 367 (1968).
83. H. L. Berk, M. N. Rosenbluth, R. N. Sudan, ibid. 9, 1606 (1966).
84. H. L. Berk, D. L. Book, ibid. 12, 649 (1969).
85. А. А. Водяницкий, Н. С. Ерохин, С. С. Моисеев, ЖЭТФ 61, 629 (1971).
86. G. B. Field, Astrophys. J. 124, 555 (1956).
87. А. М. Федорченко, УФЖ 13, 1032 (1968).
88. А. А. Водяницкий, Н. С. Ерохин, В. В. Лиситченко, С. С. Моисеев, В. Н. Ораевский, Доклад на Международной конференции по теории плазмы (Киев, 1971), см. «Аннотации докладов» конференции, Киев, ИТФ АН УССР, 1971.
89. В. В. Лиситченко, В. Н. Ораевский, ДАН СССР 201, 70 (1971).
90. T. O'Neil, Phys. Fluids 11, 2420 (1968).
91. C. H. Su, C. Oberman, Phys. Rev. Lett. 20, 427 (1968).
92. Р. К. Мазитов, ПМТФ, № 1, 27 (1965).
93. T. O'Neil, Phys. Fluids 8, 2255 (1965).
94. J. Coste, J. Peyraud, J. Plasma Phys. 3, 603 (1971).
95. K. Saner, P. Bachmann, K. Baumgartel, Lett. Nuovo Cimento 1, 541 (1971).
96. M. Guillemot, J. Olivier, F. Perceval, A. Quemeneur, G. Matthiessent, Phys. Fluids 14, 2065 (1971).
97. L. O. Bauer, F. A. Blum, ibid. 13, 2164, 2174 (1970).
98. А. А. Веденов, Е. П. Велихов, Р. З. Сагдеев, Ядерный синтез 1, 82 (1961).
99. I. Fidone, G. Granata, J. Teichmann, Association Euratom—CEA (Departement de la Physique du Plasma et de la Fusion Controlee Centre d'Etudes Nucleaires de Saclay, France), Preprint Nr. 2, 1970.
100. В. В. Долгополов, В. В. Демченко, А. Я. Омельченко, Изв. вузов (Радиофизика) 14, 1321 (1971).
101. В. Б. Гильденбург, ЖЭТФ 46, 2156 (1964).
102. В. Н. Цытович, Нелинейные эффекты в плазме, М., «Наука», 1967, стр. 279.
103. Ting-wei Tang, Radio Sci. 5, 111 (1970).
104. R. E. Amendt, W. E. Drummond, J. Nucl. Energy C6, 147 (1964).
105. А. А. Иванов, Д. Д. Рютов, ЖЭТФ 48, 684 (1965).
106. А. Д. Пилия, см. ⁸⁸, стр. 64; F. W. Perkins, J. Flick, Phys. Fluids 14, 2012 (1971).
107. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, М., Физматгиз, 1963, § 51.
108. M. N. Rosenbluth, A. Cavaliere, R. N. Sudan, Intern. Centre for Theor. Physics Preprint IC/66/72, Trieste, 1967; К. С. Карплюк, В. Н. Ораевский, ЖТФ 38, 1214 (1968).