

ПОРОГОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ И СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ В ПОЛЯРОННОЙ ПРОБЛЕМЕ

И. Б. Левинсон, Э. И. Рамба

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	683
1. Электрон-фононное взаимодействие	686
2. Однофононная модель	686
3. Пороговое приближение	690
4. Спектр полярона	693
а) Слабая связь — пороговая особенность (693). б) Сильная связь — связанные состояния (694).	
5. Примесные центры	695
а) Гибридные и связанные состояния (696). б) Экспериментальное исследование диэлектрических мод (698).	
6. Экситон-фононные комплексы	698
а) Дискретный спектр в резонансной ситуации (699). б) Поглощение в ионизационном континууме вблизи порога (700).	
7. Магнитополярон	701
а) Основные уравнения (701). б) Структура энергетического спектра (703). в) Оптические эффекты (705). г) Эксперимент — циклотронный и комбинированный резонанс (707).	
8. Экситон-фононные комплексы в магнитном поле	710
а) Магнитофононный резонанс (712). б) Дополнительные ветви спектра (713). в) Экспериментальные данные (714).	
9. Заключение	715
Цитированная литература	717

ВВЕДЕНИЕ

На протяжении длительного времени исследование поляронного эффекта в полупроводниках было в основном сосредоточено вокруг состояний, близких к основному энергетическому уровню системы ϵ_0 . Вычислялись понижение основного уровня системы вследствие электрон-фононного взаимодействия, перенормировка эффективной массы электронов и экситонов, подвижность поляронов и т. д. Современное состояние работ этого направления отражено в обзоре ¹.

В то же время характер состояний с энергией, заметно превышающей ϵ_0 , оставался до недавнего времени мало исследованным. Это объясняется как специфическими трудностями, возникающими в теории, так и тем, что на протяжении длительного времени имевшиеся экспериментальные данные не создавали стимула для тщательного теоретического изучения каких-либо определенных участков спектра возбужденных состояний.

Между тем, исходя из общетеоретических соображений, на которых мы подробнее остановимся ниже, следует ожидать появления характерных особенностей в электронном спектре при энергиях, близких к порогу испускания оптического фонона. Если можно пренебречь дисперсией оптических фононов, что будет предполагаться в дальнейшем, то этот порог

расположен при $\varepsilon_0 + \omega_0$, где ω_0 — частота фонона. Поэтому в последние шесть лет, когда появились независимые эксперименты, в которых в спектре магнитополяронов^{2, 3}, экситонов⁴ и примесных центров⁵ были обнаружены особенности вблизи $\varepsilon_0 + \omega_0$, ситуация резко изменилась. Припороговые особенности в последние годы превратились в основной предмет исследования, и именно здесь получены наиболее интересные результаты.

Простейший аргумент в пользу того, что вблизи энергии $\varepsilon_0 + \omega_0$ спектр может обладать сложной структурой, заключается в следующем. Когда энергия системы несколько больше, чем $\varepsilon_0 + \omega_0$, в кристалле могут существовать независимо электронная подсистема (например, полярон) с энергией, близкой к ε_0 , и «реальный» фонон. Поэтому представляется естественным, что состояния, возникающие несколько ниже порога, могут представлять собой слабо связанные состояния фонона с электроном. Тут достаточно, например, провести аналогию с экситоном Ванье — Мотта.

Кроме того, существуют общие теоретические основания для возникновения особенностей вблизи $\varepsilon_0 + \omega_0$, никак не связанные с частными моделями. Действительно, хорошо известно⁶, что квантовомеханические поперечники имеют особенности вблизи порога реакций, и реакции с рождением фононов не составляют исключения. Напротив, поскольку дисперсия оптических фононов мала, пороговые особенности в электронном массовом операторе $\mathcal{M}$ усиливаются, что может иметь следствием полную перестройку спектра вблизи порога.

Очевидно, что оправдать пренебрежение дисперсией оптических фононов можно только в том случае, когда существенны фононы с малыми импульсами. Поэтому теория относится, строго говоря, только к электронным состояниям большого радиуса, которые описываются континуальной моделью. Однако можно надеяться, что некоторые качественные результаты теории сохраняются и для систем, выходящих из этого класса.

Первые теоретические исследования пороговых особенностей основывались на однофононной модели, в которой учитывались только бесфононные и однофононные состояния. С помощью этой модели удалось объяснить особенности циклотронного резонанса, возникающие при $\omega_c \approx \omega_0$ (ω_c — циклотронная частота)⁷⁻⁹, предсказать существование нового типа локальных колебаний вблизи примесных центров¹⁰, а также обосновать предположение о существовании экситон-фононных комплексов в промежуточной связи¹¹.

При этом обнаружилось, что вблизи порога $\varepsilon_0 + \omega_0$ даже при слабой электрон-фононной связи в некоторых случаях существуют комплексы — состояния со значительным вкладом однофононных состояний, т. е. со значительным средним числом фононов $\langle N \rangle$. Напомним для сравнения, что вблизи дна спектра ε_0 число фононов в поляронной «шубе» $\langle N \rangle \sim \alpha$, где α — константа связи. Среди комплексов можно различать гибридные состояния, в которых вклады однофононных и бесфононных состояний близки, т. е. $\langle N \rangle \approx 1/2$, и связанные состояния, в которых вклад однофононных состояний доминирует, т. е. $\langle N \rangle \approx 1$. В отличие от «собственно поляронных» состояний (а также магнитополяронных, экситонных и т. д.), содержащих малое число «виртуальных» фононов, связанные состояния содержат один «почти реальный» фонон. Конечно, с общетеоретической точки зрения комплексы могут рассматриваться просто как определенные ветви поляронного спектра. Однако их свойства настолько специфичны, что их удобнее рассматривать как особую группу состояний.

Однофононная модель наиболее адекватна для описания резонансной ситуации, когда одна из энергий возбуждения электронной подсистемы близка к ω_0 (рис. 1, а). Эта ситуация может возникнуть либо когда у электронной подсистемы спектр дискретен (электрон в примесном центре),

либо когда она наряду с непрерывными имеет и дискретные квантовые числа (электрон Ландау, магнитоэкситон), что также обеспечивает наличие дискретных частот. Очевидно, что наличие резонанса усиливает эффект электрон-фононного взаимодействия. Характерным для результатов, получаемых с помощью однофононной модели, является то обстоятельство, что вблизи порога имеется не больше двух уровней, соответственно числу состояний, учтенных в этой модели.

Дальнейшее развитие теории показало, что в действительности спектр вблизи порога может быть значительно более богатым и может содержать

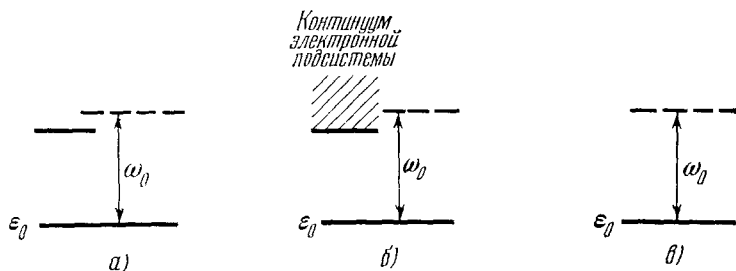


Рис. 1. Три ситуации, которые могут возникать вблизи порога испускания оптического фотона ¹⁸.

а) Резонансная ситуация — вблизи порога есть дискретный уровень электронной подсистемы; б) порог попадает в континуум электронной подсистемы, в) у электронной подсистемы уровни вблизи порога отсутствуют.

бесконечную серию связанных состояний, сгущающихся к порогу. Существование таких состояний никак не связано с резонансом и может иметь место в ситуациях, изображенных на рис. 1, в.

Впервые такие состояния были обнаружены для полярона в пределе адиабатически сильной электрон-фононной связи ¹², где однофононная модель заведомо неприменима. Эти состояния содержат на один «почти реальный» фотон больше, чем поляронные состояния вблизи дна зоны. При слабой связи такие состояния отсутствуют ^{12, 13}.

Изучение поправок к однофононной модели показало, что в ряде случаев в непосредственной близости к порогу эта модель неприменима даже для слабой связи ^{9, 14}. Однофононная модель эквивалентна учету только простейшей диаграммы для массового оператора $\mathcal{M}$. Между тем вблизи порога диаграммы высших порядков прогрессивно нарастают и ряд теории возмущений для $\mathcal{M}$ расходится. Для нахождения спектра в этой области следует суммировать бесконечную последовательность диаграмм для $\mathcal{M}$ или, что то же самое, решать интегральное уравнение для электрон-фононной вершины Γ ¹⁵. Когда эта процедура была явно выполнена для магнитополярона ¹⁶, то оказалось, что даже при слабой связи под порогом может существовать бесконечная последовательность связанных состояний электрона и фотона.

Выше мы предполагали и всюду будем предполагать в дальнейшем, что ширины электронных и экситонных зон превышают ω_0 , как это имеет место в типичных полупроводниках. При этом образование связанных состояний тесно увязывается с пороговыми явлениями. Однако связанные состояния (экситон + фотон, экситон + магнотон, два фотона и др.) возникают и в таких системах, где ω_0 превышает ширину зон, — в органических кристаллах, магнетиках и др. Сопоставление систем обоих типов проведено в ¹⁷.

Специфической особенностью комплексов, включающих оптический фотон, является участие в них несохраняющейся частицы. Действительно, гамильтониан электрон-фононного взаимодействия обычно выбирается

линейным по фоновым амплитудам и, следовательно, не сохраняет числа фононов. Поэтому стабильность комплексов по отношению к распаду с исчезновением фонона определяется только законами сохранения энергии и импульса.

Общий план настоящего обзора таков. В гл. 2 рассматривается одно-фононная модель, а в гл. 3 дается общий вывод уравнения для Γ в случае слабой связи. В последующих главах теория развивается применительно к конкретным системам и попутно обсуждаются экспериментальные данные *). В тех случаях, когда можно ограничиться слабой связью, теория целиком основывается на общем подходе, изложенном в гл. 2 и 3.

1. ЭЛЕКТРОН-ФОНОННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

Традиционная форма гамильтониана электрон-фононного взаимодействия такова:

$$\mathcal{H}_{eL} = \frac{1}{V^{1/2}} \sum_{\mathbf{q}} c_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} b_{\mathbf{q}} + \text{э. с.}, \quad (1.1)$$

где $\mathbf{r}$ — координата электрона, $\mathbf{q}$ — импульс фонона, $b_{\mathbf{q}}$ — оператор уничтожения фонона, $c_{\mathbf{q}}$ — матричный элемент взаимодействия, а V — объем системы. В конечные результаты обычно входит величина

$$\mathcal{B}(\mathbf{q}) = |c_{\mathbf{q}}|^2, \quad (1.2)$$

которая в изотропном случае зависит только от модуля q . Для взаимодействия с бездисперсионными оптическими фононами ее удобно представить как

$$\mathcal{B}(q) = \alpha \frac{4\pi\omega_0^2}{p_0^3} \Phi(q), \quad p_0 = \sqrt{2m\omega_0}, \quad (1.3)$$

где α — безразмерная константа связи, m — эффективная масса электрона. Форм-фактор

$$\Phi(q) = 1 - \text{деформационное взаимодействие (ДО-взаимодействие)}, \quad (1.4a)$$

$$= \frac{p_0^2}{q^2} - \text{поляризационное взаимодействие (РО-взаимодействие)}. \quad (1.4b)$$

Для РО-взаимодействия определенная таким образом α совпадает с фрёлиховской:

$$\alpha = \frac{e^2}{\nu_0} \frac{1}{\kappa}, \quad \frac{1}{\kappa} = \frac{1}{\kappa_\infty} - \frac{1}{\kappa_0}, \quad \frac{1}{2} m v_0^2 = \omega_0, \quad (1.5)$$

где κ_∞ и κ_0 — высокочастотная и низкочастотная диэлектрические проницаемости. Различают случаи слабой ($\alpha \ll 1$), промежуточной ($\alpha \sim 1$) и сильной ($\alpha \gg 1$) связи.

Иногда в $\mathcal{H}_{eL}$ включаются также члены, квадратичные по b , b^* ; однако к настоящему времени с таким взаимодействием рассмотрена только задача о магнитополяро-не (гл. 7).

2. ОДНОФОНОННАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим простую модель, в которой частица с двумя ветвями затравочного спектра $E_1(\mathbf{p})$ и $E_2(\mathbf{p})$ взаимодействует при нулевой температуре с оптическими фононами частоты ω_0 (без дисперсии), причем испускание фонона переводит частицу с одной ветви на другую (рис. 2). Как изменится верхняя ветвь 2 в результате этого взаимодействия?

Предположим вначале, что взаимодействие с фононами слабое. Тогда в дополнение к бесфононным состояниям $\varphi_s(\mathbf{p})$ (частица с импульсом $\mathbf{p}$ на ветви $s = 1, 2$) достаточно рассмотреть однофононные состояния $\varphi_s(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ ($\mathbf{q}$ — импульс фонона). Возмущенная волновая функция для ветви 2 будет

$$\psi_2(\mathbf{p}) \propto \varphi_2(\mathbf{p}) + \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{\gamma_{12}(\mathbf{q})}{\varepsilon - \omega_0 - E_1(\mathbf{p} - \mathbf{q}) + i0} \varphi_1(\mathbf{p} - \mathbf{q}, \mathbf{q}), \quad (2.1)$$

*) Более подробно экспериментальные данные проанализированы в 17.

где γ_{12} — матричный элемент взаимодействия (1.1), и энергия $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{p})$ должна быть найдена из уравнения

$$\varepsilon - E_2(\mathbf{p}) = \mathcal{M}^0(\varepsilon, \mathbf{p}), \quad (2.2)$$

где

$$\mathcal{M}^0(\varepsilon, \mathbf{p}) = \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{|\gamma_{12}(\mathbf{q})|^2}{\varepsilon - \omega_0 - E_1(\mathbf{p} - \mathbf{q}) + i0}, \quad (2.3)$$

Считаем, что, как обычно, $E_1(\mathbf{p})$ достигает минимума при $\mathbf{p} = 0$, и принимаем $E_1(0) \equiv \varepsilon_0 = 0$. Тогда, если энергия ε близка к порогу ω_0 , то знаменатель может стать малым (при $\mathbf{q} \approx \mathbf{p}$). Именно поэтому в знаменателе точная энергия ε не заменена на невозмущенную $E_2(\mathbf{p})$, т. е. используется теория возмущений Вигнера — Бриллюэна, а не Рэлея — Шрёдингера.

В области выше порога ($\varepsilon > \omega_0$) одночастичный спектр в обычном смысле слова отсутствует, имеется только непрерывный спектр распадных состояний. Поэтому ограничимся пока областью ниже порога ($\varepsilon < \omega_0$). В этой области вероятность обнаружить бесфононное состояние ψ_2 , когда система находится в квантовом состоянии ψ_2 , есть

$$Z(\mathbf{p}) = \left[1 + \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \left| \frac{\gamma_{12}(\mathbf{q})}{\varepsilon - \omega_0 - E_1(\mathbf{p} - \mathbf{q})} \right|^2 \right]_{\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{p})}^{-1} = \left[1 - \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \mathcal{M}^0(\varepsilon, \mathbf{p}) \right]_{\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{p})}^{-1}. \quad (2.4)$$

Иначе говоря, эффективное число фононов, участвующих в образовании ψ_2 , есть $\langle N \rangle = 1 - Z$.

Так как, начиная с $\varepsilon = \omega_0$, знаменатель в $\mathcal{M}^0$ может обращаться в нуль, то величина $\mathcal{M}^0$, как функция ε , обладает неаналитичностью при $\varepsilon \rightarrow \omega_0$. Характер этой неаналитичности определяется поведением подынтегральной функции при $\mathbf{q}$, близких к $\mathbf{p}$. Отсюда следует, что поведение $\mathcal{M}^0(\varepsilon)$ вблизи порога определяется поведением $E_1(\mathbf{p})$ при $\mathbf{p} \approx 0$, т. е. спектром на дне, куда сваливается частица, испустив фонон, и поведением $\gamma_{12}(\mathbf{q})$ при $\mathbf{q} \approx \mathbf{p}$, т. е. взаимодействием с тем фононом, которому частица передает свой импульс.

В ряде случаев удобна несколько иная постановка задачи, когда нас интересует определенное состояние ветви 2 (например $\mathbf{p} = 0$), но этим состоянием можно управлять с помощью внешнего параметра, например — магнитного поля H . Тогда E_2 и $\mathcal{M}^0$ будут зависеть не от $\mathbf{p}$, а от H . Так как обычно E_2 монотонно растет с ростом H , так же как и с ростом $\mathbf{p}$, то все, что будет в дальнейшем говориться о зависимости спектра от $\mathbf{p}$, в равной мере относится и к зависимости спектра от H или другого внешнего параметра.

Если ε далеко от порога, то правая часть уравнения (2.2) заведомо мала, и, подставив туда $\varepsilon = E_2$, мы найдем обычную поляронную перенормировку спектра, которая мала в рассматриваемом здесь случае слабой связи. Такая ситуация имеет место на начальном участке ветви 2. На этом участке $Z(\mathbf{p}) \approx 1$, т. е. состояния являются практически бесфононными.

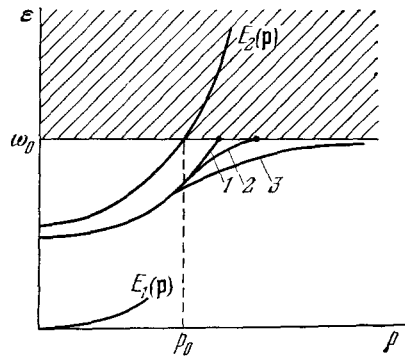


Рис. 2. Изменение спектра в однофононной модели.

Когда импульс приближается к p_0 , энергия ε приближается к ω_0 , и дальнейший ход спектра существенно зависит от характера неаналитичности $\mathcal{M}^0(\varepsilon)$ (Питаевский¹⁵). Заметим, что если изучается зависимость

Таблица I

Классификация пороговых явлений по характеру неаналитичности

Характер неаналитичности	Физический объект	Ветви спектра		Параметр, управляющий спектром	Литература
		1	2		
а)	Экситон (взаимодействующий с поляризационными фононами)	Экситонный уровень $1s$	Уровни $2s, 3s, \dots$	Положение уровня 2 относительно уровня 1	11, 18
б)	То же	То же	Уровни $2p, 3p, \dots$	То же	11, 18
б)	Электрон	Поляронная ветвь		Импульс	19
б)	Экситон в сильном магнитном поле	Экситон под нижней зоной Ландау $n=0$	Экситон под зоной Ландау $n=1$	Магнитное поле	20
в)	Электрон в сильном магнитном поле	Электрон в нижней зоне Ландау $n=0$	Электрон в любой зоне Ландау $n=0, 1, \dots$, дно которой ниже ω_0 Электрон в зоне Ландау $n=1$	Продольная компонента импульса Магнитное поле	21, 22 2, 8, 9
в)	Электрон при $p=0$ (взаимодействующий с поляризационными фононами)	Поляронная ветвь		Нет	12
в)	Экситон в одномерном кристалле	Экситонная ветвь		Импульс	23
г)	Примесный центр	Основной электронный уровень	Возбужденный уровень	Расстояние между уровнями	10

спектра от внешнего параметра, то приближение к порогу означает приближение к резонансу между частотой фонона ω_0 и частотой перехода в спектре $E_2 - E_1$. В этих случаях пороговые эффекты приобретают характер резонансных.

Рассмотрим теперь несколько характерных типов неаналитичности, возникающих в реальных задачах (табл. I):

$$\text{а) } \mathcal{M}^0(\varepsilon) = -A + B(\omega_0 - \varepsilon) - C(\omega_0 - \varepsilon)^{3/2} + \dots, \quad (2.5a)$$

$$\text{б) } \mathcal{M}^0(\varepsilon) = -A + B(\omega_0 - \varepsilon)^{1/2} + \dots, \quad (2.5б)$$

$$\text{в) } \mathcal{M}^0(\varepsilon) = -A(\omega_0 - \varepsilon)^{-1/2} + \dots, \quad (2.5в)$$

$$\text{г) } \mathcal{M}^0(\varepsilon) = -A(\omega_0 - \varepsilon)^{-1} + \dots \quad (2.5г)$$

Входящие сюда величины A, B, C вещественны; их можно считать не зависящими от p или H , так как эта зависимость обычно не влияет на картину спектра вблизи порога. Случаям а) — в) отвечают законы дисперсии, показанные на рис. 2 кривыми 1—3 соответственно.

При сильной неаналитичности (кривая 3) спектр продолжается неограниченно в область больших импульсов, причем энергия практически перестает зависеть от p и равна примерно ω_0 . Такое явление получило название пиннинга (to pin — прикалывать); говорят о пиннинге ветви 2 к ветви 1 + фотон. Рассмотрим теперь структуру состояний в области пиннинга, т. е. при $\varepsilon \rightarrow \omega_0$. Легко видеть, что при этом $Z \rightarrow 0$, т. е. затравочные состояния φ_2 почти не принимают участия в формировании этих состояний. В интегрирование по q в (2.3) основной вклад дает область, где $E_1 \approx 0$. Это значит, что в области пиннинга частица находится на дне зоны 1 и поэтому энергия и импульс состояния в области пиннинга почти целиком обязаны фотону. Понижение энергии этих состояний по сравнению с ω_0 — суммарной энергией частицы и фотона — можно понимать как энергию связи. С этой точки зрения состояния в области пиннинга являются связанными состояниями частицы на дне зоны 1 и фотона.

Состояния с импульсами, близкими к p_0 , носят промежуточный характер между поляронными состояниями в начале ветви и связанными состояниями в конце ветви. Легко проверить, что для них $Z(p_0) \approx 1/2$, т. е. эти состояния содержат в равной мере бесфотонные и однофотонные состояния. Мы будем называть состояния такого типа гибридными. И в гибридных, и в связанных состояниях имеется заметное участие почти «реального» фотона. Поэтому удобно объединить их общим понятием — комплекс частица + фотон.

Если обозначить в (2.5 в) $A = \alpha \omega_0^{3/2}$, то α будет играть роль безразмерной константы связи. Тогда можно показать, что гибридные состояния лежат на расстоянии от порога $|\varepsilon - \omega_0| \sim \alpha^{2/3} \omega_0$, а связанные состояния, для которых $Z \ll 1$, — на расстоянии $|\varepsilon - \omega_0| \ll \alpha^{2/3} \omega_0$. Таким образом, по мере увеличения импульса мы проходим последовательно через поляронные состояния с $\langle N \rangle \sim \alpha$, гибридные состояния с $\langle N \rangle \approx 1/2$ и связанные состояния с $\langle N \rangle \approx 1$.

В случае б) с более слабой неаналитичностью спектр имеет точку окончания и подходит к ней, касаясь прямой $\varepsilon = \omega_0$, т. е. также имеется пиннинг, но выраженный более слабо. Очевидно, что $Z \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow \omega_0$, так что вблизи порога мы снова имеем связанные состояния, а между ними и началом ветви находятся гибридные состояния. Если в (2.5б) обозначить $B = \alpha \omega_0^{1/2}$, то гибридные состояния лежат на расстоянии от порога $|\varepsilon - \omega_0| \sim \alpha^2 \omega_0$, а связанные — на расстоянии $|\varepsilon - \omega_0| \ll \alpha^2 \omega_0$. В реальной ситуации порог всегда размыт, и если его размытие не слишком мало, то случаи б) и в) будут качественно близки, так как далекая часть ветви 3 попадет в область размытия и не проявится.

Очень слабая неаналитичность соответствует случаю а). Спектр имеет точку окончания, к которой он подходит с конечным наклоном. Очевидно, что $Z \approx 1$ всюду, даже в непосредственной близости к порогу, т. е. ни гибридных, ни тем более связанных состояний под порогом в этом случае не существует.

Со степенью неаналитичности связана и возможность введения квазичастиц в области непрерывного спектра вблизи порога. В случаях а) и б), когда есть точка окончания спектра, это возможно, так как обратное время жизни квазичастицы $\Gamma(\varepsilon) = \text{Im } \mathcal{M}^0(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow \omega_0$. В случае в) $\Gamma(\varepsilon) \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow \omega_0$, и поэтому непосредственно за порогом квазичастиц

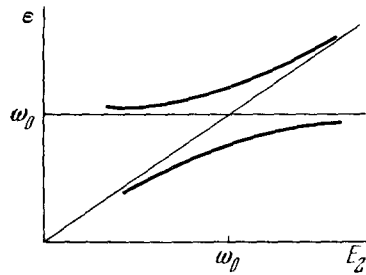


Рис. 3. Изменение спектра при смешного центра при взаимодействии с оптическими фотонами; предполагается $E_1 = 0$.

не существует. Отметим еще, что из-за взаимодействия с фононами дно ветви 1 смещается вниз; это приводит к перенормировке положения порога, но не влияет на качественную картину спектра.

Несколько особое положение занимает случай г), соответствующий примесным центрам. При этом E_1 и E_2 не зависят от p ; из-за дискретности спектра континуум при $\varepsilon > \omega_0$ отсутствует и незатухающие состояния существуют как ниже, так и выше порога (рис. 3). В этом случае также имеется пиннинг в функции положения уровня E_2 относительно $E_1 = 0$.

3. ПОРОГОВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Выражение $\mathcal{M}^0$, определяемое формулой (2.3), представляет собой массовый оператор, вычисленный в низшем порядке по взаимодействию (простейшая диаграмма на рис. 4). Поэтому для оценки пределов применимости однофононной модели следует вычислить вклады от следующих

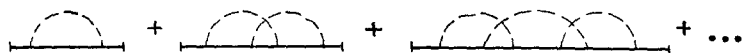


Рис. 4. Последовательность диаграмм для массового оператора электрона, существенная в пороговом приближении.

порядков теории возмущений. Прямое вычисление показывает, что если $\mathcal{M}^0(\varepsilon)$ неограниченно растет при $\varepsilon \rightarrow \omega_0$ (случаи в) и г)), то вклады от следующих порядков растут при $\varepsilon \rightarrow \omega_0$ еще быстрее, причем скорость роста увеличивается вместе с порядком вклада. Диаграммы, существенные в такого рода обстоятельствах, были выделены Пятаевским¹⁵; было показано,

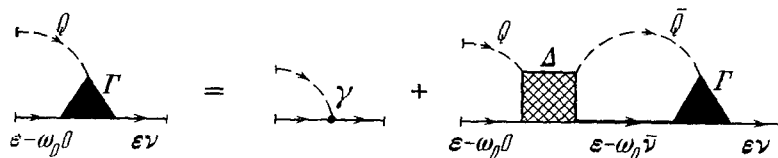


Рис. 5. Уравнение для вершины Г.

что в припороговой области опасными являются такие сечения диаграмм, в которых процесс распада является почти реальным. Вблизи порога с испусканием оптического фонона опасными являются сечения по одной

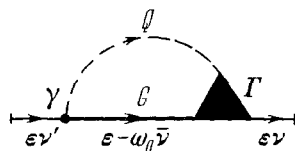


Рис. 6. Выражение массового оператора через Г.

электронной и одной фононной линии. Выделение опасных сечений приводит к уравнению для вершины Г, которое для рассматриваемого случая изображено на рис. 5. На этом рисунке сплошные и штриховые линии соответствуют функциям Грина электрона G и фонона D ; γ есть затравочная вершина, определяемая из гамильтониана (1.1); заштрихованный четырехугольник Δ является компактным, т. е. не имеет опасных сечений. Если найти Г, то затем можно вычислить $\mathcal{M}$ с помощью уравнения Дайсона (рис. 6).

В дальнейшем предполагается, что система находится при нуле температуры и концентрация электронов исчезающе мала. В силу последнего обстоятельства во всех внутренних линиях можно пренебречь перенормировкой D и считать

$$D(\omega q) = \frac{1}{\omega - \omega_0 + i0} - \frac{1}{\omega + \omega_0 - i0}. \quad (3.1)$$

По той же причине все G являются запаздывающими. Это позволяет во всех диаграммах выполнить интегрирование по энергетическим параметрам ω ¹⁴ с помощью соотношения

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} iD(\omega\mathbf{q}) F(\omega) = F(\omega_0 - i0), \quad (3.2)$$

где $F(\omega)$ аналитична при $\text{Im } \omega < 0$. Это означает, что во всех G следует заменить все ω на ω_0 и что внутренней фононной линии соответствует только интегрирование по $\mathbf{q}$.

Рассмотрим сначала представление для $\mathcal{M}$ на рис. 6, где ν есть набор квантовых чисел электрона, ε — его энергетический параметр, а Q означает набор тех компонент импульса фонона $\mathbf{q}$, которые не определяются из квантовых чисел электрона законами сохранения в вершине. Очевидно,

$$\mathcal{M}_{\nu\nu}(\varepsilon) = \int d\bar{\nu} \int dQ \gamma_{\nu\bar{\nu}}^*(Q) G_{\bar{\nu}}(\varepsilon - \omega_0) \Gamma_{\bar{\nu}\nu}(\varepsilon; Q). \quad (3.3)$$

Если ε лежит вблизи порога, то $\varepsilon - \omega_0$ лежит вблизи дна спектра, где теория возмущений применима. Поэтому, если не интересоваться перенормировкой порога за счет перенормировки дна, то можно заменить энергию G на свободную:

$$G_{\bar{\nu}}^0(\varepsilon - \omega_0) = (\varepsilon - \omega_0 - E_{\bar{\nu}} + i0)^{-1}, \quad (3.4)$$

где $E_{\bar{\nu}}$ — спектр свободного электрона. Пусть $\nu = 0$ соответствует основному состоянию, и выберем снова $E_0 = 0$. Тогда видно, что когда ε близко к порогу ω_0 , то $G_{\bar{\nu}}$, как функция $\bar{\nu}$, велико при $\bar{\nu}$, близких к $\bar{\nu} = 0$. В этих условиях можно вынести за знак интеграла γ и Γ при интегрировании по $\bar{\nu}$ при $\bar{\nu} = 0$. В действительности это означает предположение, что вершины аналитичны по $\bar{\nu}$, которое фактически выполняется в большинстве интересных случаев. Для γ это можно проверить непосредственно, а для Γ можно оправдать после того, как оно будет найдено. Поэтому можно написать

$$\mathcal{M}_{\nu\nu}(\varepsilon) = \Lambda(\varepsilon) \int dQ \gamma_{\nu 0}^*(Q) \Gamma_{0\nu}(\varepsilon; Q), \quad (3.5)$$

где

$$\Lambda(\varepsilon) = \int d\nu G_{\nu}^0(\varepsilon - \omega_0). \quad (3.6)$$

Так как $\mathcal{M}^0$ получается из $\mathcal{M}$ заменой Γ на γ , то отсюда видно, что $\Lambda(\varepsilon)$ и $\mathcal{M}^0(\varepsilon)$ имеют одинаковое поведение при $\varepsilon \rightarrow \omega_0$. Легко видеть также, что сингулярность этих величин связана с поведением плотности состояний $\rho(\varepsilon)$ на дне спектра, так как $\text{Im} \Lambda(\varepsilon) \propto \rho(\varepsilon - \omega_0)$.

Рассуждая точно так же, можно преобразовать уравнение на рис. 5 для искомой $\Gamma_{0\nu}$ к виду

$$\Gamma_{0\nu}(\varepsilon; Q) = \gamma_{0\nu}(Q) + \Lambda(\varepsilon) \int d\bar{Q} \bar{\Delta}_{00}(\varepsilon; Q, \bar{Q}) \Gamma_{0\nu}(\varepsilon, \bar{Q}). \quad (3.7)$$

Величина Λ не имеет опасных сечений и поэтому регулярна вблизи порога; для нее можно положить $\varepsilon = \omega_0$, и при слабой связи вычислить ее по теории возмущений. Если ограничиться простейшей диаграммой для Δ , показанной на рис. 7, то решение уравнения (3.7) эквивалентно после подстановки Γ в (3.5) суммированию ряда, показанного на рис. 4.

Вывод уравнения (3.7) является в известном смысле схематическим. Так, было предположено, что уровень $\nu = 0$ не вырожден и что $\gamma_{0\nu}(Q)$ не имеет особенностей. Эти ограничения легко снять, несколько

модифицировав вывод для каждого конкретного случая. Например, в ¹³ было произведено такое обобщение на случай сингулярности в γ применительно к полярону с $p = 0$. Существенным является единственно то обстоятельство, что интегрирование всегда сохраняется только по тем переменным, от которых не зависит суммарная энергия электрона и фонона в опасном сечении.

Уравнение (3.7) является интегральным уравнением для Γ с ядром Δ и параметром Λ . Хотя ядро мало, $\Delta \propto \gamma^2 \propto \alpha$, эта малость может компенсироваться большой величиной Λ вблизи порога. Если Λ ограничено или ε достаточно удалено от порога, то уравнение можно итерировать, что соответствует разложению $\mathcal{M}$ по α . Если же Λ не ограничено и нас интересует область непосредственной близости к порогу, то уравнение надо решать не прибегая к итерациям.

Рис. 7. Простейшее приближение ядра уравнения для Γ .

Это было сделано для магнитополярона ¹⁶ и примесного центра ²⁴. В обоих случаях существует бесконечная последовательность уровней, сгущающихся к порогу и описывающих связанные состояния электрона и фонона. Богатство припорогового энергетического спектра непосредственно связано с богатством спектра соответствующего интегрального уравнения для Γ .

Здесь уместно отметить, что уравнение для Γ в ¹⁵ было алгебраическим, а не интегральным и поэтому не приводило к богатому околупороговому

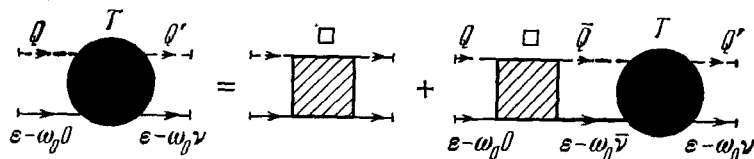


Рис. 8. Уравнение для амплитуды рассеяния T .

спектру. Интегральный характер уравнения для Γ связан с тем, что оптический фонон имеет пренебрежимо малую дисперсию. Поэтому энергия в опасном сечении не зависит от Q , состояния со всеми Q являются припороговыми и интегрирование по ним сохраняется.

В наиболее явной форме связь между энергетическим спектром и спектром интегрального уравнения выступает, если рассматривать уравнение для электрон-фононной амплитуды рассеяния T (рис. 8), которое можно получить буквально так же, как уравнение для Γ :

$$T_{ov}(\varepsilon; Q, Q') = \square_{ov}(Q, Q') + \Lambda(\varepsilon) \int d\bar{Q} \square_{00}(Q, \bar{Q}) T_{ov}(\varepsilon; \bar{Q}, Q'). \quad (3.8)$$

Ядро этого уравнения $\square$ связано с ядром Δ уравнения для Γ соотношением на рис. 9. Из (3.8) видно, что T является резольвентой ядра $\square$; поэтому T имеет особенность, когда $\Lambda(\varepsilon)$ совпадает с одним из характеристических чисел ядра Λ_r . А это значит, что уравнение

$$\Lambda(\varepsilon) = \Lambda_r \quad (3.9)$$

определяет спектр двухчастичных связанных состояний электрона и фонона. Здесь уместно отметить, что так как фонон является несохраняющейся частицей, то спектры однофононной функции Грина G и двухчастичной функции $K = GD + GDTGD$ совпадают²⁵. Это очевидно из того, что K содержит диаграммы, изображенные на рис. 10, а, а G содержит диаграммы, изображенные на рис. 10, б.

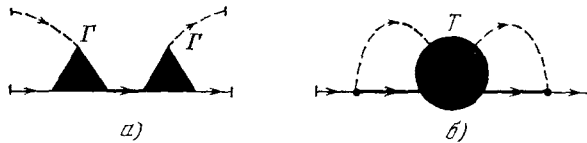


Рис. 10. Диаграммы, иллюстрирующие совпадение спектров одночастичной (электронной) и двухчастичной (электрон + фонон) функций Грина.

Поскольку число фононов не сохраняется, полюсы D и G также связаны между собой. Эта связь легко устанавливается из вида поляризационного оператора фононов $\mathcal{P}$ (рис. 11). Он отличен от нуля, лишь если в петле, как обычно, одна G -функция запаздывающая, а другая опережающая, и потому пропорционален числу электронов. Проводя в $\mathcal{P}$ интегрирование по электронной частоте, легко видеть, что все особенности в $\mathcal{P}$ располагаются на частотах $\omega = \varepsilon_{\nu\nu'} \equiv \varepsilon_{\nu} - \varepsilon_{\nu'}$, являющихся частотами возбуждения в перенормированном спектре электрона. В результате все полюсы D , связанные с электрон-фононным взаимодействием, имеют вычеты, пропорциональные концентрации электронов, и располагаются на частотах $\varepsilon_{\nu\nu'}$. Поэтому спектр возбуждений электрона можно в равной мере находить из функции D и интерпретировать как возмущенный фононный спектр.

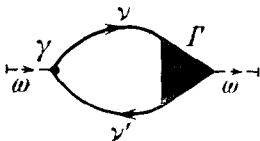


Рис. 11. Диаграмма, иллюстрирующая наличие в спектре фононной функции Грина энергий возбуждения электронного спектра.

В заключение укажем критерий, позволяющий пренебрегать дисперсией оптических фононов, которая обычно может быть записана в следующем виде:

$$\omega_q = \omega_0 - \frac{q^2}{2\mu}, \quad (3.10)$$

где μ порядка среднего геометрического из масс электрона и ядра. Существенные q определяются радиусом нелокальности ядер уравнений (3.7) и (3.8); они оказываются порядка обратного размера a электронного состояния, взаимодействующего с фононами. Дисперсию фононов можно не учитывать, если «кинетическая энергия» фононов $\Delta\omega_q \sim 1/\mu a^2$ существенно меньше, чем энергетический масштаб тонкой структуры спектра, возникшей из-за электрон-фононного взаимодействия. Явные оценки будут приведены при рассмотрении конкретных систем. Аналогичное соображение относится и к неопределенности в энергии фонона γ , связанной с конечным временем жизни фонона.

4. СПЕКТР ПОЛЯРОНА

Начнем с простейшей системы — полярона, т. е. электрона, взаимодействующего с поляризационными фононами.

а) Слабая связь — пороговая особенность. Очевидно, что здесь $E_1(p) = E_2(p) = \frac{p^2}{2m}$, и вычисление $\mathcal{M}^0$ согласно (2.3) с учетом (1.3) и (1.46) дает *)

$$\mathcal{M}^0(\varepsilon p) = -\alpha\omega_0 \frac{p_0}{p} \operatorname{arctg} \left[\frac{p^2}{2m(\omega_0 - \varepsilon)} \right]. \quad (4.1)$$

При $p \approx p_0$ и $\varepsilon \rightarrow \omega_0$ получается зависимость (2.56) с

$$A = \alpha\omega_0 \frac{\pi}{2}, \quad B = \alpha\omega_0^{1/2}. \quad (4.2)$$

Так как $\mathcal{M}^0$ остается конечным, характер спектра полностью определяется уже в этом порядке теории возмущений. Спектр имеет точку окончания,

*) Для ДО-взаимодействия интеграл для $\mathcal{M}^0$ расходится на больших q , и этот случай мы не будем рассматривать.

вблизи которой возникает слабый пиннинг с касанием (рис. 2, кривая 2)¹⁹. Поскольку в системе сохраняется полный импульс, на схеме типа рис. 1 должны откладываться состояния с определенным значением импульса; с учетом этого замечания легко понять, что здесь мы имеем дело со случаем a) на рис. 1.

Напротив, состояния с $p = 0$ при $\varepsilon \rightarrow \omega_0$ отвечают случаю b) на рис. 1. Здесь $\mathcal{M}^0 \propto (\omega_0 - \varepsilon)^{-1/2}$, и нужно суммировать всю цепочку рис. 4. Это приводит к

$$\mathcal{M} = -\alpha\omega_0 \left(\sqrt{1 - \frac{\varepsilon}{\omega_0}} - \alpha \right)^{-1}, \quad (4.3)$$

и уравнение для определения спектра $\varepsilon = \mathcal{M}(\varepsilon)$ имеет корень $\varepsilon = \omega_0$, попадающий точно на порог. Поэтому в рассматриваемом приближении, которое отвечает масштабу энергии связи $W \sim \alpha^2\omega_0$, связанные состояния отсутствуют, как это было указано в¹².

В принципе это не исключает возможности образования состояний с W , имеющим более высокий порядок малости по α , что соответствует учету в неприводимой четыреххвостке диаграмм более высокого порядка в сравнении с рис. 4. Поэтому необходим был более полный анализ, выполненный Матулисом¹³ с использованием обобщенной пороговой техники для вычисления $\mathcal{M}$ и Γ и тождества Уорда. В результате было показано, что общая структура $\mathcal{M}$ и Γ вблизи порога сохраняется такой же, как и для цепочки рис. 4, в конечном интервале значений α (во всяком случае при $\alpha \leq 0,26$) и что во всем этом интервале связанные состояния отсутствуют.

Особенности в спектрах межзонного поглощения, к которым должно приводить изменение спектра вблизи точки окончания $p \approx p_0$, обсуждались в работах^{26, 27}. Однако при этом игнорировалось кулоновское притяжение электрона и дырки, имеющее определяющее значение; поэтому мы не будем на них останавливаться подробнее.

б) Сильная связь — связанные состояния. При сильной связи полярон с $p \approx 0$ представляет собой электрон, находящийся на дискретном уровне (с $E_0 \approx -0,3 \alpha^2\omega_0$) в поле самосогласованной поляризации решетки; эффективная масса полярона $m^* \approx 2,3 \cdot 10^{-2} \alpha^4 m$ ^{28-30a}. Энергия связи любого комплекса, включающего фонов, должна быть, естественно, меньше ω_0 . Поскольку масштаб электронных энергий $\alpha^2\omega_0 \gg \omega_0$, связанные состояния удобнее искать по фоновому спектру кристалла, содержащего полярон (ср. конец гл. 3). При $\alpha \gg 1$, согласно Пекару³¹, колебания решетки можно описывать классически, причем состояние электрона адиабатически следует за ионами. Поэтому уравнение, определяющее спектр фоновых частот кристалла в присутствии полярона, легче всего получить полуклассически, рассматривая поляризацию электронного облака в поле решеточной поляризации. Так как еще $m^* \propto \alpha^4$ велико, то отдачей полярона при испускании фона можно пренебречь; при этом связанные состояния полярона и фона приобретают смысл локальных колебаний решетки вблизи полярона. Это же уравнение содержится и в квантовой адиабатической теории полярона^{30b}.

Применительно к покоящемуся полюрону уравнение для электрического потенциала φ решеточной поляризации, соответствующей колебаниям с частотой ω , имеет вид

$$(\omega_0^2 - \omega^2) \Delta \varphi(\mathbf{r}) = -8\pi\alpha\omega_0^2 \nu_0 \int d^3\mathbf{r}' \sum_{n>0} \frac{\psi_0(\mathbf{r}) \psi_n(\mathbf{r}) \psi_0^*(\mathbf{r}') \psi_n^*(\mathbf{r}')}{E_n - E_0} \varphi(\mathbf{r}'), \quad (4.4)$$

где ψ_n , E_n ($n > 0$) относятся к возбужденным уровням гамильтониана $\mathcal{H}_0$, описывающего электрон в поляризационной яме, соответствующей основному состоянию полярона (с электронной функцией ψ_0). Уравнение (4.4) неудобно тем, что ядро включает в себя все ψ_n . Положение меняется,

однако, если перейти от (4.4) к соответствующему экстремальному принципу и ввести вместо φ новую функцию f согласно

$$\psi_0 \varphi = (\mathcal{H}_0 - E_0) \psi_0 f. \quad (4.5)$$

Это возможно, так как в φ , определяемом из (4.4), содержится произвольная аддитивная постоянная. Окончательно для определения ω получается уравнение (Мельников и Рашба ¹²)

$$\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{16\pi\omega_0^2} = \max_f \left\{ \frac{\int d^3r \psi_0^2 (\nabla f)^2}{\int d^3r [\nabla (\Delta f + 2\nabla f \nabla \ln \psi_0)]^2} \right\}. \quad (4.6)$$

В (4.6) справа все длины выражены в единицах $(2m\alpha^2\omega_0)^{-1/2}$, и так как отсюда все параметры выпали, относительные энергии связи $W/\omega_0 = (\omega_0 - \omega)/\omega_0$ имеют универсальные значения.

Интересно, что в (4.6) вся информация об электронном спектре полярона свелась к одной функции ψ_0 , которая может быть найдена с высокой точностью. Поскольку ψ_0 сферически-симметрично, а правая часть (4.6) положительно определена, существуют экстремали f со всеми значениями углового момента; следовательно, существует бесконечное число собственных значений $\omega_r < \omega_0$. Для низших уровней оценка дает $W_r = \omega_0 - \omega_r \approx (0,10 - 0,15) \omega_0$.

Поскольку все эти состояния лежат под порогом и W_r заметно меньше, чем ω_0 (правда, малость здесь численная, а не буквенная), их естественно интерпретировать как связанные состояния полярона и фонона. Если учесть зависимость их энергии от полного импульса системы $\mathbf{p}$, то придем к заключению, что по крайней мере вблизи $\mathbf{p} = 0$ образуются новые ветви спектра, представляющие собой низшие возбужденные состояния полярона. Так как $|E_0| \gg \omega_0$, в спектре должны обнаруживаться кратные частоты $s\omega_r$; однако при $s > 1$ они будут затухающими.

Экспериментальные следствия из существования спектра связанных состояний пока не изучались. Поэтому, хотя связанные состояния, по-видимому, должны существенно сказываться на ряде кинетических явлений, сейчас с определенностью можно указать только на возникновение системы спутников вблизи полосы фундаментального решеточного поглощения и комбинационного рассеяния.

Сопоставляя результаты по слабой и сильной связи, можно прийти к выводу, что первое связанное состояние должно возникнуть при некотором α_c , величина которого, однако, остается пока неизвестной. В кристаллах, исследованных к настоящему времени экспериментально, $\alpha \leq 3$. Поэтому очень интересно, попадает ли α_c в этот диапазон. Имеющиеся предварительные оценки позволяют надеяться, что это так и $\alpha_c \approx 1$ (либо даже < 1 ; ср. ¹³).

5. ПРИМЕСНЫЕ ЦЕНТРЫ

Рассмотрим теперь проблему примесного центра, т. е. электрона, находящегося на локальном уровне в поле дефекта и взаимодействующего с фононами. Вследствие электрон-фононного взаимодействия вблизи центра спектр фононов возмущается и поэтому могут возникнуть связанные состояния локализованный электрон + фонон, которые на другом языке могут быть описаны как особый тип локальных фононных мод. Их возникновение не имеет ничего общего с обычными механизмами образования локальных мод (связанными с различием масс, а также с изменением жесткостей связей, вызванным изменением конфигураций валентных электронов) и целиком обусловлено взаимодействием слабо связанного примесного электрона с фононами. Они получили название диэлектрических мод. В зависимости от соотношения между ω_0 и потенциалом

ионизации центра R ситуация может быть как резонансной, так и нерезонансной. При слабой связи эта проблема может быть проанализирована в общем виде ²⁴, так что можно проследить переход между различными предельными случаями. Экспериментальные данные, полученные к настоящему времени, убедительно подтверждают существование диэлектрических мод.

а) Г и б р и д н ы е и с в я з а н н ы е с о с т о я н и я. Ниже мы предполагаем только, что основное состояние центра не вырождено, в остальном модель центра произвольна.

Вычисление $\mathcal{M}^0$ согласно (2.3) приводит к (2.5г), т. е. надо суммировать ряд рис. 4. Существенное осложнение в сравнении с поляроном и магнитополяроном (ср. гл. 4 и 7) связано с тем, что $\mathcal{M}$ и Γ недиагональны по квантовым числам электронных уровней. Однако благодаря тому специфическому обстоятельству, что спектр электронной подсистемы является дискретным, стандартное уравнение (3.7) для Γ может быть сведено к уравнению, непосредственно определяющему $\mathcal{M}$.

Это уравнение имеет вид

$$\mathcal{M}^{-1}(\varepsilon) = (\varepsilon - \omega_0 - E_0) A^{-1} - G^0(\varepsilon - 2\omega_0), \quad (5.1)$$

где

$$A_{ss'} = \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \gamma_{s0}(\mathbf{q}) \gamma_{0s'}(-\mathbf{q}). \quad (5.2)$$

Индексы s, s' в вершинах $\gamma_{ss'}(\mathbf{q})$ нумеруют все электронные уровни центра; $s = 0$ отвечает основному уровню.

Можно показать, что обычное уравнение для полюсов G

$$\text{Det} \|\mathcal{M}^{-1} - G^0\| = 0 \quad (5.3)$$

совместно с (5.1) приводит к уравнению (Рашба ²⁴)

$$\text{Det} \left\| A_{ss'} - \delta_{ss'} W(E_s - \omega_0 + W) \frac{\omega_0 + E_s}{2E_s} \right\| = 0 \quad (s, s' = 1, 2, \dots, \infty). \quad (5.4)$$

В (5.4) E_s — энергии возбуждения центра (далее $E_0 = 0$), а $W = \omega_0 - \varepsilon$ — энергия связи комплекса, о которой мы здесь будем говорить как об энергии связи фонона. Подчеркнем, что здесь исключены значения $s, s' = 0$.

Пользуясь общим уравнением (5.4), удобно рассмотреть предельные случаи. Если система близка к резонансу $E_s \approx \omega_0$ (рис. 1, а), точнее, если

$$|E_s - \omega_0| \ll \Delta E, \quad (5.5)$$

где ΔE — характерное расстояние между электронными уровнями, то достаточно ограничиться двухуровневой схемой, т. е. учесть только один возбужденный уровень. Тогда (5.4) сводится к

$$A_{ss} = W(E_s - \omega_0 + W), \quad (5.6)$$

что совпадает с уравнением, полученным Коганом и Сурисом в работе ¹⁰, в которой были предсказаны диэлектрические моды. Уравнение (5.6) эквивалентно однофононному приближению, что вообще характерно для резонансной ситуации. Для РО-взаимодействия $A_{ss} \sim \alpha \omega_0 (R \omega_0)^{1/2}$.

В непосредственной близости к резонансу

$$W \approx A_{ss}^{1/2}, \quad \text{если } |E_s - \omega_0| \ll A_{ss}^{1/2}. \quad (5.7a)$$

При некотором удалении от резонанса

$$W \approx A_{ss}/(E_s - \omega_0), \quad \text{если } A_{ss}^{1/2} \ll |E_s - \omega_0|. \quad (5.7b)$$

В резонансе $\langle N \rangle \approx 1/2$ для обеих корней, т. е. возникают гибридные состояния. При удалении от резонанса (переход от (5.7a) к (5.7b)) для уровня (5.7b), остающегося вблизи ω_0 , $N \rightarrow 1$; следовательно, возникает связанное состояние. Второй корень $\omega \approx E_s$ отвечает состоянию с $\langle N \rangle \sim \alpha$. Схематически ход уровней вблизи резонанса показан на рис. 12. Подчеркнем, что здесь есть связанные состояния как с $W > 0$, так и с $W < 0$, что является следствием дискретности электронного спектра и отсутствия дисперсии фононных частот.

Вне узкого интервала (5.7a) уравнение (5.4) упрощается:

$$\text{Det} \left\| A_{ss'} - \delta_{ss'} W \frac{E_s^2 - \omega_0^2}{2E_s} \right\| = 0 \quad (s, s' = 1, 2, \dots, \infty); \quad (5.8)$$

оно описывает ситуацию рис. 1, в. Сюда W входит линейно, и поэтому (5.8) легко исследовать обычными алгебраическими методами. Если все $E_s > \omega_0$, то все $W > 0$. Если несколько $E_s < \omega_0$, то возникает столько же корней $W < 0$. Для центрально-симметричных центров существуют состояния, отвечающие всем значениям углового момента. Очень существенно, что каждому значению момента отвечает бесконечное

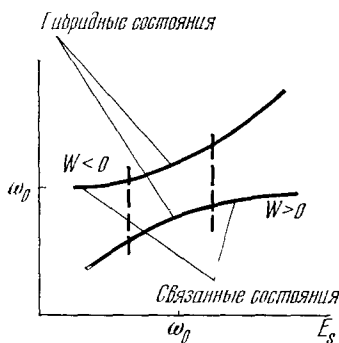


Рис. 12. Гибридные и связанные состояния для примесного центра в двухуровневой схеме (принято $E_0 = 0$).

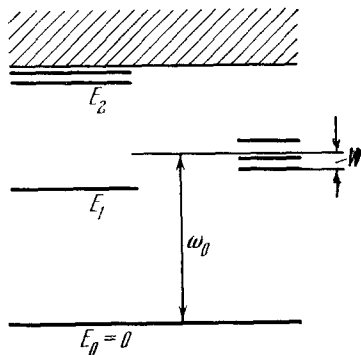


Рис. 13. Схема уровней примесного центра в нерезонансных условиях.

Слева — электронные уровни, справа — уровни связанных состояний фонона с центром (частоты локальных мод). Представлен случай, когда одна электронная частота $E_1 < \omega_0$.

число различных W^*). Схема уровней показана на рис. 13.

Уравнение (5.8), удобное для качественного исследования, тем не менее неудобно для количественного определения W . Однако можно вернуться к конфигурационному представлению^{24, 34}; тогда (5.8) преобразуется в

$$2A(\mathcal{H}_0 - E_0)\psi = W[(\mathcal{H}_0 - E_0)^2 - \omega_0^2]\psi, \quad (5.9)$$

где $\mathcal{H}_0$ — гамильтониан электрона в центре без взаимодействия с фононами, а интегральный оператор

$$A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \psi_0(\mathbf{r}) V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \psi_0(\mathbf{r}'), \quad V(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} |c_{\mathbf{q}}|^2 e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}. \quad (5.10)$$

Для взаимодействия с поляризационными фононами

$$V(\mathbf{r}) = \frac{e^2 \omega_0}{2r\kappa}. \quad (5.11)$$

Оценка энергии связи для этого случая дает

$$W_r = b_r \omega_0 [(\kappa_0 / \kappa_\infty) - 1] = b_r \alpha \omega_0 (\omega_0 / R)^{1/2}. \quad (5.12)$$

Факторы b_r могут быть определены из (5.9) вариационным методом: для низших уровней $b_r \approx 0,1$. Интересно, что при фиксированном κ_0 / κ_∞ энергия связи не зависит от R .

*) Количество диэлектрических мод ограничивается дисперсией фононов; ее роль в некоторых случаях проанализирована в^{10, 32}. Используя замечание в конце гл. 3, легко указать критерий, когда дисперсией можно пренебречь. Так как роль a здесь играет борковский радиус центра, то с учетом (5.12) получаем $\alpha (\omega_0 / R)^{3/2} \gg m / \mu$. В системах с более сложным спектром дисперсия фононов иногда может способствовать образованию связанных состояний³³.

б) Экспериментальное исследование диэлектрических мод. По-видимому, впервые влияние резонансного взаимодействия с фононами на спектр примесных электронов было исследовано для доноров Bi в Si. Онтон и др.⁵ предположили, что аномально большая ширина одной из полос в спектре донора обусловлена резонансным взаимодействием с TO (100)-фононами, и экспериментально показали, что при одноосной деформации полоса расщепляется на две, причем одна из компонент быстро сужается. Эти результаты легко можно понять, если учесть, что

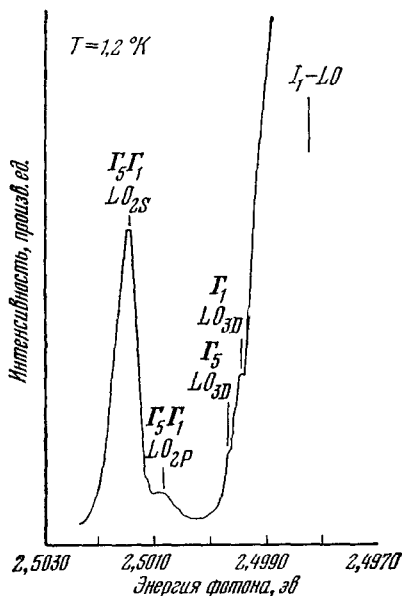


Рис. 14. Фононные спутники в спектре люминесценции примесных экситонов в CdS (по ³⁸).

Мощная полоса справа отвечает решеточным фононам, а остальные полосы — связанным состояниям фонона.

из-за конечной дисперсии фононов диэлектрическая мода возникает лишь при определенном соотношении между ω_0 и энергией возбуждения центра. Аналогичные данные имеются по Ga в Si ³⁵ и Te в AlSb ³⁶.

В нерезонансной ситуации диэлектрические моды были обнаружены Динном и др.³⁷ на донорах S, Te, Si и Sn в GaP. Для них энергия возбуждения составляет от 58 до 94 мэв при $\omega_0 = 50$ мэв; энергия связи фонона $W \sim 1$ мэв. Особенно интересно, что были выделены моды с различной симметрией. В работе ^{37a} было показано теоретически, что в комбинационном рассеянии должны доминировать *p*-моды, и экспериментально были найдены эти моды для всех примесей. В то же время *s*-моды были найдены в фоновом сопровождении полос свечения примесных экситонов; дополнительные слабые спутники были приписаны *d*-модам.

Еще более богатый спектр связанных состояний фононов был обнаружен в эмиссионном спектре примесных экситонов в CdS ³⁸ — он показан на рис. 14. Для акцепторов, с которыми связываются экситоны, $R \approx 4\omega_0$, т. е. система очень далека от резонанса. Хотя авторы ³⁸ отнесли наблюдавшиеся моды к *s*-, *p*- и *d*-типу, из-за правил отбора по четности следует ожидать преобладания мод с четным моментом; возможно, что в спектре рис. 14 присутствует несколько мод *s*-типа. Существенно отметить, что из-за отрицательной дисперсии фононов уровни связанных состояний накладываются на спектр коротковолновых фононов; следовательно, связанные

состояния являются метастабильными. Поэтому особенно интересно, что, хотя плотность фононного спектра в той области, куда попадают связанные состояния, велика (в особенности это относится к низшему уровню), тем не менее полосы, отвечающие связанным состояниям, узки и отчетливо видны.

Недавно наблюдался также спектр люминесценции примесных экситонов, связанных с нейтральными донорами, в CdS и CdSe ³⁹. Для доноров $R < \omega_0$, поэтому связанные состояния, строго говоря, не существуют. Тем не менее в спектрах наблюдалась четкая структура, которая, по-видимому, свидетельствует о том, что возникающие состояния имеют значительное время жизни.

Таким образом, диэлектрические моды уже наблюдались в резонансной ⁵, промежуточной ³⁷ и нерезонансной ^{37, 38} ситуациях. Их основные свойства хорошо согласуются с теорией. В ^{37a, 38} было получено также удовлетворительное количественное согласие теоретических и экспериментальных значений W ; ему нельзя, однако, придавать особого значения, так как, по-видимому, оно возникает за счет того, что ошибки, связанные с применением двухуровневого приближения и упрощенной модели центра, в значительной мере компенсируются.

6. ЭКСИТОН-ФОНОННЫЕ КОМПЛЕКСЫ

Следующей по сложности системой является экситон, в котором в сравнении с примесным центром возникает новый параметр — масса дырки. Физически различие в основном связано с тем, что из-за конечной массы при испускании фонона экситон испытывает отдачу — в результате вместо расходимости (2.5г) получаются гораздо более слабые особенности (2.5а) и (2.5б).

Интерес к экситон-фоонным комплексам был пробужден экспериментальными данными Лайена и Иоффе⁴. Они обнаружили в спектре экситонного поглощения ZnO, где ситуация отвечает рис. 1, б, максимум поглощения вблизи порога испускания фонона и приписали его «комплексу». Затем с аналогичных позиций были исследованы спектры ряда других кристаллов.

Ниже мы рассмотрим основные теоретические представления об условиях образования экситон-фоонных комплексов и кратко обсудим в этом плане экспериментальные данные. К сожалению, интерпретация данных по экситон-фоонным комплексам носит пока сугубо предварительный характер.

а) Дискретный спектр в резонансной ситуации. Сначала рассмотрим резонансную ситуацию (рис. 1, а) и ограничимся результатами, которые могут быть получены по стандартной теории возмущений в однофоонном приближении. Отделяя движение центра тяжести экситона и ограничиваясь состояниями с полным импульсом $\mathbf{P} = 0$, для взаимодействия с поляризационными фононами вместо (2.3) получаем

$$\mathcal{M}_{ss'}^0(\varepsilon) = \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \mathcal{B}(\mathbf{q}) \sum_{\bar{s}} \frac{\langle s | \rho_{\mathbf{q}} | \bar{s} \rangle \langle \bar{s} | \rho_{\mathbf{q}}^+ | s' \rangle}{\varepsilon - E_{\bar{s}} - \omega_0 - (q^2/2M) + i0}, \quad (6.1)$$

где

$$\rho_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) = \exp\left(i \frac{m_2}{M} \mathbf{q} \mathbf{r}\right) - \exp\left(-i \frac{m_1}{M} \mathbf{q} \mathbf{r}\right), \quad M = m_1 + m_2; \quad (6.2)$$

m_1, m_2 — массы электрона и дырки; индекс s нумерует кулоновские уровни. Наличие слагаемого $q^2/2M$ в знаменателе ликвидирует расходящуюся, поэтому можно ограничиться однофоонным приближением. Пороговое поведение $\mathcal{M}^0$ определяется поведением $\langle s | \rho_{\mathbf{q}} | s' \rangle$ при $q \rightarrow 0$. Соответственно возникают две возможности в зависимости от того, отличен ли от нуля матричный элемент $\langle s | \mathbf{r} | s' \rangle$ для пары состояний s, s' , для которых $|E_s - E_{s'}| \approx \omega_0$.

Если он отличен от нуля (например, пара состояний s - и p -типа), то получаем (2.5б) с

$$A \sim \alpha_m \frac{M}{m} \omega_0, \quad B \sim \alpha_m \left(\frac{M}{m}\right)^{3/2} \omega_0^{1/2}; \quad (6.3)$$

здесь α_m вычислено согласно (1.5) по приведенной массе m . Поэтому, согласно гл. 3, здесь возникают экситон-фоонные комплексы и пиннинг; графически картина описывается кривой 2 на рис. 2¹⁸. На пороге $Z \rightarrow 0$ согласно (1.5) и вероятность экситонного поглощения аннулируется.

Если $\langle s | \mathbf{r} | s' \rangle = 0$ (например, оба состояния s -типа), то приходим к (2.5а) с

$$A \sim \alpha_m \frac{M}{m} \omega_0, \quad B \sim \alpha_m \left(\frac{M}{m}\right)^2, \quad C \sim \alpha_m \left(\frac{M}{m}\right)^{5/2} \omega_0^{-1/2}. \quad (6.4)$$

Следовательно, при достаточно малом α_m комплексов не возникает, пиннинг отсутствует (кривая 1 на рис. 2), а вероятность поглощения слабо меняется вблизи порога¹⁸. За порогом возникает слабое затухание, пропорциональное $(\varepsilon - \omega_0 - E_s)^{3/2}$, и состояние s' может рассматриваться как квазистационарное.

Очень существенно, что в (6.4) во все возрастающих степенях входит фактор M/m . Если $M/m \gg 1$, то даже в области, где выполнены обычные критерии слабой связи для обеих частиц ($\alpha_m \ll 1$, $\alpha_M = \alpha_m (M/m)^{1/2} \ll 1$), возможно $B \sim 1$. При этом вклад бесфоонных состояний на пороге $Z \approx (1 + B)^{-1}$ заметно меньше единицы, т.е. образуются комплексы. Следовательно, при $M/m \gg 1$ рано нарушается критерий слабой

связи и теория должна быть обобщена. Это было сделано вариационным методом Тоёдзавой и Херманзоном^{41, 40}, которые для $2s$ -состояния построили вариант однофононного приближения, где учитываются виртуальные фононы основного состояния; наибольшие изменения возникают в зависимости интенсивности экситонного поглощения от $E_{s'}$ — E_s , которая становится немонотонной. Обобщение на p -состояния произведено в⁴¹.

В пределе $M/m \rightarrow \infty$ свойства экситона становятся тождественными свойствам примесного центра, а в этом случае (гл. 5) система связанных состояний возникает и вне резонанса (ситуация рис. 1, е). Поэтому естественно предположить, что при $M/m \gg 1$ они должны возникать и для экситонов. Хотя систематическая теория пока отсутствует, оценка, основанная на учете отдачи, приводит к следующему критерию образования нерезонансных связанных состояний²⁴:

$$\frac{m}{M} \lesssim 0,1 \frac{\kappa_0}{\kappa} \frac{\omega_0}{R}, \quad (6.5)$$

который является жестким, но не чрезмерно.

В кристаллах BeO ⁴², MgO ^{42, 43} и AgBr ⁴⁴⁻⁴⁶, наряду с основной экситонной полосой, наблюдались переходы в возбужденное состояние, которое расположено над основным на расстоянии $\Delta\omega$ таком, что $\Delta\omega < \omega_0 < R$. Было высказано предположение, что это возбужденное состояние представляет собой экситон-фононный комплекс, и так, например, объяснена аномально высокая интенсивность перехода в возбужденное состояние в MgO . Однако, поскольку специальные эксперименты, в которых варьировалось бы расстояние между электронными уровнями, не ставились, доказательства справедливости этого предположения отсутствуют.

б) Поглощение в ионизационном континууме вблизи порога. Перейдем к ситуации рис. 1, б. Здесь экситон-фононное поглощение попадает в область электронно-дырочного континуума. Поэтому последовательный учет электрон-фононного взаимодействия должен привести к более сложной картине, чем для непрямых переходов в Ge и Si, где дело сводится к появлению известных «ступенек». В рассматриваемом случае сравнимый вклад внесет изменение вероятности чисто электронных переходов, попадающих в этот же участок спектра.

Стандартный ряд теории возмущений для экситонной функции Грина F во втором порядке приводит к формуле для проводимости⁴⁷

$$\sigma(\omega) \propto \text{Im} \sum_{ss'} \psi_s(0) \psi_{s'}^*(0) \left\{ F_s^0(\omega) \delta_{ss'} + \right. \\ \left. + F_s^0(\omega) \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \mathcal{B}(q) \langle s | \rho_q | 0 \rangle F_{s'}^0(\omega - \right. \\ \left. - \omega_0 - (q^2/2m)) \langle 0 | \rho_q^\dagger | s' \rangle F_{s'}^0(\omega) \right\}. \quad (6.6)$$

Во втором слагаемом вычеты, связанные с F_s^0 , описывают поглощение с образованием $1s$ -экситона и фонона, а вычеты, связанные с $F_{s'}^0$, — изменение поглощения в электронно-дырочном континууме; $\psi_s(\mathbf{r})$ — кулоновские волновые функции.

На рис. 15 показан результат табуляции (6.6) применительно к параметрам CdTe , причем введена феноменологическая ширина экситонных уровней. Видно, что за основной экситонной полосой следует спутник, максимум которого расположен вблизи E_{th} — порога испускания фонона.

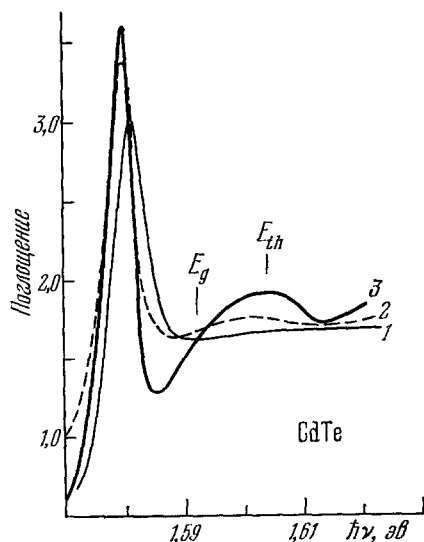


Рис. 15. Спектр экситонного поглощения CdTe при 77°K согласно⁵⁰ (2) и теоретический спектр (по⁴⁷) (3). Для сравнения приведена кривая 1, соответствующая отсутствию экситон-фононного взаимодействия. Стрелками E_g и E_{th} показаны граница электронно-дырочного континуума и порог испускания фонона.

Именно такого рода структура, обнаруженная в ZnO ⁴, а затем в других кристаллах (TlBr , TlCl ^{48, 49}, CdS , CdSe , CdTe ⁵⁰), послужила стимулом для обсуждения проблемы «комплексов». Однако, как следует из вышесказанного, она получает объяснение в рамках простой теории возмущений; из рис. 15 видно, что соответствие экспериментальных и теоретических данных для CdTe является удовлетворительным. Между тем в (6.6) максимум возникает в результате чисто интерференционного эффекта (типа эффекта Фано⁵¹). Нужно особо подчеркнуть, что формула (6.6), как полученная в конечном порядке теории возмущений для F , в принципе не может содержать каких-либо связанных и квазисвязанных состояний. Конечно, не исключено, что в кристаллах с большей электрон-фононной связью (типа TlCl и TlBr) вблизи порога возникают какие-то более сложные образования. Однако предпринятая пока попытка⁵² оформить идею «комплексов» теоретически в терминах квазисвязанных состояний экситона и фонона не принесла успеха, так как мнимая часть массового оператора (затухание) оказалось больше действительной.

7. МАГНИТОПОЛЯРОН

Вопрос о вычислении спектра магнитополярона вблизи порога распада возник в связи с экспериментами по межзонному магнитопоглощению и циклотронному резонансу, которые обнаруживали необычное поведение при совпадении циклотронной частоты ω_c с частотой продольного оптического фонона $\omega_0 \equiv \omega_{LO}$ (см. пункт г) этой главы и гл. 8 *). Теория для этого резонансного случая была построена, по существу, на основе однофононной модели^{8, 9}. Вблизи порога в спектре возникает структура с характерным масштабом $\alpha^{2/3}\omega_0$, ответственная за особенности поглощения. Однако так как поведение массового оператора в однофононной модели вблизи порога $\varepsilon = \omega_0$ определяется разложением типа (2.5в), то оказывается, что, несмотря на слабость связи ($\alpha \ll 1$), существует область вблизи порога, где теория возмущений для массового оператора (разложение $\mathcal{M}$ по α) неприменима. Это обстоятельство никак не связано с резонансом $\omega_c = \omega_0$. Вычисление следующих членов разложения $\mathcal{M}$ показывает, что $\mathcal{M}^0$ доминирует при $|\varepsilon - \omega_0| \gg \alpha\omega_0$. Эта оценка оправдывает вычисление резонансной структуры спектра с масштабом $\alpha^{2/3}\omega_0$; однако одновременно возникает вопрос, нет ли более тонкой структуры спектра, не связанной с резонансом, в той области вблизи порога, где теория возмущений неприменима.

Диаграммы $\mathcal{M}$ без пересечения фононных линий становятся существенными при $|\varepsilon - \omega_0| \sim \alpha\omega_0$. Их можно легко просуммировать во всех порядках по α ^{14, 54}; это приводит к $\mathcal{M}$, которое отличается от $\mathcal{M}^0$ только перенормировкой порога на величину порядка $\alpha\omega_0$. Однако в области $|\varepsilon - \omega_0| \lesssim \alpha^2\omega_0$ становятся существенными диаграммы с пересечениями. Их суммирование возможно только методами, описанными в гл. 3. Когда эта процедура была выполнена (Левинсон¹⁶), оказалось, что в спектре вблизи порога, в области порядка $\alpha^2\omega_0$, существуют дополнительные ветви спектра, описывающие связанные состояния электрона и фонона.

а) Основные уравнения. Для составления уравнений гл. 3 применительно к магнитополярону нужно прежде всего выделить набор квантовых чисел, соответствующий опасным сечениям. Он состоит из квантового числа Ландау n , продольной (вдоль $\mathbf{H}$) компоненты импульса электрона $k_z \equiv k$, одной из поперечных компонент электронного импульса, например k_x , и двух компонент импульса фонона $q_\perp, q_\parallel$.

*) Обзор различных эффектов, возникающих в условиях магнитофононного резонанса, дается в работе⁵³.

Уравнения существенно упрощаются благодаря тому обстоятельству, что точная функция Грина G диагональна по n , k и k_x и не зависит от k_x . Заметим, что диагональность G по n ^{55,56} является весьма нетривиальной — группа симметрии, ответственная за нее, в настоящее время неизвестна. Полная энергия в опасном сечении $n\omega_c + (1/2m)k^2 + \omega_0$ зависит только от n и k , и, следовательно, в качестве набора v , от которого G^0 критически зависит вблизи порога (ср. гл. 3), следует выбрать эти два квантовых числа. Тогда $v = 0$ отвечают $n = 0$, $k = 0$; поэтому при суммировании по n нужно удерживать лишь член $n = 0$, а при интегрировании по k основной вклад дают состояния с $k = 0$. Квантовое число $q_{||}$ может быть исключено благодаря существованию интеграла движения $p = k + q_{||}$ — полного продольного импульса пары электрон + фотон. Аналогично можно исключить k_x , так как $q_x + k_x$ тоже является интегралом движения. В результате в опасном сечении сохраняется только интегрирование по двум квантовым числам $q_{\perp}$, которые и играют роль величин Q в гл. 3. Следовательно, именно по $q_{\perp}$ будет происходить интегрирование в уравнениях типа (3.7) и (3.8).

Следует отметить, что спектр пары электрон + фотон не зависит от $k_x + q_x$, так же как спектр электрона не зависит от k_x . Наиболее удобно сразу исключить квантовые числа k_x переходом к градиентно-инвариантной технике⁵⁶.

Уравнение для вершины Γ типа (3.7) было впервые получено и решено для случая $\omega_c \gg \omega_0$ в¹⁶; более общее исследование было проведено в²². В дальнейшем мы будем использовать более удобное уравнение типа (3.8) для амплитуды рассеяния T ²⁸. При использовании градиентно-инвариантной техники можно выбрать такое определение «четыреххвосток» T и $\square$, что эти величины окажутся зависящими только от разности азимутальных углов $\varphi - \varphi'$ векторов $q_{\perp}$ и $q'_{\perp}$. Поэтому, если разложить эти величины в ряд Фурье типа

$$T(q_{\perp}, q'_{\perp}) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{il(\varphi - \varphi')} T_l(t, t'), \quad (7.1)$$

где

$$t = \frac{1}{2} a^2 q_{\perp}^2, \quad a = \left(\frac{c}{eH} \right)^{1/2}, \quad (7.2)$$

то можно явно использовать аксиальную симметрию задачи и отделить в интегральном уравнении угловые переменные. После этого уравнение для T превращается в ряд уравнений для T_l ($-\infty < l < +\infty$). Ядрами этих уравнений являются фурье-компоненты $\square_l$ ядра $\square$. Вместо Λ удобнее использовать пропорциональный ей массовый оператор

$$\mathcal{M}^0(\varepsilon) = -i\tilde{\alpha}\omega_0 \frac{p_0}{\sqrt{2m(\varepsilon - \omega_0) + i0}}, \quad \text{Im } \mathcal{M}^0(\varepsilon) < 0, \quad (7.3)$$

где

$$\tilde{\alpha} = \frac{1}{2} \alpha \frac{\omega_c}{\omega_0}, \quad p_0 = \sqrt{2m\omega_0}. \quad (7.4)$$

Если перейти к безразмерным величинам

$$\lambda = -\frac{1}{\omega_0} \mathcal{M}^0, \quad L_l = -\omega_0 \square_l, \quad R_l = -\omega_0 T_l,$$

то уравнения для T_l примут стандартный вид уравнений Фредгольма для резольвенты:

$$R_l(\varepsilon p; t, t') = L_l(p; t, t') + \lambda(\varepsilon) \int_0^{\infty} d\bar{t} L_l(p; t, \bar{t}) R_l(\varepsilon p, \bar{t}, t'). \quad (7.5)$$

Теперь ясно, что T имеет особенность по ε , когда $\lambda(\varepsilon)$ совпадает с одним из характеристических чисел ядра $\lambda_l^r(p)$, $r = 1, 2, \dots$. Особенность соответствует связанному состоянию, если она лежит ниже порога, т. е. при $\varepsilon < \omega_0$, когда $\lambda(\varepsilon) > 0$. Таким образом,

спектр связанных состояний определяется положительной частью спектра интегрального уравнения, причем из (7.3) следует закон дисперсии

$$\varepsilon_l^r(p) = \omega_0 \left\{ 1 - \frac{\tilde{\alpha}^2}{[\lambda_l^r(p)]^2} \right\}, \quad (7.6)$$

$$\lambda_l^r(p) > 0, \quad l = -\infty, \dots, +\infty, \quad r = 1, 2, \dots$$

Конструктивность такого подхода определяется реальными возможностями изучения спектра ядра. Выпишем его, например, для наиболее интересного случая $p = 0$:

$$L_l(t, t') = [\Phi(t) \Phi(t')]^{1/2} e^{-(t+t')/2} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} (tt')^{s/2} \left[J_{l+s}(2\sqrt{tt'}) \frac{\sigma}{s+\sigma} + \delta_{l,s} \frac{\sigma}{s-\sigma} \right], \quad (7.7)$$

где J_l — функции Бесселя и

$$\Phi(t) = \begin{cases} 1, & \text{ДО,} \\ \frac{\sigma}{t}, & \text{РО, } \sigma = \frac{\omega_0}{\omega_c}. \end{cases} \quad (7.8)$$

Исследование такого ядра возможно только в разных предельных случаях; однако этого оказывается достаточно, чтобы получить качественную картину спектра и установить основные закономерности. Они будут изложены в следующем пункте, а ниже будут вкратце указаны методы изучения ядра.

В сильных полях ($\sigma \ll 1$) в сумме (7.7) остается только член с $s = 0$. Для ДО-взаимодействия при $l \neq 0$ можно найти точное решение²⁵, используя инвариантность полиномов Лагерра относительно преобразования Бесселя. При $l = 0$ этому мешает второй член в скобке (7.7); однако поскольку этот член дает факторизующуюся часть ядра, то задача для спектра ядра может быть сведена к трансцендентному уравнению. В результате оказывается, что для любого l существует бесконечная неограниченно возрастающая последовательность положительных характеристических чисел, которая согласно (7.6) означает существование серии связанных состояний, сгущающихся к порогу. Для более актуального РО-взаимодействия точное решение найти не удается. Однако, сравнивая поведение ядра при $t = 0$ и $t = \infty$ для РО и ДО и используя некоторые общие теоремы теории интегральных уравнений, можно показать²⁵, что качественно спектр для РО такой же, как и для ДО.

В слабых полях ($\sigma \gg 1$) ряд функций Бесселя может быть переразложен в ряд типа $\sum_s \sigma^{-s} (tt')^{s/2}$ и ядро можно аппроксимировать вырожденными ядрами²². И в этом случае спектр содержит бесконечное число положительных неограниченно возрастающих характеристических чисел, так что серии связанных состояний существуют и в слабых полях.

Аналогичным образом исследуется интегральное уравнение типа (3.7) для вершины Γ , в результате чего может быть найден спектр одночастичной электронной функции Грина G . Можно показать²⁵, что в спектре $G_n(k)$ содержатся спектры $T_l(p)$ с $-\infty < l \leq n$ и $p = k$. Поэтому спектр совокупности G_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) совпадает со спектром совокупности T_l ($l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), в полном соответствии с общим замечанием в гл. 3.

б) Структура энергетического спектра. При описании спектра магнитополярона следует различать две ситуации: резонансную, когда $\omega_0 \approx \omega_c, 2\omega_c, \dots$ (рис. 1, а), и нерезонансную, когда эти частоты различны, хотя и могут быть одного порядка величины (рис. 1, в).

Рассмотрим вначале второй случай, для которого спектр изображен на рис. 16. Тонкие линии изображают затравочный спектр электрона Ландау $E_n(k)$, жирные линии — истинный (перенормированный) спектр. Если дно затравочной зоны n лежит ниже порога ω_0 (на рисунке $n = 0, 1$), то существует такая ветвь истинного спектра $\varepsilon_l(p)$ с $l = n$, которая при импульсах $p < k_n$ мало отличается от затравочной ветви. Пороговый импульс k_n определяется из условия $E_n(k) = \omega_0$. При $p \ll k_n$ истинный спектр отличается от затравочного только сдвигом dna зоны

и изменением эффективной массы. Оба эти эффекта пропорциональны α . Очевидно, что понижение дна зоны $n = 0$ приводит к перенормировке порога — истинный порог $\varepsilon_{th} = \varepsilon_0(0) + \omega_0$ лежит ниже затравочного ω_0 . Когда p приближается к k_n , а ε к ε_{th} , начинается кардинальная перестройка затравочной ветви. При $p \approx k_n$ спектр не достигает порога, а остается

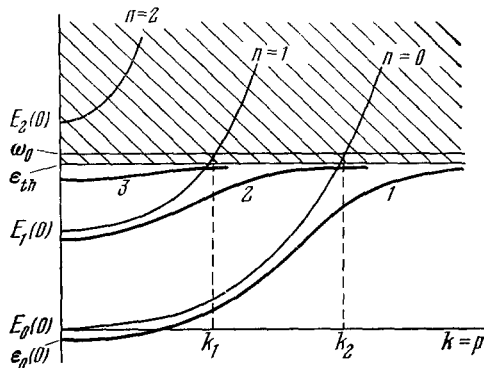


Рис. 16. Спектр магнитополярона (отсчет энергии от $E_0(0)=0$).

ниже его на величину, пропорциональную $\alpha^{2/3}\omega_0$. При $p > k_n$ спектр асимптотически приближается к порогу, оставаясь ниже его на величину, пропорциональную α^2 . Эта картина соответствует неограниченному пиннингу, описанному в гл. 2.

Кроме таких ветвей, генетически связанных с ветвями затравочного спектра (1 и 2 на рис. 16), истинный спектр содержит дополнительные ветви, существование которых целиком обязано взаимодействию (3 на рис. 16). Таких ветвей бесконечно много, все они лежат под порогом на расстоянии,

пропорциональном α^2 , и образуют последовательность, сгущающуюся к порогу (на рисунке не изображено). Ветви второго типа существуют для квантовых чисел l обоих знаков.

Состояния на ветвях описанных двух типов существенно отличаются по среднему числу фононов $\langle N \rangle$, участвующих в их образовании. На ветвях первого типа $\langle N \rangle$ растет с ростом p от $\langle N \rangle \sim \alpha$ при $p < k_n$ до $\langle N \rangle \approx 1$ при $p > k_n$ через $\langle N \rangle \approx 1/2$ при $p \approx k_n$. Между тем на ветвях второго типа $\langle N \rangle \approx 1$ при всех p . Поэтому состояния на этих ветвях являются для всех p связанными состояниями электрона и фонона. Если записать закон дисперсии этих ветвей в виде

$$\varepsilon(p) = \varepsilon_0(0) + \omega_0 - W(p), \quad (7.9)$$

где $\varepsilon_0(0)$ — перенормированное дно зоны $n = 0$, то W будет энергией связи. В пользу такой интерпретации говорит также следующее. Так как энергия элементарного возбуждения $\varepsilon(p)$ почти не зависит от его импульса p , то ясно, что вклад электрона в общий импульс и общую энергию возбуждения мал, — в противном случае зависимость ε от p была бы столь же сильной, как и в затравочном спектре. Таким образом, электрон находится на дне зоны $n = 0$, а энергия и импульс почти целиком переносятся фононом: электрон определяет только заряд и спин элементарного возбуждения.

Рассмотрим теперь специфику резонансной ситуации, которая для ветвей с $l = 1$ возникает с $\omega_c \approx \omega_0$. Если $\omega_c < \omega_0$, то дно зоны $n = 1$ лежит ниже порога и существует ветвь спектра с $l = 1$, генетически связанная с затравочной зоной $n = 1$. Если же $\omega_c > \omega_0$, то такой ветви спектра с $l = 1$ не существует. Поэтому рассмотрим подробнее нижнее состояние с $l = 1$ и $p = 0$. Исследование показывает, что при $\omega_c < \omega_0$ это состояние является поляронным, т. е. $\langle N \rangle \sim \alpha$, а при $\omega_c > \omega_0$ — связанным, т. е. $\langle N \rangle \approx 1$. В момент перехода через резонанс $\omega_c = \omega_0$ рассматриваемое состояние оказывается гибридным, т. е. $\langle N \rangle \approx 1/2$. Существенно, что при этом оно лежит ниже порога на величину порядка $\alpha^{2/3}\omega_0$, т. е. заметно дальше, чем связанные состояния. Состояния с $p = 0$ на более высоких ветвях серии $l = 1$ не испытывают каких-либо каче-

ственных изменений при прохождении через резонанс и являются связанными состояниями при всех H .

Из этого рассмотрения видно, что переход от поляронных состояний к связанным через гибридные возможен как при изменении p и фиксированном H , так и при изменении H и фиксированном p . Очевидно также, что для серий $l = 2, 3, \dots$ особенности будут возникать в меньших магнитных полях $\omega_c = \omega_0/2, \omega_0/3, \dots$.

Рассмотренные выше связанные состояния возникают благодаря обычному электрон-фононному взаимодействию (1.4), линейному по фононным амплитудам. В некоторых случаях может оказаться существенным взаимодействие, квадратичное по этим амплитудам; такое взаимодействие тоже может приводить к связыванию электрона и фонона в магнитном поле⁵⁷. При этом энергия связи оказывается пропорциональной $|\langle \mathcal{H}_{eL} \rangle|^2$, а не $|\langle \mathcal{H}_{eL} \rangle|^4$, как это имеет место при линейном взаимодействии. По этой причине энергии связи могут оказаться одного порядка величины. Возникающие при квадратичном взаимодействии связанные состояния обладают рядом особенностей. В частности, они не могут быть найдены как полюсы G , а только как полюсы T . Это означает, что электрон как бы связывается не с фононом, который он сам испускает, а с фононом, уже имеющимся в кристалле. Учет квадратичного взаимодействия приводит также к появлению пиннинга на кратных и комбинационных частотах $2\omega_{LO}, 2\omega_{TO}, \omega_{LO} \pm \omega_{TO}$, где ω_{LO} и ω_{TO} — предельные частоты продольных и поперечных оптических фононов. Есть указания, что подобного рода пиннинг наблюдался экспериментально⁵⁸. В связи с этим существенно отметить, что квадратичное взаимодействие с ТО-фононами носит поляризационный характер⁵⁷, хотя линейное таковым не является.

в) **О п т и ч е с к и е э ф ф е к т ы.** Существование комплексов электрон + фонон сильно влияет на спектральную зависимость оптических эффектов, в которых электронный переход сопровождается рождением оптического фонона. При этом должны существовать две группы эффектов: одна с характерным масштабом энергий $\alpha^{2/3}\omega_0$, вызванная существованием гибридных состояний с $p = 0$ в условиях магнетофононного резонанса, и вторая с характерным масштабом $\alpha^2\omega_0$, вызванная существованием связанных состояний с $p = 0$.

Первая группа эффектов может быть изучена с помощью однофононной модели. Остановимся подробнее на случае циклотронного резонанса (ЦР)⁸, имея в виду сравнение с экспериментом в следующем пункте. Вклад электронов в диэлектрическую проницаемость для правой поляризации (активной в ЦР) получается в виде

$$\kappa(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_c - \mathcal{M}^0(\omega))}, \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi n e^2}{m}; \quad (7.10)$$

здесь n — концентрация электронов и $\mathcal{M}^0$ построено по типу (2.3) для $p = 0$:

$$\mathcal{M}^0(\varepsilon) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{|\gamma(\mathbf{q})|^2}{\varepsilon - \omega_0 - E_0(-q_{||}) + i0}, \quad (7.11)$$

где

$$|\gamma(\mathbf{q})|^2 = \mathcal{B}(q) \frac{1}{2} (aq_{\perp})^2 \exp \left\{ -\frac{1}{2} (aq_{\perp})^2 \right\}. \quad (7.12)$$

Если представить $\mathcal{M}^0(\varepsilon)$ в виде

$$\mathcal{M}^0(\varepsilon) = \Delta E(\varepsilon) - i\Gamma(\varepsilon), \quad (7.13)$$

то легко видеть, что это есть сдвиг и уширение уровня $n = 1, k = 0$ с энергией ε , вычисленные во втором порядке теории возмущений.

Формула (7.10) допускает простую интерпретацию. Можно считать, что взаимодействие с фононами сводится к тому, что в частоте перехода $\omega_c = E_1(0) - E_0(0)$ надо учесть сдвиг ΔE и уширение Γ конечного

уровня. Вся специфика поглощения возникает потому, что ΔE и Γ сильно зависят от частоты вблизи порога (рис. 17), что является отражением сингулярности в плотности состояний электрона Ландау вблизи дна зоны.

Анализ выражения (7.10) показывает, что при $\omega_c < \omega_0$ должен наблюдаться пик ЦР, сдвинутый в сторону *меньших частот* на величину порядка

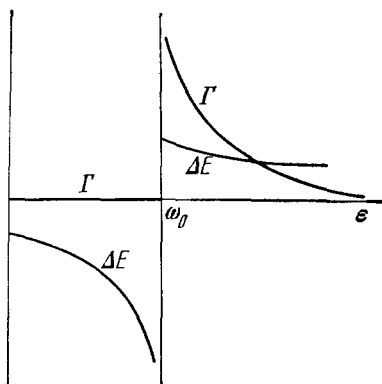


Рис. 17. Ширина и смещение уровня Ландау $n = 1$ в результате электрон-фононного взаимодействия.

$\alpha\omega_0$ с шириной Γ' , определяемой неучтенными механизмами рассеяния (поглощение оптических фононов, примеси, акустические фононы) и силой осциллятора $f \approx 1$, а также слабый пик поглощения над порогом с силой осциллятора $f \sim \alpha$. В резонансном поле $\omega_c = \omega_0$ должны наблюдаться два пика со сравнимой интенсивностью ($f \sim 1$): один узкий, ниже порога, с шириной Γ' и один широкий, асимметричный, выше порога, с шириной порядка $\alpha^{2/3}\omega_0$. Оба пика смещены относительно ω_0 на величину порядка $\alpha^{2/3}\omega_0$. При $\omega_c > \omega_0$ должен снова наблюдаться пик ЦР со сдвигом в сторону *больших частот* и шириной, имеющей порядок $\alpha\omega_0$, и силой осциллятора $f \approx 1$, а также слабый пик поглощения над порогом с $f \approx \alpha$.

Дальнейшее развитие теории ЦР для резонансной ситуации касается учета конечных температур^{59, 60}; расщепление пика ЦР при $\omega_c = \omega_0$ «замывается», если температура $T \gg \alpha^{2/3}\omega_0$. Рассматривалось также влияние дисперсии фононов на характер поглощения⁵³.

Изучение второй группы эффектов требует более детальной теории (Капла и Левинсон⁶¹). Вычислялось поглощение, обусловленное переходами электрона со дна зоны $l = n = 0$ в связанные состояния, т. е. для частот света $\omega \approx \omega_0$. Вклад электронов в поглощение (исключая монотонный вклад свободных электронов) выражается через амплитуду рассеяния.

В обозначениях пункта а) данной главы это выражение имеет вид

$$\text{Im } \kappa^{\pm}(\omega) = \frac{\omega_c \omega_p^2}{\omega_0 (\omega_0 \mp \omega_c)} \text{Im} \{ \lambda(\omega) \bar{\Phi} + \lambda^2(\omega) \bar{R}_{\pm 1}(\omega) \}, \quad (7.14)$$

где

$$\bar{\Phi} = \int_0^{\infty} dt e^{-it} \Phi(t),$$

$$\bar{R}_{\pm 1}(\omega) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} dt dt' e^{-(t+t')/2} (tt')^{1/2} [\Phi(t) \Phi(t')]^{1/2} R_{\pm 1}(\omega_0; t, t') \quad (7.15)$$

Верхний знак относится к правой поляризации света, нижний — к левой.

Из (7.14) видно, что в зависимости от поляризации света переход происходит в связанные состояния с $l = \pm 1$ при начальном состоянии с $l = 0$. Это значит, что для квантового числа l , описывающего перенормированный спектр электрона, имеют место те же правила отбора $\Delta l = \pm 1$, что и для квантового числа n , описывающего затравочный спектр. При этом правила отбора одинаково справедливы для положительных и отрицательных l .

Первое слагаемое в фигурных скобках (7.14) соответствует теории возмущений, т. е. однофононной модели; оно дает поглощение согласно элементарной теории циклотрон-фононного резонанса⁶². Второе слагаемое легко проанализировать, если записать полюсное разложение резольвенты.

Характер поглощения иллюстрируется рис. 18, где пунктиром показано поглощение, вычисленное без учета связанных состояний. Подпороговое поглощение ($\omega < \omega_0$) состоит из серии дискретных линий, сосредоточенных в области $|\omega - \omega_0| \sim W$ с быстро убывающей интенсивностью. Надпороговое поглощение ($\omega > \omega_0$) вдали от порога при $|\omega - \omega_0| \gg W$ убывает как $(\omega - \omega_0)^{-1/2}$, а вблизи порога при $|\omega - \omega_0| \ll W$ растет как $(\omega - \omega_0)^{1/2}$. Видно, что учет связанных состояний модифицирует спектр поглощения аналогично тому, как это имеет место для экситона Мотта. Возможность обнаружения тонкой структуры спектра определяется величиной энергии связи W и силой осциллятора в дискретной части спектра f_d по отношению к непрерывной части f_c . Для наиболее актуального РО-взаимодействия⁶¹ оценки этих величин сведены в табл. II.

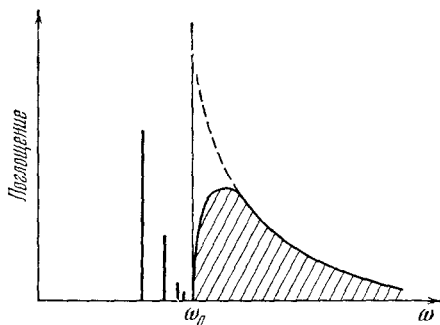


Рис. 18. Частотная зависимость электронного поглощения в магнитном поле с учетом связанных состояний с фононом.

Наблюдение поглощения в области $\omega \approx \omega_0$ сильно осложняется решеточными эффектами. Поэтому более перспективным является обнаружение связанных состояний, возникающих у порога испускания фонона с переходом на дно зоны $n = 1$ (а не $n = 0$). Хотя эти состояния лежат вблизи $\omega_c + \omega_0$, т. е. в непрерывном спектре, однако можно показать⁶³, что если $\omega_c < \omega_0$, то их ширина $\Gamma \sim \alpha^3 \omega_0$, что меньше энергии связи

Таблица II

	$\omega_c \ll \omega_0$	$\omega_c \gg \omega_0$
$W \sim$	$\alpha^2 \omega_0 (\omega_c / \omega_0)^4$	$\alpha^2 \omega_0$
$f_d \sim$	$\alpha^2 (\omega_0 / \omega_c)^5$	$\alpha^2 (\omega_0 / \omega_c)^2$
$f_c \sim$	$\propto (\omega_0 / \omega_c)$	

$W \sim \alpha^2 \omega_0$. Наличие этих состояний должно приводить к тонкой структуре линии циклотрон-фононного резонанса на частоте $\omega = \omega_c + \omega_0$. Уйти из области решеточных эффектов можно также, наблюдая тонкую структуру линии комбинированного резонанса на частоте $\omega = \omega_c + \omega_s$ (ω_s — спиновое расщепление).

Очень своеобразно влияние электрон-фононного взаимодействия на комбинационное рассеяние, так как свободный электрон с параболическим законом дисперсии в магнитном поле не дает рассеяния света со сдвигом частоты. Это можно понять, исходя из принципа соответствия: такой электрон есть гармонический осциллятор и поэтому не смешивает частоты. Формально это следует из правил отбора по n и эквидистантности спектра электрона Ландау. Взаимодействие с фононами, как было показано выше, не меняет правил отбора, но оно нарушает эквидистантность спектра. В результате этого делается возможным рассеяние со сдвигом частоты $\bar{\omega} = \pm 2\omega_c$. В условиях магнитофононного резонанса теория предсказывает особенности, во многом аналогичные особенностям ЦР^{64, 65}.

г) Эксперимент — циклотронный и комбинированный резонанс. Эксперименты по циклотронному поглощению в условиях магнитофононного резонанса $\omega_c = \omega_{LO}$ были выполнены на n -InSb в 1967 г. независимо двумя группами: Дики, Джонсон, Ларсен⁶⁶ и Саммерс, Харпер, Смит³. Благодаря малой массе электрона ($m = 0,014 m_0$) резонанс в инфракрасном диапазоне ($\lambda \approx 50$ мкм) достигается в не слишком больших полях ($H = 34$ кэ). Эксперименты проводились на чистых образцах при низких температурах (азотные и ниже).

Типичные результаты, заимствованные из ⁶⁷, показаны на рис. 19. Экспериментальные точки показывают изменение положения линии ЦР при изменении магнитного поля. Светлые точки соответствуют переходам со спинами, ориентированными против поля, темные — по полю. Прямые представляют собой экстраполяцию со стороны меньших полей, в которых $\omega_c < \omega_{LO}$. В обоих случаях видно, что при переходе через магнитофононный резонанс $\omega_c = \omega_{LO}$ положение линии ЦР в соответствии с теорией

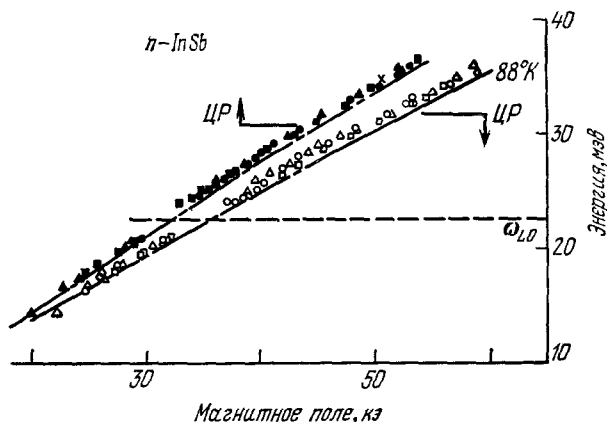


Рис. 19. Изменение частоты циклотронного поглощения с магнитным полем согласно ⁶⁷.

смещается скачком в область больших частот — экспериментальные точки лежат выше прямой. Смещение частоты ЦР $\Delta\omega_c \approx 0,5$ мэв. Если принять для n -InSb $\alpha = 0,02$ и $\omega_{LO} = 24$ мэв, то, согласно теории, $\Delta\omega_c \sim \alpha\omega_{LO} = 0,5$ мэв; согласие вполне удовлетворительное. На рис. 20 показана зависимость ширины линии ЦР от поля.

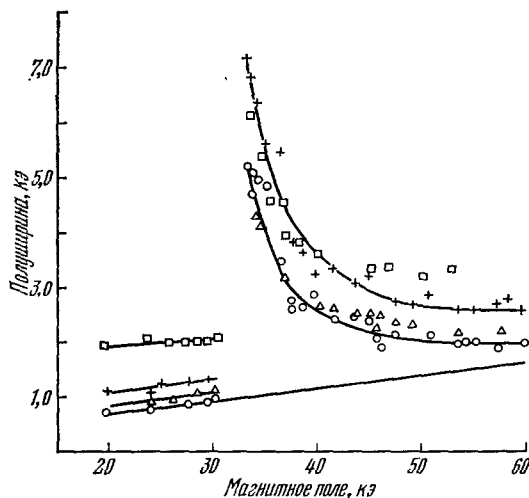


Рис. 20. Ширина линии циклотронного поглощения ⁶⁷.

область частот, где существенно решеточное отражение ($\omega_{LO} - \omega_{TO} \approx 2$ мэв) и решеточное поглощение ($|\omega - \omega_{TO}| < 5\% \omega_{TO} \approx 1$ мэв) ⁶⁷.

Расщепление пика в резонансных полях можно наблюдать в комбинированном резонансе ⁶⁸, при котором происходит переход с уровня $n = 0$ на уровень $n = 1$ с переворотом спина. Так как испускание ЛО-фонона происходит без переворота спина, то порогом распада конечного состояния будет $\omega_c = \omega_{LO}$, как и в случае обычного ЦР; между тем поглощение будет происходить на частоте $\omega = \omega_c + \omega_s$, где ω_s — спиновое расщепление уровня Ландау $n = 0$. В InSb при $H = 34$ кэ $\omega_s \approx 10$ мэв, так что электронное поглощение уходит из области решеточного отражения и поглощения. Экспе-

Видно, что она резко возрастает при приближении к резонансу со стороны больших полей, в полном согласии с поведением Γ на рис. 17. Если исключить из ширины монотонный фон Γ' , не связанный с испусканием оптических фононов (экстраполяция на рис. 20), то оставшуюся ширину можно сравнить с теоретической Γ . Такое сравнение показано на рис. 21, где пунктир соединяет экспериментальные точки, а сплошные линии соответствуют теории для двух значений α . Принимая во внимание то обстоятельство, что теория не учитывает теплового размытия ($T \approx 1$ мэв, что сравнимо с $\Gamma \approx 3$ кэ ≈ 2 мэв), согласие следует считать хорошим.

Предсказываемое теорией расщепление пика ЦР в резонансных полях в эксперименте не наблюдается, вероятно, потому, что величина расщепления $\alpha^{2/3}\omega_0 \approx 2$ мэ того же порядка, как и

Экспериментальные результаты для n -InSb при 30 °K ⁶⁹ показаны на рис. 22, где отчетливо видно не только смещение пика при переходе через резонансное поле (порядка 0,7 мэв), но и расщепление пика в резонансных полях (порядка 1,5 мэв, что согласуется с теоретической оценкой $\alpha^{2/3} \omega_{LO} \approx 2$ мэв).

Аналогичные эффекты на примесных переходах наблюдались в ⁷⁰. В случае, когда рассеяние на фононах происходит с переворотом спина, возможны резонансные эффекты при совпадении частоты фонона ω_0 с парамагнитной частотой ω_s ⁷¹ либо с одной из комбинационных частот $\omega_c \pm \omega_s$. Эксперименты по комбинационному рассеянию в условиях магнитофононного резонанса, насколько нам известно, отсутствуют.

Очевидно, что эффекты, весьма похожие на те, которые возникают вблизи порога испускания одного фонона, могут иметь место и вблизи порога испускания двух и более фононов ⁷². В связи с этим отметим аномалии в интенсивности комбинационного резонанса в n -InSb, обнаруженные ⁷³ при $H \approx 70$ кэ, когда уровень $n = 1$ проходит через порог $2\omega_{LO}$. Другая группа эффектов может быть связана с участием поперечных оптических фононов. Так, был обнаружен пиннинг на частоте ω_{TO} в p -InSb ⁷⁴.

Покажем, что дисперсия и конечное время жизни оптических фононов не влияют существенно на эти эффекты. Характерным размером электронного состояния здесь является магнитная длина, так что разброс энергий фононов $\Delta\omega_q \sim \left(\frac{m}{\mu}\right)\omega_c$ (см. конец гл. 3), а характерным масштабом энергий является $\alpha^{2/3}\omega_0$. Поэтому дисперсию фононов в их ширину γ можно не учитывать, если

$$\frac{\gamma}{\omega_0}, \frac{m}{\mu} \ll \alpha^{2/3}. \quad (7.16)$$

В InSb это выполняется хорошо, ибо $\gamma/\omega_0 \sim 10^{-2}$, $m/\mu \sim 10^{-3}$, а $\alpha^{2/3} \sim 10^{-1}$. Явный учет дисперсии фононов был выполнен в работе ⁵⁴.

Анализ экспериментов в условиях магнитофононного резонанса позволяет утверждать, что уверенно наблюдается влияние гибридных состояний на оптические эффекты. В тех случаях, когда наблюдается далеко затянутый пиннинг, вероятно, проявляются и связанные состояния, в которые превращаются гибридные состояния при удалении от резонанса.

Дополнительные ветви спектра, существующие независимо от резонанса, к настоящему времени не наблюдались, хотя это и представляется возможным. Из (7.16) видно, что оптимальными являются поля, когда $\omega_c \sim \omega_0$, ибо в больших полях W не растет, а отношение f_d/f_c падает. В n -InSb при этом $W \approx 10^{-2}$ мэв, что лежит за пределами экспериментальных возможностей. Более перспективным является CdTe, часто используемый в последнее время для изучения магнитополяронных эффектов ⁷⁵⁻⁷⁷. Привлекательность этого материала связана с довольно большой величиной связи ($\alpha \approx 0,4$) при не очень большой массе ($m = 0,096 m_0$). Резонанс достигается в поле $H \approx 180$ кэ, что экспериментально достижимо. В полях такого порядка $W \sim \alpha^2 \omega_{LO} \approx 3$ мэв; столкновительное размытие в чистых образцах $1/\tau \approx 0,2$ мэв. Поэтому можно рассчитывать на то, что связанные состояния будут проявляться в оптике, даже если неблагоприятный численный множитель уменьшит величину W на порядок.

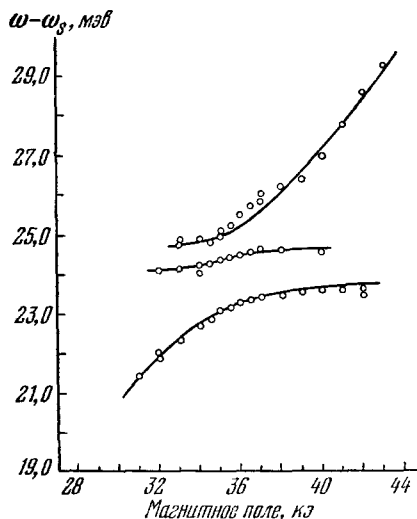


Рис. 22. Положение линий поглощения в спектре комбинационного резонанса согласно ⁶⁹.

Наличие двух пиннингов связано с участием локализованных и свободных электронов.

при не очень большой массе ($m = 0,096 m_0$). Резонанс достигается в поле $H \approx 180$ кэ, что экспериментально достижимо. В полях такого порядка $W \sim \alpha^2 \omega_{LO} \approx 3$ мэв; столкновительное размытие в чистых образцах $1/\tau \approx 0,2$ мэв. Поэтому можно рассчитывать на то, что связанные состояния будут проявляться в оптике, даже если неблагоприятный численный множитель уменьшит величину W на порядок.

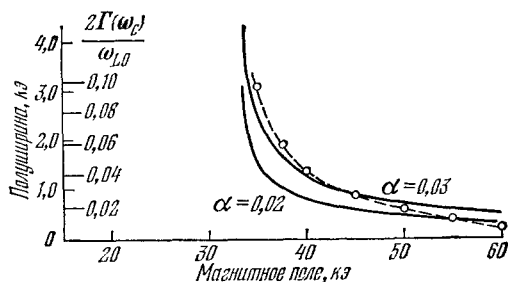


Рис. 21. Сравнение теории и эксперимента для ширины линии ЦР ⁶⁷.

8. ЭКСИТОН-ФОНОННЫЕ КОМПЛЕКСЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Особенности в спектрах поглощения, возникающие, когда циклотронная частота электронов входит в резонанс с частотой фононов, впервые были обнаружены Джонсоном и Ларсеном² в спектре собственного (межзонного) поглощения в InSb. Физическая картина здесь значительно более сложна, чем в циклотронном (внутризонном) поглощении, так как в процессе поглощения участвует еще и дырка. Игнорировать кулоновское взаимодействие электрона и дырки, как это делалось в², по меньшей мере неоправданно, так как вся отчетливая структура в краевом поглощении связана с экситонными полосами, удельный вес которых увеличивается с ростом магнитного поля⁷⁸. Поэтому при исследовании поляронных эффектов в межзонном поглощении мы встречаемся с задачей трех тел: электрона, дырки и фонона. Естественно, что она может быть решена только в предельных случаях, из которых к настоящему времени исследованы немногие.

Магнитоэкситон обычно изучается в условиях сильного поля, когда

$$\omega_c, \omega_{c1}, \omega_{c2} \gg R = \frac{me^4}{2\kappa_\infty^2}, \quad \frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}, \quad \omega_c = \frac{eH}{mc}, \quad (8.1)$$

где индексы 1 и 2 относятся к электрону и дырке. При этом движение носителей является квазиодномерным; поперечное движение определяется магнитным полем, и лишь медленное продольное движение управляется кулоновским притяжением. Поэтому каждая пара зон Ландау n_1 и n_2 порождает свою систему экситонных уровней E_s , $s = 0, 1, 2, \dots$. Так как экситон в целом нейтрален, то полный импульс P есть интеграл движения^{79, 80}; имея в виду экситонное поглощение, мы ограничимся состояниями с $P = 0$. Если считать $L \equiv \ln(\omega_c/2R) \gg 1$, то^{78, 81}

$$E_0 = -RL^2, \quad E_s = -\frac{R}{s^2} \quad (s = 1, 2, \dots). \quad (8.2)$$

С ростом H почти все поглощение концентрируется в полосе $s = 0$: ее интенсивность растет как HL .

При изучении поляронных эффектов будет предполагаться, что дырки с фононами не взаимодействуют. Полностью это предположение можно оправдать только в резонансной ситуации $\omega_{c1} \approx \omega_0$, ибо взаимодействие дырок с фононами нерезонансно ($m_2 \neq m_1$) и поэтому несущественно. В нерезонансной ситуации сделанное предположение может быть оправдано, строго говоря, только в неполярных кристаллах, так как константы ДО-взаимодействия α_1 и α_2 независимы. При РО-взаимодействии α_1 и α_2 не являются полностью независимыми, и поэтому следовало бы учесть и взаимодействие дырки с фононами. Однако к настоящему времени это не сделано.

На рис. 23 показана схема электронных уровней без учета кулоновского взаимодействия. Мы будем предполагать, что переходы между крайними дырочной и электронной зон при $H = 0$ разрешены. Тогда для изотропных зон разрешены магнитооптические переходы $n_1 = n_2$, показанные на рис. 23 сплошными стрелками. При учете продольного движения частиц соответствующие энергии являются порогами непрерывного поглощения. Заметим, что если электронный переход сопровождается рождением фонона, то правило отбора $n_1 = n_2$ снимается. Штриховой отрезок I показывает энергию бесфононного перехода с рождением пары ($n_1 = 1, n_2 = 1$), а отрезок II — энергию рождения пары ($n_1 = 0, n_2 = 1$) вместе с фононом. Зависимость этих порогов от H показана линиями I и II на рис. 24; при $\omega_{c1} = \omega_0$ они совпадают. Учет кулоновского взаимодей-

ствия приводит к тому, что от каждого порога отщепляется серия экситонных состояний $s = 0, 1, \dots$, показанных линиями $I_0, I_1, \dots, II_0, II_1, \dots$. При этом в спектре поглощения должен доминировать переход на низший уровень I_0 ; должны присутствовать также слабые переходы в I_s ($s \neq 0$) и слабое непрерывное поглощение выше I .

Дальнейшая модификация спектра имеет место при учете электрон-фононного взаимодействия. По аналогии с гл. 2 можно предвидеть, что это будет приводить к пиннингам вблизи пересечений уровней, принадлежащих системе I и системе II . Построенные таким образом уровни для

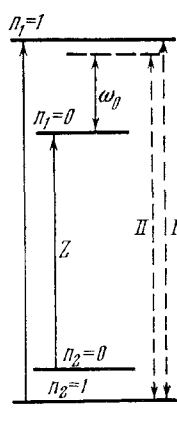
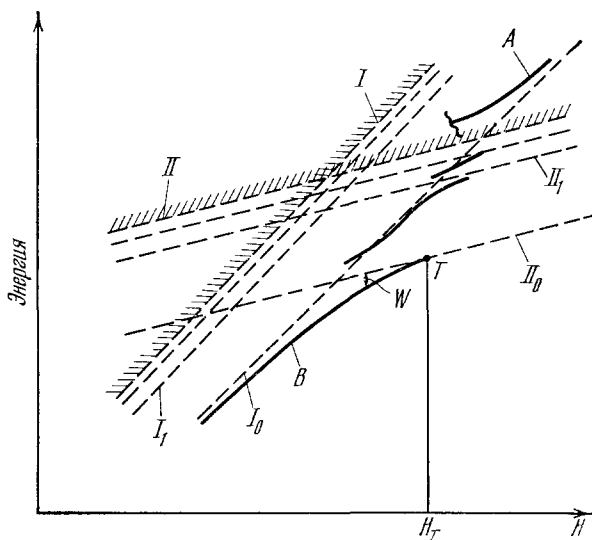


Рис. 23. Схема электронных и дырочных уровней Ландау.



L и m_2/m_1 такие связанные состояния электрона, дырки и фонона действительно существуют. Эти состояния также квазистационарны по параметру R/ω_0 .

а) Магнитофононный резонанс. В резонансных условиях $\omega_{c1} \approx \omega_0$, как обычно, можно ограничиться однофононным приближением. Это соответствует удержанию первой диаграммы рис. 4 в $\mathcal{M}$ и последовательности диаграмм рис. 25 в электронно-дырочной вершине. Основное отличие от гл. 2 связано с наличием внутренних степеней свободы в экситоне. Поэтому вместо алгебраического уравнения для спектра

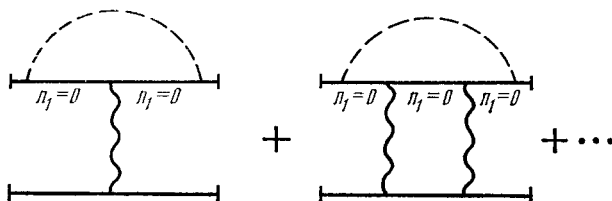


Рис. 25. Система основных диаграмм для неприводимой электронно-дырочной вершины в резонансных условиях (волнистыми линиями показано кулоновское взаимодействие).

(2.2) здесь возникает интегродифференциальное уравнение для гриновской функции $F(\omega | z, z')$, описывающей продольное внутреннее движение в экситоне с импульсом $\mathbf{P} = 0$ ⁸².

Это уравнение имеет вид

$$[\varepsilon - \omega_{c1} - \omega_0 - \mathcal{H}_{\mathbf{P}=0}^{11}(z)] F(z, z') - \int \mathcal{M}(\varepsilon | z, \bar{z}) F(\bar{z}, z') d\bar{z} = \delta(z - z'), \quad (8.3)$$

где массовый оператор

$$\mathcal{M}(\varepsilon | z, z') = \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} |\gamma(\mathbf{q})|^2 \langle z | (\varepsilon - \mathcal{H}_{\mathbf{P}=\mathbf{q}}^{01})^{-1} | z' \rangle \times \\ \times \exp \left[-i \frac{m_2}{M} q_z (z - z') \right], \quad (8.4)$$

$$\mathcal{H}_{\mathbf{P}}^{n_1 n_2} = \frac{p_z^2}{2m} + \frac{P_z^2}{2M} + U_{\mathbf{P}}^{n_1 n_2}(z); \quad (8.5)$$

$U_{\mathbf{P}}^{n_1 n_2}(z)$ — кулоновская энергия, усредненная на функции поперечного движения свободной электронно-дырочной пары с импульсом $\mathbf{P}$ и квантовыми числами Ландау n_1, n_2 , а γ определяется формулой (7.12). Энергия ε в (8.3) отсчитывается от прямой II на рис. 24. Спектр связанных состояний определяется полюсами F , а спектр поглощения — функцией $F(\omega | z=0, z'=0)$.

Вблизи порога, т. е. при приближении к прямой II_0 (см. рис. 24), $\mathcal{M}$ ведет себя согласно (2.5б). Поэтому спектр аналогичен кривой 2 на рис. 2: он имеет точку окончания T и подходит в ней к прямой II_0 с касанием. Следовательно, согласно гл. 2, на кривой B вблизи T образуются связанные состояния экситон + фонон, а против пересечения I_0 и II_0 — гибридные состояния. Таким образом, спектр магнитоэкситона резко отличается от спектра магнитополярона наличием точки окончания — она возникает из-за того, что поперечная масса магнитоэкситона $M_{\perp}$ хоть и велика, но конечна.

Предельные случаи, которые могут быть исследованы более полно, различаются в зависимости от соотношения между кулоновской энергией $L^2 R$ и характерной энергией резонансного электрон-фононного взаимодействия для магнитополярона $(\alpha/2)^{2/3} \omega_0$ (ср. гл. 7). Если $L^2 R \gg (\alpha/2)^{2/3} \omega_0$ ^{20, 82}, то в резонансе

$$W \approx \alpha \omega_0 (\omega_0 / 2LR)^{1/2} (M/m_1)^{1/2}. \quad (8.6)$$

Эффект здесь слабее, чем в магнитополяроне (порядка α , а не $\alpha^{2/3}$), но в сравнении с обычным экситоном усиливается за счет фактора $\omega_0/LR \gg 1$.

Спектр поглощения должен состоять из узкой полосы, соответствующей возникновению комплекса (кривая B), и континуума, соответствующего образованию пар экситон + фонон; его максимум расположен почти непосредственно за прямой II_0 . При $H \rightarrow H_T$ максимум фона и узкая полоса сближаются и сливаются; интенсивность полосы при этом непрерывно убывает. При $H > H_T$ остается только континуум, но его максимум первоначально также тяготеет к II_0 . Все это должно создавать картину пиннинга — движения максимума поглощения вдоль II_0 .

Если $L^2R \ll (\alpha/2)^{2/3} \omega_0$ ⁸², то схему уровней удобнее представить несколько иначе. На рис. 26 верхней сплошной кривой показана энергия комплекса магнитополярон + фонон, а нижней — комплекса магнитоэкситон + фонон. Поэтому W имеет смысл энергии связи по отношению к отрыву дырки. В левой части кривой эта энергия близка к L^2R , но после прохождения через резонанс (пересечения 1 и 2) начинает резко возрастать. Таким образом, в этих условиях электрон-фононная связь приводит к значительному усилению эффективного притяжения между электроном и дыркой. На участке, где W возрастает, интенсивность поглощения с образованием комплекса (ветвь B) почти не изменяется. Дальше W начинает уменьшаться, и одновременно быстро падает поглощение.

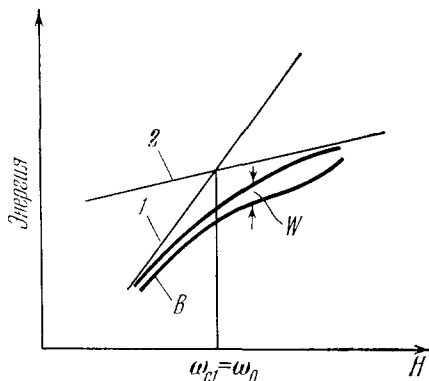


Рис. 26. Зависимость уровней комплекса магнитоэкситон + фонон от H в условиях, когда кулоновское взаимодействие слабее электрон-фононного.

Вправо от резонанса энергия связи по отношению к отрыву дырки W резко возрастает. (Линии 1–2 соответствуют линиям 1–II рис. 24.)

б) **Д о п о л н и т е л ь н ы е ветви спектра.** Изучался также вопрос о существовании дополнительных ветвей спектра в задаче трех частиц (электрона, дырки и фонона) вблизи порога рождения пары ($n_1 = 0, n_2 = 0$) и фонона (Левинсон⁸³). Спектр был найден из T -матрицы трех частиц, для которой может быть записано уравнение, аналогичное (3.8) для двух частиц. Если считать и кулоновское, и поляронное взаимодействия слабыми, то уравнение для T -матрицы может быть изучено методами, близкими к описанным в гл. 3, хотя техническая сторона дела существенно усложняется. В результате задача о спектре T -матрицы может быть сведена к более наглядной задаче о спектре следующего уравнения Шрёдингера:

$$\left[\frac{1}{2m_1} \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{1}{2m_2} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} + \varepsilon - V\delta(z_1) - U\delta(z_1 - z_2) \right] \Psi(z_1, z_2) = 0. \quad (8.7)$$

Здесь ε — энергия, отсчитанная от порога; z_2 и z_1 — продольные координаты дырки и электрона, взаимодействующего с неподвижным фононом в точке $z = 0$. Два потенциальных слагаемых описывают соответственно поляронное и кулоновское взаимодействие.

При этом V определяется собственным значением λ^r поляронного ядра $\square$ (гл. 7). Если положить $U = 0$ и решить уравнение по z_1 , то собственное значение будет энергией связи электрон + фонон с $p = 0$, т. е.

$$|\varepsilon| = W|_{U=0} = \frac{1}{2} m_1 V^2 = \frac{\tilde{\alpha}^2 \omega_0}{(\lambda^r)^2}. \quad (8.8)$$

Таким образом, каждой дополнительной ветви в спектре магнитополярона соответствует свое уравнение (8.7) с соответствующим значением V . Если положить $V = 0$ и решить уравнение по $z_1 - z_2$, то собственное значение будет энергией связи электрон + дырка в низшем состоянии, т. е.

$$|\varepsilon| = W|_{V=0} = \frac{1}{2} m U^2 = R L^2. \quad (8.9)$$

Уравнение (8.7) легко исследуется в разных предельных случаях, из которых видно что по крайней мере одно связанное состояние трех частиц всегда существует (для каждого связанного состояния пары электрон + фонон).

Уравнение (8.7) не учитывает двух обстоятельств: 1) возможности распада связанного состояния с превращением энергии фонона в кинетическую энергию относительного движения пары, что приводит к некой конечной ширине уровня Γ ; 2) энергии отдачи поперечного движения экситона, которая существует в силу конечности поперечной массы экситона $M_{\perp}$ и поэтому препятствует возникновению связанных состояний. Оба эти эффекта могут быть учтены в уравнении для T -матрицы по теории возмущений, и малость соответствующих поправок по сравнению с Γ дает критерии существования связанных состояний трех частиц. Например, при

$$R\tilde{L} \ll \alpha^2 \omega_0 \ll R\tilde{L}^2, \quad \tilde{L} \equiv L \frac{m_1}{m_2} \gg 1 \quad (8.10)$$

имеем

$$W \sim \frac{m_2}{m_1} \alpha^2 \omega_0, \quad \Gamma \sim \frac{m_2}{m_1} \alpha^2 \omega_0 \left(\frac{RL^2}{\omega_0} \right)^{3/2}, \quad (8.11)$$

т. е. действительно $\Gamma \ll W$ по адиабатическому параметру RL^2/ω_0 .

в) Экспериментальные данные. На рис. 27 представлены экспериментальные данные ⁷ по межзонному магнитопоглощению в InSb, послужившие стимулом к разработке теории резонансной электрон-фононной связи. Кривые показывают положение максимумов отдельных полос в функции магнитного поля. Общая

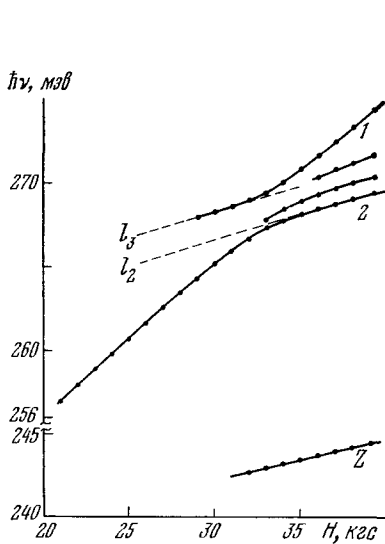


Рис. 27. Положение пиков собственного поглощения InSb согласно ⁷ в области магнитофононного резонанса $\omega_{c1} \approx \omega_0$. Полоса 2 может быть сопоставлена основному состоянию комплекса магнитоэкситон + фонон. (1 и 2 соответствуют А и В рис. 24.)

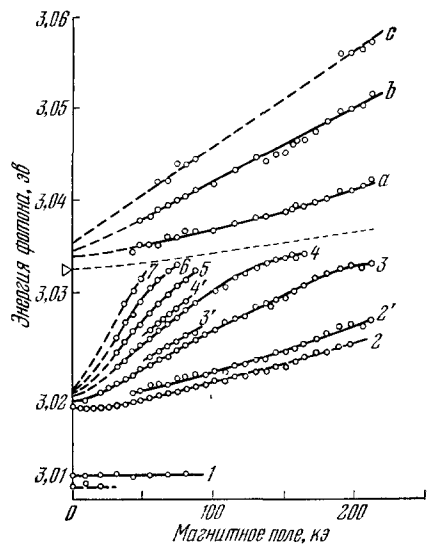


Рис. 28. Зависимость частоты пиков экситонного поглощения Т1Вг от H при 4,2 °К согласно ⁴⁹.

Светлый треугольник отвечает энергии $E_{\text{явзб}} + \omega_0$, идущая от него штриховая линия — порог пиннинга.

картина весьма сходна со схемой рис. 24. Отчетливо виден пиннинг; различие асимптот (l_2 и l_3) для верхней и нижней ветвей, несомненно, объясняется кулоновским взаимодействием; по-видимому, таково же происхождение добавочных ветвей, расположенных между 1 и 2. То, что эффект целиком связан с электрон-фононным взаимодействием, ясно также по полосе Z (ср. рис. 23), не испытывающей в этой области полей никаких аномалий. Можно думать, что картина пиннинга выражена так ярко из-за большого отношения масс $m_2/m_1 \sim 10$, а высшие квазистационарные состояния отчетливо видны вследствие слабой связи $\alpha \approx 0,02$.

Более полное сравнение теории с экспериментом произвести сейчас невозможно по двум причинам. Во-первых, отсутствуют экспериментальные данные о зависимости интенсивности поглощения в полосе 2 от магнитного поля, а также данные о спектральном распределении поглощения за асимптотой l_2 , где должна наступать диссоциация

комплексов. Помимо этого в InSb $L \approx 3$, $L^2 R \approx 0,6$ мэв, $(\alpha/2)^{2/3} \omega_0 \approx 0,8$ мэв. Следовательно, логарифмическое приближение находится на пределе применимости, и, кроме того, $L^2 R \sim (\alpha/2)^{2/3} \omega_0$, т. е. теория может претендовать лишь на описание качественных тенденций.

На рис. 28 представлены аналогичные данные для TlBr⁴⁹ — кристалла с промежуточной связью ($\alpha \approx 2,5$). Полосы 1—3 соответствуют последовательным членам низшей экситонной серии, а полосы 4—7 — экситонам следующих магнитных подзон. Здесь $\omega_0 \gg R \gg \omega_c$, т. е. поля ~ 100 кэс не могут рассматриваться как сильные, и, следовательно, ситуация промежуточная между рассмотренными в гл. 6 и 8. Картина пиннинга выражена очень четко. Интересно, что здесь отсутствует продолжение полос 4—7, аналогичное рис. 27; естественно полагать, что это следствие большой ширины верхних состояний, обусловленной промежуточной связью. В этих экспериментах есть еще одна интересная особенность, отмеченная в⁴⁹, но не объясненная: пиннинг наблюдается не вблизи первого порога ($E_{1s} + \omega_0$), а вблизи $E_{\text{возб}} + \omega_0$, где $E_{\text{возб}}$ — энергия низших возбужденных состояний. Этот факт естественно объясняется на основе результатов гл. 6: оптически возбуждаемые s -состояния должны испытывать наиболее сильный пиннинг при взаимодействии с p -состояниями. Следовательно, пиннинг должен наступать вблизи $E_{2p} + \omega_0$, в полном согласии с экспериментом.

Таким образом, экситон-фононные комплексы наблюдаются в резонансной ситуации и при слабой и при промежуточной связи. В нерезонансных условиях они пока не наблюдались.

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Связанные состояния с участием оптических фононов имеют два качественных отличия от привычных связанных состояний. Первое обусловлено тем, что в них участвуют частицы, число которых не сохраняется. Поэтому такие состояния стабильны лишь благодаря тому, что их реальный распад с исчезновением фонона запрещается законами сохранения (энергии для локализованного электрона и энергии-импульса для свободного электрона или экситона). Второе отличие обусловлено отсутствием простого представления о характере взаимодействия в конфигурационном пространстве, где электрон-фононное взаимодействие является существенно нелокальным. Так, в частности, заранее не очевидно, является ли взаимодействие между электроном и фононом эффективно притяжением или отталкиванием.

Следует подчеркнуть, что существование связанных состояний с участием оптического фонона не имеет ничего общего с широко известным пересечением бозонных ветвей, впервые рассмотренным в теории светомеханических колебаний Толпыго⁸⁴ и Хуангом⁸⁵, хотя многие картинки (например, рис. 3) весьма похожи *). Различие между этими явлениями можно пояснить, например, следующим образом применительно к резонансной ситуации. Для бозонных пересечений оба резонирующих состояния являются одночастичными, в то время как для рассмотренных нами систем одно состояние одночастичное, а второе двухчастичное. Это и порождает различие в результатах — появление точек окончания, дополнительных ветвей и т. д.

Возникновение комплексов определяется конкуренцией кинетической энергии частицы, с которой связывается фонон, и энергии их взаимодействия; поэтому характер комплекса и энергетический масштаб структуры спектра сильно зависят от степени локализации частицы, участвующей в образовании комплекса. При связывании электрона с фононом эффекты наиболее сильны, если электрон локализован на примесном центре: энергетический масштаб структуры спектра порядка $\alpha^{1/2} \omega_0$ в резонансе и $\alpha \omega_0$ вне его (предполагаем, что $\alpha \ll 1$). У электрона в магнитном поле, который «локализован» только поперек поля, эффекты слабее: $\alpha^{2/3} \omega_0$ в резонансе и $\alpha^2 \omega_0$ вне резонанса. Если магнитного поля нет, то

*) Пересечение бозонных ветвей с участием продольного оптического фонона рассмотрено в обзоре⁸⁶.

связанные состояния существуют только в сильной связи ($\alpha \gg 1$) и, возможно, в промежуточной. Экситон, как нейтральная частица, магнитным полем не «локализуется», и поэтому в поведении комплексов магнито-экситон + фонон и экситон + фотон нет таких резких различий. Однако сильное магнитное поле повышает поперечную массу магнитоэкситона, приближая его к магнитополярону. Это способствует возникновению связанных состояний с фононом. В этом же направлении действует увеличение отношения масс дырки и электрона в обычном экситоне, сближая его по свойствам с примесным центром.

Сопоставление теории с экспериментом находится пока в первоначальной стадии, и в ряде случаев даже качественная интерпретация не является однозначной. Единственный вопрос, где имеется полное качественное и полуколичественное согласие, — это внутризонное поглощение в *n*-InSb в условиях магнитофононного резонанса. Для межзонного поглощения в этих же условиях нет сомнения в том, что причина эффекта понята правильно, однако детальная расшифровка спектра пока отсутствует. Связанные состояния в нерезонансных условиях не искались, хотя их обнаружение в кристаллах более полярных, чем InSb, например в CdTe, вполне реально. Можно полагать, что такие состояния должны приводить к тонкой структуре пиков циклотрон-фононного резонанса.

Нет сомнения в том, что связанные состояния локализованного электрона с оптическим фононом (дизлектрические локальные колебательные моды) экспериментально обнаружены, в том числе и в нерезонансной ситуации. Однако пока еще нет полной ясности в их сопоставлении с уровнями теоретического спектра.

В случае экситона без магнитного поля практически нет никакого соответствия между теорией и экспериментом, и природа особенностей в спектре в области энергий электронно-дырочного континуума остается неясной: обусловлены ли они комплексами экситон + фонон или просто являются результатом интерференционных эффектов.

Наиболее естественным образом связанные состояния должны проявляться в экспериментах по поглощению как результат взаимодействия частиц, родившихся при поглощении фотона (взаимодействие в конечном состоянии). Естественно, что эти же связанные состояния в принципе могут быть обнаружены и в горячей люминесценции — на этот раз как результат взаимодействия в начальном состоянии. В люминесценции они могут проявляться в некоторых случаях и как результат взаимодействия в конечном состоянии — именно так в колебательном сопровождении люминесценции примесных экситонов обнаруживаются связанные состояния центр + фонон.

Несомненно, что связанные состояния с участием фонона могут сказаться и на ряде других явлений. Например, так как фононы могут связываться с различными квазичастицами, то эти квазичастицы в принципе могут связываться между собой через реальный фонон. Это означает, что могут возникать возбужденные квазистационарные связанные состояния квазичастиц, даже если в основном состоянии связанные состояния отсутствуют. Соображения такого рода могут оказаться существенными для интерпретации различных оптических и кинетических экспериментов. В качестве другого примера можно указать на вопрос о долинно-орбитальном расщеплении в спектре экситона, который недавно обсужтировался⁸⁷⁻⁸⁹. Для основного состояния экситона такое расщепление, очевидно, невозможно вследствие трансляционной симметрии. Однако для комплекса экситон + фонон, который может обладать нулевым импульсом (из-за компенсации импульсов обеих частиц), такое расщепление должно возникать и проявляться в спектре.

Следует иметь в виду, что конкретные системы, рассмотренные в гл. 4—8, соответствуют традиционным объектам экспериментальных работ. Однако подход, изложенный в гл. 3, является общим, и на его основе могут быть изучены и другие системы, по мере того как они начнут изучаться экспериментально. В связи с работами последних лет по пространственно-квантованным электронным спектрам тонких пленок и поверхностным фононам следует подчеркнуть, что в системах с пониженной размерностью условия для образования связанных состояний с участием фононов в ряде случаев должны оказаться особенно благоприятными.

Институт теоретической физики
им. Л. Д. Ландау АН СССР,
Черноголовка (Московская обл.)

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. J. Appel, Sol. State Phys. **21**, 193 (1968).
2. E. J. Johnson, D. M. Larsen, Phys. Rev. Lett. **16**, 655 (1966).
3. C. J. Summers, P. G. Harper, S. D. Smith, Sol. State Comm. **5**, 615 (1967).
4. W. Y. Liang, A. D. Yoffe, Phys. Rev. Lett. **20**, 59 (1968).
5. A. Onton, P. Fisher, A. K. Ramdas, *ibid.* **19**, 781 (1967).
6. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, М., Физматгиз, 1963, § 144.
7. D. M. Larsen, E. J. Johnson, J. Phys. Soc. Japan Suppl. **21**, 443 (1966).
8. P. G. Harper, Proc. Phys. Soc. **92**, 793 (1967).
9. Л. И. Корвин, С. Т. Павлов, ЖЭТФ **53**, 1708 (1967).
10. Ш. М. Коган, Р. А. Сулис, ЖЭТФ **50**, 1279 (1966).
11. Y. Toyozawa, J. Hermanson, Phys. Rev. Lett. **21**, 1637 (1968).
12. В. И. Мельников, Э. И. Рашба, Письма ЖЭТФ **10**, 95, 359 (1969).
13. А. Ю. Матулис, ФТТ **14**, 2987 (1972).
14. И. Б. Левинсон, А. Ю. Матулис, Л. М. Щербakov, ЖЭТФ **60**, 1097 (1971).
15. Л. П. Питаевский, ЖЭТФ **36**, 1168 (1959).
16. И. Б. Левинсон, Письма ЖЭТФ **12**, 496 (1970).
17. Y. B. Levinson, E. I. Rashba, Rept. Progr. Phys. **36**, вып. 12(1973).
18. E. I. Rashba, Y. B. Levinson, Proc. of the 14th Intern. Conference on the Physics of Semiconductors, Warszawa, 1972, p. 1197.
19. G. Whitfield, R. Puff, Phys. Rev. **A139**, 338 (1965).
20. В. И. Мельников, Э. И. Рашба, В. М. Эдельштейн, Письма ЖЭТФ **13**, 269 (1971).
21. И. Б. Левинсон, А. Ю. Матулис, *ibid.* **11**, 360 (1970).
22. И. Б. Левинсон, А. Ю. Матулис, Л. М. Щербakov, ЖЭТФ **61**, 843 (1971).
23. A. Spona, Phys. Rev. **A135**, 111 (1964).
24. Э. И. Рашба, Письма ЖЭТФ **75**, 577 (1972).
25. Б. И. Каплан, И. Б. Левинсон, ФТТ **14**, 1412 (1972).
26. D. D. Dunn, Phys. Rev. **166**, 822 (1968).
27. R. J. Nesk, T. O. Woodruff, Phys. Rev. **B3**, 2056 (1971).
28. С. И. Пекар, ЖЭТФ **16**, 335, 341 (1946).
29. Л. Д. Ландау, С. И. Пекар, ЖЭТФ **18**, 419 (1948).
- 30 а) Н. Н. Боголюбов, УМЖ **2**, 3 (1950); б) С. В. Тябликов, ЖЭТФ **21**, 377 (1951).
31. С. И. Пекар, Исследования по электронной теории кристаллов, М.—Л., Гостехиздат, 1951.
32. S. Rodriguez, T. D. Schultz, Phys. Rev. **178**, 1252 (1969).
33. V. Fedosejev, Preprint FAI-5 (1970) (Институт физики и астрономии АН Эстонской ССР, Тарту).
34. Э. И. Рашба, Изв. АН СССР, сер. физ. **37**, 619 (1973).
35. H. J. Hrostowski, R. H. Kaiser, J. Phys. Chem. Sol. **4**, 148 (1958).
36. B. T. Ahlburn, A. K. Ramdas, Phys. Rev. **167**, 717 (1968).
37. а) P. J. Dean, D. D. Manchon, Jr., J. J. Hopfield, Phys. Rev. Lett. **25**, 1027 (1970); б) D. D. Manchon, Jr., P. J. Dean, Proc. of the 10th Intern. Conference on the Physics of Semiconductors, Cambridge, Mass., 1970, p. 760.

38. D. C. Reynolds, C. W. Litton, T. C. Collins, Phys. Rev. B4, 1868 (1971).
39. C. H. Henry, J. J. Hopfield, *ibid.* B6, 2233 (1972).
40. J. C. Hermanson, *ibid.* B2, 5043 (1970).
41. L. Kalok, J. Treusch, Phys. Stat. Sol. b52, K125 (1972).
42. W. C. Walker, D. M. Roessler, E. Loh, Phys. Rev. Lett. 20, 847 (1968).
43. R. C. Whited, W. C. Walker, *ibid.* 22, 1428 (1969).
44. R. C. Brandt, F. C. Brown, Phys. Rev. 181, 1241 (1969).
45. H. Kanzaki, S. Sakuragi, S. Ozawa, J. Phys. Soc. Japan 24, 652 (1967).
46. H. Kanzaki, S. Sakuragi, *ibid.* 24, 1184 (1968).
47. J. Sak, Phys. Rev. Lett. 25, 1654 (1970), сборник ³⁷⁶, p. 525.
48. R. Z. Bachrach, F. C. Brown, Phys. Rev. Lett. 21, 685 (1968); Phys. Rev. B1, 818 (1970).
49. S. Kurita, K. Kobayashi, J. Phys. Soc. Japan 26, 1557 (1969); 28, 1096, 1097 (1970); 30, 1645 (1971).
50. J. Dillinger, K. Koňák, V. Prosser, J. Sak, M. Zvára, Phys. Stat. Sol. 29, 707 (1968).
51. U. Fano, Phys. Rev. 124, 1866 (1961).
52. Y. Toyozawa, Proc. of the 3rd Intern. Conference on Photoconductivity, L., Pergamon Press, 1971, p. 151.
53. P. G. Harper, J. W. Hodby, R. A. Stradling, Rept. Progr. Phys. 36, 1 (1973).
54. Л. И. Коровин, С. Т. Павлов, ЖЭТФ 55, 349 (1968).
55. T. Holstein, Ann. Phys. (N.Y.) 29, 410 (1964); L. Dworin, Phys. Rev. A140, 1689 (1965).
56. И. Б. Левинсон, А. Ю. Матулис, Л. М. Щербakov, ЖЭТФ 60, 859 (1971).
57. И. Б. Левинсон, Э. И. Рашба, ЖЭТФ 62, 1502 (1972).
58. K. L. Ngai, E. J. Johnson, Phys. Rev. Lett. 29, 1607 (1972).
59. M. Nakayama, J. Phys. Soc. Japan 27, 636 (1969).
60. Л. И. Коровин, ЖЭТФ 58, 1995 (1970); А. А. Ключанов, Е. П. Покартилов, ЖЭТФ 60, 1878 (1971).
61. Б. И. Каплан, И. Б. Левинсон, ФТТ 14, 1663 (1972).
62. Ф. Г. Басс, И. Б. Левинсон, ЖЭТФ 49, 914 (1965).
63. Р. Баканас, И. Б. Левинсон, А. Ю. Матулис, ЖЭТФ 64, 1065 (1973).
64. P. G. Harper, Phys. Rev. 178, 1229 (1969).
65. K. L. Ngai, *ibid.* B3, 1303 (1971).
66. D. H. Dickey, E. J. Johnson, D. M. Larsen, Phys. Rev. Lett. 18, 599 (1967).
67. C. J. Summers, R. B. Dennis, B. S. Wherrett, P. G. Harper, S. D. Smith, Phys. Rev. 170, 755 (1968).
68. Э. И. Рашба, УФН 84, 557 (1964).
69. B. D. McCombe, R. Kaplan, Phys. Rev. Lett. 21, 756 (1968).
70. R. Kaplan, R. F. Wallis, *ibid.* 20, 1499.
71. Л. И. Коровин, С. Т. Павлов, Письма ЖЭТФ 6, 970 (1967).
72. Л. И. Коровин, ФТТ 11, 508 (1969).
73. B. D. McCombe, S. G. Bishop, R. Kaplan, Proc. of the 9th Intern. Conference on the Physics of Semiconductors, Moscow, 1968, p. 301.
74. R. Kaplan, K. L. Ngai, B. W. Henvis, Phys. Rev. Lett. 28, 1044 (1972).
75. J. Waldman, D. M. Larsen, P. E. Tannenwald, C. C. Bradley, D. R. Cohn, B. Lax, *ibid.* 23, 1033 (1969).
76. P. G. Harper, S. D. Smith, M. Allegrini Arimondo, R. B. Dennis, B. S. Wherrett, сборник ³⁷⁶, p. 166.
77. D. R. Cohn, D. M. Larsen, B. Lax, Sol. State Comm. 8, 1707 (1970); Phys. Rev. B6, 1367 (1972).
78. R. J. Elliott, R. Loudon, J. Phys. Chem. Sol. 15, 196 (1960).
79. Р. Нокс, Теория экситонов, М., «Мир», 1966.
80. Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, ЖЭТФ 53, 717 (1967).
81. H. Nasegawa, R. E. Howard, J. Phys. Chem. Sol. 21, 179 (1961).
82. Э. И. Рашба, В. М. Эдельштейн, ЖЭТФ 61, 2592 (1971).
83. И. Б. Левинсон, Письма ЖЭТФ 15, 574 (1972).
84. К. Б. Толпыго, ЖЭТФ 20, 497 (1950).
85. K. Huang, Proc. Roy. Soc. A208, 352 (1951).
86. E. D. Palik, J. K. Furdyna, Rept. Progr. Phys. 33, 1193 (1970).
87. G. Ascarelli, Phys. Rev. 179, 797 (1969); B3, 1498 (1971).
88. K. L. Shaklee, R. E. Nahory, Phys. Rev. Lett. 24, 942 (1970).
89. P. J. Dean, Y. Jafet, J. R. Haynes, Phys. Rev. 184, 837 (1969); B1, 4193 (1970) (E).