

ДИФРАКЦИЯ СВЕТА В ТОЛСТЫХ СЛОЯХ**Н. М. Померанцев**

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	507
2. Параметры фазовой дифракционной решетки, полученной с помощью интерференции двух плоских волн	509
3. Методы решения задачи	510
4. Исследование системы уравнений. Точное решение	512
5. Приближенные решения	517
6. Диаграмма направленности толстослойной голограммы	522
Цитированная литература	524

1. ВВЕДЕНИЕ

Возникновение и совершенствование методов голографии¹⁻³ возродило интерес к дифракции света и, в частности, к дифракции в толстых слоях. Практическая ценность этого явления значительно увеличилась. Использование дифракции света в голографии имеет свои особенности. Голография может приобрести практическое значение, только если светотдача голограммы достаточно велика, т. е. если на долю восстановленного изображения приходится значительная часть падающего на нее света.

Световая отдача голограммы характеризуется ее дифракционной эффективностью, которая показывает, какая часть интенсивности светового излучения переходит в первый порядок дифракции, если голограмма представляет собой «синусоидальную» дифракционную решетку. Такая решетка может быть получена при воздействии на светочувствительный слой двух интерферирующих плоских волн, одна из которых считается опорной, а другая предметной. Варьируя угол падения предметной волны, можно получить решетки с различной пространственной частотой, соответствующей одной из пространственных частот голографируемого предмета. Поэтому такая решетка может рассматриваться как запись одной составляющей фурье-образа голографируемого предмета, а результат дифракции света на такой структуре — как отклик линейной системы на одну составляющую фурье-образа предмета (явление дифракции линейно в силу линейности исходных уравнений).

Рассматривая зависимость дифракционной эффективности от пространственной частоты, мы тем самым получаем диаграмму направленности голограммы, так как разложение по пространственным частотам является в то же время разложением по плоским волнам, исходящим под различными углами от объекта.

Зависимость дифракционной эффективности от пространственной частоты обусловлена в основном двумя причинами: свойствами фоточувствительного материала и свойствами самой голограммы. Первой причины мы касаться не будем, а рассмотрим только влияние на дифракционную эффективность свойств самой голограммы.

Голограммы, как известно, могут быть разделены на тонкослойные и толстослойные. Для тонкослойных голограмм все направления плоских волн, на которые можно разложить волну, исходящую от предмета, равноправны, и в диаграмме направленности самой голограммы нет необходимости.

В случае толстослойных голограмм эффективная длина пути, проходящего световой волной внутри среды, как это иллюстрирует рис. 1, зависит от направления распространения этой волны и диаграмма направленности существует.

Критерий, по которому можно провести разделение голограмм на тонкослойные и толстослойные, будет обсуждаться ниже.

Кроме того, голограммы могут быть амплитудными и фазовыми (в основном, однако, голограммы получаются смешанными амплитудно-

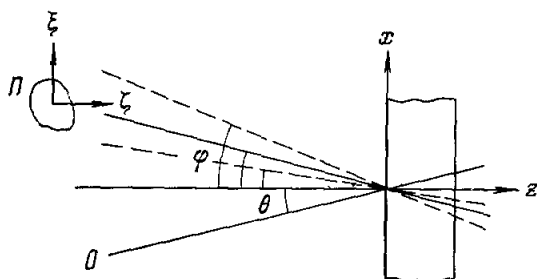


Рис. 1. Разложение волны $F(\xi, \zeta)$, исходящей от предмета, по плоским волнам.

Пунктирные линии показывают некоторые из направлений плоских волн, по которым ведется разложение.

фазовыми)*). С точки зрения получения максимальной дифракционной эффективности наиболее перспективны толстослойные фазовые голограммы. Поэтому мы и будем здесь в основном рассматривать дифракцию когерентного света на фазовой дифракционной решетке.

Дифракционная эффективность, однако, не полностью характеризует свойства голограммы, так как не учитывает фазовых соотношений между составляющими фурье-образа голографируемого предмета.

Фазовые соотношения играют существенную роль при построении изображения по его фурье-составляющим, и для определения свойств голограммы необходимо иметь также ее фазовую характеристику.

Для того чтобы ответить на вопрос, какова будет зависимость дифракционной эффективности от пространственной частоты решетки, т. е. диаграмма направленности толстослойной голограммы, необходимо решить задачу о дифракции когерентного света в среде с пространственно-периодическим распределением показателя преломления.

Существуют различные теории дифракции света в толстых слоях. В основном эти теории развивались при изучении дифракции рентгеновских лучей в кристаллах⁴ и при изучении дифракции света на ультразвуковых волнах⁵.

Не рассматривая здесь подробно всех этих теорий, укажем лишь, что для дифракции рентгеновских лучей в кристаллах существует кинематическая теория (решение методом возмущений)⁶ и динамическая теория⁷ (решение для первых порядков дифракции). Кинематическая теория, примененная к толстослойным голограммам, позволила установить следующие их особенности⁸: 1) избирательность по направлению; 2) избирательность по цвету; 3) существование только одного восстановленного изображения. Однако правильных значений амплитуды эта теория не дает, и вычисление с ее помощью дифракционной эффективности не представляется возможным.

*) Возможно, конечно, и деление по другим признакам. Например, голограммы с постоянной записью и голограммы с перезаписью, но в таком делении при рассмотрении дифракции нет необходимости.

Для дифракции света на ультразвуковых волнах разработана теория связанных волн^{9,10}. Эта теория интересна тем, что позволяет выделить два предельных случая дифракции. Они будут рассмотрены ниже.

Кроме того, решение задачи о дифракции света в толстом слое было произведено с помощью ЦЭВМ¹¹ для некоторых частных случаев.

В настоящем обзоре мы прежде всего установим, какие параметры характеризуют голографическую дифракционную решетку, используемую в теории. Затем будут получены и исследованы точные решения задачи. В заключение будут рассмотрены приближенные решения, позволяющие представить физическую картину явления, и построены диаграммы направленности толстослойных голограмм.

2. ПАРАМЕТРЫ ФАЗОВОЙ ДИФРАКЦИОННОЙ РЕШЕТКИ, ПОЛУЧЕННОЙ С ПОМОЩЬЮ ИНТЕРФЕРЕНЦИИ ДВУХ ПЛОСКИХ ВОЛН

Рассмотрим пространственную (трехмерную) интерференционную картину, полученную в результате сложения двух плоских волн: опорной $J_1 = Ae^{i\rho r}$ и предметной $J_2 = Be^{i\kappa r}$, где A и B — амплитуды волн, а векторы ρ , κ и γ имеют составляющие

$$\rho \equiv \{k \sin \theta, 0, k \cos \theta\}, \quad \kappa \equiv \{k \sin \varphi, 0, k \cos \varphi\}, \\ \gamma \equiv \{x, y, z\}.$$

Направления распространения волн и углы θ и φ представлены на рис. 2.

Интенсивность $I = (J_1 + J_2)(J_1^* + J_2^*)$ суммарной волны может быть представлена следующим образом:

$$I = A^2 + B^2 + 2AB \cos \{(\rho - \kappa) \gamma\}. \quad (1)$$

Первое слагаемое в этом выражении — квадрат амплитуды опорной волны — не зависит от угла θ .

Второе слагаемое — квадрат амплитуды предметной волны, в качестве которой взята только одна фурье-составляющая излучения, исходящего от предмета. Так как разные фурье-составляющие имеют разную величину в зависимости от угла φ , величина B^2 будет функцией угла φ .

Низкочастотная составляющая функции $B^2 = B^2(\varphi)$ в случае фазовых голограмм, накладываясь на изображение при восстановлении, создает блики, уменьшающие контраст изображения. Это — существенный недостаток фазовых голограмм. Однако имеются методы уменьшения помех такого рода¹². Рассмотрение этих методов не относится к теме настоящей статьи. Отметим, однако, что одно из условий получения приемлемой величины отношения сигнал/шум — это малость величины B^2 по сравнению с A^2 , т. е. должно быть $A^2 \gg B^2$, что мы используем в дальнейшем.

Не рассматривая конкретных свойств фоторегистрирующего материала, предположим, что в результате освещения голограммы двумя пучками лучей и последующей обработки (в случае, если она необходима) произойдут изменения диэлектрической проницаемости, пропорциональные интенсивности света, попавшего в ту или иную точку фотоматериала.

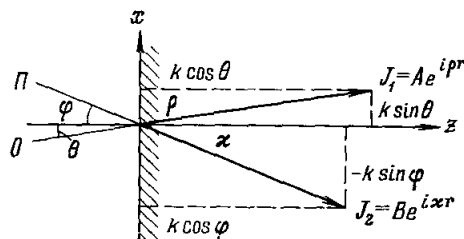


Рис. 2. Волновые векторы опорной и предметной волн, их координаты и углы падения волн на фоточувствительный слой.

Поэтому можно принять, что диэлектрическая проницаемость фотоматериала после записи на нем дифракционной решетки будет зависеть от координат следующим образом:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon \cos \{(\rho - \kappa) \mathbf{r}\}. \quad (2)$$

Если принять во внимание приведенное выше неравенство, из которого следует, что $(\Delta\varepsilon/\varepsilon_0) \ll 1$, то для константы распространения $\beta = (2\pi/\lambda) \sqrt{\varepsilon} = k \sqrt{\varepsilon}$ получим выражение

$$\beta = k \sqrt{1 + \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_0} \cos \{(\rho - \kappa) \mathbf{r}\}} \approx k \left[1 + \frac{\Delta\varepsilon}{2\varepsilon_0} \cos \{(\rho - \kappa) \mathbf{r}\} \right]. \quad (3)$$

Таким образом, характеристики фазовой дифракционной решетки определяются тремя параметрами: углом падения опорного луча θ , углом падения предметного луча φ и максимальной величиной относительного изменения диэлектрической проницаемости. При такой форме зависимости диэлектрической проницаемости от координат можно учесть также и поглощение в голографическом слое, если заменить величины ε_0 и $\Delta\varepsilon$ соответствующими комплексными величинами. Мы, однако, будем считать ε_0 и $\Delta\varepsilon$ действительными.

В некоторых случаях угол падения света на решетку при дифракции (т. е. при воспроизведении голограммы) отличается от угла падения опорного пучка лучей при записи. Тогда появляется четвертый параметр ϑ — угол падения света на решетку при дифракции.

3. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Стационарные уравнения Максвелла для немагнитной среды имеют вид

$$\text{rot rot } \mathbf{E} + \beta^2 \mathbf{E} = 0. \quad (4)$$

Приняв во внимание установленную выше зависимость диэлектрической проницаемости от координат, постоянную распространения β можно в нашем случае представить следующим образом:

$$\beta^2 = k^2 + k^2 \alpha [\exp \{i(\rho - \kappa) \mathbf{r}\} + \exp \{-i(\rho - \kappa) \mathbf{r}\}],$$

где ρ , κ и \mathbf{r} — векторы, определенные выше, $\alpha = \Delta\varepsilon/2\varepsilon_0$.

Применяя метод связанных волн, будем искать решение уравнений (4) в виде следующего ряда Фурье:

$$\mathbf{E} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_m(z) \exp(i\mu_m \mathbf{r}). \quad (5)$$

Векторы $\mathbf{E}_m(z)$ (подлежащие определению функции) предполагаются зависящими только от переменной z , так как имеется в виду, что зависимость \mathbf{E} от x чисто периодическая, вследствие периодичности структуры и неограниченности размеров дифракционной решетки в направлении оси x .

Нетрудно убедиться, что с помощью такого ряда Фурье из уравнений Максвелла можно получить систему уравнений с постоянными коэффициентами. Для этого надо определить векторы μ_m следующим образом:

$$\mu_m = \sigma + m(\rho - \kappa), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (6)$$

где σ — волновой вектор падающей на решетку восстанавливающей волны:

$$\sigma \equiv \{k \sin \vartheta, 0, k \cos \vartheta\}.$$

Если восстанавливающая исходная волна падает на решетку в том же направлении, что и опорная волна при записи, то $\sigma = \rho$ и $\vartheta = \theta$.

При значениях μ_m , определенных выше, решение примет вид

$$\mathbf{E} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_m(z) \exp \{i\sigma z + im(\rho - \kappa) r\}. \quad (7)$$

Физический смысл этого решения в том, что внутри среды (т. е. после прохождения волной границы раздела), кроме волны, совпадающей по направлению с исходной $\mathbf{E}_0(z) e^{i\sigma z}$, возникает бесконечный ряд дифрагировавших волн $\mathbf{E}_m(z) \exp \{im(\rho - \kappa) r\}$, расположенных по обе стороны от исходной.

Амплитуды и фазы всех волн зависят от z , так как волны при распространении внутри среды взаимодействуют между собой. Это взаимодействие возникает вследствие того, что волны при прохождении слоистой структуры периодически испытывают отражение и преломление. Благодаря периодичности отражений и преломлений, а также интерференции, распространение света в среде происходит только по определенным направлениям, т. е. энергия «канализуется», так что ее переходы, обусловленные отражением и преломлением, возможны только между соседними каналами. Расположение каналов иллюстрируется рис. 3. На нем изображено несколько первых волновых векторов, причем показан случай, когда направление восстанавливающей волны совпадает с направлением опорной волны при записи.

Для того чтобы получить систему уравнений, имеющую удобный для решения вид, сделаем одно предположение, не ограничивающее общности решения. Предположим, что в процессе дифракции поляризация волн не меняется. Такое предположение вполне законно для изотропных сред. Тогда можно принять

$$\mathbf{E}_m(z) = \mathbf{e}_m E_m(z),$$

где $E_m(z)$ — скалярная функция, \mathbf{e}_m — единичный вектор, не зависящий от z , лежащий в плоскости поляризации и перпендикулярный к направлению распространения волны. Благодаря этому для векторов \mathbf{e}_m действительны соотношения

$$\mathbf{e}_m \mathbf{e}_m = 1, \quad \mathbf{e}_m \rho = 0.$$

В результате подстановки ряда Фурье в уравнения Максвелла с учетом всех приведенных соотношений получим для $E_m(z)$ систему однородных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E_m}{dt^2} + 2i [\cos \vartheta + m(\cos \theta - \cos \varphi)] \frac{dE_m}{dt} - \\ - 4m \sin \frac{\varphi + \theta}{2} \left[\sin \left(\vartheta + \frac{\varphi - \theta}{2} \right) + m \sin \frac{\varphi + \theta}{2} \right] E_m + \\ + \alpha (\mathbf{e}_m \mathbf{e}_{m-1} E_{m-1} + \mathbf{e}_m \mathbf{e}_{m+1} E_{m+1}) = 0, \quad (8) \end{aligned}$$

где введена новая переменная $t = kz$.

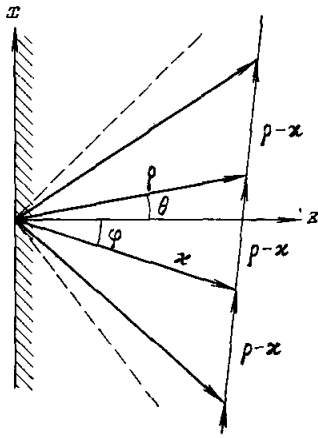


Рис. 3. Направления распространения дифрагировавших волн внутри среды.

Величина скалярного произведения $\mathbf{e}_m \mathbf{e}_{m\pm 1}$ зависит от ориентации вектора исходной волны \mathbf{E}_0 . Если этот вектор перпендикулярен к плоскости падения (т. е. параллелен оси y), то, как легко видеть, все векторы \mathbf{e}_m параллельны друг другу и мы имеем $\mathbf{e}_m \mathbf{e}_{m\pm 1} = 1$.

Если же направление вектора \mathbf{E}_0 не составляет прямого угла с плоскостью падения, то $\mathbf{e}_m \mathbf{e}_{m\pm 1} \leq 1$. Таким образом, поворот вектора \mathbf{E}_0 от положения, параллельного оси y , приводит к уменьшению связи между волнами. Мы будем рассматривать только практически наиболее важный случай максимальной связи и положим $\mathbf{e}_m \mathbf{e}_{m\pm 1} = 1$; тогда $\mathbf{e}_m \mathbf{e}_m = 0$.

Коэффициенты системы уравнений принимают более простой вид, когда направление исходной (восстанавливающей) волны, т. е. волны, падающей на решетку при дифракции, точно совпадает с направлением опорной волны при записи. Уравнения тогда будут

$$\frac{d^2 E_m}{dt^2} + 2i[(m+1)\cos\theta - m\cos\varphi] \frac{dE_m}{dt} - 4m(m+1)\sin^2 \frac{\varphi+\theta}{2} E_m + \alpha(E_{m-1} + E_{m+1}) = 0. \quad (9)$$

4. ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ. ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ

Независимо от направления исходной волны систему уравнений, описывающую дифракцию, можно представить в виде

$$\frac{d^2 E_m}{dt^2} + 2i\beta_m \frac{dE_m}{dt} - \gamma_m E_m + \alpha(E_{m-1} + E_{m+1}) = 0. \quad (10)$$

Вид этой системы таков, что ее можно интерпретировать как систему уравнений, описывающую колебательные процессы в системе связанных резонаторов. Назовем их квазирезонаторами. Следует, однако, помнить, что сравнение с резонаторами чисто формальное и колебания квазирезонаторов пространственные, а не временные.

Кроме системы (10), можно написать также и систему для сопряженных величин:

$$\frac{d^2 E_m^*}{dt^2} - 2i\beta_m \frac{dE_m^*}{dt} - \gamma_m E_m^* + \alpha(E_{m-1}^* + E_{m+1}^*) = 0. \quad (11)$$

Граничные условия для решения задачи должны быть выбраны исходя из предположения, что при отсутствии связи ($\alpha = 0$) никакой дифракции не будет, амплитуды колебаний всех квазирезонаторов, кроме E_0 , равны нулю, а для E_0 имеется только постоянная составляющая. Амплитуда этой постоянной составляющей равна амплитуде исходной волны. Мы принимаем ее равной единице. Таким образом, имеем

$$E_m|_{t=0} = \delta_{m0}, \quad \left. \frac{dE_m}{dt} \right|_{t=0} = 0, \quad (12)$$

где

$$\delta_{m0} = \begin{cases} 1 & \text{при } m=0, \\ 0 & \text{при } m \neq 0. \end{cases}$$

Дифрагировавшие волны возникают только благодаря связи волн между собой. Поэтому граничные условия при $\alpha \neq 0$ не должны отличаться от только что указанных. Их отличие означало бы введение других причин возникновения дифрагировавших волн, кроме связи между волнами.

Рассмотрим законы сохранения. Система уравнений для связанных волн E_m имеет два интеграла, которые можно получить следующим обра-

зом. Умножим системы для E_m и E_m^* на сопряженные величины, просуммируем по всем m и вычтем одну сумму из другой. Получим

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{d^2 E_m}{dt^2} E_m^* - \frac{d^2 E_m^*}{dt^2} E_m + 2i\beta_m \frac{d}{dt} E_m E_m^* \right) = 0.$$

Вследствие того, что решением системы уравнений с постоянными коэффициентами является экспоненциальная функция $e^{i\omega t}$, первые два члена полученного соотношения взаимно компенсируют друг друга и мы имеем

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \beta_m E_m(z) E_m^*(z) = \text{const} \quad (13)$$

Это — первый закон сохранения в системе связанных квазирезонаторов.

Полученное выражение, как нетрудно видеть, представляет собой поток энергии, проходящий через поверхность, перпендикулярную к оси z , расположенную в произвольном месте внутри среды. Сохраняется при дифракции, таким образом, не величина энергии вообще, а ее поток (в направлении оси z) через поверхность слоя и возможно «расплывание» энергии в направлении оси x , т. е. переход ее в высшие порядки дифракции.

Из граничных условий (12) следует, что

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \beta_m E_m(z) E_m^*(z) = \cos \theta. \quad (14)$$

Для того чтобы получить другой интеграл системы уравнений, умножим систему для E_m на dE_m^*/dt и соответственно систему для E_m^* на dE_m/dt . После суммирования и сложения двух систем, аналогично предыдущему, получим выражение

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\frac{dE_m}{dt} \frac{dE_m^*}{dt} - \gamma_m E_m E_m^* + \alpha (E_{m-1} + E_{m+1}) E_m^* \right] = 0,$$

написанное с учетом граничных условий (12).

Это — второй закон сохранения энергии в системе связанных квазирезонаторов. Первое слагаемое в выражении для второго закона (dE_m/dt) dE_m^*/dt можно интерпретировать как кинетическую энергию («скорость» нарастания волны вдоль оси x), слагаемое $-\gamma_m E_m E_m^*$ как потенциальную энергию, а слагаемое, $\alpha (E_{m-1} + E_{m+1}) E_m^*$ — как энергию связи. Таким образом, интеграл (15) характеризует движение энергии в системе связанных квазирезонаторов и показывает, что градиент энергии, характеризующий ее переход в различные порядки дифракции, зависит от коэффициента связи α и константы γ_m .

Квазирезонаторы в нашей интерпретации, как видим, существенно отличаются от обычных резонаторов. В системе квазирезонаторов, которым подобны связанные дифрагирующие волны, имеются два вида потенциальной энергии:

$$\mathcal{E}_1 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \beta_m E_m E_m^* \quad \text{и} \quad \mathcal{E}_2 = - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma_m E_m E_m^*, \quad (15)$$

что тесно связано с существованием двух различных по величине (а не по знаку, как в обычном случае) парциальных частот. Эти частоты будут вычислены ниже. В приближенном решении, которое будет рассмотрено в гл. 5, член, соответствующий градиенту энергии в (15), отсутствует,

и остается один закон сохранения (13) и одна парциальная частота для каждого квазирезонатора.

Сходимость рядов, выражающих первый и второй закон сохранения, следует из теоремы существования и единственности решения системы дифференциальных уравнений. Из сходимости этих рядов следует, что $E_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \pm\infty$. Таким образом, главную роль при дифракции играют волны нулевого и первых порядков. Нетрудно видеть, что при совпадении восстанавливающего и опорного пучков лучей имеем $\gamma_0 = \gamma_1 = 0$ и энергия \mathcal{E}_2 для этих порядков не существует. Поэтому потенциальная энергия \mathcal{E}_2 , накапливаясь в высших порядках, играет в системе роль сдерживающего фактора, затрудняя переход энергии к высшим порядкам дифракции.

Распределение света в пространстве при прохождении его внутри среды, вдоль оси z , интерпретируется у нас как колебания квазирезонаторов во времени.

Энергия в процессе дифракции передается от волны нулевого порядка E_0 (которая одна только и существует в среде непосредственно после пересечения светом границы раздела) к волнам высших порядков. В системе связанных резонаторов способность передачи энергии от одного резонатора к другому зависит от синхронизма колебаний на парциальных частотах, т. е. частотах, которые совершают одиночные резонаторы, разделяющиеся при отсутствии связи на отдельные парциальные системы.

Найдем парциальные частоты. Положив коэффициент связи α равным нулю, получим систему уравнений

$$\frac{d^2 E_m}{dt^2} + 2i\beta_m \frac{dE_m}{dt} - \gamma_m E_m = 0, \quad (16)$$

описывающую колебания не связанных друг с другом квазирезонаторов.

Каждый квазирезонатор, описываемый одним из уравнений системы, имеет (в отличие от обычных резонаторов) две различные по величине парциальные частоты,

$$(\omega_{1,2})_m = -\beta_m \pm \sqrt{\beta_m^2 - \gamma_m}. \quad (17)$$

Колебания соответствующей квазирезонатору парциальной системы не будут гармоническими, так как отношение двух парциальных частот ω_1/ω_2 не является рациональным числом.

Выпишем значения парциальных частот для нескольких квазирезонаторов, близких к E_0 (рассматривается случай совпадения восстанавливающего луча с опорным):

$$\begin{array}{l} E_2 \\ E_1 \\ E_0 \\ E_{-1} \\ E_{-2} \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} -3 \cos \theta + 2 \cos \varphi \pm \sqrt{(-3 \cos \theta + 2 \cos \varphi)^2 - 24 \sin^2 \frac{\varphi + \theta}{2}} & \\ -2 \cos \theta + \cos \varphi \pm \sqrt{(-2 \cos \theta + \cos \varphi)^2 - 8 \sin^2 \frac{\varphi + \theta}{2}} & \\ 0, & \cos \theta \\ 0, & \cos \varphi \\ \cos \theta - 2 \cos \varphi \pm \sqrt{(\cos \theta - 2 \cos \varphi)^2 - 8 \sin^2 \frac{\varphi + \theta}{2}} & . \end{array} \right.$$

Рассмотрение величин парциальных частот показывает, что наиболее благоприятны условия для обмена энергией между нулевым и минус первым квазирезонаторами. Однако если углы θ и φ малы, то парциальные частоты всех квазирезонаторов близки к нулю и, следовательно, с уменьшением углов θ и φ улучшаются условия для перехода энергии

в высшие порядки дифракции. Наоборот, если углы θ и φ увеличивать, то энергия будет переходить в основном от волны нулевого порядка только к волне минус первого порядка.

Именно это условие, обеспечивающее существование волн только двух порядков, и необходимо для получения большого значения дифракционной эффективности. Знание парциальных частот, однако, дает возможность получить только качественную картину распределения энергии по порядкам дифракции.

Перейдем к системе уравнений при наличии связи:

$$\frac{d^2 E_m}{dt^2} + 2i\beta_m \frac{dE_m}{dt} - \gamma_m E_m + \alpha (E_{m-1} + E_{m+1}) = 0. \quad (18)$$

Ее собственные частоты определяются как корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \alpha & D_1 & \alpha & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \alpha & D_0 & \alpha & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & \alpha & D_{-1} & \alpha & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0, \quad (19)$$

где $D_m = -(\omega^2 + 2\omega\beta_m + \gamma_m)$, а общее решение имеет вид

$$E_m = \sum_{l=-\infty}^{\infty} C_{ml} e^{i\omega_l t}. \quad (20)$$

Коэффициенты C_{ml} находятся из упомянутых выше граничных условий. Полное решение — сумма всех дифрагировавших волн — имеет теперь вид

$$\mathbf{E} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{e}_m \sum_{l=-\infty}^{\infty} C_{ml} \exp [i\sigma \mathbf{r} + im(\rho - \kappa) \mathbf{r} + i\omega_l k z]. \quad (21)$$

Как видно из этого решения, имеются два ряда дифрагировавших волн. Первый ряд представляет собой распределение по отдельным каналам (представленным на рис. 3), в каждом из которых распространяется целая группа волн. Таким образом, каждая волна m -го порядка $E_m(z)$ состоит в свою очередь из ряда (вообще говоря, бесконечного) близко расположенных волн. Эти вторые ряды волн представлены на рис. 4 своими волновыми векторами. Для ясности рисунка углы между векторами сделаны много большими, чем это имеет место в действительности, а число волн ограничено четырьмя. Распространяясь почти в одном направлении, эти волны интерферируют, в результате чего интенсивность дифрагировавших волн, при распространении их внутри среды, изменяется по сложному закону.

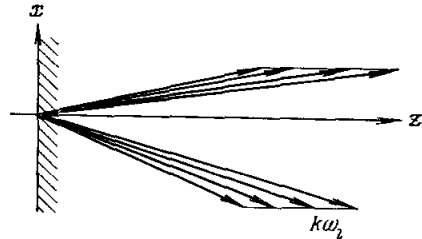


Рис. 4. Группы волн, распространяющихся в направлении дифракционного порядка.

Величина $k\omega_l$ равна половине расстояния между концами средних векторов.

Собственные частоты ω_l не кратны друг другу, и колебание всей системы не может быть разложено на ряд гармонических колебаний. Функции $E_m(z)$ становятся суммами периодических функций с некратными периодами, т. е. представляют собой почти-периодические функции

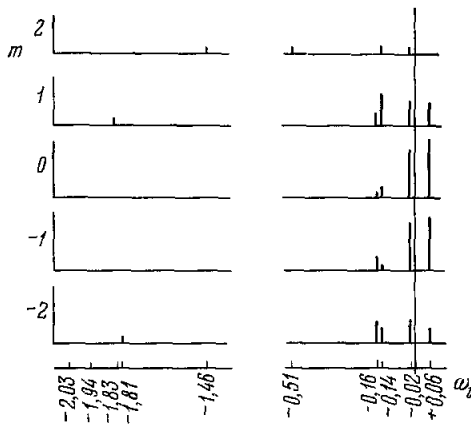


Рис. 5. Спектр собственных частот квазирезонаторов для дифрагировавших волн порядков 2, 1, 0, -1, -2, для $\alpha = 0, 1$, $\theta = \varphi = 10^\circ$.

ставленным из чистых колебаний вида $C_m e^{i\omega_l t}$:

Бесконечный характеристический детерминант (19) может быть сделан абсолютно сходящимся с помощью деления каждой его строки на $-(\omega^2 + 2\omega\beta_m + \gamma_m)$. Ограничиваясь числами $m_{\max} = M_1$ и $|-m_{\max}| = M_2$ и решая характеристическое уравнение, получим $2(M_1 + M_2 + 1)$ собственных частот системы и представим, таким образом, функции $E_m(z)$ в виде суммы $2(M_1 + M_2 + 1)$ чистых колебаний. Таким путем можно получить решение системы уравнений для $E_m(z)$ с любой заданной точностью.

В качестве примера приведем решение для следующих значений параметров: $\alpha = 0, 1$, $\theta = \varphi = 10^\circ$. На рис. 5 графически представлены спектры функций $E_m(z)$ для $M_1 = M_2 = 2$, вычисленные с помощью ЦЭВМ¹⁴. Из этого рисунка видно, что волны порядка E_0 и E_{-1} представлены в основном колебаниями на двух частотах. Это дает основание для решения задачи в двухволновом приближении, что будет рассмотрено ниже.

На рис. 6 представлена зависимость интенсивностей волн $|E_m|^2$ от переменной $t = kz$. Как видно из этого рисунка, интенсивности всех волн при распространении внутри среды испытывают сильные колебания. Интенсивности волн E_0 и E_{-1} достигают максимума, близкого к единице,

переменной z , представленные своими рядами Фурье. Теория таких функций и операций над ними хорошо разработана¹³. Согласно этой теории сумма колебаний вида $C_m e^{i\omega_l t}$ (которые по терминологии Г. Бора принято называть «чистыми») может быть соединена в ряд (ряд Фурье почти-периодической функции). Сходимость ряда (20), составленного из чистых колебаний, расположенных по возрастающим величинам ω_l , следует из теоремы существования и единственности решения системы дифференциальных уравнений.

По теореме аппроксимации почти-периодических функций¹³, функции $E_m(z)$ могут быть аппроксимированы конечным рядом, со-

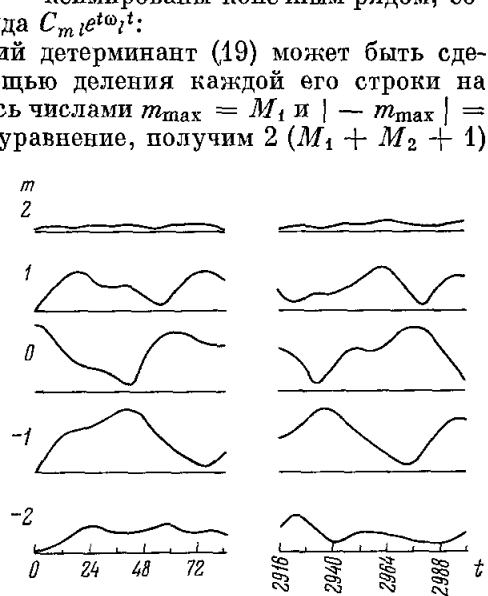


Рис. 6. Колебания интенсивности света в порядках дифракции 2, 1, 0, -1, -2 при прохождении его через толщину среды для $\alpha = 0, 1$, $\theta = \varphi = 10^\circ$.

Две группы представленных отрезков кривых являются двумя частями одних и тех же кривых.

и уменьшаются до значений, близких к нулю. Максимальные значения интенсивностей других волн меньше. Из этого рисунка также видно, что волны с $|m| \geq 3$ не играют уже существенной роли и могут не приниматься во внимание.

Необходимо отметить, что в данной задаче не учтено отражение и преломление волн на границах среды. Однако эти явления не имеют отношения к дифракции внутри среды, и не имеет смысла усложнять задачу, учитывая их. Необходимо иметь в виду, что углы θ и φ — это углы, под которыми опорный и предметный пучки лучей распространяются внутри среды, но не вне ее.

Переотражения света от обеих границ внутрь среды могут также быть рассмотрены отдельно¹⁵.

5. ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ

С помощью ряда упрощающих предположений можно получить аналитические решения для двух предельных случаев дифракции, которые мы сейчас и рассмотрим. Предположим, что $\theta = \varphi$ (симметричное падение предметной и опорной волн на голограмму) и введем в уравнения малый параметр, для чего произведем замену переменной $t = (\xi \cos \theta)/\alpha$. Тогда система уравнений, описывающая дифрагировавшие волны, будет

$$\frac{\alpha^2}{\cos^2 \theta} \frac{d^2 E_m}{d\xi^2} + 2i\alpha \frac{dE_m}{d\xi} - 4m(m+1) \sin^2 \theta E_m + \alpha(E_{m-1} + E_{m+1}) = 0. \quad (22)$$

Если параметр $\alpha^2/\cos^2 \theta$ меньше α , то член со второй производной можно отбросить и система уравнений значительно упрощается:

$$2i \frac{dE_m}{d\xi} - 4m(m+1) \frac{\sin^2 \theta}{\alpha} E_m + E_{m-1} + E_{m+1} = 0. \quad (23)$$

Для исследования этих уравнений предположим вначале, что связь между волнами отсутствует ($\alpha = 0$), и исследуем парциальные частоты. Получим систему уравнений

$$2i dE_m/d\tau - 4m(m+1) \sin^2 \theta E_m = 0, \quad (24)$$

где $\tau = kz/\cos \theta$.

Эта система описывает колебания не связанных между собой квазирезонаторов (теперь уже гармонические). Каждый из резонаторов колеблется со своей парциальной частотой, кратной величине $2 \sin^2 \theta$.

Условием наилучшей передачи энергии в системе связанных резонаторов является, как известно, синхронизм колебаний парциальных систем, т. е. способность их колебаться в фазе длительное время. Будем считать, что колебания квазирезонаторов в достаточной степени синхронны, если на всем пути светового луча в среде фаза колебаний с частотой, равной парциальной, изменяется мало, т. е. что величина фазы $4 \sin^2 \theta \cdot \tau|_{z=a}$, которую мы обозначим Q , мала (здесь d — толщина слоя).

При этом условии передача энергии от одного квазирезонатора к другому облегчена и максимальные значения интенсивностей большого числа порядков дифракции (начиная с нулевого) будут мало отличаться друг от друга. Количественную оценку малости параметра Q можно сделать на основе сравнения теории с экспериментом. Такое сравнение, проводившееся многократно при изучении дифракции света на ультразвуке, показало, что возбуждение большого числа симметрично расположенных порядков дифракции наблюдается при значениях Q порядка $\pi/12$ и меньше.

Отсюда имеем $Q \leq \pi/12$ или, принимая во внимание, что $Q = 4kd \sin \theta \operatorname{tg} \theta$, получим

$$kd \leq \frac{\pi}{48 \sin \theta \operatorname{tg} \theta}. \quad (25)$$

Область значений величины kd , удовлетворяющих этому неравенству, называется областью дифракции Рамана — Ната по имени исследователей, изучавших этот вид дифракции¹⁶.

Если вернуться к упрощенной системе уравнений, описывающей колебания связанных квазирезонаторов,

$$2i \frac{dE_m}{d\xi} + E_{m-1} + E_{m+1} = m(m+1) \frac{Q \cos \theta}{\alpha kd} E_m, \quad (26)$$

то, положив в ней $Q = 0$, получим соотношение

$$2i \frac{dE_m}{d\xi} + E_{m-1} + E_{m+1} = 0, \quad (27)$$

которому удовлетворяют функции Бесселя, если принять

$$E_m(\xi) = i^m J_m(\xi). \quad (28)$$

Это и будет решением поставленной задачи в приближении Рамана — Ната.

Функции $E_m(\xi)$ удовлетворяют граничным условиям

$$E_m(0) = \delta_{m0},$$

в полном согласии с условиями задачи.

Характер изменения амплитуд дифрагировавших волн указывает на то, что в области дифракции Рамана — Ната происходит постепенная передача энергии от волны нулевого порядка симметрично ко всем волнам высших порядков при незначительном обратном возвращении к волне нулевого порядка. В результате такого процесса энергия в конце концов переходит к волнам высокого порядка и амплитуда волны нулевого порядка значительно уменьшается. Это хорошо иллюстрирует рис. 7, из которого видно, как колеблется интенсивность волн в первых трех порядках дифракции при проникновении света в глубь среды.

Рис. 7. Интенсивности (I_m) волн, распространяющихся в нулевом, первом и втором порядках дифракции при дифракции в области Рамана — Ната.

Такая картина, однако, представляет собой идеализацию и предполагает синхронизм колебаний парциальных систем. В действительности с увеличением толщины среды (т. е. с увеличением z) синхронизм дифрагирующих волн все больше и больше нарушается, что затрудняет передачу энергии в высшие порядки дифракции.

Общее решение — сумма всех волн

$$E(z) = e^{i\sigma z} \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(\xi) \exp\{im(\rho - \kappa)z\}.$$

Ряд по функциям Бесселя легко суммируется, и мы получим волну

$$E(z) = \exp\left[i\sigma z + i \frac{\alpha kz}{\cos \theta} \cos\{(\rho - \kappa)z\}\right],$$

соответствующую исходной, модулированной по фазе.

Теперь легко видеть, что при дифракции в области Рамана — Ната происходит сдвиг только фазы исходной волны, пропорциональный распрелению показателя преломления в среде.

Рассмотрим другой предельный случай, когда Q велико. Синхронизма парциальных систем теперь не будет, и передача энергии в высшие порядки дифракции затруднится. Однако легко видеть, что парциальные частоты квазирезонаторов с индексами 0 и -1 равны нулю, в то время как парциальные частоты всех остальных квазирезонаторов теперь значительно отличаются от нуля. Это дает основания рассматривать колебания в системе, состоящей только из двух связанных квазирезонаторов, считая ее изолированной, т. е. предполагая, что энергия другим квазирезонаторам не передается.

Такая ситуация возникает в результате выполнения условия Брэгга¹⁷

$$\lambda/n\Lambda = 2 \sin \vartheta,$$

где Λ — период дифракционной решетки, n — показатель преломления.

Период решетки, записанной с помощью двух плоских волн, как известно, равен

$$\Lambda = \lambda/2n \sin \theta.$$

Если волна, падающая на решетку, при дифракции точно совпадает с опорной, применявшейся при записи, то $\vartheta = \theta$ и условия Брэгга автоматически выполняются.

Мы имеем теперь систему уравнений в двухволновом приближении:

$$\begin{aligned} 2i \frac{dE_0}{d\xi} + E_{-1} &= 0, \\ 2i \frac{dE_{-1}}{d\xi} + E_0 &= 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Эта система имеет не равные нулю собственные частоты $\alpha k/2 \cos \theta$ и $-\alpha k/2 \cos \theta$. Решением ее, при граничных условиях, приведенных раньше, будут гармонические колебания

$$E_0 = \cos \left(\frac{\alpha k}{2 \cos \theta} z \right), \quad E_{-1} = i \sin \left(\frac{\alpha k}{2 \cos \theta} z \right). \quad (30)$$

Интенсивности распространяющихся волн определяются выражениями

$$\begin{aligned} |E_0|^2 &= \frac{1 + \cos(\alpha k z / \cos \theta)}{2}, \\ |E_{-1}|^2 &= \frac{1 - \cos(\alpha k z / \cos \theta)}{2}. \end{aligned} \quad (31)$$

Необходимо выяснить, при каких величинах Q можно считать две волны, E_0 и E_{-1} , изолированными от других. Экспериментальные исследования показали, что это имеет место при $Q \geq 4\pi$, или

$$kd \geq \frac{\pi}{\sin \theta \operatorname{tg} \theta} \quad (32)$$

Область значений kd , удовлетворяющих этому неравенству, носит название области дифракции Брэгга. Область значений kd , находящихся в пределах

$$\frac{\pi}{48 \sin \theta \operatorname{tg} \theta} \leq kd \leq \frac{\pi}{\sin \theta \operatorname{tg} \theta}, \quad (33)$$

можно считать промежуточной областью.

Из выражений для интенсивностей дифрагирующих волн можно сделать вывод, что в области дифракции Брэгга происходит периодическая перекачка энергии из волны нулевого порядка в волну соседнего (минус первого) порядка и обратно. Процесс дифракции в этом случае аналогичен колебаниям системы двух связанных маятников, где при определенных начальных условиях энергия передается от одного маятника к другому подобным же образом.

Дифракцию в области Брэгга можно также рассматривать как результат «биений», получающихся при сложении двух волн, распространяющихся в каждом из двух каналов, соответствующего порядка дифракции:

$$E_{ml} \sim \exp [i\sigma r + im(\rho - \kappa)r + il(\alpha k/2 \cos \theta)z];$$

$m = 0, -1$ — порядок дифракции, $l = 1, -1$ — индекс волны.

Из двух волн состоит как волна нулевого порядка E_0 , так и волна минус первого порядка E_{-1} , как это представлено на рис. 8. Сложение этих волн и приводит к биениям.

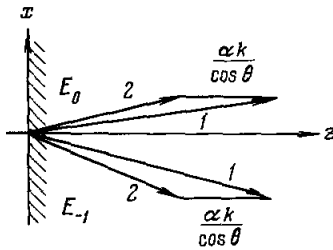


Рис. 8. Пары волн, распространяющихся в нулевом и минус первом порядках дифракции при дифракции в области Брэгга.

Если условия Брэгга выполняются не точно $\vartheta \neq \theta$, то частичная частота волны минус первого порядка несколько отличаются от нуля, так что полного синхронизма волн нулевого и минус первого порядков не будет. Колебания совокупности квазирезонаторов становятся, как и в общем случае, негармоническими. Однако можно выделить случай, когда углы ϑ и θ близки друг к другу и частичная частота минус первого квазирезонатора гораздо ближе к нулю, чем частичные частоты всех остальных. Перекачка энергии тогда осуществляется в основном опять между волнами

нулевого и минус первого порядков.

Приближения, которые мы рассматривали, дают правильную картину дифракции, только если коэффициент при второй производной $\alpha^2/\cos^2 \theta$ много меньше коэффициента при первой производной α , т. е. при соблюдении неравенства

$$\cos^2 \theta \gg \alpha. \quad (34)$$

Это хорошо иллюстрируется рис. 9, на котором пунктиром представлено приближенное решение¹⁸, а сплошными линиями — точные¹⁴, для разных значений α .

Неравенство (34) всегда выполняется при малых углах θ (так как α не может быть больше $1/2$). Однако при уменьшении угла θ величина Q уменьшается и дифракция переходит из области Брэгга в промежуточную область. При больших углах θ рассмотренное приближение будет законно, только если α очень мал.

Разделение дифракции в толстых слоях на три области иллюстрируется графиком рис. 10, на котором представлена зависимость величины kd от угла θ на границах областей.

Как видно из этого рисунка, при изменении угла θ от 10° до 30° толщина голограммы может быть уменьшена на порядок, но голограмма останется при этом толстослойной. Зависимостью свойств голограммы от угла θ можно объяснить возможность записи на материале одной и той же толщины голограмм, как со свойствами толстослойных, так и со свойствами тонкослойных, в зависимости от угла падения опорного пучка лучей.

При малых углах θ для получения толстослойных голограмм требуется весьма большая толщина слоя. При углах θ , близких к 90° , требуемая величина θ становится малой и в пределе ($\theta = 90^\circ$) обращается в нуль. Это нетрудно понять из схемы падения лучей, представленной на рис. 10. При падении луча на решетку под большим углом (как показано на рисунке пунктиром), путь света в среде намного превышает толщину слоя, и поэтому размеры области, в которой происходит дифракция, значительно увеличиваются. Таким образом, одна толщина слоя еще не достаточна для характеристики голограмм. При разделении их на толстослойные и тонкослойные совершенно недостаточно сравнивать с длиной волны только толщину слоя, и на слое одной и той же толщины могут быть получены голограммы с различными свойствами.

Кроме того, необходимо обратить внимание на то, что дифракция Брэгга не может быть практически наблюдаема при углах падения лучей меньше 10° и голограммы со свойствами толстослойных не могут быть при этом получены. Из рис. 10 видно, что в области $\theta = 8 - 10^\circ$ кривая резко идет вверх, так что и при очень значительном увеличении слоя

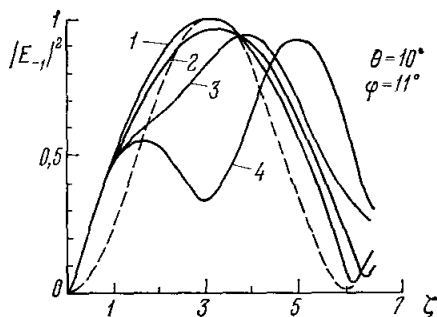


Рис. 9. Сопоставление точного и приближенного решений.

Пунктир — приближенное решение. Для других кривых (точные решения) значения α следующие: 1 — 0,01; 2 — 0,05; 3 — 0,1; 4 — 0,2. По оси абсцисс отложены значения величины $\zeta = \alpha kz$.

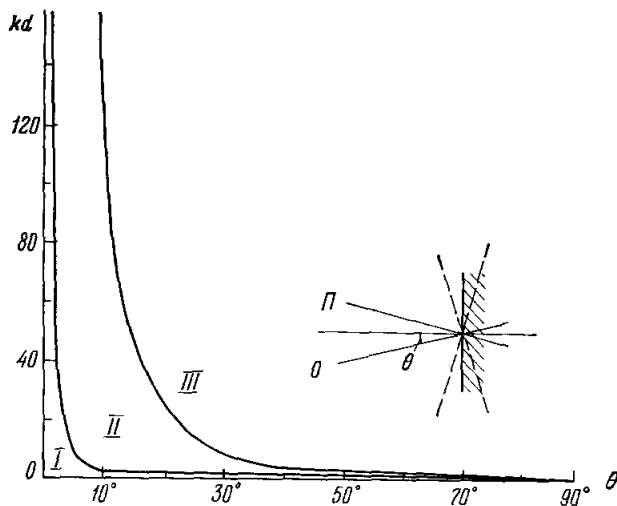


Рис. 10. Области дифракции света в толстых слоях: область дифракции Рамана — Ната (I), промежуточная область (II) и область дифракции Брэгга (III).

для углов падения луча, например, 10° точка, изображающая величину kd , будет все время находиться в непосредственной близости к границе области Брэгга с промежуточной областью, где условия для возникновения этого вида дифракции неблагоприятны. То же демонстрируется графиками точного решения (см. рис. 6), из которого видно, что при $\theta = 10^\circ$ возбуждаются соседние с нулевым и минус первым порядки для таких значений kd , для которых Q заведомо велико.

6. ДИАГРАММА НАПРАВЛЕННОСТИ ТОЛСТОСЛОЙНОЙ ГОЛОГРАММЫ

Дифракционная решетка, рассмотренная выше, получена с помощью записи на голограмме амплитуды и фазы плоской волны, соответствующей одной пространственной частоте голографируемого предмета. С помощью такой решетки можно исследовать зависимость интенсивности излучения в первом порядке дифракции от направления плоской волны, и получить таким образом зависимость дифракционной эффективности голограммы от пространственной частоты голографируемого предмета. Эту зависимость можно назвать диаграммой направленности толстослойной голограммы.

Дифракционная эффективность определяется как отношение энергии излучения в первом (минус первом) порядке дифракции к энергии излучения исходной волны. Как было установлено на основе закона сохранения энергии, рассмотренного выше, при дифракции сохраняется поток энергии излучения через плоскость, перпендикулярную к оси z . Поэтому для определения дифракционной эффективности необходимо найти отношение соответствующих потоков энергии. Выражение для дифракционной эффективности (с учетом того, что $|E_0(0)|^2 = 1$) будет иметь вид

$$\eta = (\cos \varphi / \cos \theta) |E_{-1}|^2. \quad (35)$$

Предполагается, что восстанавливающая волна совпадает с опорной, т. е. $\varphi = \theta$, и дифракция происходит в области Брэгга.

Для нахождения E_{-1} при $\varphi \neq \theta$ нужно решить систему уравнений

$$\begin{aligned} 2i \cos \theta \frac{dE_0}{dt} + \alpha E_{-1} &= 0, \\ 2i \cos \varphi \frac{dE_{-1}}{dt} + \alpha E_0 &= 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Вычисление собственных частот этой системы дает

$$\omega_{1,2} = \pm \frac{\alpha}{2 \sqrt{\cos \theta \cos \varphi}},$$

и решение при начальных условиях $E_0(0) = 1$, $E_{-1}(0) = 0$ будет

$$E_0 = \cos \left(\frac{\alpha kz}{2 \sqrt{\cos \theta \cos \varphi}} \right), \quad E_{-1} = i \sqrt{\frac{\cos \theta}{\cos \varphi}} \sin \left(\frac{\alpha kz}{2 \sqrt{\cos \theta \cos \varphi}} \right).$$

Дифракционная эффективность определяется из приведенного выше выражения следующим образом:

$$\eta = \sin^2 \left(\frac{\alpha kz}{2 \sqrt{\cos \theta \cos \varphi}} \right). \quad (37)$$

Дифракционная эффективность, как это хорошо известно¹⁸ и как показывает полученное выражение, — периодическая функция толщины слоя, изменяющаяся от 0 до 1. Период колебаний дифракционной эффективности зависит от величины связи α и угла падения лучей на голограмму. При увеличении α период колебаний дифракционной эффективности уменьшается так, что изменение z в небольших пределах будет приводить к существенным изменениям дифракционной эффективности. С другой стороны, увеличение угла θ также приводит к уменьшению периода колебаний дифракционной эффективности и, следовательно, к тем же результатам.

Рассмотрение зависимости η от угла φ дает возможность определить способность толстослойной голограммы к воспроизведению спектра пространственных частот¹⁹ (диаграмму направленности). Толстослойные голограммы существенно отличаются этой способностью от тонкослойных.

Для наглядного представления зависимости дифракционной эффективности от пространственной частоты необходимо построить графики зависимости η от φ при различной величине z , которая теперь будет параметром. Набор величин z , для которых удобно строить графики, можно выбрать из условия, что при $\varphi = \theta$ для выбранной величины z должно быть $\eta = 1$. Этому условию удовлетворяют следующие значения аргумента:

$$\frac{\alpha k z}{2 \cos \theta} = \left(m + \frac{1}{2}\right) \pi,$$

$$\text{или } z = \frac{(2m+1) \pi \cos \theta}{\alpha k},$$

где $m = 0, 1, 2 \dots$ — число периодов «биений» двух волн, распространяющихся в одном канале.

Представляя это значение z в выражение для η , найдем

$$\eta = \sin^2 \left[\left(m + \frac{1}{2}\right) \pi \sqrt{\cos \theta / \cos \varphi} \right]. \quad (38)$$

Отсюда можно заключить, что оптимальной толщиной голограммы будет такая, при которой $m = 0$, что дает

$$z_{\text{опт}} = \frac{\pi \cos \theta}{\alpha k}.$$

Это также видно из рис. 11, где представлена зависимость η от φ для некоторых значений m .

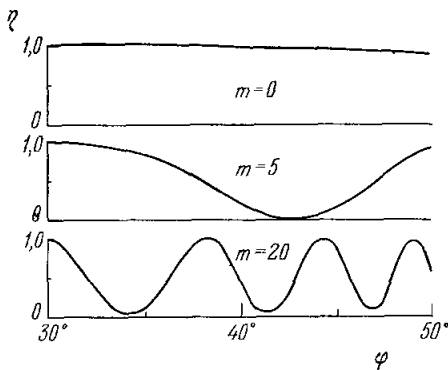


Рис. 11. Зависимость дифракционной эффективности толстослойной голограммы от угла φ в прямоугольных координатах ($\theta = 30^\circ$)

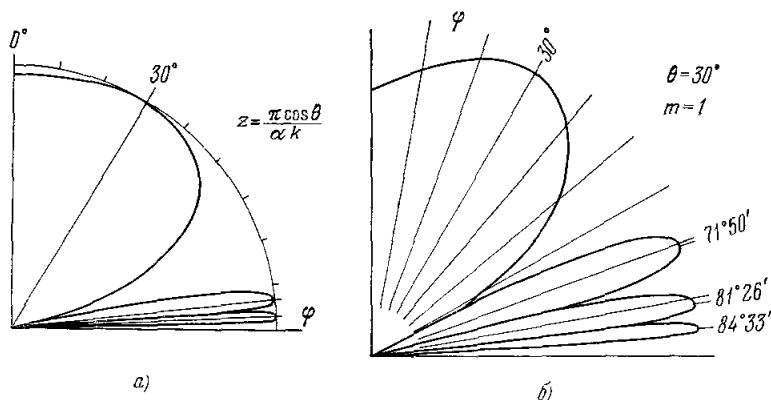


Рис. 12. Диаграммы направленности толстослойной голограммы в полярных координатах для: а) $m = 0$, б) $m = 1$.

На рис. 12, а и б изображены диаграммы направленности в полярных координатах для m , равного 0 и 1. Для построения графиков принято значение $\theta = 30^\circ$.

Как видно из графиков, увеличение толщины голограммы приводит к значительной неравномерности диаграммы направленности вследствие увеличения на ней числа «ленестков». При увеличении α неравномерность диаграммы направленности появляется при все меньших толщинах слоя. Так, если $m = 5$, то диаграмма имеет представленный на рис. 11 вид при $\alpha = 0,01$ и $z = 65$ мкм или при $\alpha = 0,1$ и $z = 6,5$ мкм и т. д.

Как было уже сказано, зависимость дифракционной эффективности от пространственной частоты (диаграмма направленности) не полностью характеризует толстослойную голограмму. Необходимо рассмотреть еще и фазовые соотношения между компонентами спектра пространственных частот. Однако легко видеть, что зависимости фазы от угла φ в нашем случае не будет. Выражение E_{-1} является чисто мнимым, и, следовательно, фаза всех компонент спектра сдвинута по сравнению с фазой волны E_0 на один и тот же угол $\pi/2$.

В заключение отметим, что приведенные здесь графики диаграмм направленности являются идеализированными, вследствие того, что мы использовали приближенные решения, законные лишь в случае $\alpha \ll \ll \cos^2 \theta$. Степень идеализации можно себе представить, сравнивая с приближенными приведенные выше точные решения. Это произведено в работе ¹⁴.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. D. G a b o r, Proc. Roy. Soc. **197**, 454 (1949) (см. перевод в виде приложения I в книге Дж. Строука «Введение в когерентную оптику и голографию», М., «Мир», 1967).
2. Ю. Н. Денисюк, ДАН СССР **144**, 1275 (1962).
3. E. N. Leith, J. Upatnieks, JOSA **52**, 1123 (1962).
4. C. G. Darwin, Phil. Mag. **27**, 315 (1914).
5. М. Борн, Э. Вольф, Основы оптики, М., «Наука», 1970.
6. В. М. Batterman, С. Henderson, Rev. Mod. Phys. **36**, 681 (1964).
7. P. P. Ewald, ibid. **37**, 46 (1965) (см. перевод: УФН **89**, 287, 1966)).
8. D. Gabor, G. Stroke, Proc. Roy. Soc. **A304**, 275 (1968).
9. W. R. Klein, B. D. Cook, Acustica **15**, 67 (1965).
10. W. R. Klein, B. D. Cook, IEEE Trans. Sonics and Ultrasonics **SU-14**, 123 (1967).
11. C. B. Burckhardt, JOSA **36**, 1502 (1966).
12. R. L. Lamberts, C. N. Kurtz, Appl. Opt. **10**, 1342 (1971).
13. Г. Бор, Почти-периодические функции, М., ОГИЗ, 1934; Б. М. Левитан, Почти-периодические функции, М., Физматгиз, 1958.
14. Н. М. Померанцев, Квантовая электроника, вып. 5(11), 122 (1972).
15. Н. Kogelnik, JOSA **57**, 431 (1967).
16. C. V. Raman, N. S. Nagenra, Nat. Proc. Indian Ac. Sci., sec. A, **2**, 406 (I), 413 (II); **3**, 75 (III), 119 (IV), 459 (V); **4**, 222 (generalised theory) (1935).
17. А. Зоммерфельд, Оптика, М., ИЛ, 1953.
18. Н. Kogelnik, Bell Syst. Tech. J. **48**, 2909 (1969).
19. Н. М. Померанцев, Квантовая электроника, вып. 5 (11), 118 (1972).