1973 г. Ноябрь *Том 111, вып. 3*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

[530 : 531.51]+530.145

КОВАРИАНТНОЕ КВАНТОВАНИЕ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

Л. Д. Фаддеев, В. Н. Попов

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 427
1. Фейнмановские правила ковариантной теории возмущений и континуальный интеграл Фейнмана 429
2. Правила Фейнмана для гравитационного поля 432
3. Вывод модифицированных правил теории возмущений 437
4. Гамильтонова формулировка теории тяготения 442
5. Гамильтонова форма континуального интеграла 447
Цитированная литература 450

ВВЕДЕНИЕ

Интерес к квантовой теории тяготения в значительной степени поддерживается надеждами на то, что включение тяготения в схему квантовой теории поля поможет построить последовательную замкнутую теорию элементарных частиц. В этой связи существуют два направления. Одно связано с космологией и привлечением в теорию элементарных частиц космологических соображений (см. работы Уилера [1], Мизнера [2], Маркова и сотрудников [3]). Другое направление, не использующее космологических соображений, считает поле частиц сосредоточенным эффективно в конечном объеме и исчезающим на пространственной бесконечности. Гравитационное поле в этом подходе рассматривается на том же уровне, что и всякое другое поле (см. [4]), а теория оказывается вариантом теории калибровочных полей. Роль калибровочных преобразований играют координатные преобразования, не затрагивающие пространственной бесконечности, а роль группы симметрии — группа Пуанкаре (более подробно этот вопрос изложен в работе одного из авторов [5]). Роль лоренц-инвариантности в общей теории относительности подчеркивал Фок [6].

Интерес к теории элементарных частиц связан главным образом с надеждой на то, что именно гравитационное поле может сыграть роль естественного «физического регуляризатора», устраняющего бесконечности из квантовой теории поля. Первоначальные результаты, поддерживающие эту точку зрения, были получены Де-Виттом [7] и Хрипловичем [8]. В настоящее время активная деятельность в этом направлении ведется Саламом и его сотрудниками [9] с использованием методов, развитых Ефимовым, Фрадкиным, Волковым и Филипповым [10–13].

В этом обзоре мы ограничимся только вопросом построения ковариантных правил диаграммной теории возмущений. Наиболее удобным средством для этой цели является континуальный интеграл Фейнмана. В нем физические степени свободы, которые квантуются, и калибровочные степени, которые остаются *c*-числами, трактуются единообразно. Это дает широкую возможность различных преобразований.

 © «Успехи физических наук», 1973.

Первая корректная схема квантования гравитационного поля была построена Дираком [14] в 1958 г. в рамках гамильтонова метода. Другие методы, по существу, эквивалентные развитому Дираком, были разработаны группой Арновитт — Дезер — Мизнер [15], Швингером [16], а также рядом других авторов [17–19]. Отсутствие явной ковариантности в гамильтоновом подходе делает очень громоздкой теорию возмущений. Уместно вспомнить аналогичную ситуацию в квантовой электродинамике. Нековариантные методы теории возмущений 30-х годов не позволяли продвинуться за первое неисчезающее приближение теории возмущений. Создание в конце 40-х годов ковариантной теории возмущений и связанной с ней диаграммной техники существенно упростило расчеты, так что в настоящее время стало возможным сравнение теории с экспериментом с точностью до седьмого десятичного знака. В теории тяготения технические сложности столь велики, что делают нековариантную схему квантования практически бесполезной при конкретных расчетах по теории возмущений.

Первой попыткой построения ковариантной схемы квантования теории тяготения явились работы Гупты [20]. Гупта действовал по схеме, разработанной в квантовой электродинамике, а для преодоления трудности, связанной с сингулярностью свободного лагранжиана гравитационного поля, использовал прием, аналогичный известному методу Ферми квантования электромагнитного поля (см., например, [21, 22]).

Оказалось, однако, что некритическое перенесение метода Ферми, обоснованного в квантовой электродинамике, на более сложные системы может привести к нарушению унитарности теории. Впервые это было обнаружено Фейнманом [23] в 1963 г. на примерах теории поля Янга — Миллса и теории тяготения. Фейнман же наметил путь преодоления указанной им трудности. Он показал, что унитарность диаграммы, имеющей вид замкнутого кольца, можно восстановить, если вычесть из нее другую диаграмму, тоже имеющую вид кольца и описывающую распространение фиктивной частицы. Метод Фейнмана не давал возможности прямого обобщения на более сложные диаграммы.

Решение проблемы для любых диаграмм было дано в 1967 г. Де-Виттом [24] и авторами настоящего обзора [25], использовавшими существенно различные подходы. Объединяет оба подхода применение метода континуального интегрирования, дающего схему ковариантной теории возмущений для калибровочных полей. В случае неабелевой калибровочной группы схема содержит линии фиктивных частиц и вершины, описывающие их взаимодействие с квантами калибровочного поля. Линии фиктивных частиц входят в диаграмму в виде замкнутых колец, каждое из которых тождественно диаграмме, введенной Фейнманом, чтобы восстановить унитарность однокольцевой диаграммы для реальных квантов. Знак (—1) перед вкладом замкнутого кольца говорит о том, что фиктивные частицы подчиняются статистике Ферми. Это затрудняет непосредственную интерпретацию фиктивных частиц, спин которых целый (скалярные частицы для поля Янга — Миллса и векторные для поля тяготения). Результаты, полученные в [24, 25], многократно перевыводились рядом автором, и были предложены другие методы решения проблемы. Отметим здесь работы Манделстама [26], Вельтмана [27], Фрадкина и Тютина [28], Хрипловича [29], Боулвэра [30], Хоофта [31], Алтухова и Хрипловича [32].

Построение корректной ковариантной схемы квантования калибровочных полей породило серию работ, в которых калибровочная (безмассовая) теория сравнивается с соответствующей массивной (некалибровочно инвариантной) теорией и обсуждаются вопросы перехода к пределу при $m \to 0$ (работы Фаддеева и Славнова [33], Вайнштейна и Хрипловича [34], Захарова [35], Вельтмана [27], Фрадкина и Тютина [36]. Основной результат

большинства этих работ сводится к тому, что предел массивной теории при $m \to 0$ не совпадает, вообще говоря, с соответствующей безмассовой теорией.

Как уже упоминалось, методы квантования теории тяготения развивались как в рамках канонического гамильтонова подхода, так и в явно ковариантной форме. Метод континуального интеграла позволяет связать обе формулировки. Каноническая гамильтонова формулировка дает явно унитарную нормированную теорию, а ковариантная формулировка позволяет построить удобную для конкретных расчетов теорию возмущений.

Остановимся подробнее на плане обзора. В гл. 1 дана схема вывода правил ковариантной теории возмущений в формализме континуального интеграла на примере теории скалярного поля. Правила Фейнмана для гравитационного поля сформулированы в гл. 2. Вывод этих правил в гл. 3 основан на постулированном там виде континуального интеграла для поля тяготения. Обоснованием для нас служит возможность приведения теории к явно гамильтонову виду. С этой целью мы в гл. 4 приводим каноническую гамильтонову формулировку теории тяготения, а в последней, гл. 5, показываем, что следующий из этой формулировки континуальный интеграл можно преобразовать к релятивистскому виду, который использовался при выводе правил Фейнмана.

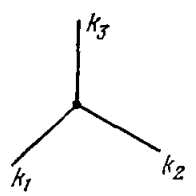
1. ФЕЙНМАНОВСКИЕ ПРАВИЛА КОВАРИАНТНОЙ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ И КОНТИНУАЛЬНЫЙ ИНТЕГРАЛ ФЕЙНМАНА

Здесь мы напомним и обсудим рецепт построения правил ковариантной теории возмущений по Фейнману [37]. Начнем с простейшего примера самодействующего скалярного поля с лагранжианом

$$\mathscr{L}(x) = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\varphi(x)\,\partial_\mu\varphi(x) - m^2\varphi^2(x)\right) - (\lambda/3!)\,\varphi^3(x). \tag{1.1}$$

Диаграммы, соответствующие членам теории возмущений, строятся из двух элементов — линии G (пропагатор) и вершины V:

G

, V 

. (1.2)

Амплитуда рассеяния $M_n(k_1, \ldots, k_n)$ для n (входящих или выходящих) частиц с импульсами $k_1, \ldots, k_n$ представляется суммой вкладов, соответствующих диаграммам с внешними (незамкнутыми) линиями. Вклад данной диаграммы получается после сопоставления ее элементам следующих выражений: внутренним линиям

$$G(k_1, k_2) = \frac{\delta(k_1 - k_2)}{k_1^2 - m^2}, \tag{1.3}$$

а вершинам

$$V = \lambda\delta(k_1 + k_2 + k_3), \tag{1.4}$$

и при интегрировании по всем импульсам k внутренних элементов диаграммы, причем окончательный результат следует умножить на

$$\frac{1}{r}\left[\frac{i}{(2\pi)^4}\right]^{l-v+1}, \tag{1.5}$$

где l — число внутренних линий, v — число вершин, r — порядок группы симметрии диаграммы *). Для вычисления амплитуды реального процесса следует перейти на поверхность энергии $k^0 = \pm (k^2 + m^2)^{1/2}$; знак зависит от того, является ли частица входящей или выходящей.

Описанные элементы диаграммной техники определяются лагранжианом (1.1) следующим образом. Рассмотрим действие

$$S[\varphi] = \int \mathscr{L}(x)\, d^4x \tag{1.6}$$

как функционал от преобразования Фурье $\tilde{\varphi}(k)$ поля $\varphi(x)$. Этот функционал представляет собой сумму квадратичной формы и формы третьей степени по полю:

$$S[\varphi] = S_2[\varphi] + S_3[\varphi]. \tag{1.7}$$

Функция $G(k_1, k_2)$ является ядром оператора, обратного оператору, определяющему квадратичную форму S_2; функция V есть коэффициентная функция, определяющая форму третьей степени.

Это соответствие можно проследить и во многих других случаях, для которых сформулирована диаграммная техника, например, для псевдоскалярной теории π-мезонов и нуклонов. Единственным отличием является появление в весе диаграммы (1.5) множителя $(-1)^s$, где s — число замкнутых циклов из фермионных линий.

Описанный рецепт неприменим непосредственно к теориям, где соответствующая квадратичная форма сингулярна. Простейший пример такой теории представляет собой электродинамика, где свободное действие фотонов

$$S_{\text{ph}} = -\frac{1}{4}\int (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2\, d^4x \tag{1.8}$$

вследствие калибровочной инвариантности является вырожденным и не зависит от продольной компоненты $\partial_\mu A_\mu$ потенциала A_μ. Однако в этом случае известно (см. [21,22]), что в качестве пропагатора фотона можно брать обобщенный обратный оператор к квадратичной форме (1.8), имеющий в импульсном представлении вид

$$G_{\mu\nu}(k, k') = \delta^{(4)}(k + k')\left(-\frac{\delta_{\mu\nu}}{k^2} + \frac{\beta k_\mu k_\nu}{k^4}\right), \tag{1.9}$$

где константа β произвольна. Амплитуды рассеяния для реальных процессов от этой константы не зависят.

Однако, как уже было сказано во введении, непосредственное перенесение этого рецепта на теории с неабелевой калибровочной группой приводит к неправильным результатам. Для выяснения причины этого полезно проанализировать сам вывод правил ковариантной теории возмущений. По нашему мнению, наиболее удобным средством для этого является формализм континуального интеграла Фейнмана **).

Напомним основные черты этого метода на примере скалярного поля с лагранжианом (1.1). Амплитуда рассеяния получается как интеграл по всем полям с заданной асимптотикой при $t \to \pm\infty$ от функционала

---

*) Например, $r = 2$ для диаграммы

**) Применению континуальных интегралов к ряду вопросов квантовой механики и теории поля посвящен недавний обзор Блохинцева и Барбашова в УФН [37б].

$\exp(iS)$, где S — действие. Мы будем записывать такие интегралы в виде

$$\int \exp\{iS[\varphi]\} \prod_x d\varphi(x), \tag{1.10}$$

где символ $\prod_x d\varphi(x)$ показывает, что переменные интегрирования $\varphi(x)$, которые считаются независимыми в каждой точке x, пробегают все возможные значения от $-\infty$ до $+\infty$, а мера интегрирования по ним — лебегова. Кроме того, мы опускаем несущественный для дальнейшего постоянный (бесконечный) нормирующий множитель.

Строгая математическая теория таких объектов еще не развита. Мы будем использовать континуальный интеграл только для вывода правил теории возмущений. При этом для объяснения формальных правил работы с этим объектом мы будем прибегать к конечномерным аналогиям.

После разложения функционала $\exp(iS)$ по степеням константы взаимодействия λ возникают интегралы вида

$$\int \exp\{iS_2[\varphi]\}(S_3[\varphi])^n \prod_x d\varphi(x), \tag{1.11}$$

подынтегральное выражение которого имеет структуру

$$\exp[i\,(\text{квадратичная форма})] \times \text{полином}.$$

Такие интегралы явно берутся и выражаются в терминах оператора, обратного оператору квадратичной формы и коэффициентов полинома.

Действительно, рассмотрим интеграл такого типа для конечного числа переменных:

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n \exp\left(\frac{i}{2}\sum_{ij} A_{ij}x_ix_j\right) \sum_{i_1\ldots i_n} c_{i_1,\ldots,i_n} x_1^{i_1}\ldots x_n^{i_n}. \tag{1.12}$$

Его можно явно вычислить, дифференцируя производящую функцию

$$Z(\eta_1,\ldots,\eta_n) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n \exp\left(\frac{i}{2}\sum_{ij} A_{ij}x_ix_j + i\sum_i \eta_i x_i\right) \tag{1.13}$$

следующим образом:

$$J = \sum_{i_1,\ldots,i_n} c_{i_1,\ldots,i_n} (-i)^{i_1+\ldots+i_n} \frac{\partial^{i_1+\ldots+i_n}}{\partial\eta_1^{i_1}\ldots\partial\eta_n^{i_n}} Z(\eta_1,\ldots,\eta_n)\Big|_{\eta=0}.$$

Производящая функция вычисляется сдвигом аргумента и равна

$$(2\pi i)^{n/2}(\det A)^{-1/2}\exp\left(-\frac{i}{2}\sum_{i,j} B_{ij}\eta_i\eta_j\right), \tag{1.14}$$

где матрица B обратна матрице A. Первый множитель здесь играет роль нормировочной константы, которой мы договорились пренебрегать. Дифференцирование второго множителя приводит к ответу, который словами можно сформулировать так: интеграл J представляется суммой коэффициентов $c_{i_1\ldots i_n}$, свернутых с произведениями элементов B_{ij} матрицы B с такой же системой индексов.

В нашем бесконечномерном случае аналогом коэффициентов $c_{i_1\ldots i_n}$ являются произведения коэффициентных функций форм третьей степени в действии. Роль матрицы A играет гиперболический оператор $(\Box - m^2)$,

или, в импульсном представлении, оператор умножения на $(k^2 - m^2)$. Естественное обобщение полученного нами конечномерного результата и приводит к сформулированным выше правилам.

Здесь следует сделать два замечания. Первое касается определения обратного к A оператора, т. е. функции Грина оператора $(\Box - m^2)$. Таких функций Грина много — запаздывающая, опережающая, причинная и т. д. Правила Фейнмана требуют использовать причинную функцию Грина. В рамках метода континуального интеграла обоснование этого можно дать, используя асимптотические условия на переменные интегрирования. Это же условие определяет вид внешних линий диаграммы. Оба эти обстоятельства характерны для всех теорий поля. У нас нет возможности подробно разобрать их в этом обзоре, который посвящен в первую очередь отличиям квантования калибровочных полей, к обсуждению которых на примере поля тяготения мы теперь и перейдем.

2. ПРАВИЛА ФЕЙНМАНА ДЛЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

Особенности квантования гравитационного поля связаны в первую очередь с его самодействием. Поэтому в бо́льшей части этой главы мы будем иметь дело со «свободным» самодействующим гравитационным полем. Основной результат — диаграммная техника — приведен в конце главы. Там же указано видоизменение правил в случае поля материи и электромагнитного поля.

Среди различных способов параметризации гравитационного поля наиболее распространенными являются следующие два: метрический тензор и подвижный репер (тетрады). Приведем их формулировку.

В формализме метрического тензора гравитационное поле описывается потенциалами $g_{\mu\nu}(x)$ и символами Кристоффеля $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}(x)$. Последние можно считать как независимыми динамическими величинами (формализм Палатини), так и функциями $g_{\mu\nu}$:

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}). \tag{2.1}$$

Контравариантная $g^{\mu\nu}$-матрица обратна $g_{\mu\nu}$, g — определитель матрицы $g_{\mu\nu}$.

В нашем обзоре мы будем рассматривать только асимптотически плоские поля. В этом случае многообразие пространства-времени, топологически эквивалентное четырехмерному евклидову пространству, может быть параметризовано глобальными координатами x^μ $(-\infty < x^\mu < +\infty,\ \mu = 0, 1, 2, 3)$. Эти координаты будем считать согласованными с условиями на пространственной бесконечности, так что

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + O\left(\frac{1}{r}\right), \quad \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = O\left(\frac{1}{r^2}\right), \qquad r \to \infty, \tag{2.2}$$

где $r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$, $\eta_{\mu\nu}$ — тензор Минковского. Мы используем сигнатуру $(+ - - -)$.

Функционал действия, имеющий вид

$$S = \frac{1}{2\varkappa^2} \int [-\Gamma^{\rho}_{\mu\rho}\partial_\nu (\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}) + \Gamma^{\rho}_{\mu}\partial_\rho (\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}) + \\ + \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} (\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\rho\nu} - \Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\Gamma^{\sigma}_{\rho\sigma})]\, d^4x, \tag{2.3}$$

где $\varkappa$ — константа Ньютона, инвариантен по отношению к группе координатных преобразований, действующей на величины $g^{\mu\nu}$, $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$ по

правилам

$$\begin{aligned} \delta g^{\mu\nu} &= -\eta^\lambda \partial_\lambda g^{\mu\nu} + g^{\mu\lambda}\partial_\lambda \eta^\nu + g^{\nu\lambda}\partial_\lambda \eta^\mu, \\ \delta\Gamma^\rho_{\mu\nu} &= -\eta^\lambda\partial_\lambda \Gamma^\rho_{\mu\nu} - \Gamma^\rho_{\mu\lambda}\partial_\nu\eta^\lambda - \Gamma^\rho_{\nu\lambda}\partial_\mu\eta^\lambda + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\partial_\lambda\eta^\rho - \partial_\mu\partial_\nu\eta^\rho. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Мы выписали здесь формулы инфинитезимальных преобразований; η^μ — бесконечно малые компоненты векторного поля, порождающего координатные преобразования

$$\delta x^\mu = \eta^\mu(x). \tag{2.5}$$

Варьирование действия (2.3) по $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ приводит к уравнениям, решением которых являются функции (2.1). В этом смысле $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ можно считать независимыми переменными, что нам будет иногда удобно делать.

При подстановке же в действие (2.3) явного выражения (2.1) символов Кристоффеля $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ через метрический тензор оно приобретает вид

$$S = \frac{1}{4\varkappa^2}\int\left(h^{\rho\sigma}\partial_\rho h^{\mu\nu}\partial_\nu h_{\mu\sigma} - \frac{1}{2}h^{\rho\sigma}\partial_\rho h^{\mu\nu}\partial_\sigma h_{\mu\nu} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{4}h^{\rho\sigma}\partial_\rho \ln h\,\partial_\sigma \ln h\right)d^4x, \tag{2.6}$$

где для удобства используется контравариантная плотность

$$\begin{aligned} h^{\mu\nu} &= \sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}, \\ h &= \det h^{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

В формализме подвижного репера гравитационное поле описывается компонентами репера $e^{\mu\alpha}(x)$ и коэффициентами кручения $\omega_{\mu,ab}(x) = -\omega_{\mu,ba}(x)$. Набор $e^{\mu a}(x)$ образует матрицу с положительным определителем $e(x)$. Функционал действия

$$S = (1/2\varkappa^2)\int[\omega_{\nu ab}\partial_\mu(e^{-1}e^{\mu a}e^{\nu b}) - \omega_{\mu ab}\partial_\nu(e^{-1}e^{\mu a}e^{\nu b}) +$$
$$+ e^{-1}e^{\mu a}e^{\nu b}(\omega_{\mu ac}\omega^c_{\nu b} - \omega_{\nu ac}\omega^c_{\mu b})]\,d^4x \tag{2.8}$$

инвариантен по отношению к координатным преобразованиям

$$\begin{aligned} \delta e^{\mu a} &= -\eta^\lambda\partial_\lambda e^{\mu a} + e^{\lambda a}\partial_\lambda\eta^\mu, \\ \delta\omega_{\mu ab} &= -\eta^\lambda\partial_\lambda\omega_{\mu ab} - \omega_{\lambda ab}\partial_\mu\eta^\lambda \end{aligned} \tag{2.9}$$

и по отношению к локальным лоренцовым вращениям

$$\begin{aligned} \delta e^{\mu a} &= \eta^a_b e^{\mu b}, \\ \delta\omega_{\mu ab} &= \eta^c_a\omega_{\mu cb} + \eta^c_b\omega_{\mu ac} + \partial_\mu\eta_{ab}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Варьирование S по ω приводит к уравнениям, которые позволяют явно выразить ω через e. Решение удобно записать в виде

$$\omega_{\mu ab} = e^c_\mu\omega_{cab} = \frac{1}{2}e^c_\mu(\Omega_{abc} + \Omega_{bca} - \Omega_{cab}), \tag{2.11}$$

где

$$\Omega_{abc} = e_{\mu a}\Omega^\mu_{bc} = e_{\mu a}(e^\nu_b\partial_\nu e^\mu_c - e^\nu_c\partial_\nu e^\mu_b).$$

Можно считать при надобности, что это сделано заранее, так что S является функционалом только переменных $e^{\mu a}$.

Мы будем говорить о формализме первого порядка, если переменные $g_{\mu\nu}$ и $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ (или $e^{\mu a}$ и $\omega_{\mu,ab}$) считаются независимыми. Если же Γ выражены через g, а e через ω, то будем говорить о формализме второго порядка.

Описание свободного гравитационного поля в терминах $g^{\mu\nu}$ и $e^{\mu\nu}$ эквивалентно. Различное число компонент — 10 в первом случае и 16 во втором — компенсируется различием в калибровочной группе, параметризуемой четырьмя функциями в первом случае и десятью во втором. Формализм подвижного репера удобен для описания взаимодействия со спинорным полем.

Эквивалентность формализмов первого и второго порядков может исчезать при включении взаимодействий с другими полями. Геометрически формула (2.11) определяет связность без кручения. Минимальное взаимодействие гравитационного поля со спинорным в формализме первого порядка приводит к появлению кручения (см. [38]).

Дальнейшее изложение в этой главе мы будем вести главным образом на примере тензорного формализма второго порядка. Положим

$$h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \varkappa u^{\mu\nu} \tag{2.12}$$

и будем считать $u^{\mu\nu}$ тензорным полем, описывающим поле тяготения. Функционал действия (2.6) приобретает вид

$$S = S_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \varkappa^n S_{n+2}, \tag{2.13}$$

где S_2 — квадратичная форма, S_n — форма степени n в переменных $u^{\mu\nu}$ и их первых производных.

Линеаризация (2.12) не является во многих отношениях естественной. Она может нарушать сигнатуру метрического тензора, если $u^{\mu\nu}$ недостаточно мало. В последнее время приобретают популярность экспоненциальные параметризации, например для матрицы-репера $e^{\mu a} = \exp(\varkappa\chi^{\mu a})$. В принципе можно вычислить разложение (2.13) и в этой параметризации. Отметим, что квадратичная форма S_2 от выбора параметризации не зависит.

Прямой перенос рецепта из гл. 1 на случай гравитации привел бы к следующей формулировке ковариантных правил теории возмущений: квадратичная форма S_2 определяет пропагатор, а коэффициентные функции форм S_n дают выражения для вершин, число которых в нашем случае бесконечно. Заметим здесь, что в формализме первого порядка после линеаризации (2.12) и подстановки

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \varkappa\gamma^{\rho}_{\mu\nu} \tag{2.14}$$

действие превращается в сумму форм второй и третьей степени, так что число вершин в этом формализме конечно.

Вследствие инвариантности действия по отношению к преобразованиям (2.4) квадратичная форма

$$S_2 = \frac{1}{4}\int\left(-\eta_{\nu\sigma}\delta^{\alpha}_{\rho}\delta^{\beta}_{\mu} + \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} - \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma}\eta^{\alpha\beta}\right)\partial_{\alpha}u^{\mu\nu}\partial_{\beta}u^{\rho\sigma}d^4x \tag{2.15}$$

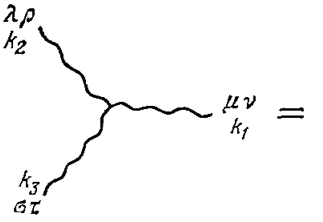
вырождена. Она не содержит продольных компонент $\partial_{\nu}u^{\mu\nu}$. Пример электродинамики наводит на мысль, что в качестве пропагатора гравитонов можно использовать обобщенный обратный оператор, например, однопараметрическое семейство

$$\begin{aligned} G^{\mu\nu,\,\rho\sigma}(k) = \frac{2}{k^2}\left(\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho} + (\alpha^{-1}-2)\,\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}\right) + \\ + \frac{2(1-\alpha^{-1})}{k^4}\left(2k^{\mu}k^{\nu}\eta^{\rho\sigma} + 2k^{\rho}k^{\sigma}\eta^{\mu\nu} - k^{\mu}k^{\rho}\eta^{\nu\sigma} - \right. \\ \left. - k^{\nu}k^{\rho}\eta^{\mu\sigma} - k^{\mu}k^{\sigma}\eta^{\nu\rho} - k^{\nu}k^{\sigma}\eta^{\mu\rho}\right), \end{aligned} \tag{2.16}$$

причем элементы S-матрицы не зависят от произвола в выборе константы α.

Однако, как показал Фейнман [23], матричные элементы, сосчитанные по наивным правилам, существенно зависят от этой константы, причем нарушается условие унитарности. Фейнман наметил путь к преодолению этой трудности. В результате усилий многих авторов, как об этом говорилось во введении, были получены корректные правила теории возмущений. Мы опишем их сейчас, а в последующих главах дадим их вывод.

Диаграммная техника содержит, конечно, все элементы «наивного подхода»: линии гравитонов, выражения для которых имеют вид (2.16), и вершины, порожденные формами S_{n+2} из разложений типа (2.13). Приведем явное выражение для вершины третьего порядка, соответствующее линеаризации (2.12):



$$
\begin{aligned}
= \frac{\varkappa}{2^5} \Big\{ \Big[& \frac{k_1^2}{2} (\eta_{\mu\lambda}\eta_{\rho\sigma}\eta_{\tau\nu} + \eta_{\mu\tau}\eta_{\nu\lambda}\eta_{\rho\sigma} + \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\lambda}\eta_{\rho\tau} + \eta_{\nu\sigma}\eta_{\mu\lambda}\eta_{\rho\tau} + \\
& + \eta_{\mu\tau}\eta_{\nu\rho}\eta_{\mu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho}\eta_{\lambda\tau} + \eta_{\nu\tau}\eta_{\mu\rho}\eta_{\lambda\sigma} + \eta_{\nu\sigma}\eta_{\mu\rho}\eta_{\lambda\sigma}) + \\
& + k_1^2\eta_{\mu\nu} (\eta_{\rho\sigma}\eta_{\lambda\tau} + \eta_{\rho\tau}\eta_{\lambda\sigma}) + (k_{2\mu}k_{3\nu} + k_{2\nu}k_{3\mu}) \eta_{\lambda\rho}\eta_{\sigma\tau} + \\
& + (k_{2\mu}k_{3\nu} + k_{2\nu}k_{3\mu}) (\eta_{\lambda\sigma}\eta_{\rho\tau} + \eta_{\lambda\rho}\eta_{\sigma\tau}) - \\
& - k_{1\nu}k_{1\tau} (\eta_{\mu\lambda}\eta_{\rho\sigma} + \eta_{\mu\rho}\eta_{\lambda\sigma}) - k_{1\nu}k_{1\sigma} (\eta_{\mu\lambda}\eta_{\rho\tau} + \eta_{\mu\rho}\eta_{\lambda\tau}) - \\
& - k_{1\mu}k_{1\tau} (\eta_{\nu\lambda}\eta_{\rho\sigma} + \eta_{\nu\rho}\eta_{\lambda\sigma}) - k_{1\mu}k_{1\sigma} (\eta_{\nu\lambda}\eta_{\rho\tau} + \eta_{\nu\rho}\eta_{\lambda\tau}) - \\
& - k_{2\nu}k_{3\rho}\eta_{\lambda\sigma}\eta_{\mu\tau} - k_{2\nu}k_{3\lambda}\eta_{\rho\sigma}\eta_{\mu\tau} - k_{2\mu}k_{3\rho}\eta_{\lambda\tau}\eta_{\nu\tau} - \\
& - k_{2\mu}k_{3\lambda}\eta_{\rho\sigma}\eta_{\nu\tau} - k_{2\nu}k_{3\rho}\eta_{\lambda\tau}\eta_{\mu\sigma} - k_{2\nu}k_{3\lambda}\eta_{\rho\tau}\eta_{\mu\sigma} - \\
& - k_{2\mu}k_{3\rho}\eta_{\lambda\tau}\eta_{\nu\sigma} - k_{2\mu}k_{3\lambda}\eta_{\rho\tau}\eta_{\nu\sigma} \Big] + \\
& + \text{сумма по перестановкам пар } ((\mu, \nu), (\lambda, \rho), (\sigma, \tau)) \Big\} . \qquad (2.17)
\end{aligned}
$$

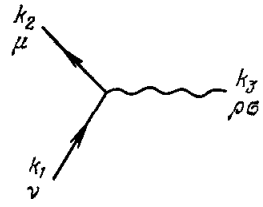
Помимо этих элементов, во внутренних частях диаграмм следует использовать дополнительные элементы, которые можно интерпретировать в терминах векторных частиц, взаимодействующих с гравитонами. Такая интерпретация употребляется исключительно для удобства. Упомянутые векторные частицы не имеют самостоятельного физического смысла, и их принято называть фиктивными. Пропагатор фиктивной частицы имеет вид

$$G^{\mu\nu} = -\eta^{\mu\nu}/k^2, \qquad (2.18)$$

а вершина взаимодействия ее с гравитонами порождена трехлинейной формой

$$\varkappa \int \bar{\theta}_\mu (u^{\nu\lambda}\partial_\nu\partial_\lambda\theta^\mu + \partial_\nu u^{\nu\lambda}\partial_\lambda\theta^\mu - \partial_\nu u^{\mu\nu}\partial_\lambda\theta^\lambda - \partial_\lambda\partial_\nu u^{\mu\nu}\theta^\lambda)\, d^4x \qquad (2.19)$$

и дается выражением



$$= -\frac{\varkappa}{2}\left[\delta^{\mu}_{\nu}\left(k_{1\rho}k_{2\sigma}+k_{1\sigma}k_{2\rho}\right)-k_{1\nu}\left(\delta^{\mu}_{\sigma}k_{3\rho}+\delta^{\mu}_{\rho}k_{3\sigma}\right)\right]$$

$$(k_1+k_2+k_3)=0). \qquad (2.20)$$

Фиктивные элементы участвуют только в замкнутых петлях, а внешние линии являются линиями гравитонов.

Вклад от данной диаграммы получается, если произведение выражений вида (2.16)—(2.18), (2.20), сопоставленных ее элементам, проинтегрировать по внутренним импульсам, а результат умножить на

$$[i/(2\pi)^4]^{l-v+1}r^{-1}\,(-1)^s, \qquad (2.21)$$

где s — число петель фиктивных частиц. Сравнение этой формулы с (2.5) показывает, что фиктивные частицы являются фермионами, т. е. для них нарушается связь спина и статистики. Это показывает, что их роль сводится к вычитанию вкладов нефизических степеней свободы.

Помимо описанных диаграмм, теория возмущений содержит бесконечные вклады перенормировочного типа, пропорциональные степеням $\delta^{(4)}(0)$. Их структура будет описана ниже, в гл. 3. В формализме первого порядка элементы, связанные с фиктивными частицами, не изменяются. Помимо тензорного пропагатора $\langle uu\rangle$, в схему теории возмущений входят пропагаторы $\langle u\gamma\rangle$ и $\langle\gamma\gamma\rangle$. В импульсном представлении они имеют вид

$$G^{\rho,\,\mu\nu}_{\rho\tau}(k)=\frac{i}{2}\left(\eta_{\sigma\alpha}\delta^{\rho}_{\beta}k_{\tau}+\eta_{\tau\alpha}\delta^{\rho}_{\beta}k_{\sigma}-\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta}k^{\rho}\right)G^{\alpha\beta,\,\mu\nu}(k)=\Omega^{\rho}_{\sigma\tau,\,\alpha\beta}(k)\,G^{\alpha\beta,\,\mu\nu}(k), \qquad (2.22)$$

$$G^{\rho}_{\sigma\tau,\,\mu\nu}^{\lambda}(k)=\frac{1}{4}\left(\delta^{\rho}_{\mu}\delta^{\lambda}_{\sigma}\eta_{\nu\tau}+\delta^{\rho}_{\nu}\delta^{\lambda}_{\sigma}\eta_{\mu\tau}+\delta^{\rho}_{\mu}\delta^{\lambda}_{\tau}\eta_{\nu\sigma}+\delta^{\rho}_{\nu}\delta^{\lambda}_{\tau}\eta_{\mu\sigma}\right)-$$

$$-\frac{1}{6}\left(\delta^{\lambda}_{\nu}\delta^{\rho}_{\tau}\eta_{\mu\sigma}+\delta^{\lambda}_{\mu}\delta^{\rho}_{\tau}\eta_{\nu\sigma}+\delta^{\lambda}_{\nu}\delta^{\rho}_{\sigma}\eta_{\mu\tau}+\delta^{\lambda}_{\mu}\delta^{\rho}_{\sigma}\eta_{\nu\tau}\right)+$$

$$+\Omega^{\lambda}_{\mu\nu,\,\alpha\beta}(k)\;\Omega^{\rho}_{\sigma\tau,\,\gamma\delta}(-k)\,G^{\alpha\beta,\,\gamma\delta}(k),$$

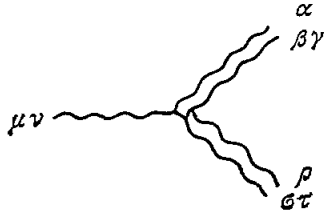
где

$$\Omega^{\rho}_{\sigma\tau,\,\alpha\beta}(k)=\frac{i}{2}\left(\eta_{\sigma\alpha}\delta^{\rho}_{\beta}\delta^{\gamma}_{\tau}+\eta_{\tau\alpha}\delta^{\rho}_{\beta}\delta^{\gamma}_{\sigma}-\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta}\eta^{\rho\gamma}\right)k_{\gamma}. \qquad (2.23)$$

Единственная гравитонная вершина порождается трехлинейной формой

$$\frac{\varkappa}{2}\int u^{\mu\nu}\left(\gamma^{\rho}_{\mu\sigma}\gamma^{\sigma}_{\rho\nu}-\gamma^{\rho}_{\mu\nu}\gamma^{\sigma}_{\rho\sigma}\right)d^4x \qquad (2.24)$$

и имеет выражение



$$=\frac{\varkappa}{8}\left[\left(\delta^{\sigma}_{\mu}\delta^{\tau}_{\nu}+\delta^{\sigma}_{\nu}\delta^{\tau}_{\mu}\right)\left(\delta^{\beta}_{\alpha}\delta^{\gamma}_{\rho}+\delta^{\beta}_{\rho}\delta^{\gamma}_{\alpha}\right)+\right.$$

$$+\left(\delta^{\sigma}_{\alpha}\delta^{\tau}_{\rho}+\delta^{\sigma}_{\rho}\delta_{\alpha}\right)\left(\delta^{\beta}_{\mu}\delta^{\gamma}_{\nu}+\delta^{\beta}_{\nu}\delta^{\gamma}_{\mu}\right)-\delta^{\sigma}_{\mu}\delta^{\tau}_{\alpha}\delta^{\gamma}_{\nu}\delta^{\beta}_{\rho}-\delta^{\sigma}_{\mu}\delta^{\beta}_{\nu}\delta^{\gamma}_{\rho}\delta^{\tau}_{\alpha}-\delta^{\sigma}_{\nu}\delta^{\tau}_{\alpha}\delta^{\beta}_{\mu}\delta^{\gamma}_{\rho}-$$

$$\left.-\delta^{\sigma}_{\nu}\delta^{\tau}_{\alpha}\delta^{\gamma}_{\mu}\delta^{\beta}_{\rho}-\delta^{\tau}_{\mu}\delta^{\sigma}_{\alpha}\delta^{\beta}_{\nu}\delta^{\gamma}_{\rho}-\delta^{\tau}_{\mu}\delta^{\sigma}_{\alpha}\delta^{\gamma}_{\nu}\delta^{\beta}_{\rho}-\delta^{\tau}_{\nu}\delta^{\sigma}_{\alpha}\delta^{\beta}_{\mu}\delta^{\rho}_{\gamma}-\delta^{\tau}_{\nu}\delta^{\sigma}_{\alpha}\delta^{\gamma}_{\mu}\delta^{\beta}_{\rho}\right]. \qquad (2.25)$$

Мы не выписываем здесь элементы диаграммной техники в реперном формализме. Читатель сам сможет их получить методами, которые описаны ниже. Включение полей материи не приводит к появлению новых фиктивных частиц и соответствующих им элементов диаграммной техники, если квадратичные формы в функционалах действия полей материи невырождены.

В качестве примера приведем лагранжианы взаимодействия гравитационного поля со скалярным полем и со спинорным полем. В первом случае удобно использовать метрический формализм, а во втором — реперный:

$$\begin{gathered} S[\omega] = \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\,(g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - m^2\varphi^2), \\ S[\psi, \bar{\psi}] = \int d^4xe\,[i\bar{\psi}e^{\mu a}\gamma_a(\partial_\mu\psi + \omega_{\mu,\,cd}\sigma^{cd}\psi) - m\bar{\psi}\psi]; \end{gathered} \tag{2.26}$$

здесь использованы стандартные обозначения для компонент скалярного и спинорного полей; γ^a, $\sigma^{cd} = (1/4)(\gamma^c\gamma^d - \gamma^d\gamma^c)$ — обычные матрицы Дирака. Заметим, что если массивный член отсутствует, то легко подобрать параметризацию гравитационного поля так, чтобы выписанные функционалы порождали конечное число вершин.

3. ВЫВОД МОДИФИЦИРОВАННЫХ ПРАВИЛ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Континуальный интеграл является удобным эвристическим средством для объяснения и эвристического вывода правил теории возмущений для гравитационного поля, сформулированных в предыдущей главе. В рамках этого подхода дополнительные члены, о которых мы там говорили, интерпретируются как следствие нетривиальности меры, по которой интегрируется функционал $\exp(iS)$.

Поясним это более подробно, используя естественные геометрические термины. Функционал $\exp(iS)$ инвариантен по отношению к бесконечномерной группе координатных преобразований в метрическом формализме и полупрямому произведению группы этих преобразований и группы локальных лоренцовых вращений в формализме подвижного репера. Таким образом, этот функционал является функцией на классах полей, когда в один класс объединяются гравитационные поля, которые можно перевести друг в друга преобразованиями из указанной группы.

Мы будем считать, что именно такой класс, а не индивидуальное поле, описывает конкретную физическую ситуацию. Именно в этом и состоит содержательный принцип общей ковариантности. Имея в виду такую формулировку этого принципа, мы можем считать, что в квантовой теории функционал Фейнмана $\exp(iS)$ следует интегрировать не по индивидуальным полям, а по этим классам. Нетривиальность меры, с которой мы говорили, связана именно с этим обстоятельством.

Обсудим, как можно описывать меры на множестве классов полей. Следуя нашей методике, рассмотрим сначала конечномерный случай. Математически мы имеем дело со следующей ситуацией: нам дано многообразие M (в дальнейшем множество всех полей) и группа G (в дальнейшем калибровочные преобразования), действующая на M. Пусть ξ — точка из M, a — элемент группы, ξ^a — результат действия элемента группы a на точку ξ. Рассмотрим фактор-многообразие $M/G = M^*$, образованное классами точек вида ξ^a, где точка ξ (представитель класса) фиксирована, а a пробегает всю группу.

Всякая мера μ^* на фактор-пространстве M^* условием постоянства вдоль классов продолжается до меры μ на M, инвариантной по отношению к действию группы. Наоборот, если дана инвариантная мера μ на M, то нетрудно построить меру μ^* на M^*, которая продолжается до μ в указанном смысле. Выбор представителей в классах можно конкретизировать, задав в M поверхность, которая пересекается с каждым классом один раз. Это означает, что если поверхность задана системой уравнений

$$f(\xi) = 0, \tag{3.1}$$

то при заданном ξ система уравнений

$$f(\xi^a) = 0 \tag{3.2}$$

должна иметь единственное решение a (зависящее, вообще говоря, от ξ). Мера μ^* при такой параметризации выглядит следующим образом:

$$d\mu^*(\xi) = \delta(f(\xi))\,\Delta_f(\xi)\,d\mu, \tag{3.3}$$

где функция $\Delta_f(\xi)$ определяется соотношением

$$\Delta_f(\xi)\int \delta(f(\xi^a))\,da = 1, \tag{3.4}$$

причем da — инвариантная мера на группе G. Функция $\Delta_f(\xi)$ инвариантна, т. е. $\Delta_f(\xi^a) = \Delta_f(\xi)$. Формулу (3.3) можно объяснить следующим образом. Перейдем к новым переменным

$$\xi \to (\xi_{\text{т}}, a), \tag{3.5}$$

где a — элемент группы, определяемый уравнением (3.2), $\xi_{\text{т}} = \xi^a$. Пусть инвариантная мера на M в координатах ξ дается выражением

$$d\mu = M(\xi)\,d\xi. \tag{3.6}$$

В новых переменных она примет вид

$$M(\xi)\,D_f\,d\xi_{\text{т}}\,da, \tag{3.7}$$

где

$$d\xi_{\text{т}} = \delta(f(\xi))\,d\xi \tag{3.8}$$

есть мера на поверхности, порожденной мерой $d\xi$, D_f — якобиан перехода к переменным $(\xi_{\text{т}}, a)$. Мера на фактор-пространстве M^* получается из (3.7), если опустить инвариантную меру da по групповым координатам.

Покажем, что якобиан $D_f(\xi)$ совпадает с определяемой соотношением (3.4) инвариантной функцией $\Delta_f(\xi)$. Рассмотрим интеграл

$$\int \Phi(\xi)\,M(\xi)\,d\xi \tag{3.9}$$

от произвольной инвариантной функции $\Phi(\xi)$, интегрируемой по мере $M(\xi)\,d\xi$. Условие инвариантности

$$\Phi(\xi^a) = \Phi(\xi)$$

позволяет считать, что Φ зависит только от $\xi_{\text{т}}$. Действительно, так как $\xi_{\text{т}} = \xi^a$, то

$$\Phi(\xi) = \Phi(\xi^a) = \Phi(\xi_{\text{т}}).$$

Используя для меры $M(\xi)\,d\xi$ в интеграле (3.9) выражение (3.7), преобразуем интеграл к виду

$$\int \Phi(\xi)\, M(\xi)\, D_f(\xi)\, d\xi_{\text{т}}\, da = \mu(G) \int \Phi(\xi_{\text{т}})\, M(\xi_{\text{т}})\, D_f(\xi_{\text{т}})\, d\xi_{\text{т}}, \qquad (3.10)$$

где $\mu(G) = \int da$ есть «объем группы». Другое выражение для интеграла (3.9) можно получить, если под знак интеграла вставить равный единице множитель (3.4), а затем сделать замену $\xi^a \to \xi$, относительно которой инвариантны функции Φ, Δ_f и мера $M\,d\xi$:

$$\int \Phi(\xi)\, M(\xi)\, d\xi = \int \Phi(\xi)\, M(\xi)\, [\Delta_f(\xi) \int \delta(f(\xi^a))\, da]\, d\xi =$$
$$= \int \Phi(\xi)\, \Delta_f(\xi)\, M(\xi)\, \delta(f(\xi))\, d\xi\, da = \mu(G) \int \Phi(\xi_{\text{т}})\, M(\xi_{\text{т}})\, \Delta_f(\xi_{\text{т}}) d\xi_{\text{т}}. \qquad (3.11)$$

Ввиду произвольности функции $\Phi(\xi)$ меры в интегралах (3.10) и (3.11) должны совпадать:

$$\mu(G)\, M(\xi_{\text{т}})\, D_f(\xi_{\text{т}})\, d\xi_{\text{т}} = \mu(G)\, M(\xi_{\text{т}})\, \Delta_f(\xi_{\text{т}})\, d\xi_{\text{т}},$$

что и дает равенство $D_f = \Delta_f$.

Вернемся к гравитационному полю. Из только что сказанного ясно, что для задания меры на классах полей достаточно задать меру на многообразии полей, инвариантную по отношению к координатным (и локальным лоренцовым) преобразованиям, а также уравнения, параметризующие классы. Эти уравнения должны быть лоренц-инвариантны, если мы хотим получить ковариантную теорию возмущений. В метрическом формализме в качестве таких уравнений мы возьмем условия гармоничности де Дондера — Фока

$$\partial_\nu (\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}) = l^\mu(x), \qquad (3.12)$$

где $l^\mu(x)$ — заданное векторное поле. Произвол в выборе $l^\mu(x)$ пригодится нам в дальнейшем для формальных преобразований. Условие (3.12) не общековариантно и именно поэтому может служить для параметризации классов. Аналог уравнения (3.2) представляет собой сложное нелинейное уравнение для параметров координатного преобразования, переводящее данную метрику в гармоническую. В рамках теории возмущений это уравнение имеет единственное решение.

В следующих главах будет показано, что в качестве инвариантной меры следует взять *)

$$\prod_x \Big[g^{5/2}(x) \prod_{\mu \leqslant \nu} dg^{\mu\nu}(x) \Big] = \prod_x \Big[h^{-5/2}(x) \prod_{\mu \leqslant \nu} dh^{\mu\nu}(x) \Big], \qquad (3.13)$$

где

$$g = \det g_{\mu\nu}, \quad h^{\mu\nu} = \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}, \quad h = \det h^{\mu\nu} = g. \qquad (3.14)$$

Это будет сделано на основании исследования гамильтоновой формулировки, которую мы будем интерпретировать как альтернативный, нелоренц-инвариантный способ параметризации классов полей.

---

*) Всякая мера вида $\prod_x h^\alpha \prod_{\mu \leqslant \nu} dh^{\mu\nu}$ инвариантна по отношению к группе координатных преобразований. Действительно, при координатных преобразованиях это выражение приобретает множитель вида $\prod_x [\det(\partial x'^\mu/\partial x^\mu)]^\gamma$. Его следует считать равным единице, так как для инфинитезимальных преобразований он равен $\exp[\gamma\, \mathrm{Sp} \ln(1 + \partial_\mu \eta_\mu)] = \exp(\gamma \delta^{(4)}(0) \int \partial_\mu \eta_\mu d^4x) = 1$.

Преимущество гамильтоновой формулировки состоит в том, что именно в ней условие унитарности приводит к стандартному выражению для меры интегрирования.

Имея параметризацию классов (3.12) и меру (3.13), мы получаем следующее выражение для континуального интеграла:

$$\int \exp(iS)\,\Delta_h[g] \prod_x \left[\prod_\mu \delta(\delta_\nu h^{\mu\nu} - l^\mu)\right] \left(g^{5/2} \prod_{\mu\leqslant\nu} dg^{\mu\nu}\right), \tag{3.15}$$

где в соответствии с (3.4) функционал $\Delta_h[g]$ определяется уравнением

$$\Delta_h[g] \int \prod_x \left[\prod_\mu \delta(\partial_\nu (h^{\mu\nu})^a - l^\mu)\right] da = 1 \tag{3.16}$$

и тем самым выражается через интеграл по калибровочной группе от δ-функционала $\prod\limits_{x,\,\mu} \delta(\delta_\nu (h^{\mu\nu})^a - l^\mu)$.

Обсудим вычисление этого интеграла. Выражение $\Delta_h[g]$ входит в интеграл (3.15) только на поверхности, определяемой уравнениями (3.16). Для таких $g^{\mu\nu}$ полный вклад в интеграл из (3.16) дает бесконечно малая окрестность единичного элемента группы. В этой окрестности действие преобразований группы на $h^{\mu\nu}$ и меру da можно параметризовать введенными выше (2.5) инфинитезимальными функциями $\eta^\mu(x)$. В такой параметризации

$$\begin{aligned}\partial_\nu (h^{\mu\nu})^{a(x)} - l^\mu(x) = \\ = h^{\nu\lambda}(x)\,\partial_\nu\partial_\lambda\eta^\mu(x) + \partial_\nu h^{\nu\lambda}(x)\,\partial_\lambda\eta^\mu(x) - \partial_\nu\eta^{\mu\nu}(x)\,\partial_\lambda\eta^\lambda(x) - \\ - \partial_\lambda\partial_\nu\eta^{\mu\nu}(x)\,\eta^\lambda(x).\end{aligned} \tag{3.17}$$

Мера da в единичном элементе имеет простой вид

$$da = \prod_x \prod_\mu d\eta^\mu(x). \tag{3.18}$$

В результате интересующий нас интеграл записывается в виде

$$\int \prod_{x,\,\mu} \delta((A\eta)^\mu(x))\, d\eta^\mu(x). \tag{3.19}$$

Формально этот интеграл равен $(\det A)^{-1}$, где A — оператор, действующий на четверку функций η^μ:

$$(A\eta)^\mu = \partial_\nu (h^{\nu\lambda}\,\partial_\lambda\eta^\mu) - \partial_\lambda(\eta^\lambda\partial_\nu h^{\mu\nu}). \tag{3.20}$$

Итак, мы нашли, что

$$\Delta_h[g] = \det A. \tag{3.21}$$

Для формулировки теории возмущений удобно представить $\det A$ как интеграл по вспомогательным полям от функционала типа экспоненты. Эти поля должны быть антикоммутирующими, так как нам нужен интеграл, дающий первую степень определителя. Этим требованиям удовлетворяет выражение

$$\det A = \int \exp\left\{i \int \bar\theta^\mu(x)\, A_{\mu\nu}[g(x)]\, \theta^\nu(x)\, d^4x\right\} \prod_{x,\,\mu} d\theta^\mu(x)\, d\bar\theta^\mu(x), \tag{3.22}$$

где θ, $\bar\theta$ — антикоммутирующие классические поля, удовлетворяющие соотношениям

$$\theta^\mu(x)\,\theta^\nu(y) + \theta^\nu(y)\,\theta^\mu(x) = 0 \tag{3.23}$$

и аналогичным соотношениям для пар $(\theta, \bar{\theta})$, $(\bar{\theta}, \bar{\theta})$. Определение и правила работы с интегралами по антикоммутирующим переменным можно найти, например, в книге Березина [39].

Возвращаясь к интегралу (3.15), мы можем теперь записать его в виде

$$\int \exp\left\{iS[g] + i\int \bar{\theta}^{\mu} A_{\mu\nu}[g]\,\theta^{\nu}\,d^4x\right\} \times \\ \times \prod_x \left[\prod_\mu \delta(\partial_\mu h^{\mu\nu} - l^{\mu})\right]\left(g^{5/2}\prod_{\mu\leqslant\nu} dg^{\mu\nu}\right), \quad (3.24)$$

который можно непосредственно применить для формулировки теории возмущений. Однако мы преобразуем его, еще воспользовавшись произволом в выборе μ. Интеграл (3.24) от выбора l^{μ} не зависит по самому построению. Мы можем поэтому усреднить его по l^{μ} с произвольным весом. Возьмем в качестве веса экспоненту от квадратичной формы полей

$$\exp\left[(i\alpha/4)\int l^{\mu}\eta_{\mu\nu}l^{\nu}d^4x\right], \quad (3.25)$$

где $\eta_{\mu\nu}$ — тензор Минковского. Усреднение проводится явно и дает выражение

$$\int \exp\left\{iS[g] + \frac{i\alpha}{4}\int \partial_\rho h^{\mu\rho}\eta_{\mu\nu}\partial_\sigma h^{\nu\sigma}\,d^4x + \\ + i\int \bar{\theta}^{\mu}A_{\mu\nu}\theta^{\nu}d^4x\right\}\prod_x g^{5/2}\left(\prod_{\mu\leqslant\nu} dg^{\mu\nu}\right)\left(\prod_\mu d\theta^{\mu}\,d\bar{\theta}^{\mu}\right), \quad (3.26)$$

содержащее квадратичную форму продольных частей поля $h^{\mu\nu}$ с произвольным коэффициентом α. Из нашего рассуждения следует, что интеграл от α не зависит. Способ проверить это непосредственно был предложен Де-Виттом [24]. Мы следовали здесь более простому методу Хоофта [31].

Диаграммная техника, изложенная в предыдущей главе, следует из выражения (3.26) так же, как это было объяснено в гл. 1 на примере скалярного поля. Введением вспомогательных «фиктивных» полей θ^{μ}, $\bar{\theta}^{\mu}$ мы добились того, что квадратичная форма в экспоненте подынтегрального выражения стала невырожденной. Тем самым однозначно определяются операторы, обратные операторам квадратичных форм по $h^{\mu\nu}$ и θ^{μ}, $\bar{\theta}^{\nu}$, т. е. пропагаторы частиц, соответствующие линиям диаграммы. Пропагатор гравитона $\langle h^{\mu\nu}h^{\rho\sigma}\rangle$ содержит произвольную постоянную α. Пропагатор фиктивных векторных частиц $\langle\theta^{\mu}\bar{\theta}^{\nu}\rangle$ в k-представлении дается как раз формулой (2.18). Антикоммутативность полей θ^{μ}, $\bar{\theta}^{\mu}$ ведет к множителю $(-1)^s$ перед выражением, соответствующим диаграмме с s замкнутыми ферми-циклами. Формы высших степеней в разложении действия в (3.26) по степеням полей $h^{\mu\nu}$, θ^{μ}, $\bar{\theta}^{\nu}$ порождают вершины диаграммной техники, которые уже описаны в гл. 2. Их конкретный вид зависит от выбора линеаризации.

Отметим еще роль локального множителя $\prod_x h^{-5/2}(x)$, участвующего в мере. При линеаризации (2.12) имеем

$$\prod_x dh^{\mu\nu} = \prod_x du^{\mu\nu}, \quad (3.27)$$

и, таким образом, этот множитель следует учитывать при построении теории возмущений. Формально его роль сводится к появлению добавки к действию вида

$$\Delta S = (5/2)\,i\delta^{(4)}(0)\int \ln h(x)\,d^4x, \quad (3.28)$$

которая порождает вершины, пропорциональные $\delta^{(4)}(0)$. Появление таких перенормировочных членов отмечается во многих работах, посвященных нелинейным теориям (см., например, [40, 41]). Заметим, что их не будет в экспоненциальной параметризации. В ней мера (3.13) с точностью до постоянного множителя имеет простой вид

$$\prod_x \prod_{\mu\leqslant\nu} d\Phi^{\mu\nu} \qquad 159$$

без всяких локальных добавок.

Мы подробно рассмотрели случай гравитационного поля в пустоте. Введение взаимодействия с другими полями не изменит существенно схемы построения теории возмущений. Для полей материи с невырожденными лагранжианами, взаимодействующих с полем тяготения, новых фиктивных частиц не возникает. Такие частицы и соответствующие им диаграммы появляются только при включении поля с калибровочной группой более широкой, чем в теории тяготения, например, электромагнитного поля или поля Янга — Миллса. Здесь мы не будем подробно рассматривать этот случай. Ограничимся тем, что приведем выражение для континуального интеграла, соответствующего взаимодействующим электромагнитному и гравитационному полям:

$$\int \exp\left\{iS[g^{\mu\nu}, A_\mu]\,\Delta[g]\prod_x \delta(\partial_\mu h^{\mu\nu}A_\nu)\prod_\mu \delta(\partial_\nu h^{\mu\nu})\,|g|^{5/2}\prod_{\mu\leqslant\nu} dg^{\mu\nu}\prod_\mu dA_\mu\right\},$$

$$S[g^{\mu\nu}, A_\mu] = S_g - \frac{1}{4}\int (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial_\lambda A_\rho - \partial_\rho A_\lambda)\, g^{\mu\lambda}g^{\nu\rho}\sqrt{-g}\, d^4x,$$

где S_g — действие свободного гравитационного поля, $\Delta[g]$ равно произведению определителей

$$\det A \cdot \det(\partial_\mu h^{\mu\nu}\partial_\nu),$$

в котором A — оператор (3.20). Наличие в этом произведении нетривиального второго множителя показывает, что несущественная фиктивная скалярная частица, которую можно было бы ввести при описании электромагнитного поля, также взаимодействует с гравитационным полем. Таким образом, в ковариантной теории возмущений для электромагнитного и гравитационного полей, помимо уже описанных элементов, участвует фиктивная нейтральная скалярная частица.

Читатель, понявший основные принципы построения диаграммной теории возмущений для калибровочных полей, при желании может сам воспроизвести соответствующие выкладки и для более сложного случая.

4. ГАМИЛЬТОНОВА ФОРМУЛИРОВКА ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ

Обоснование правильности выражения (3.13) для инвариантной меры будет основано на гамильтоновой формулировке теории тяготения. Эта формулировка разработана Дираком [14]. Ряд вариантов такой формулировки был получен многими авторами [15–19]. Построение явно гамильтоновой формы уравнений Эйнштейна сталкивается с трудной задачей решения уравнений связи. Для нас окажется достаточной обобщенная гамильтонова формулировка теории тяготения, при которой уравнения связей решать не надо и можно ограничиться лишь проверкой коммутационных соотношений.

Поясним обобщенную гамильтонову формулировку на примере систем с конечным числом степеней свободы. Функционал действия рассматриваемой системы в этой формулировке имеет вид

$$S = \int \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}^i - \mathscr{H}(p, q) - \sum_a \lambda_a \varphi^a (p, q) \right) dt. \tag{4.1}$$

Здесь через p, q обозначены канонически сопряженные координаты и импульсы, образующие фазовое пространство размерности $2n$, $\mathscr{H}$ — гамильтониан, φ^a —«связи», λ_a — множители Лагранжа ($a = 1, \ldots, m$, $m < n$). Связи φ^a и гамильтониан $\mathscr{H}$ находятся в инволюции, т.е. удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \{\mathscr{H}, \varphi^a\} &= \sum_a c_b^a \varphi^b, \\ \{\varphi^a, \varphi^b\} &= \sum_d c_d^{ab} \varphi^d. \end{aligned} \tag{4.2}$$

В этих формулах обозначение $\{f, g\}$ принято для обычных скобок Пуассона

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i} \right). \tag{4.3}$$

Условия (4.2) приводят к тому, что физическое фазовое пространство имеет размерность $2(n - m)$. Его можно реализовать как подмногообразие Γ^* в пространстве Γ, определяемое m уравнениями связи

$$\varphi^a (p, q) = 0, \qquad a = 1, \ldots, m \tag{4.4}$$

и m дополнительными условиями

$$\chi_a (p, q) = 0, \qquad a = 1, \ldots, m. \tag{4.5}$$

Функции χ_a должны удовлетворять условиям

$$\det \|\{\chi_a, \varphi^b\}\| \neq 0. \tag{4.6}$$

Удобно, кроме того, считать, что χ_a коммутируют между собой:

$$\{\chi_a, \chi_b\} = 0. \tag{4.7}$$

В этом случае на многообразии Γ^* можно просто ввести канонические переменные. Действительно, при условии (4.7) можно при помощи канонического преобразования в Γ перейти к новым переменным, в которых χ_a принимает вид

$$\chi_a = p_a, \qquad a = 1, \ldots, m, \tag{4.8}$$

где p_a — часть канонических импульсов новой системы переменных. Пусть q^a — сопряженные с ними координаты, p^*, q^* — остальные канонические переменные. В новых переменных условие (4.6) запишется в виде

$$\det \left\| \frac{\partial \varphi^a}{\partial q^b} \right\| \neq 0$$

и может быть интерпретировано как условие разрешимости уравнений связи $\varphi^a = 0$ относительно координат q^a. В результате поверхность Γ^* задается в Γ уравнениями

$$p_a = 0, \quad q^a = q^a (p^*, q^*),$$

так что p^* и q^* играют роль независимых переменных на Γ^*. По построению эти переменные являются каноническими. Более подробное обсуждение обобщенной гамильтоновой формулировки для конечномерного случая с приложением к теории поля Янга — Миллса содержится в работе одного из авторов [42].

Вернемся к гравитационному полю. Мы покажем, что его действие можно привести к виду, являющемуся теоретико-полевым аналогом (4.1), причем соответствующие связи и гамильтониан удовлетворяют условиям типа (4.2). Мы будем следовать общему методу, предложенному одним из авторов в форме, специально приспособленной для поля тяготения [19].

Для наших целей удобно использовать формализм первого порядка. Рассмотрим выражение для действия поля тяготения в виде (2.3) и соберем в соответствующей функции Лагранжа члены, содержащие производные по времени:

$$\frac{1}{2\varkappa^2}(\Gamma^0_{\mu\nu}\,\partial_0 h^{\mu\nu}-\Gamma^\rho_{\mu\rho}\,\partial_0 h^{\mu 0})=\frac{1}{2\varkappa^2}[\Gamma^0_{ik}\,\partial_0 h^{ik}+(\Gamma^0_{i0}-\Gamma^k_{ik})\,\partial_0 h^{i0}-\Gamma^i_{0i}\partial_0 h^{00}]. \quad (4.9)$$

Это выражение не содержит переменных Γ^μ_{00}, которые входят в $\mathscr{L}(h, \Gamma)$ линейно и играют роль множителей Лагранжа. Стоящие при Γ^μ_{00} множители (обозначим их A^{00}_μ) являются связями. Уравнения связей

$$\begin{aligned} A^{00}_0 &= h^{ik}\Gamma^0_{ik}+h^{00}\Gamma^i_{0i}+\partial_i h^{i0}=0,\\ A^{00}_i &= 2h^{k0}\Gamma^0_{ik}+h^{00}(\Gamma^0_{i0}-\Gamma^k_{ik})+\partial_i h^{00}=0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

дают возможность выразить переменные Γ^i_{0i}, $(\Gamma^0_{i0}-\Gamma^k_{ik})$ через Γ^0_{ik} и $h^{\mu\nu}$. При этом члены, содержащие производные по времени, принимают вид

$$\frac{1}{2\varkappa^2}\frac{\Gamma^0_{ik}}{h^{00}}\,\partial_0(h^{00}h^{ik}-h^{i0}h^{k0}), \quad (4.11)$$

если опустить слагаемые

$$\frac{1}{2\varkappa^2 h^{00}}(\partial_0 h^{00}\,\partial_i h^{i0}-\partial_i h^{00}\,\partial_0 h^{i0})=\frac{1}{2\varkappa^2}(\partial_0 \ln h^{00}\,\partial_i h^{i0}-\partial_i \ln h^{00}\,\partial_0 h^{i0}), \quad (4.12)$$

исчезающие при интегрировании по частям. Формула (4.11) подсказывает, что естественными динамическими переменными являются величины

$$q^{ik}=h^{i0}h^{k0}-h^{00}h^{ik}, \quad \pi_{ik}=-\frac{1}{h^{00}}\Gamma^0_{ik}. \quad (4.13)$$

Переменные $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$, отличные от Γ^0_{ik}, являются нединамическими. Они могут быть исключены с помощью уравнений связи

$$\frac{\partial\mathscr{L}(h,\Gamma)}{\partial\Gamma^\rho_{\mu\nu}}=0 \qquad (\Gamma^\rho_{\mu\nu}\neq\Gamma^0_{ik}). \quad (4.14)$$

В систему (4.14) входят уравнения (4.10) вместе с уравнениями

$$\begin{aligned} \partial_k h^{i0}+h^{is}\Gamma^0_{sk}+h^{00}\Gamma^i_{k0}+h^{s0}\Gamma^i_{ks}-h^{i0}\Gamma^s_{ks}&=0,\\ \partial_k h^{ij}+h^{i\sigma}\Gamma^j_{\sigma k}+h^{j\sigma}\Gamma^i_{\sigma k}-h^{ij}\Gamma^\sigma_{k\sigma}&=0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Решение системы (4.10), (4.15), выражающие «нединамические» величины Γ^0_{i0}, Γ^k_{i0}, Γ^k_{ij} через Γ^0_{ik} и $h^{\mu\nu}$, имеет вид

$$\left.\begin{aligned} \Gamma^0_{i0}&=\Gamma^s_{is}-\frac{\partial_i h^{00}}{h^{00}}-\frac{h^{s0}}{h^{00}}\Gamma^0_{is},\\ \Gamma^k_{i0}&=-\frac{1}{h^{00}}(\partial_i h^{k0}+h^{s0}\Gamma^k_{is}-h^{k0}\Gamma^s_{is}+h^{ks}\Gamma^0_{is}),\\ \Gamma^k_{ij}&=\overset{*}{\Gamma}{}^k_{ij}+\frac{h^{k0}}{h^{00}}\Gamma^0_{ij}; \end{aligned}\right\} \quad (4.16)$$

здесь $\overset{*}{\Gamma}{}^{k}_{ij}$ — трехмерные коэффициенты связности, порожденные трехмерной метрикой g_{ik} $(i, k = 1, 2, 3)$.

Подставим найденные выражения (4.16) для Γ^0_{i0}, Γ^k_{i0}, Γ^k_{ij} в функцию Лагранжа $\mathscr{L}(h, \Gamma)$. После отбрасывания нескольких слагаемых типа дивергенции, исчезающих при интегрировании по трехмерному пространству с учетом асимптотических условий (2.2), результат подстановки приводится к виду

$$\frac{1}{2\varkappa^2}\left[\pi_{ik}\partial_0 q^{ik} - \mathscr{H}(x) - \left(\frac{1}{h^{00}} - 1\right) T_0(x) - \frac{h^{i0}}{h^{00}} T_i(x)\right], \tag{4.17}$$

где

$$\left.\begin{aligned} T_0(x) &= q^{ij}q^{kl}(\pi_{ik}\pi_{jl} - \pi_{ij}\pi_{kl}) + g_3 R_3, \\ T_i(x) &= 2\left[\nabla_i(q^{kl}\pi_{kl}) - \nabla_k(q^k\pi_{il})\right], \\ \mathscr{H}(x) &= T_0(x) - \partial_i\partial_k q^{ik}; \end{aligned}\right\} \tag{4.18}$$

здесь $g_3 = \det g_{ik}$, R_3 — трехмерный скаляр кривизны, порожденный трехмерной метрикой g_{ik} $(i, k = 1, 2, 3)$. Символ ∇_k в выражениях для связей T_i означает ковариантную производную по отношению к метрике g_{ik}.

Канонические переменные и выражения для связей, как отметили Арновитт, Дезер и Мизнер [15], имеют наглядный геометрический смысл. Функции q^{ik}, π_{ik} служат коэффициентами первой и второй квадратичных форм поверхности $x^0 = \mathrm{const}$, погруженной в четырехмерное пространство-время с метрикой $g_{\mu\nu}$ и связностью $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$. Точнее, q^{ik} — контравариантная плотность метрики веса $+2$, π_{ik} — ковариантная плотность веса -1. Связи — это известные в теории поверхностей соотношения Кодацци и Гаусса (см., например, [43]).

Формула (4.17) решает задачу приведения действия поля тяготения к обобщенному гамильтонову виду, аналогичному (4.1) для конечномерной системы со связями. Связи T_μ, как можно проверить, коммутируют. Для записи явных соотношений удобно ввести величины

$$T(\eta) = \int T_k(x)\,\eta^k(x)\,d^3x, \quad T(\varphi) = \int T_0(x)\,\varphi(x)\,d^3x; \tag{4.19}$$

здесь η — векторное поле, φ — скалярное поле (скалярная плотность веса -1). Имеют место соотношения

$$\left.\begin{aligned} \{T(\eta_1), T(\eta_2)\} &= T([\eta_1, \eta_2]), \\ \{T(\eta), T(\varphi)\} &= T(\eta\varphi), \\ \{T(\varphi), T(\psi)\} &= T(\varphi\eta_\psi - \psi\eta_\varphi); \end{aligned}\right\} \tag{4.20}$$

здесь $[\eta_1, \eta_2]$ — скобка векторных полей, т. е. векторное поле с компонентами $\eta_1^l\partial_l\eta_2^k - \eta_2^l\partial_l\eta_1^k$, $\eta\varphi = \eta^l\partial_l\varphi - \partial_l\eta^l\varphi$, η_φ — векторное поле с компонентами $q^{ik}\partial_i\varphi$. Соотношения (4.20) являются теоретико-полевым аналогом равенств (4.2). Первая строка в (4.20) показывает, что связи $T_k(x)$ $(k = 1, 2, 3)$ играют роль генераторов координатных преобразований. Остальные соотношения не имеют простого группового смысла.

Легко видеть, что записанное в обобщенной гамильтоновой форме действие (4.17) порождает правильные канонические уравнения движения для динамических величин q^{ik}, π_{ik}, на которые наложены связи $T_\mu = 0$ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$.

Отметим роль дивергенции $\partial_i\partial_k q^{ik}$ в плотности гамильтониана $\mathscr{H}(x)$. Если выполнены уравнения связи $T_\mu = 0$, гамильтониан $\mathscr{H}$ сводится к трехмерному интегралу от дивергенции, т. е. к интегралу по бесконечно удаленной поверхности. Последний интеграл определяется асимптотикой

функций q^{ik} при $r = |\mathbf{x}| \to \infty$. Для асимптотически плоского поля тяготения имеем[6]

$$q^{ik} = \delta^{ik}\left(1 + \frac{\varkappa^2 M}{2\pi r}\right) + O\left(\frac{1}{r^2}\right),$$

где M — полная масса, которую можно получить, интегрируя $\mathscr{H}(x)$:

$$\mathscr{H} = \int \mathscr{H}(x)\, d^3x = \frac{-1}{2\varkappa^2}\int \partial_i\partial_k q^{ik}\, d^3x = \frac{-1}{2\varkappa^2}\lim_{S\to\infty}\oint (\partial_k q^{ik}\, dS_i) = M.$$

Таким образом, можно считать, что $\mathscr{H} = \int \mathscr{H}(x)\, d^3x$ действительно играет роль энергии. Подынтегральное выражение

$$\mathscr{H}(x) = T_0(x) - \partial_i\partial_k q^{ik}(x),$$

играющее роль плотности энергии, имеет вид суммы двух квадратичных форм — квадратичной формы первых производных от q^{ik} и квадратичной формы «импульсов» π_{ik}, как и полагается плотности энергии волнового поля. В нашем случае это энергия гравитационного поля, которое имеет две поляризации в соответствии с обычным подсчетом:

$$2 = 6\ (\text{координат}) - 4\ (\text{связи}).$$

Отметим еще, что в приближении слабого поля гамильтониан $\mathscr{H}$ представляется квадратичной формой от полностью поперечных компонент линеаризованного поля.

Обсудим теперь выбор дополнительных условий. Широко принято импользовать условия, впервые предложенные Дираком[14]:

$$\partial_k q^{-1/3} q^{ik} = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ 3), \quad \pi \equiv q^{ik}\pi_{ik} = 0, \tag{4.21}$$

где $q = \det q^{ik} = (\det g_{ik})^2$. Эти условия имеют простой геометрический смысл: поверхность $x^0 = \text{const}$ минимальна, а координаты x^1, x^2, x^3 на ней «гармоничны».

Нам окажутся удобнее другие дополнительные условия

$$\ln q = \Phi(x), \quad q^{ik} = 0 \qquad (i \neq k), \tag{4.22}$$

где Φ — функция с асимптотикой C/r на бесконечности. Условия коммутации (4.7) для этих условий выполняются. Матрица скобок Пуассона условий (4.21) со связями определяется формулами

$$\left.\begin{aligned}
(C\eta)^0 &= \{T_\eta,\ \ln q - \Phi(x)\} = -\eta^s\partial_s \ln q - 4\partial_s\eta^s + 4\pi\eta^0,\\
(C\eta)^1 &= \{T_\eta,\ q^{23}\} = -\eta^s\partial_s q^{23} + q^{2s}\partial_s\eta^3 + q^{3s}\partial_s\eta^2 -\\
&\qquad - 2q^{23}\partial_s\eta^s - 2(\pi^{23} - q^{23}\pi)\,\eta^0,\\
(C\eta)^2 &= \{T_\eta,\ q^{31}\} = -\eta^s\partial_s q^{31} + q^{3s}\partial_s\eta^1 + q^{1s}\partial_s\eta^3 -\\
&\qquad - 2q^{31}\partial_s\eta^s - 2(\pi^{31} - q^{31}\pi)\,\eta^0,\\
(C\eta)^3 &= \{T_\eta,\ q^{12}\} = -\eta^s\partial_s q^{12} + q^{1s}\partial_s\eta^2 + q^{2s}\partial_s\eta^1 -\\
&\qquad - 2q^{12}\partial_s\eta^s - 2(\pi^{12} - q^{12}\pi)\,\eta^0
\end{aligned}\right\} \tag{4.23}$$

и невырождена, если кривизна метрики g_{ik} отлична от нуля.

5. ГАМИЛЬТОНОВА ФОРМА КОНТИНУАЛЬНОГО ИНТЕГРАЛА

Континуальный интеграл для квантования классической системы, заданный в обобщенной гамильтоновой формулировке, выглядит следующим образом (см. [42]):

$$\int \exp\left[i \int \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}^i - H(p, q)\right) dt\right] \prod_t d\mu(p(t), q(t)). \tag{5.1}$$

Мера интегрирования определена формулой

$$d\mu(t) = (2\pi)^{m-n} \det \| \{\chi_a, \varphi^b\} \| \prod_a \delta(\chi_a)\, \delta(\varphi^a) \prod_{i=1}^{n} dp_i\, dq^i. \tag{5.2}$$

Для доказательства приведем интеграл (5.1) с мерой (5.2) к интегралу по траекториям в физическом фазовом пространстве Γ^*. С этой целью перейдем к описанным выше (в гл. 4) координатам p_a, p^*, q^a, q^*. В этих координатах мера выглядит следующим образом:

$$d\mu(t) = (2\pi)^{m-n} \det \left\| \frac{\partial \varphi^a}{\partial q^b} \right\| \prod_a \delta(p_a)\, \delta(\varphi^a) \prod_{i=1}^{n} dp_i\, dq^i,$$

что можно переписать еще так:

$$\prod_a \delta(p_a)\, \delta(q^a - q^a(p^*, q^*))\, dp_a\, dq^a \prod_{j=1}^{n} \frac{dp_j^*\, dq^{*j}}{2\pi}.$$

Интегрирование по p_a и q^a снимается δ-функциями. В результате интеграл принимает вид

$$\int \exp\left\{i \int \left[\sum_{i=1}^{n-m} p_i^* \dot{q}^{*i} - \mathscr{H}(p^*, q^*)\right] dt\right\} \prod_t \prod_{j=1}^{n-m} \frac{dp_j^*\, dq^{*j}}{2\pi}, \tag{5.3}$$

стандартный для обычной гамильтоновой формулировки [44]. Это и доказывает правильность формулы (5.1), преимущество которой по сравнению с (5.3) в том, что в ней мы не решаем уравнений связи.

Интеграл (5.1) можно представить в виде

$$\int \exp(iS) \prod_t \det \| \{\chi_a, \varphi^b\} \| \prod_a \delta(\chi^a)\, d\lambda_a \prod_{i=1}^{n} dp_i\, dq^i, \tag{5.4}$$

где функционал $\exp(iS)$ (S — обобщенное действие системы (4.1)) интегрируется по всем независимым переменным p_i, q^i, λ_a. Действительно, множители Лагранжа λ_a входят в это действие линейно, и интеграл по ним дает δ-функции от связей φ^a. Начиная с этой формулы мы не будем выписывать множители типа π или объемов решеток интегрирования.

Вернемся к случаю поля тяготения. Выберем дополнительные условия в форме (4.22) и введем обозначения

$$\ln q - \Phi = \chi_0, \quad q^{23} = \chi_1, \quad q^{31} = \chi_2, \quad q^{12} = \chi_3. \tag{5.5}$$

Аналог интеграла (5.4) выглядит следующим образом:

$$\int \exp\left[i \int \left(\pi_{ik} \partial_0 q^{ik} - \frac{h^{i0}}{h^{00}} T_i - \frac{1}{h^{00}} T_0 + \partial_i \partial_k q^{ik}\right) d^4x\right] \times$$

$$\times \det\{T_\mu, \chi_a\} \prod_{a=0}^{3} \delta(\chi_a) \left(\prod_{i \leqslant k} d\pi_{ik}\, dq^{ik}\right) d\frac{1}{h^{00}} \prod_{i=1}^{3} d\frac{h^{i0}}{h^{00}}. \tag{5.6}$$

Мы собираемся привести это выражение к виду, где интегрирование ведется только по полю $g^{\mu\nu}$. Это даст нам возможность идентифицировать искомую инвариантную меру. С этой целью нам надо проинтегрировать по полям π_{ik}. Это интегрирование можно провести явно, так как выражение

$$\det \{T_\mu, \chi_a\} \equiv \det C \tag{5.7}$$

зависит от π_{ik} линейно, и тем самым интеграл оказывается гауссовым; здесь C — оператор, определенный соотношениями (4.22). Поясним это свойство $\det C$ подробнее. Функции π_{ik} входят только в коэффициенты c_{0k} оператора C, не содержащие производных, причем линейным образом. Таким образом, оператор C можно записать в виде

$$C = C_1(h) + C_2(h, \pi),$$

где оператор C_2 не содержит производных и при каждом π определяется матрицей ранга 1. Из линейной алгебры известно, что определитель матрицы $A + B$, где B одномерна, линеен по матричным элементам B. Аналог этого утверждения в нашем случае и приводит к указанному свойству линейности $\det C$ по π_{ik}.

Гауссово интегрирование по π_{ik} сводится к подстановке

$$\pi_{ik} = \pi_{ik}(h),$$

где $\pi_{ik}(h)$ — выражение, следующее из формул типа (2.1), выражающих символы Кристоффеля через метрику. После такой подстановки действие, соответствующее лагранжиану (4.17), превратится в исходное ковариантное действие (2.3). Определитель $\det C$ превращается в произведение

$$\det B \prod_x h^{00}(x), \tag{5.8}$$

где B — оператор, определяемый формулами

$$(B\eta)^0 = -\eta^\lambda \partial_\lambda \ln q - 4\partial_s \eta^s - \left(\frac{h^{s0}}{h^{00}}\partial_s \ln q + 4\partial_s\left(\frac{h^{s0}}{h^{00}}\right)\right)\eta^0.$$

$$\begin{aligned}(B\eta)^1 = &-\eta^\lambda\partial_\lambda q^{23} + q^{2s}\partial_s\eta^3 + \eta^{3s}\partial_s\eta^2 - 2q^{23}\partial_s\eta^s + \\ &+\left(-\frac{h^{s0}}{h^{00}}\partial_s q^{23} + q^{2s}\partial_s\left(\frac{h^{30}}{h^{00}}\right) + q^{3s}\partial_s\left(\frac{h^{20}}{h^{00}}\right) - 2q^{23}\partial_s\left(\frac{h^{s0}}{h^{00}}\right)\right)\eta^0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(B\eta)^2 = &-\eta^\lambda\partial_\lambda q^{31} + q^{3s}\partial_s\eta^1 + q^{1s}\partial_s\eta^3 - 2q^{31}\partial_s\eta^s + \\ &+\left(-\frac{h^{s0}}{h^{00}}\partial_s q^{31} + q^{3s}\partial_s\left(\frac{h^{10}}{h^{00}}\right) + q^{1s}\partial_s\left(\frac{h^{30}}{h^{00}}\right) - 2q^{31}\partial_s\left(\frac{h^{s0}}{h^{00}}\right)\right)\eta^0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(B\eta)^3 = &-\eta^\lambda\partial_\lambda q^{12} + q^{1s}\partial_s\eta^2 + q^{2s}\partial_s\eta^1 - 2q^{12}\partial_s\eta^s + \\ &+\left(-\frac{h^{s0}}{h^{00}}\partial_s q^{12} + q^{1s}\partial_s\left(\frac{h^{20}}{h^{00}}\right) + q^{2s}\partial_s\left(\frac{h^{10}}{h^{00}}\right) - 2q^{12}\partial_s\left(\frac{h^{s0}}{h^{00}}\right)\right)\eta^0.\end{aligned} \tag{5.9}$$

Наконец, локальные множители в произведениях дифференциалов вместе с локальным множителем, возникшим от интегрирования по π_{ik} и самими дифференциалами, соберется в выражение

$$\prod_x \left[(h^{00})^4 q^{-2} \prod_{\mu\leq\nu} dh^{\mu\nu}\right]. \tag{5.10}$$

Здесь множитель перед дифференциалами можно привести к виду

$$(h^{00})^{-1} h^{-5/2} q^{1/2},$$

причем последний множитель $q^{1/2}$ можно опустить вследствие условия связи $q = \exp \Phi$. В результате наш континуальный интеграл принимает

вид

$$\int \exp(iS[h]) \det B \prod_x \left[\prod_a \delta(\chi_a) \right] h^{-5/2} \prod_{\mu \leqslant \nu} dh^{\mu\nu}. \tag{5.11}$$

Мы покажем теперь, что выписанный интеграл является интегралом по классам гравитационных полей в смысле гл. 3, причем классы параметризуются условиями (4.22), а инвариантная мера имеет вид

$$\prod_x \left(h^{-5/2} \prod_{\mu \leqslant \nu} dh^{\mu\nu}\right). \tag{5.12}$$

Для этого достаточно проверить, что $\det B$ совпадает с множителем $\Delta_\chi[h]$, который получается по правилам гл. 3 следующим образом:

$$\Delta_\chi[h] \int \prod_x \left[\prod_b \delta(\chi_b^{a(x)}) \right] da(x) = 1.$$

Интеграл в этом выражении можно вычислить тем же способом, что и интеграл (3.16) в гл. 3. При этом получится

$$\Delta_\chi[h] = \det B', \tag{5.13}$$

где оператор B' определяется следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
(B'\zeta)^0 &= -\zeta^\lambda \partial_\lambda \ln q - 4\partial_s \zeta^s + 4\frac{h^{s0}}{h^{00}} \partial_s \zeta^0, \\
(B'\zeta)^1 &= -\zeta^\lambda \partial_\lambda q^{23} + q^{2s}\partial_s \zeta^3 + q^{3s}\partial_s \zeta^2 - 2q^{23}\partial_s \zeta^s - \\
&\qquad - \left(\frac{h^{20}}{h^{00}} q^{3s} + \frac{h^{30}}{h^{00}} q^{2s} - 2\frac{h^{s0}}{h^{00}} q^{23}\right) \partial_s \zeta^0, \\
(B'\zeta)^2 &= -\zeta^\lambda \partial_\lambda q^{31} + q^{3s}\partial_s \zeta^1 + q^{1s}\partial_s \zeta^3 - 2q^{31}\partial_s \zeta^s - \\
&\qquad - \left(\frac{h^{30}}{h^{00}} q^{1s} + \frac{h^{10}}{h^{00}} q^{3s} - 2\frac{h^{s0}}{h^{00}} q^{31}\right) \partial_s \zeta^0, \\
(B'\zeta)^3 &= -\zeta^\lambda \partial_\lambda q^{12} + q^{1s}\partial_s \zeta^2 + q^{2s}\partial_s \zeta^1 - 2q^{12}\partial_s \zeta^s - \\
&\qquad - \left(\frac{h^{10}}{h^{00}} q^{2s} + \frac{h^{20}}{h^{00}} q^{1s} - 2\frac{h^{s0}}{h^{00}} q^{12}\right) \partial_s \zeta^0.
\end{aligned}\right\} \tag{5.14}$$

Нетрудно убедиться, что

$$\det B' = \det B.$$

Действительно, можно перейти от одного оператора к другому треугольной заменой

$$\zeta^0 = \eta^0, \quad \zeta^i = \eta^i + (h^{i0}/h^{00})\,\eta^0 \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{5.15}$$

Подведем итоги. Отправляясь от явно унитарной гамильтоновой формулировки континуального интеграла, мы после формальных замен переменных интегрирования переписали этот интеграл в виде интеграла по классам эквивалентных полей при некоторой конкретной параметризации классов. Соответствующая инвариантная мера имеет вид (5.12). Этим самым оправдано лоренц-инвариантное выражение для континуального интеграла в гл. 3, которое представляет собой запись того же интеграла в другой параметризации классов. Этими соображениями мы и заканчиваем вывод ковариантных правил теории возмущений для квантования гравитационного поля.

Следующая задача, которая здесь возникает, значительно более трудна. Она состоит в последовательном проведении перенормировочной процедуры, основанной на инвариантной регуляризации. Трудности

обусловлены громоздкостью теории, а также тем, что с формальной точки зрения она не является перенормируемой. Мы надеемся, что соображения симметрии и общей ковариантности помогут в решении этой проблемы.

Ленинградское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова АН СССР

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. J. A. Wheeler, Geometrodynamics, N. Y., Academic Press, 1962.
2. C. W. Misner, Phys. Rev. **186**, 1319, 1328 (1969).
3. М. М. Марков, В. П. Фролов, ТМФ 3, 3 (1970); В. А. Березин, М. А. Марков, ibid., стр. 161.
4. W. Thirring, Ann. Phys. (N. Y.) **16**, 96 (1961).
5. L. D. Faddeev, Proc. of the Intern. Congress of Mathematicians, Nice, September 1970, v. 3, p. 35.
6. В. А. Фок, Теория пространства, времени и тяготения, М., Физматгиз, 1961.
7. B. S. De-Witt, Phys. Rev. Lett. **13**, 114 (1964).
8. И. Б. Хриплович, ЯФ 3, 575 (1966).
9. C. J. Isham, A. Salam, J. Strathdee, Phys. Rev. **D3**, 1805 (1971).
10. E. S. Fradkin, Nucl. Phys. **49**, 624 (1963); **76**, 588 (1966).
11. Г. В. Ефимов, ЖЭТФ **17**, 1917 (1963).
12. M. K. Volkov, Ann. Phys. (N. Y.) **49**, 202 (1968).
13. А. Т. Филиппов, Препринт ОИЯИ Р-1493, Дубна, 1964.
14. P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. **A246**, 333 (1958).
15. R. Arnowitt, S. Deser, C. W. Misner, Phys. Rev. **117**, 1595 (1960).
16. J. Schwinger, ibid. **130**, 1253; **132**, 1317 (1963).
17. P. Bergman, Rev. Mod. Phys. **33**, 510 (1961).
18. J. L. Anderson, ibid. **36**, 929 (1964).
19. Л. Д. Фаддеев, Гамильтонова форма теории тяготения, Тезисы 5-й Международной конференции по гравитации и относительности, Тбилиси, 1968.
20. S. N. Gupta, Proc. Roy. Soc. **A65**, 161, 608 (1952).
21. Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, Введение в теорию квантованных полей, М., Гостехиздат, 1957.
22. А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий, Квантовая электродинамика, М., «Наука», 1969.
23. R. P. Feynman, Acta Phys. Polon. **24**, 6 (1963).
24. B. S. De-Witt, Phys. Rev. **160**, 1113; **162**, 1195, 1239 (1967).
25. L. D. Faddeev, V. N. Popov, Phys. Lett. **B25**, 29 (1967); В. Н. Попов, Л. Д. Фаддеев, Теория возмущений для калибровочно-инвариантных полей. Препринт ИТФ АН УССР, Киев, 1967.
26. S. Mandelstam, Phys. Rev. **175**, 1580, 1604 (1968).
27. M. Weltman, Nucl. Phys. **B7**, 637 (1968); **B21**, 288 (1970).
28. E. S. Fradkin, I. V. Tyutin, Phys. Lett. **B30**, 562 (1969); Phys. Rev. **D2**, 2841 (1970).
29. И. Б. Хриплович, ЯФ **10**, 402 (1969).
30. D. G. Boulware, Ann. Phys. (N. Y.) **56**, 1 (1970).
31. G.'t Hooft, Nucl. Phys. **B33**, 173 (1971).
32. А. М. Алтухов, И. Б. Хриплович, ЯФ **11**, 902 (1970).
33. А. А. Славнов, Л. Д. Фаддеев, ТМФ 3, 18 (1970).
34. А. И. Вайнштейн, И. Б. Хриплович, ЯФ **13**, 198 (1971).
35. В. И. Захаров, Письма ЖЭТФ **12**, 447 (1970).
36. И. В. Тютин, Е. С. Фрадкин, ЯФ **13**, 433 (1971).
37. *а*) R. P. Feynman, Rev. Mod. Phys. **20**, 367 (1948); Phys. Rev. **84**, 108 (1951); *б*) Д. И. Блохинцев, Б. М. Барбашов, УФН **106**, 593 (1972).
38. H. Weyl, Phys. Rev. **77**, 699 (1950).
39. Ф. А. Березин, Метод вторичного квантования, М., «Наука», 1965.
40. H. Umezawa, Y. Takahashi, Progr. Theor. Phys. **9**, 14, 501 (1953).
41. T. D. Lee, C. N. Yang, Phys. Rev. **129**, 885 (1962).
42. Л. Д. Фаддеев, ТМФ **1**, 3 (1969).
43. Ж. Фавар, Курс локальной дифференциальной геометрии, М., ИЛ, 1960.
44. G. Garrod, Rev. Mod. Phys. **38**, 483 (1966).