

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

530.182

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ И ИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

Г. М. Заславский

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	395
2. Нелинейные бегущие волны	396
а) Фазовая плоскость (397). б) Опрокидывание (398). в) Критическая скорость (399). г) Уравнение Кортевега — де Вриза (400). д) Спектр нелинейных периодических волн (400).	
3. Методы теории возмущений	401
а) Вариационные принципы (402). б) Метод Уитэма (404). в) Метод Льюка — Мозера (404). г) Обобщенный лагранжьевский формализм (406). д) Гамильтоновский формализм (406).	
4. Внешнее резонансное возмущение	407
а) Изолированный резонанс (407). б) Стохастическая неустойчивость (408).	
5. Взаимодействие нелинейных волн	409
а) Параметр слабой связи (409). б) Уравнения, описывающие взаимодействие нелинейных волн (410). в) Взаимодействие двух волн (411). г) Взаимодействие трех волн (413).	
6. Нелинейные волны в неоднородной среде	415
7. Кинетика нелинейных волн	418
а) Случайные внешние силы (418). б) Нелинейные волны в случайных средах (419). в) Стохастическая неустойчивость (420). г) Кинетическое уравнение для ансамбля нелинейных волн (420).	
8. Заключение	422
Приложение. Тензор энергии-импульса нелинейного волнового поля	423
Цитированная литература	425

1. ВВЕДЕНИЕ

С нелинейными волновыми процессами связаны явления в самых разнообразных областях физики.[§] Достаточно упомянуть такие, как упругие свойства сред, поверхностные колебания жидкости, волновые (и турбулентные) движения плазмы, нелинейная оптика и электродинамика, некоторые задачи квантовой теории и др. Серьезные успехи в исследовании этой области за последние годы привели не только к пониманию многих нелинейных волновых явлений с единой точки зрения, но и к построению ряда общих методов их исследования. Значительная часть этих результатов нашла отражение в обзорах ¹⁻⁶.

Попытка провести классификацию задач, возникающих в области сильно нелинейных волновых процессов, вызвала бы ряд трудностей и неоднозначностей. Тем не менее можно указать две большие области «конденсации» интересов в этом направлении. Одна из них связана с анализом какого-либо конкретного типа нелинейного уравнения, к которому сводятся различные физические задачи. Примером такого уравнения является уравнение Кортевега — де Вриза, уравнение самофокусировки,

уравнение нелинейной струны. С каждым из таких уравнений оказываются сцепленными не только характерные свойства волновых процессов, но и методы исследования. Другой областью «конденсации» является анализ эволюции определенных типов нелинейных волновых процессов. Примером могут служить образование ударной волны, возникновение модуляций волны, фокусировка, распады и пр. В основе анализа такого рода лежит изучение поведения определенного класса нелинейных движений. Используемые при этом методы отказываются, если в результате эволюции движения рождается новый класс волновых процессов. Оба перечисленных подхода имеют область пересечения.

По-видимому, наиболее простой является следующая формальная классификация методов анализа нелинейных волновых процессов:

1) Построение точных решений. Простейшими из них являются нелинейные стационарные волны римановского типа. Существенный сдвиг в этом направлении произошел благодаря работе ^{7a}, в которой для определенного вида начальных условий было построено точное решение уравнения Кортевега — де Вриза. Далее Лэкс ^{7b} предложил регулярный метод сведения задачи Коши для ряда нелинейных волновых уравнений к линейной задаче на собственные значения.

2) Построение приближенных методов типа теории возмущений или метода ВКБ.

3) Определение границ применимости используемых методов. Этот вопрос, естественный во втором случае, возникает также и для точных решений, так как уравнения, которым они удовлетворяют, являются приближенными. Актуальность этого пункта связана со спецификой нелинейных задач и методов их анализа. В отличие от линейных задач, в нелинейном случае существующие методы теории обычно используют не общее решение, а одно или несколько частных решений. В связи с этим некоторые физические процессы могут выпасть из рассмотрения и, наоборот, некоторые физические свойства движения, вытекающие из приближенного анализа, в действительности могут отсутствовать. Хотя эти вопросы частично и обсуждаются в литературе, тем не менее в их понимании существует серьезный пробел. Обсуждение задач, возникающих в этом пункте, будет проведено частично в тексте обзора и в заключении (гл. 8).

Круг вопросов, которым посвящена настоящая работа, связан главным образом со вторым пунктом, т. е. с приближенными методами анализа эволюции нелинейных волновых процессов. В различных физических задачах эволюция волн возникает в результате нестационарности (и, в частности, неоднородности) среды, в которой распространяются волны, взаимодействия их со внешним полем и между собой и др. Для излагаемых ниже результатов существенны следующие два ограничения: рассматривается эволюция главным образом периодических нелинейных волн; нелинейность последних не является малой.

Некоторая часть обзора является сопутствующей основному материалу, и она изложена кратко лишь в том виде, в котором это необходимо для понимания дальнейшего. Сюда относится изложение некоторых свойств нелинейных стационарных волн и беглое упоминание приближенных методов, использующих лагранжевский формализм.

2. НЕЛИНЕЙНЫЕ БЕГУЩИЕ ВОЛНЫ

Здесь будут рассмотрены некоторые типичные нелинейные волновые уравнения и свойства их решений, имеющих вид бегущей волны

$$y = y(x - ut), \quad (2.1)$$

где скорость волны u является параметром задачи. При этом мы остано-

вмися лишь на тех свойствах волн, которые будут существенно использованы далее.

а) **Ф а з о в а я п л о с к о с т ь.** Если решение, отыскиваемое в форме (2.1), подставить в исходное уравнение в частных производных, то последнее становится обыкновенным дифференциальным уравнением. Дальнейшие свойства решения удобно анализировать на фазовой плоскости.

В качестве примера обратимся к нелинейному уравнению Клейна — Гордона

$$y_{tt} = c^2 y_{xx} + F(y), \quad F(y) \equiv dV(y)/dy. \quad (2.2)$$

Это уравнение является удобной моделью для исследования различных нелинейных явлений ^{8,9 *}). Уравнение близкого типа возникает также для электромагнитных колебаний в нелинейных средах ^{11 **}). Подстановка (2.1) в (2.2) дает

$$y'' + \frac{1}{c^2 - u^2} F(y) = 0, \quad (2.3)$$

где штрих означает дифференцирование по аргументу $\xi = x - ut$. Уравнение (2.3) эквивалентно уравнению движения частицы в поле с потенциалом

$$\frac{1}{c^2 - u^2} V(y),$$

и с помощью интеграла энергии

$$\frac{1}{2} y'^2 + \frac{1}{c^2 - u^2} V(y) = \text{const} = C \quad (2.4)$$

ее движение можно представить обычным способом на фазовой плоскости (y', y) .

Для более детальной характеристики решения типа (2.1) и его связи с траекториями на фазовой плоскости рассмотрим уравнение колебаний нелинейной струны

$$y_{tt} = c^2 (1 + \epsilon y_x^2) y_{xx} + \delta^2 y_{xxxx}. \quad (2.5)$$

Уравнение (2.5) возникло в связи с известной проблемой Ферми — Паста — Улама ¹²⁻¹⁴ и в некоторых задачах нелинейной акустики ^{15, 16}. Величина y в нем описывает смещение струны, а член y_{xxxx} учитывает дисперсию. Отыскивая решение в виде $y = y(x - ut)$, получаем

$$\delta^2 v'^2 + \frac{1}{2} \epsilon v^4 - \left(\frac{u^2}{c^2} - 1 \right) v^2 = C, \quad v = y'. \quad (2.6)$$

Траектории на фазовой плоскости изображены на рис. 1. При $C < 0$ имеем периодическую волну с $v > 0$ либо с $v < 0$. Случай $C = 0$ описывает уединенную волну (солитон), а при $C > 0$ периодическая волна является знакопеременной. Уравнение (2.6) интегрируется в эллиптиче-

^{*}) Отметим также попытки использования его в нелинейной квантовой теории поля ^{10а} и в теории эффекта Джозефсона ^{10б}.

^{**}) Уравнения типа (2.2) были получены также в релятивистской плазме А. Г. Литваком (сообщение на 1-й школе по нелинейным колебаниям и волнам, Горький, 1972 г.).

ских функциях, и, в частности, при $C < 0$, $v > 0$ получаем (рис. 2)

$$\left. \begin{aligned} v &= \gamma_2 \operatorname{dn} \left[\frac{\gamma_2}{\delta \sqrt{2}} (x - ut), \kappa \right], \\ \gamma_{1,2} &= \left[\frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{u^2}{c^2} - 1 \right) \mp \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\left(\frac{u^2}{c^2} - 1 \right)^2 - 2\varepsilon |C|} \right]^{1/2}, \\ \kappa &= \frac{1}{\gamma_2} \sqrt{\gamma_2^2 - \gamma_1^2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

Пространственный период решения (2.7) определяется соотношением

$$\lambda = 2\pi/k = (2\sqrt{2}/\gamma_2) \delta F(\pi/2, \kappa). \quad (2.8)$$

Соотношение (2.8) играет роль дисперсионного уравнения в нелинейном

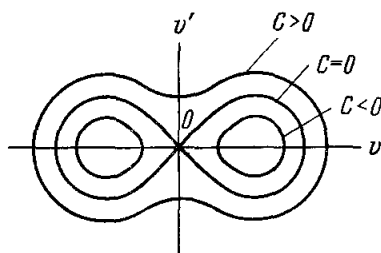


Рис. 1.

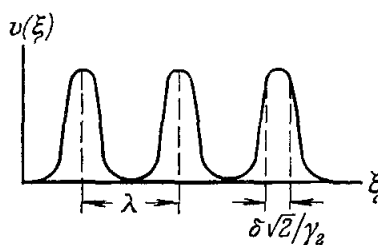


Рис. 2.

случае, которое удобно представить в виде

$$k = k(u, C). \quad (2.9)$$

Нижне оно будет обсуждаться подробнее. Здесь лишь заметим, что переход к линейному случаю осуществляется в пределе

$$u = \frac{\omega}{k}, \quad |C| - \frac{1}{2\varepsilon} \left(\frac{u^2}{c^2} - 1 \right) \rightarrow 0. \quad (2.9')$$

Через особую точку гиперболического типа (точка O на рис. 1) проходит траектория, соответствующая солитону.

б) О п р о к и д ы в а н и е. Другой вид особенности, связанный с потерей аналитичности решения, удобно рассмотреть на примере задачи о нелинейных плазменных колебаниях:

$$\left. \begin{aligned} \rho_t + (\rho v)_x &= 0, \\ v_t + v v_x &= \frac{e}{m} \varphi_x, \\ \varphi_{xx} &= 4\pi e (\rho - \rho_0), \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

где ρ , v — плотность и скорость электронов, ρ_0 — постоянная плотность неподвижных ионов. Как и ранее, для бегущих волн получаем¹⁷

$$\left. \begin{aligned} \rho(v - u) &= \text{const} = -u, \quad \sqrt{\Phi} \equiv u - v, \\ \frac{1}{2} \Phi'^2 - 2\omega_0^2 (2u \sqrt{\Phi} - \Phi) &= C, \quad \omega_0^2 = \frac{4\pi e^2 \rho_0}{m}, \\ \frac{u - \sqrt{\Phi}}{\varepsilon u} &\equiv \psi = -\cos(\pm k\xi - \varepsilon \sqrt{1 - \psi^2}), \quad \varepsilon = \sqrt{1 - \frac{|C|}{2\omega_0^2 u^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Фазовые траектории (при $C < 0$) и вид решения изображены соответственно на рис. 3, 4. При $C = 0$ траектория проходит через точку $\Phi = 0$, т. е. амплитуда скорости v достигает значения u и плотность ρ при этом обращается в бесконечность. Это явление называется опрокидыванием

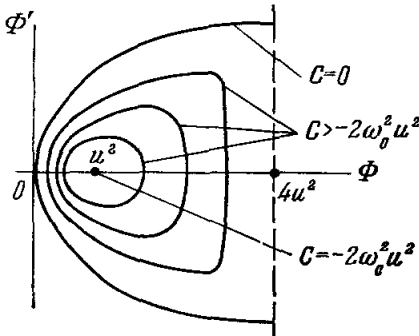


Рис. 3.

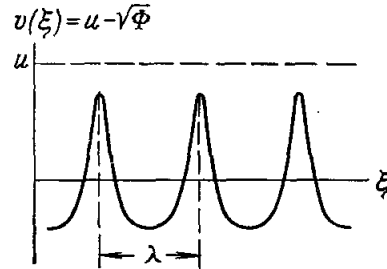


Рис. 4.

волны. Решение становится многозначным, а система (2.10) теряет смысл¹⁸. По мере приближения к опрокидыванию пики на рис. 4 заостряются.

Решение в виде уединенной волны в рассматриваемом примере отсутствует, а дисперсионное уравнение имеет простой вид¹⁷

$$k = \omega_0/u. \quad (2.12)$$

В отличие от (2.9), связь между k и u не зависит от C (т. е. от амплитуды). Это приводит к следующей интересной особенности плазменных колебаний: нелинейность колебаний проявляется только в их ангармоничности, в то время как частота их ($\omega = ku = \omega_0$) не зависит от амплитуды.

в) К р и т и ч е с к а я с к о р о с т ь. Обратимся наконец к случаю, который содержит одновременно оба типа особенностей, приводящих к существованию решения в виде солитона и к возможности опрокидывания. Удобно в качестве модели рассмотреть ионно-звуковые колебания плазмы^{1,2}:

$$\left. \begin{aligned} \rho_t &= -(\rho v)_x, \\ v_t + vv_x &= -\frac{e}{M} \Phi_x, \\ \Phi_{xx} &= -4\pi e \left[\rho - \rho_0 \exp\left(\frac{e\Phi}{T}\right) \right], \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

где M , ρ , v — масса, плотность и скорость ионов, T — температура электронов. Интеграл энергии системы (2.13) для решений вида (2.1) равен

$$v'^2(u-v)^2 = u^2 \left(1 - \frac{v}{u}\right) + \exp\left(uv - \frac{v^2}{2}\right) - (1 + u^2) - 2C, \quad (2.14)$$

где для удобства дебаевский радиус $r_d = \sqrt{T/4\pi e^2 \rho_0}$ и скорость ионного звука $c = \sqrt{T/M}$ положены равными единице. На рис. 5, 6 приведены два семейства фазовых траекторий: 1) при $u = \text{const}$ и переменном C

и 2) при $C = \text{const}$ и переменном u . В первом случае видно, что возможно решение в виде солитона при $C = 0$ и любом допустимом u . Из второго семейства следует, что при всех C , допускающих периодические решения,

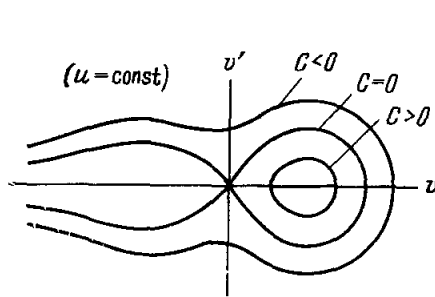


Рис. 5.

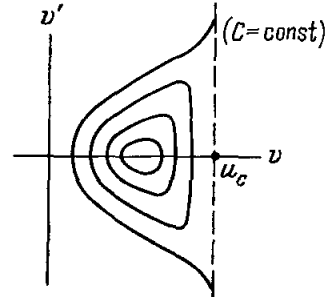


Рис. 6.

возникает опрокидывание при скорости волны, достигающей критического значения u_c ^{1, 2}. Величина u_c зависит от C , и при малых C $u_c \approx 1,6$ *).

г) У р а в н е н и е К о р т е в е г а — д е В р и з а. Важную роль в различных приложениях играет уравнение Кортевега — де Вриза

$$v_t + cv_x + vv_x + v_{xxx} = 0, \quad (2.15)$$

которое описывает волны, бегущие только в одном направлении. Различные задачи (волны на «мелкой воде», уравнения (2.5), (2.13) и др.) могут быть достаточно единообразно приведены к (2.15) (см., например, ²⁰). Обычно уравнение (2.15) выводится в приближении достаточно малой нелинейности и достаточно малой дисперсии. Однако следует подчеркнуть, что общим требованием при выводе (2.15) является

$$\alpha = (u/c) - 1 \ll 1, \quad (2.16)$$

где c — характерная скорость звука для данной задачи. Поскольку нелинейные бегущие волны в рассмотренных примерах возникают при $u > c$ и, с другой стороны, $u < u_c \approx c$, то неравенство (2.16) означает, что задача рассматривается вдали от области опрокидывания.

д) С п е к т р н е л и н е й н ы х п е р и о д и ч е с к и х в о л н. Периодические решения вида (2.1) могут быть разложены в ряд Фурье:

$$v(x - ut) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{ink(x - ut)}. \quad (2.17)$$

Зависимость a_n от n назовем спектром волны. В случае, близком к линейному, a_n быстро убывает с ростом n . Это позволяет ограничиться учетом первых нескольких членов в разложении (2.17).

Следующее свойство нелинейных периодических волн является очень важным для последующего анализа: существует такое число

$$N = N(k, C), \quad (2.18)$$

которое определяет характерное число мод в спектре (т. е. степень ангармонизма), и при $n > N$ сумма в (2.17) эффективно обрезается. Так, например, в случае нелинейной струны из разложения (2.7) в ряд следует

$$N = F(\pi/2, \kappa), \quad (2.19)$$

*) Аналогичная картина имеет место и для магнитно-звуковых нелинейных волн ^{2, 19}.

а из (2.8) видно, что N имеет порядок отношения длины волны к ширине горба (см. рис. 2). Подчеркнем, что из (2.19) в пределе (2.9') следует $N \sim 1$, а при $C \rightarrow 0$ $N \gg 1$ и спектр имеет следующую структуру (рис. 7):

$$\begin{aligned} a_n &\approx \text{const} \sim \gamma_2/N, & n < N, \\ a_n &\sim \exp(-n/N), & n > N. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Аналогичный вид имеет спектр в случае (2.15)²¹, причем

$$N = \sqrt{\alpha}/k. \quad (2.21)$$

Более сложная структура спектра проявляется в случае плазменных колебаний²² (рис. 8): при $n < N$ амплитуды a_n зависят степенным образом от n , а при $n > N$ экспоненциально убывают. Величина N равна²²

$$N = (1 - \varepsilon)^{-3/2}, \quad (2.22)$$

где ε определяет согласно (1.15) степень близости к опрокидыванию. Вблизи последнего $C \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 1$ и $N \rightarrow \infty$.

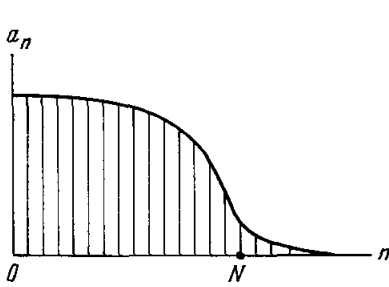


Рис. 7.

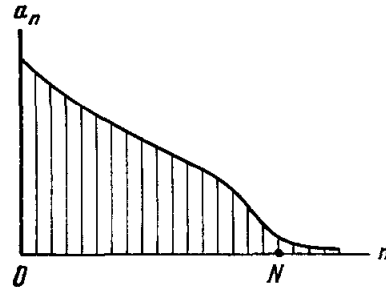


Рис. 8.

Наконец, рассмотрим на примере (2.15) еще одну особенность числа N . По аналогии с выражением для числа Рейнольдса составим его аналог для случая (2.15) при $N \gg 1$ ²³:

$$R \sim vv_x/v_{xxx} \sim \alpha/k^2 = N^2 \gg 1. \quad (2.23)$$

Таким образом, $N = R^{1/2}$ определяет константу сильной связи между гармониками в нелинейной периодической волне.

3. МЕТОДЫ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

В основе существующих приближенных методов рассмотрения лежат ряды, учитывающие как малость возмущений, так и медленность изменения определенных переменных. Многие черты этих методов в той или иной степени являются развитием метода Крылова — Боголюбова²⁴ в теории нелинейных колебаний*). Все эти методы являются асимптотическими. Это проще всего проиллюстрировать на примере уединенной волны $v(x - ut)$, возмущаемой малой силой $\varepsilon F(x, t)$ (рис. 9). Поскольку у солитона края экспоненциально убывают по координате, всегда существует область, в которой теория возмущений неприменима при сколь угодно малых ε . Этот же вывод следует, если обратиться к кривым спектра

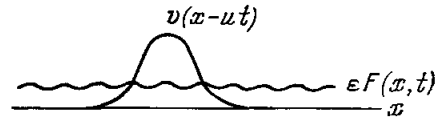


Рис. 9.

*) См. также²⁵.

(см. рис. 7, 8). Экспоненциальное убывание последних с ростом означает существование таких мод (начиная с некоторого $n_0 > N$), для которых $a_n \ll \varepsilon$. Поэтому можно сказать, что в основе существующих приближенных методов лежит некоторая операция усреднения, или обрезания, по спектру. Это обстоятельство особенно важно при рассмотрении сильно нелинейных волн (т. е. широких волновых пакетов с $N \gg 1$).

Прежде чем перейти к изложению теории возмущений, остановимся на вариационных принципах, используемых в ней.

а) В а р и а ц и о н н ы е п р и н ц и п ы. Основным является принцип Лагранжа, хотя найти лагранжиан не всегда удается (см. подробнее ⁴, ²⁶). Его можно записать в виде

$$\mathcal{L} = \int dx \int dt L, \quad \delta \mathcal{L} = 0, \quad (3.1)$$

где L — плотность лагранжиана. В случае сплошного спектра интеграл по x берется в бесконечных пределах. Если спектр дискретен, то

$$\mathcal{L} = \lim_{l \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2l} \int_{-l}^l dx \int dt L \right), \quad \delta \mathcal{L} = 0. \quad (3.2)$$

Аналогичное замечание относится и к интегрированию по t . Различие принципов (3.1), (3.2) можно проиллюстрировать случаями соответственно солитона (пределы по x бесконечны и $\int L dx$ — конечно) и нелинейной периодической волны (конечным оказывается только среднее значение $\int L dt$ на единицу длины). В последнем примере можно также записать

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\vartheta \int dt L, \quad (3.3)$$

где ϑ — фаза волны.

В частности, для уравнения (2.2)

$$L = \frac{1}{2} y_t^2 - \frac{1}{2} c^2 y_x^2 + V(y), \quad (3.4)$$

или для уравнения нелинейной струны (2.5)

$$L = \frac{1}{2} y_t^2 - \frac{1}{2} c^2 y_x^2 - \frac{1}{4} \varepsilon c^2 y_x^4 + \frac{1}{2} \delta^2 y_{xx}^2. \quad (3.4')$$

В отличие от лагранжевского принципа, гамильтоновский не является столь однозначным и зависит, в частности, от выбора канонически сопряженных переменных. Обратимся для простоты снова к уравнению Клейна — Гордона (2.2) с $F(y) = y^2$. Полагая

$$y(x, t) = \sum_n y_n(t) e^{in\pi x}, \quad (3.5)$$

перепишем (2.2) в виде

$$\frac{d^2 y_n}{dt^2} + n^2 k^2 c^2 y_n - \sum_{n_1, n_2} y_{n_1} y_{n_2} \delta(n - n_1 - n_2) = 0. \quad (3.6)$$

Гамильтонианом для (3.6) является

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_n \left(\frac{dy_n}{dt} \frac{dy_{-n}}{dt} + n^2 k^2 c^2 y_n y_{-n} \right) - \frac{1}{3} \sum_{n_1, n_2, n_3} y_{n_1} y_{n_2} y_{n_3} \delta(n_1 + n_2 + n_3), \quad \frac{d\mathcal{H}}{dt} = 0, \quad (3.7)$$

а канонические уравнения движения, эквивалентные (3.6), имеют вид

$$\frac{d}{dt} \frac{dy_n}{dt} = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y_{-n}}, \quad \frac{d}{dt} y_n = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (dy_{-n}/dt)}. \quad (3.8)$$

Переход к случаю непрерывного спектра производится согласно (3.1). Аналогично (3.5) — (3.8) можно записать

$$y(x, t) = \sum_m y_m(x) e^{im\omega t},$$

$$c^2 \frac{d^2 y_m}{dx^2} + m^2 \omega^2 y_m + \sum_{m_1, m_2} y_{m_1} y_{m_2} \delta(m - m_1 - m_2) = 0, \quad (3.9)$$

и канонические уравнения

$$\tilde{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \left(c^2 \frac{dy_m}{dx} \frac{dy_{-m}}{dx} + m^2 \omega^2 y_m y_{-m} \right) + \frac{1}{3} \sum_{m_1, m_2, m_3} y_{m_1} y_{m_2} y_{m_3} \delta(m_1 + m_2 + m_3), \quad \frac{d\tilde{\mathcal{H}}}{dx} = 0, \quad (3.10)$$

$$\frac{d}{dx} \frac{dy_m}{dx} = - \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial y_{-m}}, \quad \frac{d}{dx} y_m = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial (dy_{-m}/dx)}.$$

Хотя варьирование $\mathcal{H}$ и $\tilde{\mathcal{H}}$ приводит к одним и тем же уравнениям движения (2.2), однако величины $\mathcal{H}$ и $\tilde{\mathcal{H}}$ (а следовательно, и интегралы движения) различаются.

Изложенные примеры поясняют следующую возможную классификацию задач в зависимости от вида граничных условий *):

1) Отыскание решений периодических по координате, т. е.

$$y(x, t) = y(x + 2\pi/k, t). \quad (3.11)$$

В этом случае естественно пользоваться принципом (3.7), (3.8). Характер спектра по x не меняется, а в результате возмущения эволюционируют во времени y_n и $\mathcal{H}$. Условия типа (3.11) возникают, например, в различных кольцевых физических системах (циклические ускорители, тороидальные магнитные ловушки и др.).

2) Отыскание решений, периодических во времени:

$$y(x, t) = y(x, t + 2\pi/\omega). \quad (3.12)$$

Вариационный принцип в этом случае имеет вид (3.10). Неизменным в результате возмущения является характер спектра по t , а эволюционирует в пространстве профиль волны. Эту задачу, по аналогии с квантовой механикой, естественно назвать задачей об определении стационарных состояний. С подобной ситуацией мы сталкиваемся, например, в задачах о рассеянии и в задачах управления процессами.

3) Этот случай характеризуется отсутствием правил запрета типа (3.11), (3.12). Подобная ситуация может осуществляться в неограниченной

*) См. также приложение.

среде, например, при возмущении ветром поверхности волн в море. Гамильтоновский принцип в этом случае для рассмотренных примеров не известен. Однако лагранжевым принципом в форме (3.1) можно пользоваться.

Отметим в заключение существование определенных трудностей, возникающих при попытках рассмотреть взаимодействие волновых процессов, один из которых имеет сплошной спектр, а другой — дискретный (например, взаимодействие солитона с периодической волной). Частично это уже видно из физического и формального различия выражений (3.1) и (3.2).

б) М е т о д У и т з м а ^{27, 28}. Основные черты метода Уитэма можно представить следующим образом. Пусть, например, $y(x - ut)$ есть точное решение невозмущенной задачи в виде нелинейной волны. Это решение можно записать также в виде

$$y = y(\vartheta, A), \quad (3.13)$$

где фаза ϑ удовлетворяет соотношениям

$$\vartheta_t = -\omega, \quad \vartheta_x = k, \quad (3.14)$$

а величина A определяет, например, амплитуду волны. Пусть теперь какие-либо параметры задачи вследствие возмущения зависят адиабатически (т. е. медленно по сравнению с k^{-1} , ω^{-1}) от x и t . Тогда лагранжиан (3.3), усредненный по фазе, можно вычислить приближенно, не обращая внимания на изменение медленных параметров. Это дает

$$\overline{\mathcal{L}} = \overline{\mathcal{L}}(k, \omega, A), \quad (3.15)$$

причем k , ω , A являются уже функциями, медленно меняющимися во времени и пространстве. Следующий шаг заключается в варьировании

$$\delta \int dx dt \overline{\mathcal{L}} = 0$$

с учетом (3.14), (3.15). Это приводит сразу к уравнениям

$$\begin{aligned} \partial \overline{\mathcal{L}} / \partial t - \partial \overline{\mathcal{L}} / \partial x &= 0, \quad \overline{\mathcal{L}}_A = 0, \\ \overline{\mathcal{L}}_\omega &\equiv -\partial \overline{\mathcal{L}} / \partial \vartheta_t, \quad \overline{\mathcal{L}}_k \equiv \partial \overline{\mathcal{L}} / \partial \vartheta_x. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Уравнения (3.16) описывают медленную эволюцию волнового пакета в пространстве и времени. С их помощью было рассмотрено большое число различных физических задач ^{5а *}). Основные недостатки излагаемого метода были отмечены самим Уитэмом ⁴: метод не дает возможности построить следующие приближения.

в) М е т о д Л ь ю к а — М о з е р а ^{8, 9}. Метод был изложен в работе ⁸, затем усовершенствован и обоснован Мозером ⁹ и в настоящее время является, по-видимому, наиболее строгим. Следуя Мозеру, решение ищется в виде ряда

$$y = y^{(0)}(\vartheta, A) + \varepsilon y^{(1)}(\vartheta, \dots) + \varepsilon^2 y^{(2)}(\vartheta, \dots) + \dots \quad (3.17)$$

Здесь A — действие, определенное обычным способом для уравнения (2.3); ε — малый параметр, характеризующий «медленное» время и координату; многоточия в скобках означают зависимость от всех остальных «медленных» переменных (A , εt , εx , ϑ_x , ϑ_t и т. д.) ^{**}).

^{*}) Близкий метод усреднения без использования лагранжевого формализма развивался в ²⁹.

^{**}) Аналогичные ряды для различных случаев и ситуаций изучались в ³⁰⁻³³.

Подстановка (3.17) в (2.5) дает в нулевом порядке

$$\vartheta_t^2 - c^2 \vartheta_x^2 = -F(y^{(0)})/y_{\vartheta\vartheta}^{(0)}$$

или, с учетом (3.14), (2.1),

$$\vartheta_t^2 - c^2 \vartheta_x^2 = \omega^2 - k^2 c^2 = k^2 [u^2(A) - c^2] \equiv \tilde{\omega}^2(A). \quad (3.18)$$

Подчеркнем, что в этом приближении решение как функция (A, ϑ) имеет тот же вид, что и в отсутствие возмущения. Именно благодаря этому обстоятельству теория возмущений оправдывает качественные физические соображения, лежащие в ее основе. Нелинейная волна, будучи точным решением, не является общим. Однако малые возмущения приводят к слабой деформации точного решения, и это избавляет нас от необходимости использовать «полный набор» решений данной задачи *).

В следующем приближении условие ортогональности поправки $y^{(1)}$ к $y_{\vartheta}^{(0)}$ приводит к уравнению ⁸

$$(\vartheta_t A / \tilde{\omega}(A))_t - (\vartheta_x A / \tilde{\omega}(A))_x = 0. \quad (3.19)$$

Мозером ⁹ построена общая схема последовательных приближений и вывода условий ортогональности типа (3.19) во всех порядках по ϵ . Нетрудно убедиться в том, что уравнение (3.19) совпадает с (3.16). Система уравнений первого приближения (3.18), (3.19) аналогична системе уравнений в переменных действие — угол для обычных динамических систем. Это утверждение, очевидное для фазового уравнения (3.18), будет обосновано в некотором частном случае для (3.19) ниже, в п. д).

Уравнениям (3.16), (3.19) удобно придать следующее наглядное физическое содержание. Нулевое приближение (решение типа (2.1)) описывает волновой пакет, групповая скорость которого равна фазовой. Условие того, чтобы это свойство сохранялось и в первом приближении, сразу приводит к (3.16). Действительно,

$$\left(\frac{\partial \vartheta_t}{\partial \vartheta_x} \right)_{\bar{\mathcal{E}}=\text{const}} = - \left(\frac{\partial \omega}{\partial k} \right)_{\bar{\mathcal{E}}=\text{const}} = -u(\bar{\mathcal{H}}) = - \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_{\vartheta=\text{const}}, \quad (3.20)$$

где $\bar{\mathcal{H}}$ — средняя по периоду энергия волны. Учитывая, что

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial k} \right)_{\bar{\mathcal{E}}=\text{const}} = - \frac{\partial \bar{\mathcal{E}}}{\partial k} / \frac{\partial \bar{\mathcal{E}}}{\partial \omega},$$

получаем из (3.20)

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{E}}}{\partial \omega} dx + \frac{\partial \bar{\mathcal{E}}}{\partial k} dt = 0. \quad (3.21)$$

Выражение (3.21) означает, что можно ввести такую функцию Q , для которой

$$Q_x = \bar{\mathcal{H}}_{\omega}, \quad Q_t = \bar{\mathcal{H}}_k.$$

Отсюда следует

$$\partial \bar{\mathcal{H}}_{\omega} / \partial t - \partial \bar{\mathcal{H}}_k / \partial x = 0, \quad (3.22)$$

что эквивалентно (3.16), так как в рассматриваемом случае $\partial \bar{\mathcal{H}} / \partial \omega = \partial \bar{\mathcal{L}} / \partial \omega$, $\partial \bar{\mathcal{H}} / \partial k = \partial \bar{\mathcal{L}} / \partial k$.

В заключение этого раздела следует обратить внимание на аналогию изложенного метода и метода получения гидродинамических уравнений из кинетического, предложенного Боголюбовым ^{34a}.

Недавно Крускал и Миура развили более детальный метод типа ВКБ-приближения для уравнения Кортевега — де Вриза ^{34b}.

*) Строгих критериев, определяющих область применимости такого подхода, в настоящее время не существует.

г) **О б о б щ е н н ы й л а г р а н ж е в с к и й ф о р м а л и з м.** Лагранжевская формулировка последовательных приближений была проведена в работах ^{33, 35a}. В основе ее лежит вариационный принцип

$$\int dx \int dt \delta (L + W) = 0, \quad (3.23)$$

где W — мощность, связанная с наличием внешнего возмущения, действующего на волновой пакет (в частности, W может содержать диссипативные члены). Если в (3.23) подставить ряд типа (3.17), то варьирование дает в первом порядке

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \omega} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial k} = \frac{\partial \bar{W}}{\partial \vartheta}, \quad \bar{W} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\vartheta W, \quad (3.24)$$

что совпадает с (3.16) при $W = 0$.

Асимптотические ряды, использовавшиеся в работах ^{33, 35a}, в дальнейшем обобщались и обосновывались в работах ^{32, 35b}. С формальной стороны они охватывают довольно широкий круг приложений и, в частности, усреднение по произвольным нелинейным стационарным решениям. Однако имеются трудности с определением условий, при которых использование формальных рядов правильно (или полностью) отражает физическую сторону задачи.

д) **Г а м и л ь т о н о в с к и й ф о р м а л и з м** ^{21, 23}. Для простоты рассмотрим снова уравнение (2.5) с правой частью, учитывающей внешние силы:

$$y_{tt} = c^2 y_{xx} + dV(y)/dy + \varepsilon \Phi(x, t). \quad (3.25)$$

Будем искать решение, удовлетворяющее граничным условиям (3.11), и воспользуемся гамильтонианом

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \varepsilon \mathcal{H}_1, \quad (3.26)$$

где $\mathcal{H}_0$ совпадает с (3.7), а

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 &= -\lim_{l \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2l} \int_{-l}^l y \Phi dx \right) = -\sum_n y_n \Phi_n, \\ \Phi(x, t) &= \sum_n \Phi_n(t) e^{inkx}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Прямое дифференцированием легко получить

$$\frac{d\mathcal{H}_0}{dt} = \sum_n \left(\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial y_n} \dot{y}_n + \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial \dot{y}_n} \ddot{y}_n \right) = \sum_n \dot{y}_n \Phi_n. \quad (3.28)$$

В нулевом приближении ($\varepsilon = 0$)

$$\dot{\mathcal{H}}_0 = 0, \quad \dot{\vartheta} = \omega(\mathcal{H}_0) = ku(\mathcal{H}_0). \quad (3.29)$$

Согласно (3.14) и (2.1) в нулевом приближении

$$y_n(t) = a_n e^{-in\vartheta} = a_n e^{-inku}, \quad a_n = a_n(\mathcal{H}_0). \quad (3.30)$$

Для получения следующего приближения достаточно в правую часть (3.28) подставить (3.30):

$$d\mathcal{H}_0/dt = -\varepsilon \omega(\mathcal{H}_0) \partial \mathcal{H}_1 / \partial \vartheta. \quad (3.30')$$

Введем, как в обычной динамике, переменную I , равную действию волны:

$$d\mathcal{H}/dI = \omega(\mathcal{H}_0). \quad (3.31)$$

Это сразу дает вместо (3.30') уравнение

$$\dot{I} = -\varepsilon \partial \mathcal{H}_1 / \partial \theta, \quad (3.32)$$

имеющее каноническую форму. Переменные (I, θ) являются канонически сопряженными. Аналогично может быть записано и уравнение для θ :

$$\dot{\theta} = \omega(I) + \varepsilon \partial \mathcal{H}_1 / \partial I. \quad (3.30)$$

Отметим связь между уравнениями (3.32) и (3.24). При этом член с $\partial \mathcal{L} / \partial k$ в (3.24) равен нулю, так как при граничных условиях (3.11) k не изменяется. Для канонически сопряженных величин I, θ имеет место тождество

$$I = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{\theta} = \partial \mathcal{L} / \partial \omega,$$

что приводит к совпадению (3.24) и (3.32).

Далее изложение различных конкретных задач будет проведено главным образом с помощью гамильтоновских уравнений.

4. ВНЕШНЕЕ РЕЗОНАНСНОЕ ВОЗМУЩЕНИЕ

а) **Изолированный резонанс.** Канонические уравнения движения (3.32), (3.33), полученные в первом приближении теории возмущений по ε , носят общий характер, так как вид уравнения (3.25) нигде не использовался*). В этом приближении нелинейную волну по-прежнему можно рассматривать как нелинейный осциллятор с переменными (I, θ) , находящийся под действием возмущения гамильтониана $\mathcal{H}_1(I, \theta, t)$ ²¹. Рассмотрим наиболее простой случай, когда внешняя сила имеет вид

$$\Phi(x, t) = \Phi_m \cos(mkx - vt + \varphi) \quad (4.1)$$

и возможен резонанс

$$m\omega(I) \approx v \quad (4.2)$$

между возмущением и m -й гармоникой нелинейной волны. Систему (3.32), (3.33) можно приближенно переписать в виде **)

$$\dot{I} \approx \psi(I) \cos \theta, \quad (4.3)$$

$$\dot{\theta} \approx m\omega(I) - v + O(\varepsilon),$$

где

$$\psi = 2\varepsilon |a_m(I)| m\Phi_m. \quad (4.4)$$

Если условие резонанса (4.2) выполняется точно при $I = I_0$, то вблизи резонанса имеют место фазовые колебания, описываемые следующим приближенным интегралом движения:

$$m[d\omega(I)/dI](I - I_0)^2 - 2\psi(I_0) \sin \theta = \text{const}. \quad (4.5)$$

Амплитуда этих колебаний имеет порядок

$$\delta I \sim [2\psi/m\omega'(I)]^{1/2} \propto \sqrt{\varepsilon}. \quad (4.6)$$

*) Более общее выражение можно получить для правой части (3.28) в тех случаях, когда сила Φ зависит также от y .

**) См., например, ³⁶.

Таким образом, амплитуда волны модулируется во времени (см. рис. 10, где приведена эволюция во времени одного горба нелинейной волны). В линейном приближении по ϵ , как известно, вследствие резонанса возникает неустойчивость, и явление модуляции профиля волнового пакета было обнаружено для гравитационных волн на воде ^{37, 38} и в ряде других случаев ³⁹. Выражение (4.5) дает более полную информацию, описывая

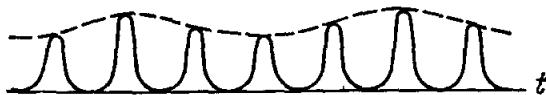


Рис. 10.

насыщение неустойчивости. При этом одновременно с модуляцией амплитуды возникает также модуляция скорости волны с амплитудой

$$\begin{aligned} \delta u(I) &= (1/k) \delta \omega(I) = \\ &= (1/k) (d\omega(I)/dI) \delta I. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Интересно отметить, что ширина резонанса (4.6), (4.7) существенно определяется пространственной зависимостью внешнего возмущения. Это проявляется в зависимости δI от a_m , где номер m определяется пространственным периодом внешней силы. При $m > N$ величины a_m становятся экспоненциально малыми (см. п. д) гл. 2) и соответственно резко уменьшается ширина резонанса. Такие возмущения имеют длину волны меньше, чем ширина горба невозмущенной волны.

Более строгое исследование изолированного резонанса, основанное на построении и анализе асимптотических рядов, было проведено в работе ³⁰.

В тех случаях, когда внешнее возмущение содержит более, чем одну гармонику, которые могут быть в резонансе с модами волны, положение резко усложняется. Если ширины каждого резонанса в отдельности перекрываются, то возникает стохастическая неустойчивость, которая будет нами обсуждаться в следующем пункте. Однако если перекрытие резонансов отсутствует, то вопрос о поведении системы остается открытым. Возникающие трудности проще понять, если обратиться к более простой системе: нелинейный осциллятор под действием внешней силы ^{36, 40}. Эффективно у такой динамической системы полторы степени свободы, и для ее описания может быть использована теорема об устойчивости Колмогорова — Арнольда — Мозера. Если резонансы между осциллятором и гармониками внешней силы не перекрываются, то движение осциллятора в окрестности какого-либо резонанса является устойчивым. Мы, однако, не можем сформулировать аналогичный результат для системы, в которой нелинейная волна возмущается внешней силой. Это связано с тем, что число степеней свободы нелинейной волны, вообще говоря, бесконечно.

б) **Стохастическая неустойчивость.** В общем случае произвольной зависимости внешнего возмущения от x, t решение дать невозможно. Однако некоторый предельный случай, соответствующий очень сильной, стохастической, неустойчивости ³⁶, можно проанализировать. Различные случаи возникновения такой неустойчивости нелинейной волны изучались в работах ^{21, 30}. Здесь мы ограничимся качественным рассмотрением одного простого случая.

Предположим, что спектр $\Phi(x, t)$ по-прежнему характеризуется одной частотой ν , однако является широким по k , т. е.

$$\Phi(x, t) = \sum_n \Phi_n \cos(nkx - \nu t). \quad (4.8)$$

Пусть по-прежнему выполняется условие резонанса типа (4.2):

$$m\omega(I_m) = \nu, \quad (4.9)$$

где I_m — значение действия нелинейной волны, при котором достигается точный резонанс между возмущением и m -й гармоникой волны. Ближайший к m -му резонанс определяется из условия

$$(m+1)\omega(I_{m+1}) = \nu. \quad (4.10)$$

Из соотношений (4.9), (4.10) можно определить расстояние между ближайшими резонансами:

$$\Omega = \omega(I_m) - \omega(I_{m+1}) = \nu/m(m+1) \approx \nu/m^2 = \omega^2/\nu. \quad (4.11)$$

С другой стороны, каждый изолированный резонанс имеет согласно (4.6), (4.7) некоторую ширину $\delta\omega$. При условии

$$K \equiv (\delta\omega/\Omega)^2 \ll 1 \quad (4.12)$$

имеет место устойчивость и приближение одного резонанса справедливо. Наоборот, в случае

$$K = (\delta\omega/\Omega)^2 \gg 1 \quad (4.13)$$

волна долго не может выйти из резонанса со внешней силой и развивается так называемая стохастическая неустойчивость^{36, 40}, при которой фаза волны θ случайно меняется со временем, а сама волна ведет себя как броуновская частица²¹.

Для эффективного развития стохастической неустойчивости необходимо, очевидно, не только выполнение условий типа (4.13), но и существенное отличие от нуля гармоник $a_{\max}$, Φ_m в формулах (4.4), (3.27). Это определяет условие «насыщения» стохастической неустойчивости. Действительно, пусть $I_{\max}$ есть максимальное значение действия, которое волна может приобрести в результате неустойчивости. Из условия

$$M\omega(I_{\max}) = \nu$$

и из (4.4) следует, что $M_{\max} = \min(N, N_\Phi)$, где N_Φ — характерное число гармоник в спектре возмущения.

Интересно отметить, что описанный механизм неустойчивости, возможно, реализуется при разгоне волн на поверхности моря ветром⁴¹. На фоне основной периодической компоненты профиля волны бежит случайно модулированная рябь, за счет которой и осуществляется ускорение волн. С увеличением амплитуды волны растет N . Ограничения на развитие неустойчивости связаны либо с N_Φ , либо с критической скоростью (см. п. в) гл. 2), после достижения которой происходит опрокидывание волны.

5. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН

а) Параметр слабой связи. Вопросы, связанные с взаимодействием нелинейных волн, относятся не только к одним из самых интересных в теории, но и к очень трудным. Как видно было из гл. 3, при условиях достаточно слабого возмущения нелинейную волну можно рассматривать как некоторую квазичастицу, что означает достаточно высокую устойчивость волнового пакета как целого относительно распыливания из-за возмущения. Ниже будет видно, что подобную концепцию можно провести в теории взаимодействия нелинейных волн. Поскольку взаимодействие обычно связано с резонансами между какими-то модами, то можно указать простой пример условия слабости взаимодействия между нелинейными волнами:

$$\varepsilon = M/N \ll 1, \quad (5.1)$$

где M — характерное число мод пакета, участвующих одновременно в резонансных взаимодействиях с другими пакетами, N — характерное число мод в спектре волновых пакетов.

Особенность введенного параметра малости в том, что он, вообще говоря, может не зависеть от амплитуды волн. Более того, неравенство (5.1) может осуществиться лишь при $N \gg 1$, т. е. для сильно нелинейных волн. В соответствии с замечаниями п. д) гл. 2 можно сказать, что ϵ является малым параметром, пропорциональным обратной величине константы сильной связи.

б) Уравнения, описывающие взаимодействие нелинейных волн. Анализ взаимодействия волн можно провести в общем виде, однако удобнее обратиться к модели ионно-звуковых колебаний (п. б) гл. 3) в не одномерном случае. В приближении, когда $kr_d \ll 1$ и справедливо неравенство (2.16), воспользуемся системой уравнений, полученной в ^{42, 43}:

$$\begin{aligned} \rho_t + \nabla(\rho \nabla \Phi) &= 0, \\ \Phi_t + \rho + \Delta \rho + \frac{1}{2}(\nabla \Phi)^2 - \frac{1}{2}\rho^2 &= 0, \end{aligned} \quad (5.2)$$

где Φ — потенциал скорости ионов и для удобства положено $\rho_0 = c = r_d = 1$ (здесь обозначения те же, что и в п. в) гл. 2 *). Разложением в ряд Фурье

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \sum_{\mathbf{q}} \sqrt{\frac{q}{\omega_q}} [a(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} + a^*(\mathbf{q}) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}], \\ \Phi &= -i \sum_{\mathbf{q}} \frac{1}{q} \sqrt{\frac{\omega_q}{q}} [a(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} - a^*(\mathbf{q}) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}], \\ \omega_q^2 &= q^2(1 - q^2), \quad \omega_q' \approx q \left(1 - \frac{1}{2}q^2\right) \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

система (4.2) приводится к одному уравнению:

$$\begin{aligned} \dot{a}(\mathbf{q}) + i\omega_q a(\mathbf{q}) + \frac{i}{4}q \sum_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2} V_{\mathbf{q}\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2} [a(\mathbf{q}_1) a(\mathbf{q}_2) \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) + \\ + 2a(\mathbf{q}_1) a^*(\mathbf{q}_2) \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) + a^*(\mathbf{q}_1) a^*(\mathbf{q}_2) \delta(\mathbf{q} + \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2)] = 0, \quad (5.4) \\ V_{\mathbf{q}\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2} = (q\mathbf{q}_1/q\mathbf{q}_2) + (q\mathbf{q}_2/q\mathbf{q}_1) + (q_1\mathbf{q}_2/q_1q_2) - 1. \end{aligned}$$

В одномерном случае для волны, распространяющейся в одном направлении, $V_{\mathbf{q}\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2} = 2$ и уравнение (5.4) принимает [в пространственных переменных вид уравнения Кортевега — де Вриза:

$$\rho_t + \rho r + \rho \rho_r + (1/2)\rho_{rrr} = 0, \quad (5.5)$$

где r — координата в направлении $\mathbf{q}$.

Гамильтониан для уравнений (5.4) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \sum_{\mathbf{q}} \left(1 - \frac{1}{2}q^2\right) a(\mathbf{q}) a^*(\mathbf{q}) + \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3} V_{\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3} \left[\frac{1}{3!} \overline{a(\mathbf{q}_1) a(\mathbf{q}_2) a(\mathbf{q}_3)} \delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3) + \right. \\ &\quad \left. + a(\mathbf{q}_1) a(\mathbf{q}_2) a^*(\mathbf{q}_3) \delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3) + \text{к. с.} \right], \quad (5.6) \end{aligned}$$

*) Эти уравнения совпадают также с уравнениями Буссинеска для колебаний поверхности жидкости.

а (4.4) можно записать в канонической форме

$$\dot{a}(\mathbf{q}) = -iq \partial \mathcal{H} / \partial a^*(\mathbf{q}). \quad (5.7)$$

При рассмотрении взаимодействия волн будем исходить из того, что решение в нулевом приближении представляется суперпозицией

$$\rho(\mathbf{r}, t) \approx \sum_s \rho(\mathbf{r}_s - \mathbf{u}_s t), \quad (5.8)$$

где $\mathbf{r}_s \parallel \mathbf{u}_s$. Путем перегруппировки членов в (4.6) представим $\mathcal{H}$ в виде

$$\mathcal{H} = \sum_s \mathcal{H}_s + \mathcal{H}_I, \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_s = \sum_{\mathbf{q}_s} \left(1 - \frac{1}{2} q_s^2 \right) a(\mathbf{q}_s) a^*(\mathbf{q}_s) + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}_s, \mathbf{q}'_s, \mathbf{q}''_s} \left[\frac{1}{3} a(\mathbf{q}_s) \times \right. \\ \left. \times a(\mathbf{q}'_s) a(\mathbf{q}''_s) \delta(\mathbf{q}_s + \mathbf{q}'_s + \mathbf{q}''_s) + a(\mathbf{q}_s) a(\mathbf{q}'_s) a^*(\mathbf{q}''_s) \delta(\mathbf{q}_s + \mathbf{q}'_s - \mathbf{q}''_s) \right] + \text{к.с.} \Big], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_I = \sum_{s_1 \neq s_2} a(q_{s_1} = 0) a(q_{s_2} = 0) + \\ + \frac{1}{4} \sum'_{s_1, s_2, s_3} \sum_{\mathbf{q}_{s_1}, \mathbf{q}_{s_2}, \mathbf{q}_{s_3}} V_{\mathbf{q}_{s_1} \mathbf{q}_{s_2} \mathbf{q}_{s_3}} \left[\frac{1}{3} a(\mathbf{q}_{s_1}) a(\mathbf{q}_{s_2}) a(\mathbf{q}_{s_3}) \delta(\mathbf{q}_{s_1} + \mathbf{q}_{s_2} + \mathbf{q}_{s_3}) + \right. \\ \left. + a(\mathbf{q}_{s_1}) a(\mathbf{q}_{s_2}) a^*(\mathbf{q}_{s_3}) \delta(\mathbf{q}_{s_1} + \mathbf{q}_{s_2} - \mathbf{q}_{s_3}) + \text{к.с.} \right]. \end{aligned}$$

Здесь различные индексы s указывают на различные одномерные нелинейные волны; $\mathbf{q}_s, \mathbf{q}'_s, \mathbf{q}''_s$ — относятся к одной и той же волне; штрих в сумме означает исключение члена с $s_1 = s_2 = s_3$, направление вектора $\mathbf{q}_s$ совпадает с направлением скорости $\mathbf{u}_s$. Величина $\mathcal{H}_I$ описывает взаимодействие нелинейных волн. Естественно, что она должна быть достаточно малой, чтобы представление (5.8) и, вообще говоря, понятие нелинейной волны имели смысл.

в) Взаимодействие двух волн. Проследим, как возникает малый параметр при взаимодействии двух волн, направления движения которых составляют не слишком малый угол. Прежде всего заметим, что первый член в $\mathcal{H}_I$ не зависит от времени и всегда может быть исключен соответствующей перенормировкой гамильтониана. Далее, δ -функции в $\mathcal{H}_I$ отбирают члены с

$$q_1 = q'_1, \quad q_2 = 0 \text{ и } q_1 = 0, \quad q_2 = q'_2. \quad (5.10)$$

Согласно (4.4)

$$V_{q_1, q_1, 0} = V_{q_2, q_2, 0} = 2 \cos(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \equiv 2 \cos \gamma,$$

и для $\mathcal{H}_I$ получается выражение

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_I \approx 2 \frac{\cos \gamma}{|\sin \gamma|} (a(q_2 = 0) \sum_{q_1} |a(q_1)|^2 + \\ + a(q_1 = 0) \sum_{q_2} |a(q_2)|^2) \approx 2 \frac{\cos \gamma}{|\sin \gamma|} \frac{\alpha_1 \alpha_2}{N_1 N_2} (\alpha_1 + \alpha_2), \quad (5.11) \end{aligned}$$

где учтены соотношения (2.20) и (2.21). Уже отсюда видно, что правила отбора (5.10) уменьшают число членов в $\mathcal{H}_I$ по сравнению с нелинейным членом в $\mathcal{H}_s$ приблизительно в N_s раз. Действительно, оценка последнего

дает $\mathcal{H}_{1,2} \sim \alpha_{1,2}^3 / N_{1,2}$. Таким образом, малым параметром взаимодействия является

$$\varepsilon = \operatorname{ctg} \gamma / N \ll 1. \quad (5.12)$$

Его физический смысл нетрудно понять из рис. 11, где изображена плоскость, в которой движутся волны (вид сверху), и гребни волны заштрихованы. При больших N область пересечения гребней относительно мала, что и приводит к ослаблению взаимодействия волн. Этот результат был получен в ⁴⁴. С помощью скобок Пуассона

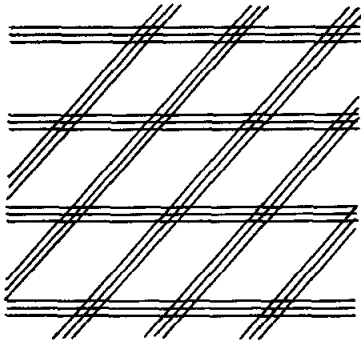


Рис. 11.

$$\frac{dP[a, a^*]}{dt} = -i \sum_s q_s \left(\frac{\partial P}{\partial a(q_s)} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial a^*(q_s)} - \frac{\partial P}{\partial a^*(q_s)} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial a(q_s)} \right) \quad (5.13)$$

нетрудно получить

$$\dot{\mathcal{H}}_1 = \dot{\mathcal{H}}_2 = 0, \quad (5.14)$$

а из уравнений движения

$$\begin{aligned} \dot{a}(q_1) + iq_1 u_1 a(q_1) + \\ + iq_1 \left(\frac{V_{q_1 q_1 0}}{|\sin \gamma|} \right) a(q_2=0) a(q_1) = 0 \end{aligned} \quad (5.15)$$

следует, что в результате взаимодействия происходит сдвиг скорости волны:

$$\Delta u_1 = 2 \left(\frac{\cos \gamma}{|\sin \gamma|} \right) a(q_2=0) \approx 2 \left(\frac{\cos \gamma}{|\sin \gamma|} \right) \frac{\alpha_2}{N_2} \quad (5.16)$$

и, аналогично,

$$\Delta u_2 = 2 \left(\frac{\cos \gamma}{|\sin \gamma|} \right) a(q_1=0) \approx 2 \left(\frac{\cos \gamma}{|\sin \gamma|} \right) \frac{\alpha_1}{N_1}. \quad (5.17)$$

Условие малости сдвигов скорости $\Delta u_i \ll \alpha_i$ эквивалентно (5.12).

Полученный результат является также следствием того, что область пересечения двух периодических волн на рис. 11, с которой связано взаимодействие, не зависит от времени, что приводит к простой перенормировке скоростей волн (в случае трех волн это, естественно, не так).

Переход к одномерному случаю ($\gamma \rightarrow 0$) в (5.11) и далее невозможен. Это связано с двумерной нормировкой энергии в (5.9)*. Рассмотрим взаимодействие двух волн в одномерном случае. Тривиальный случай слабого взаимодействия между волнами — слабое перекрытие спектров нелинейных волн (рис. 12), которое можно записать в виде

$$N_1 k_1 \leq k_2. \quad (5.18)$$

В действительности, при мало отличающихся амплитудах двух волн слабая связь между волнами достигается уже при условии (5.1), где M определяется из условия перекрытия спектров волн

$$N_1 k_1 = M k_2, \quad M \ll N_2. \quad (5.19)$$

Получим условие малости резонансных членов M следующим образом. Из правил отбора, налагаемых δ -функциями в $\mathcal{H}_1$ (5.9), следует $n_1 k_1 =$

*) Вообще, одномерный случай обладает рядом специфических особенностей; некоторые из них описываются ниже.

$= n_2 k_2$. Условие периодичности решения с периодом $\lambda_0 = 2\pi/k_0$ означает

$$n_1 m_1 = n_2 m_2, \quad m_{1,2} \equiv \lambda_0 / \lambda_{1,2} = k_{1,2} / k_0, \quad (5.20)$$

где $m_{1,2}$ — целые числа. Отсюда следует, что M есть число корней уравнения (5.20) относительно n_1, n_2 в целых числах при ограничении $n_{1,2} \leq N_{1,2}$. Это означает, в частности, что при $N_{1,2} \gg m_{1,2} \gg 1$ величина $M/N_{1,2}$ мала (рис. 13, где совпадающие жирные линии соответствуют решениям уравнения (5.20)).

Таким образом, взаимодействие двух нелинейных периодических волн связано с двумя родами эффектов. Первый из них заключается в перенормировке скоростей. Он всегда существует и определяется для

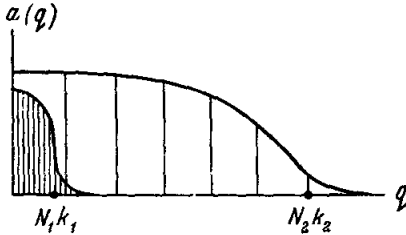


Рис. 12.

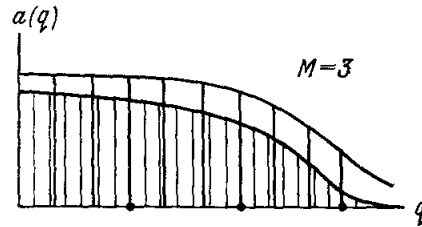


Рис. 13.

каждой из волн нулевой фурье-гармоникой другой волны (т. е. усредненным значением профиля волны). Второй эффект связан с резонансами между волнами и определяется параметром типа (5.1). Учет резонансов приводит к модуляционным колебаниям гармоник спектра и для нелинейных плазменных колебаний рассматривался в работах ^{22, 23}. В результате взаимодействия двух нелинейных волн образуется связанное состояние, которое можно интерпретировать как двухпотоковое решение *).

Наконец, укажем на еще один параметр, приводящий к слабому взаимодействию волн ⁴⁵. Он возникает в результате слабого перекрытия горбов волн в одномерном случае, и его смысл легко понять из рис. 14. С помощью такого параметра, например, может быть построено двухпотоковое решение, в котором волны являются встречными ⁴⁵: $u_1 > c$, $u_2 < -c$.

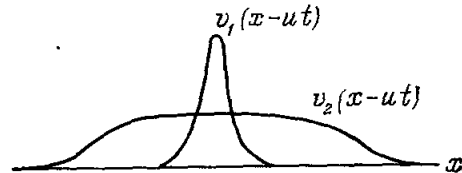


Рис. 14.

г) Взаимодействие трех волн. Этот случай существенно отличается от взаимодействия двух волн, и его целесообразно рассмотреть подробно.

Будем считать, что выполнены условия, при которых резонансные взаимодействия между парами волн отсутствуют, но резонанс между тремя волнами может при этом осуществляться. Из общего выражения (5.9) для гамильтониана (s принимает значения 1, 2, 3) и выражения для скобок

*) Использование термина «двухпотоковое решение» связано с тем, что суперпозиция двух нелинейных волн, движущихся с различными скоростями, может быть проинтерпретирована как суперпозиция двух потоков частиц, каждый из которых совершает свое движение. Формально связанная пара волн может быть описана двумя связанными гидродинамическими уравнениями, которые аналогичны известным уравнениям многопотоковой гидродинамики ¹.

Пуассона (5.13) получаем следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathcal{H}}_1 &= \frac{1}{2} \sum_{q_1, q_2, q_3} (-iq_1 u_1) V_{123} a_1^* a_2 a_3 \delta(q_1 - q_2 - q_3) + \text{к. с.}, \\ \dot{\mathcal{H}}_2 &= \frac{1}{2} \sum_{q_1, q_2, q_3} (-iq_2 u_2) V_{123} a_1 a_2^* a_3^* \delta(q_1 - q_2 - q_3) + \text{к. с.}, \\ \dot{\mathcal{H}}_3 &= \frac{1}{2} \sum_{q_1, q_2, q_3} (-iq_3 u_3) V_{123} a_1 a_2^* a_3^* \delta(q_1 - q_2 - q_3) + \text{к. с.}, \end{aligned} \right\} \quad (5.21)$$

где $a_i = a(q_i)$. Каждую из волн можно разложить в ряд Фурье

$$\begin{aligned} \rho_s &= \rho(\mathbf{r}_s - \mathbf{u}_s t) = \sum_{\mathbf{q}} a_s e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_s}, \quad q_s = n_s k_s, \\ a_s &= |a_s| \exp(-i\vartheta_s - i\vartheta_{s0}), \end{aligned} \quad (5.22)$$

где ϑ_{s0} — некоторая начальная фаза. Поскольку далее будет исследоваться резонансный случай, то так же, как и в п. а) гл. 4, в уравнении

$$\dot{\vartheta}_s = \omega_s + \partial \mathcal{H}_I / \partial I_s = k_s u_s + \partial \mathcal{H}_I / \partial I_s \quad (5.23)$$

можно будет пренебречь вторым членом в правой части. Переменная действия I_s введена здесь с помощью соотношения (3.31):

$$d\mathcal{H}_s / dI_s = \omega_s(\mathcal{H}_s). \quad (5.24)$$

Из (5.22) и (5.23) видно, что в системе (5.21) возможен резонанс, если одновременно выполняются условия

$$\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3 = m_1 \mathbf{k}_1 - m_2 \mathbf{k}_2 - m_3 \mathbf{k}_3 = 0, \quad (5.25)$$

$$q_1 u_1 - q_2 u_2 - q_3 u_3 = m_1 k_1 u_1 - m_2 k_2 u_2 - m_3 k_3 u_3 = 0.$$

В этом случае основным является изменение параметров волн вследствие резонанса между ними и вместо (5.21) можно записать в канонических переменных (5.23), (5.24)

$$\dot{I}_1 = m_1 \Gamma \sin \theta, \quad \dot{I}_2 = -m_2 \Gamma \sin \theta, \quad \dot{I}_3 = -m_3 \Gamma \sin \theta, \quad (5.26)$$

где

$$\begin{aligned} \theta &= \vartheta_1 - \vartheta_2 - \vartheta_3 + \vartheta_0, \quad \vartheta_0 = \vartheta_{10} - \vartheta_{20} - \vartheta_{30}, \\ \Gamma &= \frac{V_{123}}{|\sin \gamma_{23}|} |a_1(I_1) a_2(I_2) a_3(I_3)| \equiv \Gamma(I_1, I_2, I_3). \end{aligned} \quad (5.27)$$

Полученная система (5.26) аналогична тем, которые возникают в нелинейной оптике⁴⁶ и в теории плазмы⁴⁷. Она может быть проинтегрирована с помощью соотношений типа Мэнли — Роу, вытекающих из (5.26):

$$\left. \begin{aligned} I_1 m_2 + I_2 m_1 &= \text{const}, \\ I_1 m_3 + I_3 m_1 &= \text{const}, \\ I_2 m_3 - I_3 m_2 &= \text{const}. \end{aligned} \right\} \quad (5.28)$$

Интегралы (5.28), из которых независимыми являются только два, позволяют выразить ответ в квадратурах. Изложенные результаты получены в работе²². Ограничимся анализом движения волн в окрестности резонанса. Резонансные условия (5.25) удовлетворяются при значениях

действий I_{10} , I_{20} , I_{30} . Из (5.26) следует

$$\int_{I_{10}}^{I_1} \omega_1 dI_1 + \int_{I_{20}}^{I_2} \omega_2 dI_2 + \int_{I_{30}}^{I_3} \omega_3 dI_3 + \Gamma_0 \cos \theta = \text{const}, \quad (5.29)$$

где $\Gamma_0 = \Gamma(I_{10}, I_{20}, I_{30})$. Разлагая $\omega_s(I_s)$ в окрестности I_{s0} и используя соотношения (5.28), получаем интеграл движения, аналогичный (4.5), описывающий фазовые колебания в системе трех нелинейных волн:

$$\sum_{s=1}^s \frac{d\omega_s}{dI_s} (I_s - I_{s0})^2 + 2\Gamma_0 \cos \theta = \text{const}. \quad (5.30)$$

Отсюда определяется амплитуда модуляции (ширина резонанса) действием:

$$\Delta I \sim [2\Gamma_0 / (d\omega/dI)]^{1/2}, \quad (5.31)$$

и по частоте:

$$\Delta \omega \sim (2\Gamma_0 d\omega/dI)^{1/2}. \quad (5.32)$$

В частности, для системы (5.2) легко оценить

$$\Delta \omega \sim (V_{123}/|\sin \gamma|)^{1/2} k\alpha/N. \quad (5.33)$$

Полученная формула показывает, что параметр малости взаимодействия имеет частный порядок $\Delta \omega/k\alpha \propto N^{-1}$. Его происхождение здесь то же, что в случае взаимодействия двух волн.

По существу, описанный процесс представляет собой нелинейный анализ неустойчивости распадного типа. Все три волны, участвующие в резонансе, являются, вообще говоря, сильно нелинейными ($N_s \gg 1$). Можно было бы исследовать устойчивость вблизи резонанса одной нелинейной волны относительно возбуждения волн малой амплитуды в линейном относительно возмущения приближении. Такой метод исследования и аналогичные выводы относительно неустойчивости содержатся в работах ^{37, 38} для гравитационных волн на поверхности глубокой жидкости и для неоднородного уравнения Кортевега — де Вриза ^{48, 49}.

Рассмотренное взаимодействие включает резонанс между гармониками нелинейных волн лишь на одной моде. В более общем случае система уравнений (5.25) может допускать несколько решений в целых числах (m_1, m_2, m_3) с условием ограничения $m_s < N_s$. Тогда теория возмущений все еще может оставаться применимой, если число таких решений $M \ll N$. Исследование в этом случае не проведено. Не исключено, что даже в случае трех нелинейных волн могут возникнуть явления типа стохастической неустойчивости, которые приведут к разрушению интегралов (5.28) или (5.29) в некоторых областях значений параметров волн.

6. НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Уравнения (3.16), полученные Уитэмом, помогают в наиболее простой форме рассмотреть движение нелинейной волны в слабонеоднородной среде. Это приближение естественно назвать адиабатическим. Эквивалентом ему является использование рядов типа (3.17). Последний метод может оказаться иногда предпочтительнее, чем метод Уитэма, поскольку он не предполагает знания лагранжиана. Адиабатические представления позволили получить, например, определенные результаты в задаче о набегании уединенной волны на берег с плавным откосом ⁵⁰⁻⁵² *). Естественно,

*) В работе ⁵² рассмотрены также некоторые неадиабатические случаи.

что основная информация при использовании адиабатического приближения извлекается из законов сохранения и уравнений переноса для адиабатических инвариантов ^{33, 53}. Получение неадиабатических поправок для нелинейных волн представляет собой особый вид задачи. В настоящее время для нелинейных волн не существует метода столь же хорошо разработанного, как в теории динамических систем. Очень важным результатом в этом направлении является теорема Мозера ⁹ о сохранении адиабатического варианта нелинейной волны во всех порядках теории возмущений. Последнее означает, что изменение адиабатического инварианта следует ожидать экспоненциально малым.

Для случая граничной задачи (3.11) и слабонеоднородной среды вычисление изменения адиабатического инварианта можно провести непосредственно ⁵⁴. Пусть, например, в уравнении Клейна — Гордона (2.2) параметр c зависит периодически от x :

$$c(x) = c(x + \Lambda), \quad (6.1)$$

и выполняется условие адиабатичности

$$k\Lambda \gg 1. \quad (6.2)$$

Для нелинейной струны зависимость $c(x)$ может быть связана с неоднородностью сил упругости, действующих вдоль струны или с неоднородным распределением массы струны. Вместо гамильтониана в форме (3.7) теперь следует написать так:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}[c^2] = & \frac{1}{2} \sum_n \dot{y}_n \dot{y}_{-n} - \frac{1}{2} \sum_{n_1, n_2, n_3} n_1 n_2 (c^2)_{n_3} y_{n_1} y_{n_2} \times \\ & \times \delta(n_1 + n_2 + n_3) - \frac{1}{3} \sum_{n_1, n_2, n_3} y_{n_1} y_{n_2} y_{n_3} \delta(n_1 + n_2 + n_3), \end{aligned} \quad (6.3)$$

где

$$(c^2)_n = \frac{1}{\Lambda} \int_{-\Lambda/2}^{\Lambda/2} dx e^{-in\hbar x} c^2(x). \quad (6.4)$$

Из (6.1), (6.2), (6.4) следует, что

$$(c^2)_n \propto e^{-n\hbar\Lambda} \quad (6.5)$$

и, следовательно, экспоненциально малó. Используя (6.5), перепишем $\mathcal{H}$ в виде

$$\mathcal{H} \approx \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1, \quad (6.6)$$

где $\mathcal{H}_0$ есть выражение (6.3), в котором вместо $(c^2)_{n_3}$ стоит

$$\begin{aligned} (c^2)_0 &= \frac{1}{\Lambda} \int_{-\Lambda/2}^{\Lambda/2} dx c^2(x) \equiv \overline{c^2}, \\ \mathcal{H}_0 &= \mathcal{H}[(c^2)_0]. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Величина

$$\mathcal{H}_1 = -\frac{1}{2} \sum_{n_1, n_2} [(c^2)_1 y_{n_1} y_{n_2} \delta(n_1 + n_2 + 1) + (c^2)_{-1} y_{n_1} y_{n_2} \delta(n_1 + n_2 - 1)] \quad (6.8)$$

экспоненциально мала согласно (6.6) и может быть рассмотрена как возмущение для $\mathcal{H}_0$ методом, изложенным в п. д) гл. 3. Однако качественный результат уже ясен, так как изменение $\mathcal{H}_0$ и изменение действия будут пропорциональны $\mathcal{H}_1$.

Аналогичные рассуждения можно провести и в общем случае, когда $c = c(x, t)$ и характерные масштабы изменения c по x и по t велики по сравнению с соответствующими масштабами волны. Для этого необходимо воспользоваться лагранжианом и представить его в виде

$$\mathcal{L}[c^2] \approx \mathcal{L}[(c^2)_{00}] + \mathcal{L}_{01}[(c^2)_{01}] + \mathcal{L}_{10}[(c^2)_{10}], \quad (6.9)$$

где первый индекс внизу при c^2 означает фурье-гармонику по x , а второй — по t .

Вычисление поправок к энергии и к действию волны не решает полностью задачу о распространении нелинейной волны в слабонеоднородной среде. В стороне остается важный вопрос об определении отраженной волны. Постановка такого вопроса, однако, выглядит сомнительной, так как в нелинейном случае отсутствует принцип суперпозиции. В работе ⁴⁵ была сделана попытка построения решения, учитывающего «отраженные» волны с помощью так называемого двухпоточкового решения, рассмотренного в п. в) гл. 5. Слева и справа от особой области, от которой происходят отражения, рассматриваются связанные пары нелинейных волн. В каждой паре имеются волны, бегущие в противоположных направлениях. Условия сшивки таких двухпоточковых решений на границе особой области и определяют соответствующие параметры прохождения и отражения. После рассеяния волны на неоднородности происходит изменение длины волны и скачок фазы, вычисленные в работе ⁴⁵.

Эти результаты, по-видимому, соответствуют экспериментальным данным Хоува ^{53a}.

Аналогично определению отраженной волны может быть рассмотрена и задача о трансформации нелинейных волн разного типа в слабонеоднородной среде ^{53b}.

В основе задач рассеяния или трансформации лежит определение пространственных характеристик волны при заданном периодическом законе изменения во времени с частотой ω (см. п. в) гл. 1). В однородном случае дисперсионное уравнение (2.9) для нелинейных стационарных волн заменяется на следующее:

$$\omega = \omega(u, C). \quad (6.10)$$

Пусть теперь (6.10) имеет, например, две «ветви» решений:

$$\omega = \omega(u_i, C_i) \quad (i = 1, 2), \quad (6.11)$$

и разным ветвям колебаний соответствуют разные (неперекрывающиеся) области возможных значений u , при которых существует решение в виде волны. В линейном случае $C \rightarrow 0$, и (6.11) приводит к двум законам дисперсии $k_i = k_i(\omega)$.

В слабонеоднородном случае в адиабатическом приближении вместо (6.11) имеем

$$\omega = \omega(u_i(x), C_i(x)). \quad (6.12)$$

Может существовать такая область значений $x \sim x_0$, в которой $u_1(x_0) \sim u_2(x_0)$. Это приводит к тому, что волновые числа, соответствующие разным ветвям, совпадают:

$$k_1(x_0) = \omega/u_1(x_0) \sim k_2(x_0) = \omega/u_2(x_0).$$

Такая область значений координат является особой. В ее окрестности адиабатическое приближение нарушается. Так же как и в линейном случае, волна одной из ветвей колебаний может «возбудить» в окрестности x_0 волну другой ветви. Если соответствующие коэффициенты трансформации (отношение амплитуды рассеянной или возбужденной волны

к амплитуде падающей волны) достаточно малы, то их можно определить, используя следующее обстоятельство^{45, 55б}: n -я гармоника новой волны рождается с множителем ρ^n , где ρ — экспоненциально малая величина. Поэтому достаточно ограничиться в рассеянной или возбужденной волне только одной первой гармоникой, т. е. линейным приближением.

7. КИНЕТИКА НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН

Среди различных факторов, возмущающих движение нелинейных волн, следует выделить те, которые представляют собой некоторый случайный процесс. К такому классу задач следует отнести распространение нелинейных волн в случайных неоднородных и нестационарных средах, взаимодействие волн, представляющих статистический ансамбль, и т.п. Существует приближение, в котором нелинейные уравнения движения сначала могут быть усреднены по некоторому случайному процессу, а нелинейное взаимодействие между гармониками учитывается уже в усредненных уравнениях движения⁵¹. Такое приближение реализуется в тех случаях, когда связь между гармониками является достаточно слабой. В этой главе будут рассмотрены некоторые случаи, в которых существует сильная связь между гармониками, т. е. волны являются существенно нелинейными (величина N может быть очень большой).

а) С л у ч а й н ы е в н е ш н и е с и л ы. Хорошо известная задача о броуновском движении частицы под действием внешней случайной силы может быть в определенном приближении рассмотрена и для нелинейных волн⁵⁷. Такими случайными силами могут быть ветровое возмущение для гравитационных волн на поверхности жидкости, турбулентная среда, в которой распространяется нелинейная волна, среда со случайными неоднородностями и др.

Пусть

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \varepsilon \mathcal{H}_1$$

есть гамильтониан задачи, где $\mathcal{H}_0$ соответствует невозмущенному движению, т. е. нелинейной волне $y = y(x - ut)$, а $\delta \mathcal{H}_1$ — возмущение в виде (3.20), в котором $\Phi(x, t)$ является случайной внешней силой. Относительно $\Phi(x, t)$ будем предполагать, что это гауссовский случайный процесс и

$$\langle \Phi(x, t) \rangle = 0, \quad (7.1)$$

$$\langle \Phi(x, t) \Phi(x + \xi, t + \tau) \rangle = R(\xi, \tau).$$

Корреляционная функция вводит в задачу некоторое время убывания корреляции τ_c , которое будем считать для простоты меньше всех времен задачи. При $\tau_c \rightarrow 0$ величина $R(\xi, \tau) \rightarrow R_0(\xi) \delta(\tau)$, т. е. к белому шуму (по времени). Удобно еще ввести спектральную плотность:

$$S(\kappa, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\tau R(\xi, \tau) e^{i(\kappa x - \nu t)}. \quad (7.2)$$

Если задача имеет периодические граничные условия по x , то интегрирование по ξ в (7.2) следует проводить так же, как в формуле (3.27).

Определим действие I в непрерывном случае аналогично (3.32):

$$d\mathcal{H}/dI = u(\mathcal{H}), \quad (7.3)$$

и запишем изменение действия в виде

$$\Delta I = \int_{-\infty}^t dt_1 \frac{dI}{dt_1} = -\varepsilon \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 y' (x_1 - ut_1) \Phi (x_1, t_1). \quad (7.4)$$

Отсюда можно вычислить величину

$$\begin{aligned} \langle (\Delta I)^2 \rangle = \varepsilon^2 \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^t dt_2 \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 y' (x_1 - ut_1) \times \\ \times y' (x_2 - ut_2) R (x_1 - x_2, t_1 - t_2), \end{aligned} \quad (7.5)$$

причем в правой части стоит невозмущенное значение $y (x - ut)$, описывающее нелинейную волну. Теперь следует учесть, что $R (x, t)$ при $t > \tau_c$ быстро убывает, что позволяет провести интегрирование в (7.5) по t при $t \gg \tau_c$ ⁵⁷:

$$D \equiv \frac{\langle (\Delta I)^2 \rangle}{t} = 8\pi\varepsilon^2 \int_{-\infty}^{\infty} dq q^2 |y_q|^2 S (q, qu). \quad (7.6)$$

Как известно, величина D является коэффициентом диффузии соответствующего уравнения Фоккера — Планка

$$\frac{df(I, t)}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial I} D \frac{\partial f(I, t)}{\partial I}. \quad (7.7)$$

Уравнение (7.7) определяет броуновское движение нелинейной волны с помощью функции распределения f и коэффициента диффузии (7.6). Уравнения (7.6), (7.7) могут описывать, в частности, движение солитона под действием случайных сил. Если рассматривается нелинейная периодическая волна, то выражение (7.6) изменится на

$$D = 8\pi\varepsilon^2 \sum_n n^2 |y_n|^2 S (kn, kn\omega), \quad (7.8)$$

причем действие I в (7.7) отличается, согласно определению (3.32), на множитель k по сравнению с предыдущим случаем.

Оценим коэффициент диффузии волны для частного случая белого шума ($\tau_c = 0$):

$$R (\xi, \tau) = \langle \Phi_0^2 \rangle \delta (\xi) \delta (\tau),$$

Имеем

$$D = 4\varepsilon^2 \langle \Phi_0^2 \rangle \int_{-\infty}^{\infty} dx (v')^2 = 8\pi\varepsilon^2 \langle \Phi_0^2 \rangle I, \quad (7.9)$$

и решение уравнения (7.7) легко написать. При $\tau_c \neq 0$ из (7.7) следует, что волна будет стохастически ускоряться и увеличивать свою энергию.

Таким образом, воздействие случайных сил может привести к опрокидыванию нелинейной волны, которое происходит после достижения ею некоторой критической скорости или энергии. Характерное время разгона волны до опрокидывания может быть оценено с помощью коэффициента диффузии D .

б) Нелинейные волны в случайных средах. Движение нелинейных волн в средах со случайными неоднородностями представляет интерес в различных областях физики и рассматривалось, в частности, для волн на воде в работах^{58, 59}. Если параметр $\Lambda (x)$,

учитывающий неоднородность среды, можно представить в виде

$$\Lambda(x) = \Lambda_0 + \Lambda_1(x),$$

где Λ_0 не зависит от x , а случайная добавка Λ_1 мала ($\Lambda_1 \ll \Lambda_0$), то задача о распространении нелинейной волны может быть сведена к уже рассмотренной. Действительно, запишем

$$\mathcal{H}[\Lambda] = \mathcal{H}[\Lambda_0] + \mathcal{H}_1[\Lambda_1],$$

где возмущение $\mathcal{H}_1$ пропорционально, вообще говоря, Λ_1 , $d\Lambda_1/dx$, ... Далее можно воспользоваться уже описанным в п. а) гл. 7 методом, учитывая, что коррелятор (7.1) определяется однозначно через коррелятор случайного процесса $\Lambda_1(x)$:

$$\langle \Lambda_1(x) \rangle = 0, \quad \langle \Lambda_1(x) \Lambda_1(x + \xi) \rangle = R(\xi).$$

Теперь следует принять во внимание, что рассматривается задача о рассеянии нелинейной волны. Для этого надо воспользоваться вариационным принципом (3.10) и условием (3.12). Это приводит сразу к усложнениям, так как из-за возмущенной части гамильтониана $\mathcal{H}_1[\Lambda_1]$ появляются отраженные волны. Таким образом, для корректного решения задачи о затухании нелинейной волны в среде со случайными неоднородностями необходимо вычислить предварительно матрицу рассеяния на неоднородностях, т. е. ввести в рассмотрение отраженные волны (см. п. а) гл. 7).

Существует еще одно обстоятельство, отличающее принципиально нелинейный случай от линейного. За счет случайных неоднородностей происходят флуктуации скорости волны. При одной из таких флуктуаций скорость волны может достичь критического значения, при котором волна опрокидывается. Этот процесс является конкурирующим по отношению к процессу рассеяния. Его количественный анализ сводится к вычислению вероятности на заданном отрезке длины l достижения первый раз критического значения скорости u_c .

Строгое рассмотрение задачи о распространении нелинейной волны в случайной среде в настоящее время отсутствует. Соображения, приведенные выше, по-видимому, представляют один из возможных реализуемых путей.

в) Стохастическая неустойчивость. Аналогичное (7.7) кинетическое уравнение может быть записано и в тех случаях, когда внешнее воздействие на волну приводит к ее стохастической неустойчивости (см. п. г) гл. 2)^{21, 30}. Кинетическое уравнение получается в этом случае в результате усреднения по случайно меняющейся фазе, а время убывания корреляции τ_c оценивается непосредственно, исходя из анализа стохастической неустойчивости.

Во всех описываемых случаях случайным элементом решения являются малые добавки, вызываемые возмущением. Поэтому общую картину вида решения можно представить как регулярный фон (невозмущенная волна), промодулированный некоторой случайной рябью. Поскольку возмущения со временем могут нарастать, то приведенный анализ, естественно, ограничен во времени интервалом, в котором искажения формы нелинейной волны остаются малыми.

г) Кинетическое уравнение для ансамбля нелинейных волн. Представление о том, что в процессе возмущения нелинейная периодическая волна мало изменяет свои параметры, позволяет рассмотреть большое число нелинейных волн, слабо взаимодей-

ствующих друг с другом, и описать их эволюцию с помощью кинетического уравнения. При этом параметр слабости взаимодействия определяется непосредственно, подобно тому как это делалось в пп. в) и г) гл. 5 *). С физической точки зрения является важной следующая сторона исследования поведения большого ансамбля нелинейных волн. При рассмотрении задач турбулентности сплошной среды возникают группы сильно скоррелированных гармоник. Предельный случай, когда все гармоники нескоррелированы, называют слабой турбулентностью. Волновые пакеты, внутри которых моды сильно скоррелированы, можно описывать методами теории слабой связи, если взаимодействие между пакетами мало (эта ситуация аналогична возможности описания слабо взаимодействующих систем индивидуальными волновыми функциями в квантовой механике). В нулевом приближении волновые пакеты не взаимодействуют друг с другом и, следовательно, являются точными решениями исходных уравнений движения. Таким образом, мы приходим к концепции «газа» слабо взаимодействующих нелинейных волн. Вывод кинетического уравнения методом теории возмущения для ансамбля слабо взаимодействующих нелинейных периодических волн был дан в работах ^{22, 23}. Исходным является уравнение Лиувилля

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{s=1}^S \dot{\vartheta}_s \frac{\partial f}{\partial \vartheta_s} + \sum_{s=1}^S \dot{I}_s \frac{\partial f}{\partial I_s} = 0, \quad (7.10)$$

где $f(t; \vartheta_1, I_1, \dots, \vartheta_s, I_s)$ — функция распределения, зависящая от $S \gg 1$ пар канонически сопряженных переменных (ϑ_i, I_i) . Эти переменные удовлетворяют уравнениям типа (3.25), (3.26):

$$\begin{aligned} \dot{I}_s &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vartheta_s} = -\frac{\partial \mathcal{H}_I}{\partial \vartheta_s}, \\ \dot{\vartheta}_s &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_s} = \omega_s(I_s) + \frac{\partial \mathcal{H}_I}{\partial I_s}, \end{aligned} \quad (7.11)$$

где полный гамильтониан $\mathcal{H}$ и часть гамильтониана $\mathcal{H}_I$, учитывающая взаимодействие волн, имеют, например, для ионно-звуковых колебаний вид (5.9). Если фазы волн ϑ_s считать случайными, то для усредненной по фазам функции распределения

$$F(t; I_1, \dots, I_S) = (2\pi)^{-S} \int_0^{2\pi} d\vartheta_1 \dots d\vartheta_S f(t; I_1, \vartheta_1, \dots, I_S, \vartheta_S)$$

можно получить следующее кинетическое уравнение в случае ионно-звуковых колебаний **):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} = 6\pi \sum_{m_1, m_2, m_3} \sum_{n_{m_1}, n_{m_2}, n_{m_3}} & |V_{m_1 m_2 m_3}|^2 \hat{D}_{m_1 m_2 m_3} \times \\ & \times |a(n_{m_1}) a(n_{m_2}) a^*(n_{m_3})|^2 \delta(n_{m_1} \omega_{m_1} + n_{m_2} \omega_{m_2} - n_{m_3} \omega_{m_3}) \times \\ & \times \delta(n_{m_1} \mathbf{k}_{m_1} + n_{m_2} \mathbf{k}_{m_2} - n_{m_3} \mathbf{k}_{m_3}) \hat{D}_{m_1 m_2 m_3} F, \\ \hat{D}_{m_1 m_2 m_3} \equiv n_{m_1} \frac{\partial}{\partial I_{m_1}} + n_{m_2} \frac{\partial}{\partial I_{m_2}} - n_{m_3} \frac{\partial}{\partial I_{m_3}}, \end{aligned} \right\} \quad (7.12)$$

*) При некоторых условиях малый параметр взаимодействия волн определяется из условия ^{22, 23} $\varepsilon \propto S/N \ll 1$; $S, N \gg 1$, где N — характерный параметр нелинейности для волн, а S — характерное число эффективно взаимодействующих волн.

**) Структура уравнения (7.12) является достаточно общей, и различные конкретных физических случаев заключается в виде ядра $V_{m_1 m_2 m_3}$ и зависимостей $a(n, I)$, $\omega = \omega(I)$.

где матричный элемент V и амплитуды $a(n)$ имеют тот же смысл, что и в (5.9).

Уравнение (7.12) имеет равновесное решение

$$F = F \left(\sum_s (H_s - \mathbf{k}_s \mathbf{w} I_s) \right), \quad (7.13)$$

где константа $\mathbf{w}$ является макроскопической скоростью и может быть исключена.

Как следует из (5.4), $V_{m_1 m_2 m_3}$ является однородным относительно своих переменных ядром. Поскольку суммирование по n_i ведется эффективно от 0 до N_i , то таким же свойством однородности обладает (см. (3.28)) ядро, зависящее от $a_i a_h a_l$. Можно показать⁴⁴, что в таком случае существует функция распределения некоторого вида

$$F(\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_s) = \tilde{F}(\overline{\mathcal{H}}_1, \dots, \overline{\mathcal{H}}_s) \frac{(d\overline{\mathcal{H}})}{(d\mathcal{H})} \equiv F(k_1^0 \overline{\mathcal{H}}_1, \dots, k_s^0 \overline{\mathcal{H}}_s) \frac{(d\overline{\mathcal{H}})}{(d\mathcal{H})}, \quad (7.14)$$

которая для всех i удовлетворяет уравнениям

$$d \langle \mathcal{H}_i \rangle / dt = 0. \quad (7.15)$$

В рассматриваемом случае $\rho = -2$ *). Распределение (7.14) обладает тем примечательным свойством, что оно не меняет среднего распределения энергии по спектру нелинейных волн и, следовательно, соответствует колмогоровской концепции о постоянстве потока энергии. Действительно, используя последнее свойство, можно из соображений размерности получить то же значение $\rho = -2$. Таким образом, в рассматриваемом случае существует возможность вычислить спектр турбулентного движения нелинейных волн:

$$\langle \mathcal{H}(k_i) \rangle = \int (d\mathcal{H}) F(\mathcal{H}) \mathcal{H}(k_i) = k_i^{-2} \cdot \text{const}. \quad (7.16)$$

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложенные в обзоре результаты показывают, что во многих случаях, интересных с физической точки зрения, эволюцию нелинейных волн можно рассмотреть с некоторой общей точки зрения. Существующие методы такого исследования представляют собой различные обобщения метода Крылова — Боголюбова и предполагают малость отклонений от точных решений. Наиболее выгодной ситуацией для приближенных методов являются очень узкие по спектру, медленно расплывающиеся волновые пакеты, и очень широкие волновые пакеты. В обзоре затронут в основном лишь последний случай. Результаты, связанные с исследованием узких волновых пакетов, можно найти в обзорах^{3, 6}. Хотя изложенные приближенные методы и представляются естественными с физической точки зрения, тем не менее они нуждаются в более строгом обосновании и в более точном определении границ применимости.

В связи с последним замечанием возникают задачи, требующие более детального обсуждения. С. Удам провел обстоятельный анализ «неприятных» мест, возникающих при использовании различных приближенных моделей сплошной среды для описания поведения большого ансамбля частиц⁴³, гл. 7, §§ 2 и 3). С тех пор положение не только не прояснилось, но благодаря некоторым примерам стало, по-видимому, более серьезным.

*) Решения такого типа были впервые получены в работе⁶⁰ для случая слабой турбулентности и при условии расщепления моментов.

Удобно начать с классической проблемы Ферми — Паста — Улама^{12, 13}: при каких условиях в системе большого числа связанных нелинейных осцилляторов возникает стохастичность и релаксация к термодинамическому равновесию? Эти условия, полученные в работах⁶¹, связаны также с условиями перехода к турбулентному движению в среде⁶². В длинноволновом приближении система осцилляторов может быть приближенно описана уравнениями движения континуума. В данном случае — это уравнение нелинейной струны типа (2.5)¹⁴. В приближении достаточно слабой нелинейности уравнение струны еще более упрощается и приводится к уравнению Кортевега — де Вриза (2.15)¹⁴.

В процессе упрощений описания: система осцилляторов — струна — уравнение Кортевега — де Вриза, естественно включаются различные ограничения на параметры задачи в виде неравенств. Достаточно ли это и в какой мере описание на последнем этапе упрощений эквивалентно описанию процессов в исходной системе? Следующий пример показывает, насколько мы еще далеки от понимания ответа на поставленный вопрос. Для достаточно произвольного начального условия уравнение Кортевега — де Вриза точно интегрируется и имеет решение, описывающее вполне регулярный профиль, который регулярно развивается со временем. С другой стороны, это же начальное условие для исходной системы осцилляторов приводит к развитию стохастического движения (Б. В. Чириков, 4-я школа по нелинейным колебаниям и волнам. Горький, 1972 г.), которое не следует из уравнения Кортевега — де Вриза.

Приведенная иерархия упрощаемых систем может быть продолжена благодаря использованию приближенных методов интегрирования. Действительно, как было видно из гл. 3—5, разложение отыскиваемого решения в ряд Фурье и дальнейшее изучение поведения отдельных гармоник эквивалентно, по существу, переходу снова от континуума к некоторой дискретной системе. Поэтому в данном случае задача заключается в выяснении того, насколько конечная приближенная дискретная система адекватна исходной системе частиц *).

Наконец, можно сформулировать вопрос довольно общего вида. После работы Лякса⁷⁵ стало ясно, что существует бесконечный класс нелинейных уравнений сплошной среды, допускающих при весьма приемлемых ограничениях точные решения. С другой стороны, движение системы частиц, порождающих эти уравнения, становится стохастическим при достаточно произвольных начальных условиях. Разрешение этого парадокса должно содержать ответ на вопрос: насколько широка область условий, в которых мы можем использовать решения уравнений сплошной среды, в особенности те из них, которые точно интегрируются и не содержат, вследствие этого, турбулентных компонент?

В заключение выражаю благодарность А. Г. Литваку за полезные замечания.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА НЕЛИНЕЙНОГО ВОЛНОВОГО ПОЛЯ

Представление о тензоре энергии-импульса, которое будет здесь введено, может оказаться полезным для понимания ряда общих вопросов, возникающих в теории нелинейных волн **).

*) В связи с этим следует обратить внимание на одну удивительную модель цепочки атомов с экспоненциальным взаимодействием, обнаруженную Тодой⁶³. В этой дискретной (!) модели существуют не только точные решения в виде солитонов, но и двухсолитонные решения⁶⁴, аналогичные соответствующим решениям уравнения Кортевега — де Вриза.

**) Этим замечанием я обязан Г. М. Фрайману (см. также⁶⁵).

Ограничимся рассмотрением простейшего примера нелинейного уравнения Клейна — Гордона (2.2) для иллюстрации сделанного утверждения. Представим лагранжиан (3.4) в виде

$$L = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial r_i} \right)^2 - V(y) \quad (c=1), \quad (\text{П.1})$$

где $r_i = (x, it)$ и по дважды встречающимся индексам производится суммирование. Тензор энергии-импульса определяется выражением⁶⁶

$$T_{ik} = L \delta_{ik} - \frac{\partial y}{\partial r_i} \frac{\partial L}{\partial (\partial y / \partial r_k)} = \delta_{ik} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial r_i} \right)^2 - V(y) \right] - \frac{\partial y}{\partial r_i} \frac{\partial y}{\partial r_k}. \quad (\text{П.2})$$

Выпишем компоненты T_{ik} :

$$\left. \begin{aligned} T_{xx} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 - V(y), \\ T_{xt} &= i \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial t} = T_{tx}, \\ T_{tt} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 - V(y). \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.3})$$

Закон сохранения

$$\partial T_{ik} / \partial x_k = 0$$

приводит к следующим двум уравнениям:

$$\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} - i \frac{\partial T_{xt}}{\partial t} = 0, \quad (\text{П.4})$$

$$\frac{\partial T_{xt}}{\partial x} - i \frac{\partial T_{tt}}{\partial t} = 0. \quad (\text{П.5})$$

Если, например, рассматривается класс решений, периодических по x , то интегрирование (П.5) по периоду дает

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{k}{2\pi} \oint dx T_{tt} \right) = \frac{d\mathcal{H}}{dt} = 0,$$

что совпадает с (3.7), если подставить выражение T_{tt} из (П.3).

В том случае, когда решение является периодическим по времени, аналогичное интегрирование (П.4) дает

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\omega}{2\pi} \oint dt T_{xx} \right) = \frac{d\tilde{\mathcal{H}}}{dx} = 0,$$

что совпадает с (3.10).

Наконец, рассмотрим усреднение по фазе ϑ , удовлетворяющей уравнениям (3.14):

$$\partial \vartheta / \partial x = k, \quad \partial \vartheta / \partial t = -\omega. \quad (\text{П.6})$$

Из (П.4), (П.5) имеем с учетом (П.3)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{2\pi} d\vartheta T_{xx} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} d\vartheta \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial t} &= 0, \\ \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} d\vartheta T_{tt} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{2\pi} d\vartheta \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial t} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{П.7})$$

Если сохранить старые обозначения для $\mathcal{H}$, $\tilde{\mathcal{H}}$ и ввести аналог действия

$$\tilde{I} = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial y}{\partial \vartheta} dy,$$

то из (П.7) получаем следующее обобщение уравнений $d\mathcal{H}/dx = 0$, $d\tilde{\mathcal{H}}/dt = 0$:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t} (\omega k \tilde{I}), \quad \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (\omega k \tilde{I}),$$

которые теперь следует решать совместно с (П.6).

Институт физики СО АН СССР,
Красноярск

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Веденов, Е. П. Велихов, Р. З. Сагдеев, *Яд. синтез* 1, 82 (1961).
2. Р. З. Сагдеев, сборник «Вопросы теории плазмы», т. 4, М., Атомиздат, 1964.
3. В. П. Карпман, *Нелинейные волны в диспергирующих средах*, М., «Наука», 1973.
4. G. B. Whitham, *Proc. Roy. Soc. A* 299, 6 (1967).
5. а) M. J. Lighthill, *ibid.*, p. 28; б) А. В. Гапонов, Л. А. Островский, М. И. Рабинович, *Изв. вузов (Радиофизика)* 13, 163 (1970).
6. Б. Б. Кадомцев, В. П. Карпман, *УФН* 103, 193 (1971).
7. а) C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, R. M. Miura, *Phys. Rev. Lett.* 19, 1095 (1967); б) P. D. Lax, *Comm. Pure and Appl. Math.* 21, 467 (1968).
8. J. C. Luke, *Proc. Roy. Soc. A* 292, 403 (1966).
9. J. K. Moser, *Averaging of Nonlinear Waves*, N. Y., Courant Institute, 1968.
10. а) M. S. Berger, *J. Math. Phys.* 11, 2906 (1970); J. K. Rubinstein, *ibid.*, p. 258; б) И. О. Кулик, И. Р. Янсон, *Эффект Джозефсона в сверхпроводящих туннельных структурах*, М., «Наука», 1970.
11. Л. А. Островский, *ЖЭТФ* 51, 1189 (1966).
12. E. Fermi, J. Pasta, S. Ulam, *Los-Alamos Scientific Report LA-1940* (1955).
13. С. Улам, *Нерешенные математические задачи*, М., «Наука», 1964.
14. N. J. Zabusky, *Proc. of the Conference on Mathematical Models in the Physical Sciences*, Prentice Hall, N. J., 1963.
15. З. А. Гольдберг, *Акуст. ж.* 6, 307 (1960).
16. Л. К. Зарембо, *ibid.* 16, 58 (1970).
17. А. П. Ахиезер, Г. Я. Любарский, *ДАН СССР* 80, 193 (1951).
18. J. M. Dawson, *Phys. Rev.* 113, 383 (1959).
19. Р. З. Сагдеев, сборник «Физика плазмы и управляемые термоядерные реакции», т. 4, М., Изд-во АН СССР, 1958.
20. C. S. Gardner, C. H. Su, *J. Math. Phys.* 10, 536 (1969).
21. Г. М. Заславский, Н. Н. Филоенко, *ЖЭТФ* 56, 1064 (1969).
22. Г. П. Берман, Г. М. Заславский, *Изв. вузов (Радиофизика)* 15, 1456 (1972).
23. Г. М. Заславский, Н. Н. Филоенко, *ЖЭТФ* 57, 1240 (1969).
24. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, М., Физматгиз, 1958.
25. Г. Е. Кузмак, *ПММ* 23, 515 (1959); Ю. А. Митропольский, *Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний*, М., «Наука», 1964.
26. G. B. Whitham, *J. Fluid Mech.* 27, 399 (1967).
27. G. B. Whitham, *Proc. Roy. Soc. A* 283, 268 (1965).
28. G. B. Whitham, *J. Fluid Mech.* 22, 273 (1965).
29. М. И. Рабинович, *Изв. вузов (Радиофизика)* 10, 214 (1967).
30. Н. Н. Филоенко, *ibid.* 13, 925 (1970).
31. Л. А. Островский, Е. Н. Пелиновский, *ДАН СССР* 195, 804 (1970).
32. М. И. Рабинович, А. А. Розенблюм, *ibid.* 199, 586 (1971).
33. Е. Н. Пелиновский, М. И. Рабинович, *Изв. вузов (Радиофизика)* 14, 1373 (1971).
34. а) Н. Н. Боголюбов, *Избранные труды*, т. 2, Киев, «Наукова думка», 1970, стр. 258; б) R. Miura, M. Kruskal, *Application of a Nonlinear WKB Method to the Korteweg — de Vries Equation*, *SIAM J. Appl. Math.* (1973) (будет опубликовано); R. Miura, *The Korteweg — de Vries Equation. Nonlinear Waves*. Ed. S. Leibovich and R. Seebass, Cornell Univ., 1973 (будет опубликовано).
35. а) Л. А. Островский, Е. Н. Пелиновский, *ПММ* 36, 71 (1972); б) М. И. Рабинович, А. А. Розенблюм, *ibid.*, стр. 330.
36. Г. М. Заславский, Б. В. Чириков, *УФН* 105, 3 (1971).
37. Т. В. Венджамин, J. E. Feir, *J. Fluid Mech.* 27, 417 (1967).
38. Т. В. Венджамин, *Proc. Roy. Soc. A* 299, 59 (1967).
39. В. П. Карпман, *Письма ЖЭТФ* 6, 829 (1967).
40. Б. В. Чириков, *АЭ* 6, 630 (1959).
41. Н. Н. Филоенко, *Канд. диссертация (ИЯФ СО АН СССР, 1969)*.
42. В. Е. Захаров, *ЖЭТФ* 51, 1107 (1966).
43. В. П. Карпман, *ЖЭТФ* 52, 1657 (1967).
44. Г. П. Берман, Г. М. Заславский, *ЖЭТФ* 57, 1240 (1969).
45. Г. М. Заславский, *ЖЭТФ* 62, 2129 (1972).
46. Н. Бломберген, *Нелинейная оптика*, М., «Мир», 1966.
47. R. Z. Sagdeev, A. A. Galeev, *Nonlinear Plasma Theory*, New York—Amsterdam, Benjamin, Inc., 1969.
48. Б. Б. Кадомцев, В. И. Петвиашвили, *ДАН СССР* 192, 753 (1970).
49. В. И. Петвиашвили, *ibid.* 201, 1307 (1971).

50. Л. А. Островский, Е. Н. Пелиновский, Изв. АН СССР (Физика атмосферы и океана) 6, 934 (1970).
 51. R. Grimshaw, J. Fluid Mech. 44, 639 (1970); 46, 611 (1971).
 52. Е. Н. Пелиновский, ПМТФ, № 6, 80 (1971).
 53. F. P. Bretherton, C. J. R. Garret, Proc. Roy. Soc. A302, 529 (1968).
 54. Г. М. Заславский, ДАН СССР 192, 760 (1970).
 55. а) M. S. Howe, J. Fluid Mech. 30, 497 (1967); 32, 779 (1968); б) Г. М. Заславский, С. С. Моисеев, В. А. Мухин, ЖТФ (1973).
 56. В. В. Тамойкин, С. М. Файнштейн, ЖЭТФ 62, 213 (1972); Е. Н. Пелиновский, А. И. Санчев, В. С. Фридман, Акуст. ж. 18 (4) (1972); В. В. Тамойкин, С. М. Файнштейн, ЖЭТФ 64, 505 (1973).
 57. Н. Н. Филоненко, ДАН СССР 189, 1208 (1969).
 58. Е. Н. Пелиновский, Изв. АН СССР (Физика атмосферы и океана) 7, 1226 (1971).
 59. M. S. Howe, J. Fluid Mech. 45, 785 (1971).
 60. В. Е. Захаров, ЖЭТФ 51, 688 (1966).
 61. Ф. М. Израйлев, Б. В. Чириков, ДАН СССР 166, 57 (1966); Ф. М. Израйлев, А. И. Хисамутдинов, Б. В. Чириков, Препринт ИЯФ СО АН СССР № 252, Новосибирск, 1968.
 62. Г. М. Заславский, Р. З. Сагдеев, ЖЭТФ 52, 1081 (1968).
 63. M. Toda, Progr. Theor. Phys. Suppl. 45, 174 (1970).
 64. M. Toda, M. Wadati, J. Phys. Soc. Japan 34, 18 (1973).
 65. M. D. Kruskal, N. J. Zabusky, J. Math. Phys. 7, 1256 (1966).
 66. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, М., Физматгиз, 1960.
-