1972 г. Сентябрь *Том 108, вып. 1*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ФИЗИКА НАШИХ ДНЕЙ

533.9

РАЗВИТИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ О ПЛАЗМЕННОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

В. Н. Цытович

Представление об эффективных турбулентных столкновениях пронизывает основы математического описания турбулентного состояния плазмы, а при конкретном учете эффективных столкновений самым существенным образом применяются результаты, которые следует сравнивать с существующими экспериментами.

1. КОНЦЕПЦИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ВОЗБУЖДЕНИЙ В ТЕОРИИ ПЛАЗМЕННОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

а) Введение. Турбулентность плазмы исследовалась в последние годы весьма интенсивно как экспериментально, так и теоретически (см. обзоры [1, 2]) и использовалась во многих астрофизических задачах [3]. Такой интерес к проблемам плазменной турбулентности в первую очередь связан с широким фронтом экспериментальных исследований плазмы, которые выявили большую роль турбулентных процессов в ней. Часто оказывается, что основные макроскопические характеристики плазмы, такие, как диффузия, электропроводность, теплопроводность и т. п., определяются именно турбулентными процессами. Это легко понять, если учесть, что плазма оказалась в чрезвычайной степени неустойчивым состоянием, когда подчас для развития неустойчивости достаточно очень малых отклонений от термодинамического равновесия. Еще Ландау и Гейзенберг [4] отмечали, что началом развития турбулентности в жидкостях является неустойчивость. Это же верно и для плазмы. Выяснилось также, что турбулентность возможна не только в жидкостях или плазме, но и в твердых телах [5]. Поэтому сам термин «турбулентность» носит теперь несколько иной, а точнее более общий характер (см. п. а) гл. 4). Весьма любопытно, что интенсивные исследования плазменной турбулентности пролили больше света на природу турбулентности как особого состояния вещества, чем исследования турбулентности жидкостей, проводившихся десятилетиями. Это в первую очередь связано с многообразием типов коллективных движений плазмы. Особую роль из них играют такие, которые в грубом приближении можно характеризовать некоторыми собственными частотами. Наиболее известными из них являются *лэнгмюровские* плазменные колебания. Налиие собственных частот сыграло і емаловажную роль в теории турбулентной плазмы.

Развитие представлений о природе турбулентности плазмы шло по двум путям. С одной стороны, использовали методы статистического усреднения, аналогичные тем, которые ранее были использованы в турбулентности жидкостей [6], причем «упругость» плазменных движений являлась основанием для предположения о слабой корреляции полей турбулентных колебаний [1]. С другой стороны, использовались представления об элементарных возбуждениях — турбулентных плазмонах [7], вероятности взаимодействия которых находились из принципа соответствия.

Синтез этих подходов был в последнее время получен, исходя из представлений об эффективных турбулентных столкновениях [8]. Как оказалось, усовершенствование метода статистического усреднения типа слабой связи и т. п. не являются выходом за рамки слабой турбулентности, а приводят лишь к корректному учету турбулентных столкновений и в конечном счете дают уравнения, используемые в методе элементарных возбуждений.

С другой стороны, было выяснено физическое различие между турбулентными элементарными возбуждениями и возбуждениями, описывающими состояние плазмы вблизи статистического равновесия. Это различие обязано турбулентным столкновениям. Оно указывает на наличие своеобразных неопределенностей в энергии и импульсе турбулентных плазмонов. Тем самым выясняются механизмы, которые внутренне присущи методу турбулентных плазмонов и ставят естественные ограничения на точность, с которой следует получать ответы, с помощью уравнений, описывающих взаимодействие турбулентных плазмонов. На указанном пути не только удается получить строгие основания для использования метода элементарных возбуждений в турбулентной плазме, но и по-новому рассмотреть проблему затухания Ландау [9], стоха́стического нагрева и необратимости процессов в турбулентном режиме. Наконец, отнюдь не последним по важности является изменение эффективности различных взаимодействий, обязанное турбулентным столкновениям [8,10], которое непосредственно отражается на экспериментально измеряемых макроскопических параметрах плазмы. Учет турбулентных столкновений позволяет получить также форму корреляционных функций [11], измеряемых в большинстве экспериментов с турбулентной плазмой. Все эти вопросы, выясненные в последнее время будут предметом настоящего изложения.

б) Сравнение турбулентности плазмы с турбулентностью несжимаемых жидкостей. Обычно считается, что успехи в развитии теории плазменной турбулентности главным образом связаны с наличием малого параметра, отсутствующего в теории турбулентности жидкостей. Для того чтобы пояснить, в чем тут дело, напомним некоторые известные представления из теории турбулентности несжимаемых жидкостей. Неустойчивость ряда течений жидкостей приводит к взбуждению вихрей. В развитом турбулентном состоянии присутствуют вихри всевозможных масштабов, существенно отличных от тех, которые обязаны непосредственному их возбуждению Происходит дробление масштабов вихрей. Оно связано с нелинейным взаимодействием вихрей разных масштабов и создает поток энергии вихрей к меньшим масштабам, где они гибнут из-за вязкости. Согласно Колмогорову [12] такой поток в стационарной турбулентности постоянен. Это приводит к универсальному распределению турбулентных вихрей по масштабам, известному как *спектр Колмогорова* [12]. Если W — энергия турбулентных вихрей в 1 *см*^{3}, а k — волновое число вихря (т. е. величина, обратная его масштабу l,

$k = 2\pi/l$), то $W = \int W_k\,dk$ и формула для спектра Колмогорова имеет вид (рис. 1)

$$W_k = \text{const}\cdot K^{-5/3} \tag{1.1}$$

(на рис. 1 $k \approx k_0$ — область возбуждения турбулентных вихрей, $L = 2\pi/k_0$ — основной масштаб турбулентности, $k \gg k_0$ — область спектра Колмогорова). Строгого теоретического вывода этой формулы, полученной из соображений размерностей, до сих пор не дано, несмотря на многочисленные подходы и многолетнее развитие теории турбулентности жидкостей (подробнее см. [13]). В ряде работ спектр (1.1) выводится ценой введения новых «принципов», таких, как требование максимальности обобщенной энтропии [14] и другие [15], которые непосредственно в исходных уравнениях не содержатся.

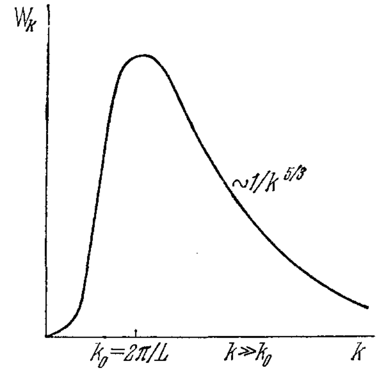

Рис. 1. Спектры турбулентности несжимаемой жидкости.

Считается, что указанные трудности носят принципиальный характер и связаны с тем, что в несжимаемой жидкости турбулентность является сильной. Это выражается в том, что вихри вообще не имеют какой-либо собственной частоты и время передачи энергии от одного вихря к соседнему порядка одного оборота вихря. В отличие от этого, в плазме существует много коллективных движений типа колебаний, которые имеют определенные собственные частоты. Время τ передачи энергии этих колебаний к соседним масштабам (или соседним волновым числам) может намного превосходить характерный период колебаний $1/\omega_k$. Вследствие этой «упругости» коллективных движений может появиться малый параметр

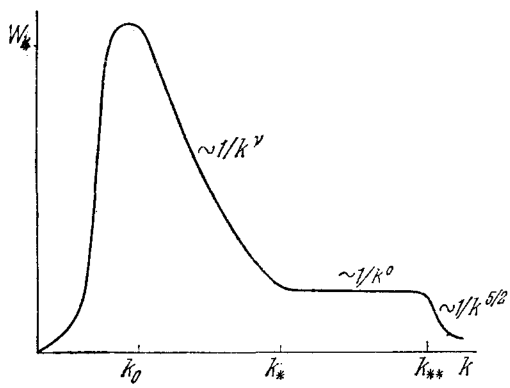

Рис. 2. Схематическое изображение спектров турбулентности лэнгмюровских колебаний плазмы.

$$\varepsilon = 1/\omega_k\tau \ll 1. \tag{1.2}$$

Считается, что наличие этого малого параметра позволяет использовать регулярные методы разложения по энергии турбулентности и строить теорию слабой турбулентности. Вначале именно на этом пути было предложено так называемое *квазилинейное приближение* [16], не учитывающее взаимодействия колебаний между собой, а также были учтены нелинейные эффекты [1, 7, 17]. Метод элементарных возбуждений [7], на основе которого были получены многие конкретные результаты по взаимодействию плазмонов между собой и с частицами плазмы, использовали для нахождения спектров турбулентности плазмы [18, 19]. Эти спектры в ряде областей волновых чисел носят характер универсального степенного распределения $1/k^{\nu}$, однако ν может быть разным в разных областях, так как меняется относительная роль различных нелинейных процессов, ответственных за формирование спектра (рис. 2; турбулентные колебания возбуждены при $k \gg k_{**}$; $k_* = (\omega_{pe}/v_{Te})(m_e/9m_i)^{1/2}$, $k_{**} = (\omega_{pe}/v_{Te})(m_e/9m_i)^{1/5}$; величина ν зависит от полной энергии, заключенной в колебаниях, и лежит в пределах $2{,}8 < \nu < 4$). Такого типа спектры для плазмы есть результат решения нелинейных уравнений, описывающих турбулентность (о численных решениях таких уравнений и соответствии их аналитическим см. в работе [20]). Подробное экспериментальное исследование спектров для развитой ионнозвуковой турбулентности также показало, что наблюдаемые спектры близки к степенным [21, 22]. Заметим, что в большинстве таких экспериментов параметр (1.2) мал. Точнее, малым оказывается несколько иная величина — отношение измеренной турбулентной энергии W к тепловой энергии частиц плазмы nT:

$$\varepsilon' = W/nT \ll 1.$$

Так, в экспериментах [23] ε' составляло 10^{-1}—10^{-2}. Конкретно, для ионнозвуковых колебаний из существующей теории [1, 10] следует, что ε' порядка ε. Таким образом, в плазме для «упругих» степеней свободы есть, казалось бы, малый параметр, есть удовлетворительный способ теоретического рассмотрения спектров и существуют эксперименты, к которым такая теория должна быть приложима. Однако дальнейшее развитие теоретических представлений привело к пониманию того обстоятельства, что наличие малого параметра (1.2) не спасает от неразложимости взаимодействий по этому параметру. Физический смысл этого связан с резонансным характером самих взаимодействий. Для того чтобы пояснить это, нужно кратко остановиться на описании взаимодействия турбулентных пульсаций между собой и с «частицами» плазмы на языке элементарных возбуждений.

в) Уравнения баланса для турбулентных плазмонов. В общем случае неизотропной турбулентности спектр нужно описывать плотностью энергии турбулентности, отнесенной к элементу $d\mathbf{k}$, т. е.

$$W = \int W_{\mathbf{k}} d\mathbf{k}. \tag{1.3}$$

Поскольку турбулентные колебания обладают собственными частотами $\omega_{\mathbf{k}}$, можно ввести число квантов $N_{\mathbf{k}}$ ($\hbar = 1$):

$$W_{\mathbf{k}} = \omega_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}}/(2\pi)^3.$$

Для чисел квантов $N_{\mathbf{k}}$ можно записать уравнение, описывающее их излучение и поглощение частицами, рассеяние на частицах, нелинейные распады одних квантов на другие, вводя соответствующие вероятности [7]. Уравнения, учитывающие как индуцированные, так и спонтанные процессы, будут нелинейными по $N_{\mathbf{k}}$, а следовательно, и по $W_{\mathbf{k}}$. Такое взаимодействие изменяет волновые числа колебаний и создает поток энергии «вдоль $\mathbf{k}$». Так, уравнение, описывающее излучение волны σ заряженной частицей, движущейся по винтовой линии в магнитном поле $\mathbf{H}$, в квазиклассическом пределе имеет вид

$$dN_{\mathbf{k}}^{\sigma}/dt = \gamma_{\mathbf{k}}^{\sigma} N_{\mathbf{k}}^{\sigma} + (2\pi)^3 \omega_{\mathbf{k}}^{-1} Q_{\mathbf{k}}^{\sigma}. \tag{1.4}$$

Величина $Q_{\mathbf{k}}^{\sigma}$ — мощность спонтанного излучения, отнесенная к интервалу $d\mathbf{k}$:

$$Q_{\mathbf{k}}^{\sigma} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int [\omega_{\mathbf{k}}^{\sigma}/(2\pi)^3]\, w^{\sigma}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \nu)\, \Phi_{\mathbf{p}}\, d\mathbf{p}/(2\pi)^3,$$

а

$$\gamma_{\mathbf{k}}^{\sigma} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int w^{\sigma}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \nu)\, \Delta\lambda_i \frac{\partial \Phi_{\mathbf{p}}}{\partial \lambda_i} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}$$

— коэффициент затухания или раскачки волн; ν — целое число; $i=1, 2, 3$; $\lambda_1=p_{\parallel}$, $\lambda_2=p_{\perp}$, $\lambda_3=y$, $p_{\parallel}=(\mathbf{pH})/H$, $p_{\perp}=(p^2-p_{\parallel}^2)^{1/2}$; y — координата центра ларморовского кружка; $\Delta\lambda_1=k_{\parallel}$ $(k^2=k_{\parallel}^2+k_{\perp}^2)$, $\Delta\lambda_2=\nu\varepsilon\omega_H/p_{\perp}$, $\Delta\lambda_3=-k_{\perp}/\omega_H\varepsilon$, $\omega_H=eH/\varepsilon$; $\varepsilon=(p^2+m^2)^{1/2}$, $k_{\parallel}=(\mathbf{kH}/H)$.

Этот результат получается очень просто [24], если использовать квантовые представления о движении частицы в магнитном поле (см. [25, 26]); тогда ν — разность двух квантовых чисел, описывающих переход между уровнями Ландау. Величина W^σ — дифференциальная вероятность излучения, которая может быть в квазиклассическом пределе найдена из принципа соответствия [7]. А именно, в пределе $N_{\mathbf{k}}\to 0$ в (1.4) остается лишь спонтанное излучение, интенсивность которого легко подсчитывается в классическом пределе методом Ландау [27] по воздействию поля, созданному частицей, на саму частицу. Она имеет следующий конкретный вид:

$$w^\sigma(\mathbf{k},\ \mathbf{p},\ \nu)=(2\pi)^3\frac{e^2}{\pi}\frac{|\Gamma_{\mathbf{k}}e_{\mathbf{k}}^\sigma|^2\,\delta(\omega_{\mathbf{k}}^\sigma-k_{\parallel}v_{\parallel}-\nu\omega_H)}{\left.\dfrac{\partial}{\partial\omega}\,\omega^2\varepsilon_{ij}e_{\mathbf{k},i}^{\sigma *}e_{\mathbf{k},j}^\sigma\right|_{\omega=\omega_{\mathbf{k}}^\sigma}};$$

здесь ε_{ij} — линейный тензор диэлектрической проницаемости, $\mathbf{e}_{\mathbf{k}}^\sigma$ — нормальный орт волны σ. Вектор $\Gamma_{\mathbf{k}}$ имеет следующие компоненты:

$$\Gamma_1=\nu v_{\perp}J_\nu(\zeta)/\zeta,\quad \Gamma_2=-iv_{\perp}J_\nu'(\zeta),\quad \Gamma_3=v_{\parallel}J_\nu(\zeta);\quad \zeta=k_{\perp}v_{\perp}/\omega_H.$$

Любопытно отметить, что в такой форме уравнение (1.4) содержит большинство наиболее важных неустойчивостей плазмы, в том числе и дрейфовые [1] (производная по y), описывает также синхронное излучение и его реабсорбцию [28] и синхротронную неустойчивость [29]. Аналогичные уравнения баланса для функции распределения частиц $\Phi_{\mathbf{p}}$

$$\frac{d\Phi_{\mathbf{p}}}{dt}=\frac{\partial}{\partial p_i}D_{ij}\frac{\partial\Phi_{\mathbf{p}}}{\partial p_j}+\frac{\partial}{\partial p_j}A_j\Phi_{\mathbf{p}} \qquad (1.5)$$

соответствуют общему случаю квазилинейных уравнений, учитывающих спонтанные процессы:

$$D_{ij}=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\int\Delta\lambda_i\Delta\lambda_j w^\sigma(\mathbf{k},\ \mathbf{p},\ \nu)\,N_{\mathbf{k}}^\sigma\,d\mathbf{k}/(2\pi)^3,$$

$$A_j=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\int\Delta\lambda_j w^\sigma(\mathbf{k},\ \mathbf{p},\ \nu)\,d\mathbf{k}/(2\pi)^3.$$

Эти уравнения также получаются элементарно из условий баланса излучения и поглощения. Они фактически, как частный случай, содержат все результаты работ [30] по обобщению квазилинейных уравнений на случай магнитоактивной плазмы, систему квазилинейных уравнений [31] для дрейфовых волн, квазилинейные уравнения для релятивистской плазмы [32] и для синхротронной неустойчивости.

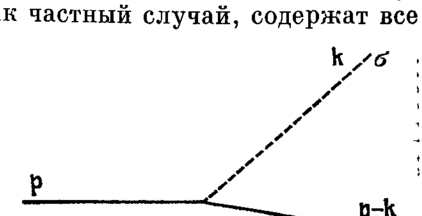

Рис. 3. Процесс излучения волны заряженной частицей.

Графически элементарный процесс, который описывается этими уравнениями, изображен на рис. 3. Заметим, что уравнение (1.4) линейно по $N_{\mathbf{k}}$ и, следовательно, по энергии турбулентности $W_{\mathbf{k}}$; точно так же и коэффициент диффузии линеен по $W_{\mathbf{k}}$, с чем и связано название этих уравнений — *квазилинейные*. Более сложные процессы взаимодействия плазмонов с частицами, например изображенные на рис. 4, дадут уже в обоих уравнениях (1.4) и (1.5) члены, квадратичные по $W_{\mathbf{k}}$. Распадный процесс, изображенный на рис. 5, даст вклад лишь в уравнение (1.4). Эти процессы дают нелинейное взаимодействие волн, приводящее к трансформации турбулентной энергии вдоль спектра. В общем виде они были получены в работах [33]. Обратим внимание на то, что процесс рассеяния (см. рис. 4) содержит два графика, описывающих обычное томсоновское и нелинейное

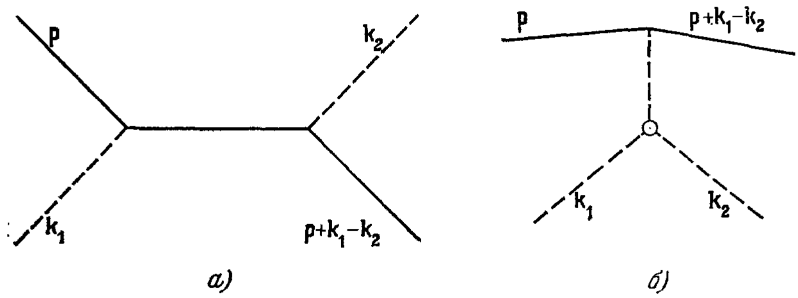

Рис. 4. Процессы рассеяния волн заряженными частицами плазмы — томсоновское рассеяние (*а*) и нелинейное рассеяние (*б*).

рассеяния. В связи с изложенным сделаем два существенных замечания. Во-первых, уравнения для элементарных возбуждений, получаемые на этом пути, сходны с уравнениями для элементарных возбуждений для систем, близких к статистическому равновесию, хотя в условиях развитой турбулентности система находится далеко от статистического равновесия. Известно, что представления об элементарных возбуждениях являются основными в современной статистической теории конденсированных сред и могут быть наиболее полно обоснованы вблизи равновесия методом функций Грина [34]. Однако турбулентные возбуждения, как будет видно из дальнейшего, имеют иную природу, что очень существенно для конкретных приложений теории.

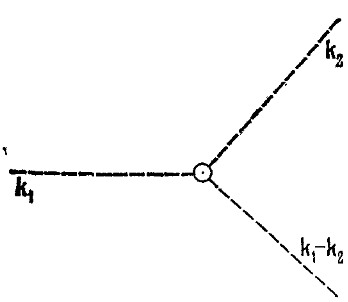

Рис. 5. Схема распадного процесса.

Во-вторых, все взаимодействия турбулентных плазмонов носят резонансный характер. Так, излучение происходит только при выполнении условия $\omega_{\mathbf{k}}^{\sigma}-k_{\|}v_{\|}-\nu\omega_H=0$, а без магнитного поля при выполнении черенковского условия $\omega_{\mathbf{k}}^{\sigma}-\mathbf{kv}=0$, рассеяния также требуют выполнения аналогичных условий, но вместо частоты фигурирует разность частот двух волн, а вместо волнового числа — разность волновых чисел. С квантовой точки зрения эти условия описывают законы сохранения при излучении и рассеянии волн, а с классической — резонанс между волнами и частицами. Нелинейные взаимодействия, в которых не участвуют частицы, например распадные, также носят резонансный характер. Так, даже в приближении фиксированных фаз, используемом обычно в нелинейной оптике [35], для эффективной передачи энергии от одной моды к другой необходимо выполнение резонансных условий. Для случайных волн, каковыми являются турбулентные плазмоны, эти условия совпадают с законами сохранения импульса и энергии плазмонов при распаде. Для процесса, изображенного на рис. 5, эти условия имеют вид $\omega_{\mathbf{k}_1}=\omega_{\mathbf{k}_2}+\omega_{\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2}$.

Отметим, что резонансность нелинейных взаимодействий ставит вопрос о применимости малого параметра (1.2) для описания взаимодействий в плазме. Действительно, вблизи резонанса можно бы было бы ожидать, что параметр (1.2) заменится на

$$\varepsilon'' = 1/\overline{(\omega - \omega_{\mathbf{k}})}\tau,$$

где $\omega_{\mathbf{k}}$ — некоторая резонансная частота, черта означает усреднение, смысл которого будет ясен из дальнейшего. Резонансный множитель $1/(\omega - \omega_{\mathbf{k}})$ обращается в бесконечность при $\omega \to \omega_{\mathbf{k}}$, однако в действительности резонанс должен быть размыт, хотя бы благодаря тем же нелинейным взаимодействиям. Тогда среднее значение $\overline{\omega - \omega_{\mathbf{k}}}$ порядка $1/\tau$ и, следовательно, ε'' порядка единицы. Это приводит к мысли, что турбулентности жидкостей и плазмы не столь уж различны. В действительности, однако, концепция элементарных возбуждений невозможна в жидкостях, тогда как в плазме является возможной и правильной. Причина этого как раз в наличии параметра (1.2). Вместе с тем резонансный характер взаимодействий, строго говоря, не позволяет раскладывать их в ряд по энергии турбулентности. Однако эта неразложимость сказывается лишь на структуре резонансных знаменателей. В определенном приближении они аппроксимируются соотношениями, приводящими к виду, используемому в записанных выше уравнениях баланса. Возможность такой аппроксимации и определяет возможность использования представлений об элементарных возбуждениях.

г) Общие представления о турбулентном состоянии вещества. Стоит сказать несколько слов об общих взглядах на то, что такое турбулентное состояние вещества. Турбулентность возникает лишь в нелинейной системе, имеющей некоторые коллективные моды движений. В плазме это могут быть плазменные колебания, в жидкости — вихри, в твердых телах — фононы и т. п. Имеются существенные различия в природе самих коллективных движений. Так, в плазме они обычно сопровождаются электромагнитными полями, в жидкости — нет. Важно другое. Если в нелинейную систему вводится достаточно большое количество энергии в какие-то ее коллективные движения, то нелинейные взаимодействия, согласно общим положениям статистики, должны перераспределять ее по другим модам — другим степеням свободы. Таким образом, энергия откачивается из тех мод, где она генерируется, т. е. возникает поток энергии. Направление потока также может быть различным. Так, в жидкостях энергия переходит к пульсациям с большими волновыми числами (меньшими масштабами), а плазме — к меньшим волновым числам. Это различие обязано природе нелинейных взаимодействий. В жидкостях энергия передается от одних пульсаций к другим с сохранением энергии, заключенной в пульсациях. В плазме энергия может передаваться частицам, нагревая их. Выигрыш в энтропии за счет такого нагрева компенсирует убыль ее из-за уменьшения фазового объема, занимаемого колебаниями, в процессе уменьшения их волновых чисел.

Ясно, что колебания в плазме где-то гибнут. Особенно эффективным является их коллективное поглощение, обязанное затуханию Ландау [9] или циклотронному затуханию. Если возникает стационарная турбулентность, то происходит баланс генерации и поглощения. Он возможен лишь при наличии потока энергии из области генерации в область поглощения. Таким образом, для возникновения стационарной турбулентности необходимо, чтобы: 1) было возбуждено большое количество коллективных степеней свободы; 2) энергия, заключенная в них, была достаточной для возникновения нелинейных процессов, трансформирующих энергию из области генерации в области поглощения; 3) существовало разделение областей генераций и поглощения. Нелинейные процессы входят составной частью в понятие турбулентности. В плазме они приводят не только к размешиванию энергии по многим модам, но и к быстрому сбою фазы плазменных колебаний, делая их случайными, а плазмоны — турбулентными (строго говоря, о фазах можно говорить лишь приближенно, так как в силу сказанного колебания не являются линейными). Несмотря на это, до сих пор часто недооценивается роль нелинейных процессов в теории турбулентности и часто исследования ограничиваются только квазилинейными процессами. С развитием теории область применимости квазилинейного приближения все время сужалась по мере того, как нелинейные эффекты оценивались более точно. Так, например, для слабых пучков частиц квазилинейный подход оказался применим, только если их скорости ограничены неравенствами $1 < v/v_{Te} \ll (9m_i v/m_e \Delta v)^{1/4}$. Точно так же значительно большей оказалась роль нелинейных взаимодействий в создании аномального сопротивления плазмы внешнему электрическому полю [10]. Существует также утверждение, что случайный характер колебаний может сохраняться на квазилинейной стадии благодаря тому, что колебания возбуждаются с теплового уровня. Однако случайность колебаний в условиях теплового равновесия, если оно обязано парным соударениям частиц, соответствует большим промежуткам времени и остается открытым вопрос о том, будут ли случайными такие колебания на малых промежутках времени, в течение которых происходит возбуждение колебаний из-за неустойчивости. Вместе с тем в условиях достаточного, но не очень большого уровня колебаний учет нелинейностей (которые сами размешивают колебания по фазам) дает строгое обоснование квазилинейных уравнений (см. ниже). В этих условиях обычно учет квазилинейных эффектов должен производиться наряду с нелинейными, которые во многих случаях оказываются более эффективными.

д) Эффективные турбулентные столкновения. Понятие об эффективных турбулентных столкновениях часто вводится экспериментаторами. Оно удобно в связи с тем, что обычно в турбулентном режиме все процессы диссипации оказываются резко увеличенными. Практически это делается следующим образом. Берется, например, формула, описывающая электропроводность плазмы из-за парных соударений:

$$\sigma = ne^2/m_e\nu_{ei}, \tag{1.6}$$

в которую входит частота парных соударений ν_{ei}. Наблюдаемая электропроводность на много порядков меньше той, которая дается (1.6). Тогда в (1.6) вместо ν_{ei} подставляют $\nu_{\text{эфф}}$ и определяют $\nu_{\text{эфф}}$ по экспериментально наблюдаемой σ [36]. Такой же подход используется для описания аномального поглощения ВЧ полей, возбуждающих турбулентность в плазме [37], для аномальной диффузии [1] и т. п. Ясно, что такой подход является феноменологическим. Однако имеются и более глубокие физические основания для введения эффективных турбулентных соударений. Во-первых, отметим, что определенные феноменологически $\nu_{\text{эфф}}$ оказываются зависящими от энергии турбулентности W [38], могут иметь зависимость от углов и т. п. В этом отношении феноменология «мстит», так как фактически внутренние физические механизмы, лежащие в основе таких макроскопических характеристик, как среднее значение электропроводности (1.6) в турбулентном режиме, отличны от парных соударений. Зависимость $\nu_{\text{эфф}}$ от W указывает на то, что они связаны с нелинейными процессами. В условиях стационарной турбулентности можно определить характерное время трансформации энергии по спектру, зависящее от W. Величину, обратную ему, можно назвать *эффективной турбулентной частотой* столкновений $\nu_{эфф}$. Наличие таких эффективных столкновений органически входит в представление о турбулентности. Поскольку нелинейные процессы, ответственные за формирование потока энергии, могут быть различными, эффективные столкновения будут иметь разную природу. Эти столкновения нужно отличать от тех, которые определяются феноменологически. Однако феноменологические $\nu_{эфф}$ однозначно связаны с соответствующими нелинейными процессами, их создающими, так же, например, как ν_{ei} в (1.6) связано с парными столкновениями, описываемыми интегралом столкновений Ландау [39]. Однако турбулентные столкновения играют и более принципиальную роль, а именно, их необходимо органически учитывать при построении теории турбулентности и обосновании метода элементарных возбуждений (см. ниже). Исходя из представлений о турбулентных соударениях, можно легко качественно понять ряд простых утверждений, доказательство которых описано несколько ниже.

Во-первых, грубо говоря, резонансные знаменатели должны размазываться турбулентными столкновениями и вместо $1/(\omega - \omega_{\mathbf{k}})$ должно фигурировать

$$1/(\omega - \omega_{\mathbf{k}} + i\nu_{эфф}).$$

Во-вторых, такая размазка существенно видоизменяет интенсивность самих нелинейных взаимодействий. Использование приближения случайных фаз одновременно с предположением о том, что резонансные знаменатели имеют вид $1/(\omega - \omega_{\mathbf{k}} + i\delta)$, пригодно только в пределе бесконечно малой амплитуды волн $\delta \to 0$, когда $\nu_{эфф} \to 0$, т. е. в условиях, когда нелинейные взаимодействия пренебрежимо малы. Однако именно такое описание было использовано в ряде первых работ по нелинейному взаимодействию случайных волн [17]. Это может быть правильным только тогда, когда можно использовать аппроксимацию

$$\mathrm{Im}\,(\omega - \omega_{\mathbf{k}} + i\nu_{эфф})^{-1} \approx -\pi\delta\,(\omega - \omega_{\mathbf{k}}). \tag{1.7}$$

Для многих взаимодействий это незаконно, и нужно учитывать, что внутри резонанса

$$1/(\omega - \omega_{\mathbf{k}} + i\nu_{эфф}) \approx -i\nu_{эфф}^{-1}.$$

Таким образом, эффективные соударения являются реальным физическим процессом, сказывающимся на самих взаимодействиях, которыми они определяются.

В-третьих, совершенно по-иному ставится проблема затухания Ландау [9]. В линейной теории такое затухание обратимо и описывает обмен энергии между захваченными частицами и волной. В турбулентной плазме затухание коллективных колебаний оказывается необратимым. Это связано с тем, что именно эффективные турбулентные соударения создают необратимость и приводят к совершенно иной, нелинейной, трактовке такого затухания.

В-четвертых, эффективные турбулентные соударения определяют ширины корреляционных кривых, которые измеряются во многих экспериментах по турбулентной плазме.

Наконец, в-пятых, турбулентные столкновения создают неоднозначность между частотой и волновым числом турбулентного плазмона, т. е. неоднозначность в связи между энергией и импульсом элементарных возбуждений турбулентной плазмы. Аналогичная неоднозначность имеет место и в условиях, близких к тепловому равновесию, но она связана с линейным затуханием (и трактуется также, как это было рассмотрено Ландау для плазменных волн в линейной теории). Здесь же эта неоднозначность связана с нелинейным процессом. Отсюда становится ясным и коренное отличие турбулентного плазмона от плазмона, описывающего состояние, близкое к статическому равновесию. Вместе с тем о плазмоне как о квазичастице можно говорить в турбулентном режиме тогда, когда $\nu_{\text{эфф}}$ меньше собственной частоты плазмона:

$$\nu_{\text{эфф}}/\omega_{\mathbf{k}} \ll 1. \tag{1.8}$$

Это условие совпадает с (1.2).

е) Уравнение баланса и концепция элементарных возбуждений турбулентной плазмы. Рассмотрим теперь качественно вопрос о том, какое место в общей теории турбулентности занимают уравнения баланса для турбулентных плазмонов и какие физические критерии и приближения нужно использовать для того, чтобы описывать турбулентность на языке турбулентных плазмонов. Пусть простоты ради турбулентные колебания являются электростатическими продольными плазменными колебаниями, которые можно описать при помощи потенциалов φ электрических полей. Обычно исследуется корреляционная функция потенциала $|\varphi_{\mathbf{k},\omega}|^2$. Если в полном потенциале выделить регулярную φ^{r} и стохастическую φ^{st} части:

$$\varphi = \varphi^{\mathrm{r}} + \omega^{\mathrm{st}}, \quad \langle \varphi^{\mathrm{st}} \rangle = 0,$$

то корреляционная функция для стационарной турбулентности определится соотношением

$$|\varphi_{\mathbf{k},\omega}|^2 = (2\pi)^{-4} \int \langle \varphi^{\mathrm{st}}(\mathbf{r}, t)\, \varphi^{\mathrm{st}}(\mathbf{r}', t') \rangle\, e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}'-\mathbf{r}) - i\omega(t'-t)}\, d(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\, d(t-t').$$

Эта корреляционная функция связана с величиной $W_{\mathbf{k},\omega}$, плотностью энергии турбулентности, отнесенной к интервалу волновых чисел $d\mathbf{k}$ и частот $d\omega$:

$$W = \int W_{\mathbf{k},\omega}\, d\mathbf{k}\, d\omega,$$

соотношением

$$W_{\mathbf{k},\omega} = \alpha_{\mathbf{k}}\, |\varphi_{\mathbf{k},\omega}|^2,$$

где $\alpha_{\mathbf{k}}$ для слабой турбулентности — известная функция $\mathbf{k}$ (для лэнгмюровских колебаний, например, $\alpha_{\mathbf{k}} = k^2/4\pi$). Очевидно, что $W_{\mathbf{k},\omega}$ содержит более подробную информацию о турбулентных колебаниях, чем $W_{\mathbf{k}}$, введенная соотношением (1.3):

$$W_{\mathbf{k}} = \int W_{\mathbf{k},\omega}\, d\omega. \tag{1.9}$$

А именно, при фиксированном $\mathbf{k}$ распределение по ω характеризуется некоторой конечной шириной, определяемой эффективными турбулентными столкновениями. Запишем символически уравнение, описывающее состояние стационарной плазменной турбулентности, в виде

$$\Phi(\mathbf{k}, \omega, W_{\mathbf{k}_1,\omega_1}) = 0, \tag{1.10}$$

где Φ — некоторый нелинейный функционал $W_{\mathbf{k}_1,\omega_1}$. Предположим, что конкретный вид (1.10) известен (см. ниже). Из (1.10) можно получить следствие — уравнение баланса. Для этого проинтегрируем (1.10) по всем частотам:

$$\int \Phi(\mathbf{k}, \omega, W_{\mathbf{k}_1,\omega_1})\, d\omega = 0. \tag{1.11}$$

Возникает при этом вопрос: можно ли уравнение баланса (1.11) написать в таком виде, чтобы оно содержало лишь интегральную характеристику $W_{\mathbf{k}}$

(1.9), описывающую спектр турбулентности? Другими словами, можно ли (1.11) приближенно записать в виде

$$\tilde{\Phi}(\mathbf{k},\ W_{\mathbf{k}_1})=0, \tag{1.12}$$

где $\tilde{\Phi}$ — некий новый нелинейный функционал, получающийся из Ф? Оказывается, что это приближенно возможно при наличии «упругости» коллективных движений или, точнее, при использовании параметра (1.8). Существенно то, что уравнение (1.11) содержит интеграл по всем частотам, который будет мало чувствителен к размазке резонансов турбулентными столкновениями. Уравнение (1.12) получится, если использовать аппроксимацию (1.7) для резонансных знаменателей и пренебречь неопределенностью в связи частоты и волнового числа в корреляционных функциях, т. е. положить

$$W_{\mathbf{k}_1,\,\omega_1}\approx W_{\mathbf{k}_1}\delta(\omega_1-\omega_{\mathbf{k}_1}).$$

Последнее тоже возможно только в том случае, когда в (1.11) входит интеграл по ω_1. Таким образом, уравнение (1.12) возникает как первое приближение к (1.11) по параметру (1.8). Это уравнение совпадает с тем, которое получается методом элементарных возбуждений. Ясно также, что законы сохранения для взаимодействия элементарных возбуждений должны теперь выполняться лишь с точностью до величин $\nu_{\text{эфф}}$. Одно замечание по поводу ряда попыток выхода за рамки слабой турбулентности, известных как приближение слабой связи [1]. Фактически в этих попытках шла речь о выходе за приближение, в котором нелинейности раскладываются в ряды по W. Но в (1.10) такое разложение никогда не возможно даже для слабой турбулентности, а применительно к (1.11) речь идет фактически о правильном описании турбулентных соударений, которые в конечном счете дают обоснование методу элементарных возбуждений. Эти выводы не были сделаны в указанных работах, и мы обсудим эти вопросы в следующих главах. Здесь же отметим, что в турбулентности несжимаемых жидкостей отсутствует параметр (1.2), и поэтому выделить корреляционные эффекты и составить уравнения для $W_{\mathbf{k}}$ невозможно. В условиях турбулентной плазмы можно разделить теоретические проблемы отыскания спектра турбулентности и корреляционных функций. Спектры можно искать из уравнений баланса (1.12). Зная их, можно обратиться к приближенному решению уравнения (1.10) для корреляционных функций. В дальнейшем изложении будет конкретно найдено уравнение типа (1.10) методом статистического усреднения.

2. МЕТОД СТАТИСТИЧЕСКОГО УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ПЛАЗМЕННОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

а) Усреднение по статистическому ансамблю

Чтобы не загромождать здесь изложение, ограничимся лишь простейшим случаем продольных полей и продольных волн.

В основе статистического описания турбулентности лежит представление о стохастическом изменении физических величин, например электрического потенциала продольных колебаний. Последнее возможно, если результаты измерения такого потенциала невоспроизводимы. Поясним, в чем здесь дело. Предположим, что в одних и тех же начальных условиях макроскопического эксперимента через время t_0 после начала эксперимента производится измерение потенциала продольных колебаний и при этом получается сложная и «нерегулярная» зависимость потенциала от времени. Наличие такой «нерегулярности» отнюдь не означает, что потенциал является случайной стохастической величиной, так как он может и описывать сложный, но регулярный процесс. Следует посмотреть на результаты многократного повторения того же эксперимента в тех же макроскопических условиях. Невоспроизводимость получаемых «нерегулярностей» колебаний может служить свидетельством стохастичности. Причина этого в том, что малые изменения начальных условий при тех же макроскопических условиях эксперимента приводят к существенному изменению хода всей картины. Таким начальным условием для линейных или почти линейных колебаний может быть их фаза. Однако в общем случае колебания нелинейны и часто употребляемое выражение — приближение случайных фаз — не совсем точно. Более строго следует (как обычно при любом статистическом описании) использовать представление о статистическом ансамбле как ансамбле систем, отличающихся начальными условиями развития коллективных колебаний [40]. Для стохастического потенциала среднее значение по статистическому ансамблю равно нулю,

$$\langle \varphi^{st} \rangle = 0. \tag{2.1}$$

В эргодической системе среднее по ансамблю равняется среднему по времени. Основой статистического описания турбулентности являются общие положения статистической физики, распространенные на интенсивно возбужденные и интенсивно взаимодействующие коллективные степени свободы (для плазмы коллективные колебания). При таком описании органически подразумевается наличие эффективных турбулентных столкновений, обязанных нелинейным взаимодействиям. Если в обычном молекулярном движении равнораспределение по различным степеням свободы и эргодичность достигается столкновениями частиц, то в коллективных движениях — нелинейным взаимодействием мод. Поэтому в развитой турбулентности всегда присутствует много мод. Несколько слов о возбуждении турбулентности. Согласно Ландау [4], такое возбуждение связано с неустойчивостью. Но при неустойчивости может сразу возбуждаться много мод, а может — и не большое их число. Процесс взаимодействия мод может в обоих случаях привести к перераспределению энергии по многим модам, в том числе и тем, которые непосредственно неустойчивостью не возбуждаются. В несжимаемых жидкостях обычно непосредственно возбуждаются лишь крупные вихри, тогда как остальные возникают в результате процесса нелинейного дробления вихрей. В плазме, по-видимому, так называемые *гидродинамические неустойчивости* также могут приводить первоначально к возбуждению нескольких или даже одной моды и лишь потом нелинейности перераспределяют энергию. В указанных примерах начальная стадия развития неустойчивости не является стохастической и лишь со временем система переходит в стохастический режим [41].

б) Общие уравнения для стохастического потенциала. В общем случае потенциал будет наложением регулярной и стохастической частей

$$\varphi = \varphi^{r} + \varphi^{st}, \tag{2.2}$$

где φ^{st} удовлетворяет (2.1), т. е. $\varphi^{r} = \langle \varphi \rangle$. Например, φ^{r} может быть потенциалом внешних полей. Если производить разделение (2.2), то необходимо то же сделать и с функцией распределения:

$$f = f^{r} + f^{st}, \qquad \langle f \rangle = 0,$$

так как в колебаниях всегда участвуют частицы плазмы. Используем бесстолкновительное кинетическое уравнение и уравнение Пуассона для

f и φ, чтобы найти уравнения для f^{st} и φ^{st}:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\mathbf{v}\,\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}=e\nabla\varphi\,\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}},$$

$$\Delta\varphi = -4\pi en = -4\pi e\int f\,d\mathbf{p}/(2\pi)^3. \tag{2.3}$$

Здесь простоты ради в (2.3) сумма по сортам зарядов опущена. Из этих уравнений путем усреднения по статистическому ансамблю и вычитания усредненных уравнений из исходных получается уравнения для регулярных и стохастических компонент. Запишем эти уравнения при некоторых упрощениях, не принципиальных для дальнейшего: 1) $\varphi^{\mathrm{r}}=0$, 2) турбулентность стационара и среднее четырехмерных компонент Фурье любых двух стохастических величин a_{k_1} и b_{k_2} пропорционально $\delta(k_1+k_2)=\delta(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)\,\delta(\omega_1+\omega_2)$; $k=\{\mathbf{k},\ \omega\}$; $dk=d\mathbf{k}\,d\omega$:

$$\frac{\partial f^{\mathrm{r}}}{\partial t}+\mathbf{v}\,\frac{\partial f^{\mathrm{r}}}{\partial \mathbf{r}}=ie\int \mathbf{k}_1\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\langle\varphi^{\mathrm{st}}_{k_1}f^{\mathrm{st}}_{k_2}\rangle\,dk_1\,dk_2, \tag{2.4}$$

$$-i(\omega-\mathbf{k}\mathbf{v})\,f_k^{\mathrm{st}}-ie\varphi_k^{\mathrm{st}}\left(\mathbf{k}\,\frac{\partial f^{\mathrm{r}}}{\partial\mathbf{p}}\right)=$$

$$=ie\int \mathbf{k}_1\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\left(\varphi^{\mathrm{st}}_{k_1}f^{\mathrm{st}}_{k_2}-\langle\varphi^{\mathrm{st}}_{k_1}f^{\mathrm{st}}_{k_2}\rangle\right)\delta(k-k_1-k_2)\,dk_1\,dk_2, \tag{2.5}$$

$$k^2\varphi_k^{\mathrm{st}}=4\pi e\int f_k^{\mathrm{st}}\,d\mathbf{p}/(2\pi)^3. \tag{2.6}$$

Эти уравнения являются точными следствиями исходных уравнений. Уравнение (2.5) описывает нелинейную связь f_k^{st} и φ_k^{st} и содержит резонансный множитель $(\omega-\mathbf{k}\mathbf{v})$. Если (2.5) решено и такая связь найдена, то (2.6) дает нелинейное уравнение для стохастического потенциала, а правая часть (2.4) описывает воздействие стохастического потенциала на регулярную часть функции распределения.

в) Разложение по амплитудам стохастического потенциала. Простейший подход к решению (2.5) в условиях слабой турбулентности, казалось бы, состоит в использовании разложений f_k^{st} по φ_k^{st}. Незаконность такой операции уже разъяснилась выше и, кстати, сразу следует из результата, полученного в первом приближении из (2.5):

$$f_k^{\mathrm{st}}\approx-\frac{e\varphi_k^{\mathrm{st}}}{\omega-\mathbf{k}\mathbf{v}}\left(\mathbf{k}\,\frac{\partial f^{\mathrm{r}}}{\partial\mathbf{p}}\right). \tag{2.7}$$

Конечно, деление на $\omega-\mathbf{k}\mathbf{v}$ законно, если нет резонанса. Но вблизи резонанса $\omega\to\mathbf{k}\mathbf{v}$ результат теряет всякий смысл. Казалось бы, здесь возникает лишь проблема обхода полюса, которая была подробно рассмотрена Ландау [9] и, результат должен привести к известному затуханию Ландау. В действительности это совершенно не так, и вся проблема, рассмотренная Ландау, здесь требует пересмотра. Ландау рассматривал задачу лишь в линейном приближении для слабых возмущений и показал, что точная начальная постановка задачи о развитии такого возмущения (которую удобнее рассматривать при помощи преобразования Лапласса) приводит асимптотически к затуханию возмущений, которое можно описать, если обходить полюс $1/(\omega-\mathbf{k}\mathbf{v})$ так, чтобы он содержал бесконечно малую положительную добавку, т. е. записывать $1/(\omega-\mathbf{k}\mathbf{v})$ в виде $1/(\omega-\mathbf{k}\mathbf{v}+i\delta)$, $\delta\to+0$. Почему же эти результаты незаконно переносить на (2.7)? Уже неоднократно подчеркивалось, что нелинейность является необходимым составным элементом, входящим в само понятие турбулентности. Поэтому кажется очевидным, что в условиях $\omega - \mathbf{kv} \to 0$, когда первый член левой части (2.5) становится малым, отбрасывание нелинейных членов незаконно. Однако более ясно можно понять суть различий данного рассмотрения от того, которое было проведено Ландау, если учесть, что (2.7) записано для стохастических компонент, для которых принципиально постановка начальной задачи невозможна. Как подчеркнуто выше, именно независимость стохастических компонент от начальных условий и невоспроизводимость измерений стохастических компонент является исходным в представлениях о турбулентности.

Если все же, несмотря на все сказанное, продолжить разложение f_k^{st} по φ_k^{st}, то из (2.5) нетрудно найти следующие члены разложения, содержащие $\varphi_{k_1}^{\text{st}}\varphi_{k_2}^{\text{st}}$ и $\varphi_{k_1}^{\text{st}}\varphi_{k_2}^{\text{st}}\varphi_{k_3}^{\text{st}}$ и т. д. Мы не будем их здесь выписывать.

г) Квазилинейное приближение и нелинейности диффузии частиц на турбулентных колебаниях. Если, несмотря на все сказанное, ограничиться приближением (2.7), считая, что $1/(\omega - \mathbf{kv})$ есть $1/(\omega - \mathbf{kv} + i\delta)$, $\delta \to +0$, то, подставив (2.7) в (2.4), получим известные квазилинейные уравнения

$$\frac{\partial f^{\text{r}}}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f^{\text{r}}}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial}{\partial p_i} D_{ij} \frac{\partial f^{\text{r}}}{\partial p_j}, \tag{2.8}$$

$$D_{ij} = e^2\pi \int k_i k_j \,|\,\varphi_k\,|^2\, \delta(\omega - \mathbf{kv})\, dk, \tag{2.9}$$

$$\langle \varphi_k^{\text{st}} \varphi_{k'}^{\text{st}} \rangle = |\,\varphi_k\,|^2\, \delta(k + k').$$

Мы увидим в дальнейшем, что в резонансный знаменатель входит $\nu_{\text{эфф}}$ и что проведенная операция имеет некоторый смысл тогда, когда коэффициент диффузии приближенно от $\nu_{\text{эфф}}$ не зависит. Сейчас же отметим, что полученное уравнение совпадает с тем, которое следует из уравнений баланса для элементарных возбуждений и описывает процессы черенковского излучения и поглощения волн. Если учесть следующие члены разложения f_k^{st} по φ_k^{st}, то можно найти нелинейные члены диффузии частиц на турбулентных колебаниях, в частности члены, содержащие $\langle \varphi_{k_1}^{\text{st}}\varphi_{k_2}^{\text{st}}\varphi_{k_3}^{\text{st}} \rangle$ и $\langle \varphi_{k_1}^{\text{st}}\varphi_{k_2}^{\text{st}}\varphi_{k_3}^{\text{st}}\varphi_{k_4}^{\text{st}} \rangle$. Не вдаваясь в подробности расчетов (см. [42]), подчеркнем здесь ряд моментов, имеющих важное значение для дальнейшего. Если резонанс $\omega_{\mathbf{k}} = \mathbf{kv}$ возможен, то нелинейные члены в диффузии содержат высшие степени резонансных знаменателей $1/(\omega_{\mathbf{k}} - \mathbf{kv})$ и оказывается, что приближение, в котором эти нелинейные члены не зависят от $\nu_{\text{эфф}}$, обычно не существует, т. е. теорией возмущений пользоваться нельзя. Если резонанс $\omega_{\mathbf{k}} = \mathbf{kv}$ невозможен, то деление на нуль отсутствует. Однако в высших приближениях возникает резонанс на биениях:

$$\omega_{\mathbf{k}_1} - \omega_{\mathbf{k}} = (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k})\,\mathbf{v}, \tag{2.10}$$

который, вообще говоря, может выполняться, даже если $\omega_{\mathbf{k}} \neq \mathbf{kv}$. Остается все же открытым вопрос о том, как понимать резонансные знаменатели $1/[\omega - \omega_1 - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)\mathbf{v}]$ и что ставить, $+i\delta$ или $-i\delta$? Ответ на этот вопрос не может быть получен в рамках теории возмущений, так как нужно учесть турбулентные столкновения. Если все же резонансный знаменатель такого вида войдет в первой степени, то можно надеяться, что в определенном приближении можно использовать аппроксимацию (1.7) и получить результат, приближенно не зависящий от $\nu_{\text{эфф}}$. Если действовать таким путем, удается получить нелинейные члены в коэффициенте диффузии (2.8), содержащие $|\,\varphi_{k_1}\,|^2\,|\,\varphi_{k_2}\,|^2$. Это получается, если в члене, содержащем $\langle \varphi_{k_1}^{\text{st}}\varphi_{k_2}^{\text{st}}\varphi_{k_3}^{\text{st}}\varphi_{k_4}^{\text{st}} \rangle$, среднее от четырех потенциалов разбить на возможные средние от двух потенциалов и воспользоваться условием (2.10) для доказательства того, что в правой части уравнения (2.4) все производные по импульсам степени выше второй обращаются в нуль. Интересно, что результат, возникающий от этого нелинейного члена, точно совпадает с тем, который получается в теории элементарных возбуждений, если учесть лишь один процесс рассеяния изображений на рис. 4, *а*. Это, так сказать, рассеяние «голым» зарядом. Однако еще остался нелинейный член, содержащий $\langle\varphi_{k_1}^{st}\varphi_{k_2}^{st}\varphi_{k_3}^{st}\rangle$. Если полностью пренебречь корреляциями, то он обратится в нуль. Таким образом, нужно приближенно выразить это среднее через среднее от четырех φ_k^{st}.

Воспользуемся нелинейным уравнением для стохастического потенциала, которое получается из (2.6) путем подстановки разложения f_k^{st} по φ_k^{st}:

$$k^2\varepsilon_k\,\varphi_k^{st}=\int S_{k,\,k_1,\,k_2}\left(\varphi_{k_1}^{st}\varphi_{k_2}^{st}-\langle\varphi_{k_1}^{st}\varphi_{k_2}^{st}\rangle\right)\delta(k-k_1-k_2)\,dk_1\,dk_2+$$
$$+\int\Sigma_{k,\,k_1,\,k_2,\,k_3}\left(\varphi_{k_1}^{st}\varphi_{k_2}^{st}\varphi_{k_3}^{st}-\varphi_{k_1}^{st}\langle\varphi_{k_2}^{st}\varphi_{k_3}^{st}\rangle-\right.$$
$$\left.-\langle\varphi_{k_1}^{st}\varphi_{k_2}^{st}\varphi_{k_3}^{st}\rangle\right)\delta(k-k_1-k_2-k_3)\,dk_1\,dk_2\,dk_3,\qquad(2.11)$$

где

$$\varepsilon_k=1+\frac{4\pi e^2}{k^2}\int\frac{1}{\omega-\mathbf{kv}}\left(\mathbf{k}\frac{\partial f^r}{\partial\mathbf{p}}\right)\frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3},\qquad(2.12)$$

$$S_{k,\,k_1,\,k_2}=4\pi e^3\int\frac{1}{\omega-\mathbf{kv}}\left(\mathbf{k}_1\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\right)\frac{1}{\omega_2-\mathbf{k}_2\mathbf{v}}\left(\mathbf{k}_2\frac{\partial f^r}{\partial\mathbf{p}}\right)\frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3},\qquad(2.13)$$

$$\Sigma_{k,\,k_1,\,k_2,\,k_3}=-4\pi e^4\int\frac{1}{\omega-\mathbf{kv}}\left(\mathbf{k}_1\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\right)\frac{1}{\omega-\omega_1-(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\,\mathbf{v}}\times$$
$$\times\left(\mathbf{k}_2\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\right)\frac{1}{\omega_3-\mathbf{k}_3\mathbf{v}}\left(\mathbf{k}_3\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\right)f^r\frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}.$$

Обратим здесь внимание на то, что ε_k не есть линейная проницаемость, так как она содержит f^r, зависящую, вообще говоря, от W, а не начальную функцию распределения. В первом приближении можно использовать (2.11) для того, чтобы выразить φ_k^{st} через два φ_k^{st}:

$$\varphi_k^{st}\approx(k^2\varepsilon_k)^{-1}\int S_{k,\,k_1,\,k_2}\left(\varphi_{k_1}^{st}\varphi_{k_2}^{st}-\langle\varphi_{k_1}^{st}\varphi_{k_2}^{st}\rangle\right)\delta(k-k_1-k_2)\,dk_1\,dk_2.\qquad(2.14)$$

Если это подставить в член с нелинейной диффузией, пропорциональный $\langle\varphi_{k_1}^{st}\varphi_{k_2}^{st}\varphi_{k_3}^{st}\rangle$, то окончательный результат расчета соответствует в уравнении баланса для элементарных возбуждений интерференционному члену рассеяния от двух процессов, избраженных на рис. 4, *а* и *б*. Остается, однако, еще «найти» член, соответствующий квадрату матричного элемента процесса, изображенного на рис. 4, *б*. Прежде чем переходить к этому вопросу, обратим внимание на то, что в (2.14) сделана еще одна незаконная операция, а именно, деление на ε_k. Величина ε_k обращается в нуль вблизи резонанса, соответствующего собственной моде колебаний плазмы $\omega_{\mathbf{k}}$, т. е. при $\omega\to\omega_{\mathbf{k}}$:

$$\varepsilon_k\approx\left.\frac{\partial\varepsilon_k}{\partial\omega}\right|_{\omega=\omega_{\mathbf{k}}}(\omega-\omega_{\mathbf{k}}).$$

В действительности, как легко видеть, в интерференционный член входит $1/(\varepsilon_{k-k_1})$. Обращение же в нуль $\varepsilon_{k-k_1}=\varepsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1,\,\omega-\omega_1}$ означает

$$\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}_1}=\omega_{\mathbf{k}_2},\quad\mathbf{k}-\mathbf{k}_1=\mathbf{k}_2.\qquad(2.15)$$

Но это есть не что иное, как распадные условия. В таком процессе частицы плазмы не обмениваются энергией и импульсом с колебаниями, и D_{ij} в условиях резонанса (2.15) действительно оказывается равным нулю. Доказательство этому можно получить, если воспользоваться вблизи резонанса соотношением

$$\operatorname{Im} \varepsilon_k^{-1} \approx -\pi\delta(\varepsilon_k), \tag{2.16}$$

которое, как мы увидим, имеет лишь приближенный смысл. Конечно, наличие эффективных турбулентных столкновений частиц и волн создает мнимую часть у ε_k, однако в данном случае оказываются наиболее существенными эффективные соударения, которые связаны с самим распадным процессом (см. ниже). Важно, что (2.16) принципиально носит приближенный характер.

д) Нелинейное рассеяние и стохастический нагрев. Перейдем теперь к выяснению того, как получается чисто нелинейное рассеяние. Это — очень важный вопрос требующий разъяснения, так как до сих пор нет полного его понимания даже в последней публикации [43]. Это в первую очередь касается тесно связанной с нелинейным рассеянием проблемы так называемого *стохастического нагрева*. Достигнутый в этом отношении прогресс весьма важен для интерпретации экспериментов по стохастическому нагреву (как турбулентностью, так и внешними стохастическими полями).

Мы начнем сразу с формального ответа на вопрос о том, где содержится член, описывающий нелинейное рассеяние. А именно, нелинейное рассеяние возникает формально из квазилинейного коэффициента диффузии (2.9). Это утверждение на первый взгляд кажется по крайней мере не очевидным. Действительно, мы условились, что резонанс $\omega_{\mathbf{k}} = \mathbf{kv}$ не выполняется, а (2.9) содержит $\delta(\omega - \mathbf{kv})$. Здесь мы подходим к одному из важных свойств любых стохастических полей, а именно, они не могут иметь определенную однозначную связь ω и $\mathbf{k}$, соответствующую, например, моде $\omega = \omega_{\mathbf{k}}$. Однако при заданном $\mathbf{k}$ коррелятор потенциалов $|\varphi_k|^2$ как функция частоты описывается некоторой кривой с максимумом около $\omega = \omega_{\mathbf{k}}$. Полуширина этой кривой определяет характерное время корреляций $\Delta\omega^{-1}$, которое порядка $1/\nu_{\text{эфф}}$ (определяемой в основном, как будет показано ниже, турбулентными столкновениями, обязанными взаимодействию волн между собой). Для слабой турбулентности $\Delta\omega \sim \sim \nu_{\text{эфф}} \ll \omega_{\mathbf{k}}$ и максимумом резко выражен. Но это отнюдь не значит, что корреляционная кривая $|\varphi_k|^2$ не тянется дальше за пределы $\Delta\omega$ к меньшим и бóльшим частотам, вплоть до тех частот, которые отстоят от $\omega_{\mathbf{k}}$ на величину порядка $\omega_{\mathbf{k}}$ и больше. Таким образом, речь идет о далеких «хвостах» корреляционных функций. Структура корреляционных кривых в их центре не может быть продолжена вплоть до их далеких «хвостов». Например, в центре корреляционные кривые пытаются описывать лоренцевой формулой [44]

$$\nu_{\text{эфф}}\left[(\omega-\omega_{\mathbf{k}})^2+\nu_{\text{эфф}}^2\right]^{-1}, \tag{2.17}$$

соответствующей полю, «сбиваемому» случайными толчками с частотой $\nu_{\text{эфф}}$. Затем той же формулой пользуются и для далеких «хвостов», например $\omega \ll \omega_{\mathbf{k}}$, и получают $\nu_{\text{эфф}}/\omega_{\mathbf{k}}^2$. Ошибочность таких рассуждений состоит в том, что a priori предполагается $\nu_{\text{эфф}}$ одним и тем же как в центре, так и на «хвостах» корреляционной кривой. В действительности же $\nu_{\text{эфф}}$ оказываются существенно разными. Конечно, можно было бы в (2.17) считать $\nu_{\text{эфф}}$ функцией ω и $\mathbf{k}$ (что фактически и нужно сделать), однако в этом случае смысл (2.17) как лоренцевой формулы полностью теряется.

Интерес к указанным «хвостам» корреляционных кривых связан как раз с проблемой стохастического нагрева. Например, для стохастических ВЧ полей условие $\omega_{\mathbf{k}} = \mathbf{kv}$ не выполняется. На «хвостах» же корреляционных кривых вообще пропадает однозначная связь ω и $\mathbf{k}$, и условие $\omega = \mathbf{kv}$ можно выполнить.

Оказывается, что структуру таких «хвостов» корреляционных кривых можно получить в чрезвычайно общем виде, если использовать только условие слабости турбулентности, т. е. параметр (1.2). Можно при этом убедиться в том, что структура этих «хвостов» не зависит от тех $\nu_{\text{эфф}}$, которые определяют центры корреляционных кривых. Для этого обратимся к уравнению (2.11), умножим его на $\varphi_{k'}^{\text{st}}$ и проинтегрируем по k'. Используя (2.14), получим уравнение для корреляционной функции $|\varphi_k|^2$. Далее, поскольку нас интересует та область ω и $\mathbf{k}$, которая далека от резонанса, ε_k не близка к нулю, а порядка или существенно больше единицы. Поэтому члены, пропорциональные $|\varphi_k|^2$ в правой части, по крайней мере в W/nT меньше ε_k и могут быть отброшены; это дает

$$\varphi_k{}^2 = (2/k^2) \int |S_{k,k_1,k_2} + S_{k,k_2,k_1}|^2 |\varepsilon_k|^{-2} \times \\ \times |\varphi_{k_1}|^2 |\varphi_{k_2}|^2 \delta(k - k_1 - k_2)\, dk_1\, dk_2. \quad (2.18)$$

Формула может быть использована для явного вычисления корреляционных «хвостов», если пренебречь корреляциями в правой части. Такое приближение является первым членом разложения по $\nu_{\text{эфф}}/\omega_k$, причем корреляционные «хвосты» в правую часть вносят уже пренебрежимо малый вклад. Подставив (2.18) в квазилинейный коэффициент диффузии, получим в точности нелинейное рассеяние, описываемое в методе элементарных возбуждений графиком рис. 4, *б*. Итак, действительно показано, что возникают все члены, описывающие сумму матричных элементов нелинейного и томсоновского рассеяний. Но отсюда возникают и важные следствия.

Во-первых, стохастический нагрев своим существованием обязан не только «хвостам» корреляционных кривых, описывающих нелинейное рассеяние, но и комптоновскому рассеянию и их интерференции. Можно сказать и по-другому: нет никакого другого стохастического нагрева, кроме того, который описывается индуцированным рассеянием (в тех условиях, которые были предметом проведенного выше обсуждения, когда отсутствовало сильное линейное или нелинейное поглощение турбулентных колебаний).

Во-вторых, следует иметь в виду, что рассеяние описывается квадратом суммы матричных элементов нелинейного и комптоновского рассеяний. Часто члены этой суммы имеют противоположные знаки, и для электронов эффект уменьшается в $k^2 v_{Te}^2/\omega_{pe}^2$ раз.

В-третьих, стохастический нагрев ионов может быть не меньшим, чем электронов, так как нелинейное рассеяние, которое для них намного больше томсоновского, зависит лишь от массы электронов. Эти выводы имеют важное практическое значение для нагрева плазмы стохастическими полями.

е) Поляризационные «шубы» частиц и ферми-возбуждения турбулентной плазмы. Не менее важен общий вывод, касающийся общей концепции элементарных возбуждений. При получении тех же, что и в гл. 1, уравнений выяснился смысл того, что в теории элементарных возбуждений называлось «частицей» плазмы. А именно. по сути дела это тоже элементарные возбуждения — электронные и ионные, одетые в поляризационные «шубы» зарядов другого знака.

Именно поэтому и появилось нелинейное рассеяние, которое отсутствует для отдельных частиц в вакууме. Это есть рассеяние поляризационной «шубой». Указанные электронные и ионные возбуждения описываются регулярной частью функции распределения, т. е. фигурирующая в гл. 1 функция Φ есть

$$\Phi = f^{\mathrm{r}}.$$

При делении микрофункции распределения f на f^{r} и f^{st} фактически произведена «перенормировка» функции распределения, а именно, f^{r} описывает элементарные ферми-возбуждения, а f^{st} отнесена к бозе-возбуждениям — плазмонам, причем выделение f^{st} не «безобидно», так как f^{r} описывает уже «одетые» частицы. Ясно также, что истинные частицы, участвующие в микродвижениях, описываются как f^{r}, так и f^{st}, т. е. участвуют как в колебаниях, так и в рассеянии этих колебаний. Стройность всей картины, получаемой в результате такого деления, и, в частности, тот факт, что процессы взаимодействия плазмонов и квазичастиц описываются положительными вероятностями, содержащими квадраты модулей матричных элементов, являются хорошей иллюстрацией простоты физических концепций, заложенных в методе элементарных возбуждений.

ж) Уравнение для корреляционных функций турбулентного потенциала. Нам осталось еще выполнить вторую часть программы, а именно, получить уравнение для числа плазмонов $N_{\mathbf{k}}$. Для этого совершим опять-таки ряд малозаконных операций (оправдание которых будет дано несколько ниже). Умножив (2.11) на $\varphi_{k'}^{\mathrm{st}}$, составим уравнение для $|\varphi_k|^2$. При этом для вычисления $\langle\varphi_k^{\mathrm{st}}\varphi_{k_1}^{\mathrm{st}}\varphi_{k_2}^{\mathrm{st}}\rangle$ будем использовать (2.14). О том, насколько это незаконно вблизи $\varepsilon_k = 0$, уже говорилось. Вместе с тем запишем уравнение, которое получается таким путем:

$$k^2(\varepsilon_k + \varepsilon_k^N)\,|\varphi_k|^2 = 2\int |S_{k,k_1,k_2} + S_{k,k_2,k_1}|^2\,\varepsilon_{-k}^{-1}\,|\varphi_{k_1}|^2\,|\varphi_{k_2}|^2\,\delta(k-k_1-k_2)\,dk_1\,dk_2, \tag{2.19}$$

где

$$\varepsilon_k^N = \int \Sigma_{k,k_1}\,|\varphi_{k_1}|^2\,dk_1, \tag{2.20}$$

$$\Sigma_{k,k_1} = \Sigma_{k,k_1,k,-k_1} + \Sigma_{k,k_1,-k_1,k} + \varepsilon_{k-k_1}^{-1}\,|\mathbf{k}-\mathbf{k}_1|^{-2}\,S_{k-k_1,k,-k_1}\,(S_{k,k_1\,k-k_1} + S_{k,k-k_1,k_1}). \tag{2.21}$$

Уравнение (2.19), в отличие от (2.18), обобщением которого оно является, вообще говоря, бессмысленно. Действительно, вблизи резонанса $\omega = \omega_{\mathbf{k}}$ знаменатель правой части (2.19) обращается в нуль. Ясно,что это возникло из-за незаконного использования (2.14) вблизи резонанса. Вместе с тем уравнения баланса, которые получаются из этого уравнения в предположении (2.16), оказываются правильными. Выше уравнение для корреляционной функции было символически записано в виде функционала (1.10). Сейчас этот функционал можно записать в явном виде, перенеся все члены (2.19) в левую часть равенства. Далее надо произвести интегрирование по частотам, как указано в (1.11), и, взяв мнимую часть, пренебречь корреляциями, положив приближенно $|\varphi_k|^2 \approx |\varphi_{\mathbf{k}}|^2\,\delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}})$. Деление на ε_k приобретает тогда «некоторый смысл», если воспользоваться (2.16). В действительности следует помнить, что (2.16) является лишь приближенной аппроксимацией более точных резонансных знаменателей, учитывающих турбулентные столкновения. Результатом является уравнения баланса, которые совпадают с уравнениями гл. 1, если учесть процессы излучения, рассеяния и распадов. Оставляя эту проверку читателям, мы подчеркнем здесь лишь ряд принципиальных моментов.

Во-первых, члены с Σ в (2.21) описывают индуцированное томсоновское рассеяние; во втором члене (2.21) содержится как нелинейное рассеяние, так и интерференция нелинейного и томсоновского рассеяний. Таким образом, в уравнениях для плазмонов также возникают все члены, описывающие сумму двух процессов рассеяния. Во-вторых, распады возникают тогда, когда ε_{k-k_1} близко к нулю. Тогда о нелинейном рассеянии говорить нельзя; во втором члене (2.21) наибольшей мнимой частью обладает $1/\varepsilon_{k-k_1}$ (т. е. необходимо записать для нее (2.16)). Тогда можно пренебречь первым членом (2.21) и убедиться в том, что второй дает индуцированные распады, а правая часть (2.19) — спонтанные распады.

Таким образом, при ряде допущений, использовав ряд приближенных соотношений, которые требуют обоснования и доказательства, мы получили все соотношения теории элементарных возбуждений гл. 1. Такие же, но намного более сложные расчеты могут быть проведены для более общего случая произвольных мод (не только продольных волн, как в этой главе), сильных магнитных полей, неоднородной плазмы, плазмы с примесью релятивистских частиц, релятивистской плазмы и т. п. Метод элементарных возбуждений, позволяющий независимым путем вычислять вероятности различных процессов, не только имеет эвристическую ценность для разнообразных обобщений, но и позволяет избежать многих ошибок, как расчетных так и физических (например, учета лишь нелинейного рассеяния в задаче о стохастическом нагреве, как сделано в работе [44], или учета лишь томсоновского рассеяния в задаче о потере импульса электронов в плазме с лэнгмюровской турбулентностью, как ошибочно сделано в работе [43]). Представление окончательного результата при использовании метода статистического усреднения в виде, содержащем квадрат матричного элемента соответствующей вероятности, требует иногда довольно трудоемких расчетов и при наличии компенсаций из-за различия в знаках матричных элементов весьма большой точности в расчетах.

3. ЭФФЕКТИВНЫЕ ТУРБУЛЕНТНЫЕ СТОЛКНОВЕНИЯ ДЛЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЧАСТИЦ И ВОЛН И НЕОБРАТИМОСТЬ В ТЕОРИИ ПЛАЗМЕННОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

а) Оператор турбулентных столкновений. Как уже отмечалось, турбулентные столкновения должны органически содержаться в теории турбулентности и обязаны нелинейным процессам. В силу того, что существуют различные типы нелинейных взаимодействий, а также различные резонансы, например между волнами и частицами, между различными волнами без участия частиц и т. п., существуют и различные турбулентные столкновения. В частности, $\nu_{\text{эфф}}$, фигурирующее выше, вообще говоря, различно для различных процессов.

Начнем здесь с разбора турбулентных столкновений простейшего типа, обязанных взаимодействию частиц и волн при их излучении, поглощении и рассеянии. Другими словами, рассмотрим резонанс $\omega = \mathbf{kv}$. Вопрос об уширении таких резонансов был поднят в работах [45, 46] (см. также [47]) в целях описания сильной турбулентности. В действительности, однако, в условиях, когда существует параметр (1.2), турбулентность всегда слабая. Кроме того, из работ [45, 46] получаются неверные результаты, касающиеся стохастического нагрева. Более последовательное рассмотрение проблемы было дано в работе [8]. Уже отмечалось, что проблема обхода полюса $\omega = \mathbf{kv}$ принципиально не может быть решена здесь на пути, использованном Ландау (хотя бы потому, что начальные значения стохастических величин не могут быть заданы). Рассмотрим здесь этот вопрос, базируясь на решениях, найденных в работе [8]. Отметим, что вблизи резонанса $\omega = \mathbf{kv}$ следует учесть нелинейные члены в уравнении для стохастического потенциала.

Обратимся снова к уравнению (2.5). Его правая часть содержит нелинейные члены. В общем виде такое уравнение решить невозможно. Вообще говоря, необходимо учесть члены всего ряда разложения f_k^{st} по φ_k^{st}. Однако надо сделать определенную выборку наиболее существенных членов, используя малый параметр (1.2). Действительно, хотя в условиях резонанса турбулентными столкновениями пренебречь нельзя, но $\nu_{\text{эфф}} \ll \ll \omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{kv}$. Вся проблема похожа на теорию естественной ширины спектральных линий в квантовой электродинамике [26]. Для ее описания нельзя использовать теорию возмущений, однако, при учете того, что ширина линии много меньше расстояния между уровнями энергии, можно до конца просуммировать наиболее существенные члены. В данном случае указанная «ширина» зависит функционально от уровня турбулентности, или, точнее, корреляционной функции $|\varphi_k|^2$. Разберемся в природе нелинейных членов, содержащихся в правой части (2.5). Интегралы по k_1 и k_2 лучше представить в виде сумм по возможным модам k_1 и k_2, если поместить всю систему в некоторый большой куб с размером L. Тогда в этой сумме встретятся такие члены, которые пропорциональны f_k^{st}, входящей в левую часть равенства, и такие, которые содержат другие $f_{k_1}^{\mathrm{st}}$ с $k_1 \neq k$ (надо при этом иметь в виду, что f_k^{st} связано с φ_k^{st}). Члены, пропорциональные f_k^{st}, назовем *диагональными*, а остальные *недиагональными*. Ясно, что недиагональные члены играют роль внешней вынуждающей силы и не могут привести к искомому уширению резонанса, а диагональные приводят к уширению. Среди всех диагональных членов следует оставить лишь первый член разложения по $\nu_{\text{эфф}}/\omega_{\mathbf{k}}$. Для того чтобы математически оформить это, можно переписать уравнение (2.5), сразу выделив диагональные члены:

$$-i\left(\omega-\mathbf{kv}+i\hat{\nu}_k(\mathbf{p})\right) f_k^{\mathrm{st}}-ie\varphi_k^{\mathrm{st}}\left(\mathbf{k}\frac{\partial f^{\mathrm{r}}}{\partial \mathbf{p}}\right)=$$

$$=\hat{\nu}_k(\mathbf{p})\, f_k^{\mathrm{st}}+ie\int\left(\mathbf{k}_1\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\right)\left(\varphi_{k_1}^{\mathrm{st}} f_{k_2}^{\mathrm{st}}-\langle\varphi_k^{\mathrm{st}} f_{k_2}^{\mathrm{st}}\rangle\right)\delta(k-k_1-k_2)\,dk_1\,dk_2; \quad (3.1)$$

здесь $\hat{\nu}_k(\mathbf{p})$ — оператор, действующий на импульсы $\mathbf{p}$ функции f_k^{st} и описывающий эффективные турбулентные столкновения. Он, как будет видно, функционально зависит от корреляционной функции $|\varphi_k|^2$. В правой части (3.1) фактически диагональные члены должны сокращаться (первый член с диагональной частью второго). Если нас интересует конкретный вид $\hat{\nu}_k(\mathbf{p})$ с точностью до членов первого порядка по $\nu_{\text{эфф}}/\omega_{\mathbf{k}}$, то в правой части сокращение должно иметь место лишь с такой точностью. Уже в (3.1) можно использовать новую теорию возмущений, исходным приближением которой будет пренебрежение нелинейными членами правой части (3.1) т. е. записать [8]

$$f_k^{\mathrm{st}} \approx -\frac{e\varphi_k^{\mathrm{st}}}{\omega-\mathbf{kv}+i\hat{\nu}_k(\mathbf{p})}\left(\mathbf{k}\frac{\partial f^{\mathrm{r}}}{\partial \mathbf{p}}\right). \quad (3.2)$$

Это выражение, в отличие от (2.7), уже не имеет особенностей при $\omega = \mathbf{kv}$. Однако пока что ничего не достигнуто, так как мы не знаем $\hat{\nu}_k(\mathbf{p})$. Прежде чем переходить к его отысканию, удобно (3.2) записать в более простой форме, введя обратный оператор $\hat{g}_k(\mathbf{p})$:

$$\hat{g}_k(\mathbf{p})\left(\omega - \mathbf{kv}+i\hat{\nu}_k(\mathbf{p})\right) f^{\mathrm{st}} = f_k^{\mathrm{st}}. \quad (3.3)$$

С помощью этого оператора можно уравнение (3.1) переписать в виде

$$f_k^{st} + e\varphi_k^{st}\hat{g}_k(\mathbf{p})\left(\mathbf{k}\,\frac{\partial f^r}{\partial \mathbf{p}}\right) = i\hat{g}_k(\mathbf{p})\,\hat{\nu}_k(\mathbf{p})\,f_k^{st} -$$

$$-e\hat{g}_k(\mathbf{p})\int\left(\mathbf{k}_1\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\right)(\varphi_{k_1}^{st}f_{k_2}^{st} - \langle\varphi_{k_1}^{st}f_{k_2}^{st}\rangle)\,\delta(k-k_1-k_2)\,dk_1\,dk_2. \qquad (3.4)$$

Для того чтобы найти $\hat{\nu}_k(\mathbf{p})$, необходимо потребовать, чтобы в правой части (3.4) в первом приближении диагональный член отсутствовал. Для этого нужно подставить f_k^{st} из (3.4) в последний член правой же части (3.4) и выделить в нем диагональный член в первом по $\nu_{эфф}/\omega_\mathbf{k}$ приближении. Получим [8]

$$\hat{\nu}_k(\mathbf{p}) = -ie^2\frac{\partial}{\partial p_i}\int dk_1 k_{1i}k_{1j}\,|\varphi_{k_1}|^2\,\hat{g}_{k-k_1}(\mathbf{p})\frac{\partial}{\partial p_j}. \qquad (3.5)$$

Это конкретное выражение для оператора турбулентных столкновений содержит $\hat{g}_{k-k_1}$, которое в свою очередь связано с $\hat{\nu}_k$ ($\mathbf{p}$) в силу (3.3), т. е. (3.3) и (3.5) представляют собой сложную систему интегро-дифференциальных уравнений, однако допускающую конкретное исследование и решение в ряде важных в приложениях случаях.

б) Теория возмущений, учитывающая турбулентные столкновения. Если такое решение найдено, то известен конкретный вид нулевого приближения (3.2) и может быть развита последовательная теория возмущений. Подставив (3.2) в правую часть (2.4), получим «новое» квазилинейное уравнение. Оно имеет вид (2.8) с видоизмененным коэффициентом диффузии

$$D_{ij} = ie^2\int k_i k_j \hat{g}_k(\mathbf{p})\,|\,\varphi_k\,|^2\,dk, \qquad (3.6)$$

который отличается от (2.9) лишь размазкой резонанса $\omega = \mathbf{kv}$ из-за турбулентных столкновений (связанных, по сути дела, с самим квазилинейным взаимодействием). Далее можно последовательно найти следующие члены разложения в этой теории возмущений и получить разложение, а следовательно, и поправки к коэффициенту диффузии (3.6). Никаких расходимостей или трудностей со знаменателями здесь не возникает.

Точно так же можно получить и уравнение для корреляционной функции, заменяющее (2.19):

$$k^2(\tilde{\varepsilon}_k + \tilde{\varepsilon}_k^N)\,|\,\varphi_k\,|^2 =$$

$$= 2\int \tilde{\varepsilon}_{-k}^{-1}\,|\,\varphi_{k_1}|^2\,|\,\varphi_{k_2}|^2\,dk_1\,dk_2\,|\,\tilde{S}_{k,\,k_1,\,k_2} + \tilde{S}_{k,\,k_2,\,k_1}|^2\,\delta(k-k_1-k_2), \qquad (3.7)$$

где $\tilde{\varepsilon}_k$ отличается от ε_k (2.12) тем, что вместо знаменателя $1/(\omega - \mathbf{kv})$ входит выражение $\hat{g}_k$ ($\mathbf{p}$). Тем же $\tilde{S}_{k,\,k_1,\,k_2}$ отличается от $S_{k,\,k_1,\,k_2}$, задаваемого (2.13), и $\tilde{\Sigma}_{k,\,k_1,\,k_2,\,k_3}$ от $\Sigma_{k,\,k_1,\,k_2,\,k_3}$. Наконец, $\tilde{\varepsilon}_k^N$ отличается от (2.20) тем, что в него входит $\tilde{\Sigma}_{k,\,k_1}$, которое получается из (2.21) заменой выражения Σ и S на $\tilde{\Sigma}$ и $\tilde{S}$ и отбрасыванием второго члена в (2.21). Он фактически уже включен в нулевое приближение. Таким образом, во всей схеме резонансы $\omega = \mathbf{kv}$ оказываются размазанными. Прежде чем переходить к анализу следствий такого подхода, следует подчеркнуть ряд моментов.

Во-первых, такая теория возмущений является последовательной в отличие от обычной, которая просто приводит к расходимостям или несобственным интегралам, значения которых начинают зависеть от порядка интегрирования.

Во-вторых, как будет видно, она удовлетворяет необходимым требованиям разложимости интегральных величин по W/nT, т. е. последующие порядки теории возмущений малы по сравнению с предшествующими при $W/nT \ll 1$ (фактически малым параметром является $(W/nT)^{1/3}$ и по W/nT результат не разложим).

В-третьих, здесь не устранены все расходимости. что видно непосредственно из правой части (3.7). Действительно, например, $\tilde{\varepsilon}_{-k}$ при $\omega \gg kv_T$, $\nu_{эфф}$ имеет обычный вид $1 - (\omega_{pe}^2/\omega^2)$ и обращается в нуль при $\omega = \omega_{pe}$. Это уже фактически резонанс волн, и его нелинейное насыщение требует особого рассмотрения (см. гл. 4).

Наконец, описанный подход не является выходом за рамки слабой турбулентности, а *лишь* более строгим ее доказательством, и в частности, обоснованием квазилинейного приближения. Следует обратить внимание на то, что размазка резонанса, описываемая (3.6), отлична от той, которая использовалась в квазилинейных уравнениях в их первоначальном виде, полученном в свое время в первых работах [16, 48] путем усреднения по пространству и времени. Тогда вместо знаменателей типа $1/(\omega - \mathbf{kv})$ входили выражения типа

$$\gamma_{\mathbf{k}}\,[(\omega - \mathbf{kv})^2 + \gamma_{\mathbf{k}}^2]^{-1}, \tag{3.8}$$

где $\gamma_{\mathbf{k}}$ — линейный инкремент. Действительно, линейный инкремент $\gamma_{\mathbf{k}}$ зависит от вида регулярной функции f^r (и, в частности, в простейшем случае пропорционален $\partial f^r/\partial p$), тогда как ни $\hat{g}_k(\mathbf{p})$, ни $\hat{\nu}_k(\mathbf{p})$ вообще не содержат f^r. Кроме того, при поглощении ($\gamma_{\mathbf{k}} < 0$) величина (3.8) будет отрицательной, тогда как в действительности квазилинейный коэффициент диффузии всегда положителен. В связи с (3.8) можно также встретить неверные утверждения о том, что квазилинейные уравнения применимы лишь для неустойчивых мод. Ниже будет показано, что другие эффективные соударения, обязанные взаимодействию мод, приводят к выражению типа (3.8) в квазилинейном уравнении, однако входит не $\gamma_{\mathbf{k}}$, а эффективная частота соответствующих нелинейных взаимодействий. Таким образом, (3.8) можно использовать в квазилинейном интеграле, *лишь если* аппроксимировать (3.8) $-\pi\delta$-функцией.

в) Турбулентные столкновения и необратимость. Перейдем теперь к одному из важных вопросов о том, как в действительности решается проблема полюса $\omega = \mathbf{kv}$ в теории плазменной турбулентности. Для этого необходимо найти решение уравнения для $\hat{g}$. Достаточно его отыскать вблизи резонанса, считая

$$\varepsilon = \eta/\max(\omega_{\mathbf{k}},\ kv_T) \ll 1, \tag{3.9}$$

где $\eta = \omega - \mathbf{kv}$. Если ввести вместо ω переменную η, т. е. вместо $\hat{g}_k(\mathbf{p}) = \hat{g}_{\mathbf{k},\omega}(\mathbf{p})$ — оператор $\hat{g}_{\mathbf{k},\eta}(\mathbf{p})$, легко видеть, что он в первом приближении по малому параметру (3.9) оказывается диагональным по $\mathbf{p}$, т. е. не оператором, а функцией. В первом приближении по параметру (3.9) уравнение (3.3) приобретает вид

$$\left(\eta + D\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right) g_{\mathbf{k},\eta}(\mathbf{p}) = 1, \tag{3.10}$$

$$D \approx ie^2 \int (\mathbf{kk}_1)^2\,|\varphi_{k_1}|^2\, g_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1,\,-\eta_1}(\mathbf{p})\, dk_1, \tag{3.11}$$

причем D действительно, а мнимые поправки к нему имеют малость (3.9) (более подробно см. [8]). Подчеркнем, что фактически знак D и определяет знак эффективных турбулентных столкновений и тем самым правило обхода. Пока этот знак произволен. Можно найти формальное решение (3.10) при заданном D и подставить его в (3.11). Это дает функциональное уравнение для D, которое можно приближенно решить. Удобно произвести преобразование Фурье

$$g_{\mathbf{k},\eta} = (2\pi)^{-1} \int g_{\mathbf{k},\tau} e^{i\eta\tau}\, d\tau.$$

Тогда уравнение (3.10) записывается в виде

$$(\partial g_{\mathbf{k},\tau}/\partial\tau) + \tau^2 D g_{\mathbf{k},\tau} = -2\pi i \delta(\tau). \tag{3.12}$$

Можно решать однородное уравнение (3.12) с граничным условием

$$g_{\mathbf{k},\tau}\,|_{\tau\to+0} - g_{\mathbf{k},\tau}\,|_{\tau\to-0} = -2\pi i. \tag{3.13}$$

Но при решении этих уравнений надо также наложить физическое условие конечности g. Решение однородного уравнения (3.12) есть

$$g_{\mathbf{k}} = g_0 e^{-D\tau^3/3}. \tag{3.14}$$

Скачок в g возможен лишь при $\tau = 0$. Таким образом, если $D > 0$, то при $\tau \to -\infty$ из (3.14) заключаем, что $g_0\,|_{\tau<0} = 0$, а из (3.13) находим $g_0\,|_{\tau>0} = -2\pi i$, т. е.

$$g_{\mathbf{k},\eta} = -i \int\limits_0^\infty e^{i\eta\tau - [(D\tau^3)/3]}\, d\tau. \tag{3.15}$$

Если же $D < 0$, то $g_0\,|_{\tau>0} = 0$ и $g_0\,|_{\tau<0} = 2\pi i$, т. е.

$$g_{\mathbf{k},\eta} = i \int\limits_{-\infty}^0 e^{i\eta\tau - [(D\tau^3)/3]}\, d\tau = i \int\limits_0^\infty e^{-i\eta\tau + [(D\tau^3)/3]}\, d\tau. \tag{3.16}$$

Оба эти решения несовместны. Другими словами, нелинейные уравнения допускают либо первое, либо второе решение, но не сумму или их комбинацию. Последнее является следствием того, что для нелинейных уравнений не выполняется принцип суперпозиции. Для того чтобы показать несовместимость двух решений, подставим одно из них, (3.15), в (3.11) и получим уравнение для D:

$$D(\mathbf{k},\ \mathbf{p}) = (e^2/m^2) \int (\mathbf{k}\mathbf{k}_1)^2\, |\varphi_{k_1}|^2\, dk_1 \times$$
$$\times \int\limits_0^\infty \exp[-i(\omega_1 - \mathbf{k}_1\mathbf{v})\tau - (\tau^3/3)\, D(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1,\ \mathbf{p})]\, d\tau. \tag{3.17}$$

В правой части (3.17) содержится интеграл по всем k_1; функция, стоящая под интегралом, имеет резкий максимум около $\omega_1 = \mathbf{k}_1\mathbf{v}$, а $|\varphi_{k1}|^2$ — плавная функция $\mathbf{k}_1$ и ω_1. Поэтому в первом приближении по параметру (3.9) можно заменить в выражении под интегралом (3.17) указанную функцию с резким максимумом на δ-функцию. Получим

$$D(\mathbf{k},\ \mathbf{p}) \approx (e^2/m^2)\,\pi \int (\mathbf{k}\mathbf{k}_1)^2\, |\varphi_{k1}|^2\, \delta(\omega_l - \mathbf{k}_1\mathbf{v})\, dk_1, \tag{3.18}$$

что и является приближенным решением функционального уравнения (3.17). Существенно, что $D > 0$ в согласии с исходным допущением, приведшим к решению (3.15). Если далее использовать второе решение (3.16), то получим уравнение для D, решение которого отличается знаком от (3.18) в согласии с (3.16). Оба решения несовместны, так как D не может равняться этой же величине с обратным знаком, если, конечно, $D \neq 0$. т. е. турбулентность не отсутствует.

Здесь проявляется своеобразное сочетание необратимости с равноправностью обоих направлений времени. Легко видеть, что оба решения для g несимметричны по τ, т. е. необратимы (τ, как легко показать, имеет смысл времени) и заменой $t \to -t$ переходят друг в друга. Действительно, например, коэффициент диффузии (3.6) отличается лишь знаком и замена t на $-t$ в квазилинейном уравнении приводит оба решения к одному и тому же виду. Надо выбрать одно из них, так как они несовместны, а затем учесть, что еще не определено положительное направление времени. Таким направлением называют то, для которого энтропия возрастает. Поэтому, если выбирается первое решение, то фигурирующее выше t есть время, а если второе, то $-t$ есть время. Таким образом, оба решения приводят к тождественному результату (оба, кстати, приводят и к систематическому изменению энтропии).

Если учесть, что в квазилинейном коэффициенте диффузии $\operatorname{Im} g_k(\mathbf{p})$ представляет собой функцию с резким максимумом, то в первом приближении по параметру (3.9) получим обычный квазилинейный коэффициент диффузии

$$D_{ij} = \pi e^2 \int k_i k_j |\varphi_k|^2 \delta(\omega - \mathbf{kv})\, dk.$$

Однако такое приближение возможно лишь потому, что g входит под знаком интеграла, величина которого нечувствительна к размазке резонанса. Точно так же в первом приближении по (3.9) мнимая часть $\tilde{\varepsilon}_k$ описывает обычное затухание колебаний, так как g можно приближенно заменить δ-функцией. Так решается проблема затухания Ландау в теории турбулентности. Существенно, однако, что характер приближения здесь совсем иной (а именно, $\nu_{эфф}/\omega_{\mathbf{k}}$) и затухание необратимо. Для того чтобы представить порядок величин $\nu_{эфф}/\omega_{\mathbf{k}}$, нужно дать оценку $\nu_{эфф}$.

г) Оценка частот турбулентных столкновений. Для оценки $\nu_{эфф}$ учтем, что, согласно (3.51), g определяется интегралом от двух функций, первая из них $e^{i\eta\tau}$ начинает быстро осциллировать и, следовательно, обращает в нуль подынтегральное выражение при $\tau > \tau_1 = 1/\eta = 1/(\omega - \mathbf{kv})$, а вторая $e^{-D(\tau^3/3)}$ обрывает подынтегральное выражение при $\tau > \tau_2 = (3/D)^{1/3}$. Если $\tau_1 \ll \tau_2$, то $g \approx 1/(\omega - \mathbf{kv})$; если же $\tau_2 \ll \tau_1$, то

$$g \approx -i \int_0^\infty e^{-(\tau/\tau_2)^3} d\tau \approx (\tau_2/3i)\, \Gamma(1/3) = 1/i\nu_{эфф}.$$

Последнее равенство написано как определение $\nu_{эфф}$ при $|\omega - \mathbf{kv}| \ll \nu_{эфф}$, которое можно получить, если записать g в виде $1/(\omega - \mathbf{kv} + i\nu_{эфф})$. Таким образом, по порядку величины

$$\nu_{эфф} \approx D^{1/3}.$$

Считая, что в спектре $|\varphi_{k_1}|^2$ есть некое характерное k_0, на котором «сосредоточен» интеграл (3.18), а $\delta(\omega_1 - \mathbf{k}_1\mathbf{v})$ имеет порядок $1/k_0 v_т$, получим оценку $D^{1/3}$ для $k \sim k_0$ *).

$$\nu_{эфф} \approx \omega_{pe} (W/nT)^{1/3} (k_0 v_т/\omega_{pe})^{1/3} \tag{3.19}$$

Подчеркнем, что это значение $\nu_{эфф}$ не имеет явной связи с линейным $\gamma_{\mathbf{k}}$.

д) Влияние турбулентных столкновений на нелинейные процессы. Хотя, как отмечено, первые приближения с точностью $\nu_{эфф}/\omega_{\mathbf{k}}$ совпадают с обычными, наличие $\nu_{эфф}$ существен-

*) Лишь простоты ради здесь $m = m_e$; сходные эффекты возникают и для ионов.

но сказывается на следующих нелинейных поправках к ним. В этом отношении важный пример представляет случай ионнозвуковой турбулентности. В нулевом приближении из $\tilde{\varepsilon}_k$ при наличии дрейфа электронов относительно ионов следует обычный инкремент раскачки ионнозвуковых колебаний $\gamma_{\mathbf{k}}$. В следующем приближении вносят вклад все нелинейные члены (3.7). Это дает некоторое $\delta\gamma_{\mathbf{k}}$, зависящее от W. Оказывается, что наиболее существенны те нелинейности, которые содержатся в $\tilde{\varepsilon}_k$, т. е. просто поправки из-за того, что $\nu_{\text{эфф}}$ конечно.

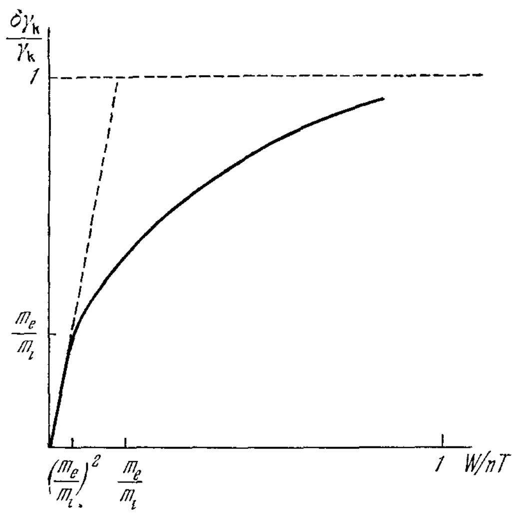

Рис. 6. Зависимость нелинейного взаимодействия ионнозвуковых колебаний с электронами от энергии W, заключенной в турбулентных ионнозвуковых колебаниях.

На рис. 6 изображено $\delta\gamma_{\mathbf{k}}/\gamma_{\mathbf{k}}$ как функция W/nT, полученная в работе [8] для ионнозвуковых колебаний. Из рисунка следует, что $\delta\gamma_{\mathbf{k}}/\gamma_{\mathbf{k}} \ll 1$, если только $W/nT \ll 1$. В последнее время вопрос о роли нелинейных взаимодействий ионнозвуковых колебаний с электронами привлек большое внимание [49]. При этом высказывались утверждения, что такое взаимодействие может определять аномальное сопротивление плазмы. Грубые оценки без учета уширения резонансов дают штриховую прямую на рис. 6. Она показывает, что $\delta\gamma_{\mathbf{k}}/\gamma_{\mathbf{k}} \sim 1$ при $W/nT \sim m_e/m_i$. В действительности при существенно меньших W/nT уширение резонансов резко снижает эффект, который никогда не может достигать $\delta\gamma_{\mathbf{k}}/\gamma_{\mathbf{k}} \sim 1$, если $W/nT \ll 1$, и поэтому нелинейное взаимодействие ионнозвуковых колебаний с электронами не может быть ответственным за торможение электронов и возникновение аномального сопротивления плазмы.

е) Турбулентные столкновения и стохастический нагрев. Несколько иная ситуация возникает в условиях, когда резонанс $\omega_{\mathbf{k}} = \mathbf{kv}$ невозможен, что имеет место для лэнгмюровской турбулентности. Тогда можно $\hat{g}$ раскладывать по $\hat{\nu}$. Но в $\hat{\nu}$ входит $\hat{g}_{k-k_1}$, которое уже может быть резонансным. Существенно, однако, что теперь мы знаем, как трактовать такие $\hat{g}$. Результаты разложений совпадают с теми, которые были получены в предыдущей главе, если мнимую часть g_{k-k_1} аппроксимировать $-\pi\delta(\omega - \omega_1 - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)\,\mathbf{v})$. Тем самым проясняется физический смысл и обосновывается представление о стохастическом нагреве. Следует отметить, что используемый в работе [45] подход для описания размазки резонанса $\omega = \mathbf{kv}$ дает для одномерного квазилинейного уравнения результат, совпадающий с (3.6) и (3.13), однако $\hat{\nu}$ не содержит g_{k-k_1} и тем самым потерянными являются все процессы индуцированного рассеяния и стохастического нагрева.

Заметим, наконец, что у $\tilde{\varepsilon}_k$ появляется мнимая часть, а следовательно, в интегральных уравнениях баланса обосновывается приближенное использование (2.16). Уравнения баланса, получаемые из (2.19) и (3.7), в этих приближениях совпадают между собой и с теми уравнениями, которые получаются методом элементарных возбуждений.

4. ТУРБУЛЕНТНОЕ УШИРЕНИЕ РЕЗОНАНСОВ НЕЛИНЕЙНЫХ РАСПАДНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ И КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ ТУРБУЛЕНТНОЙ ПЛАЗМЫ

а) Эффективные турбулентные столкновения, обязанные взаимодействию волн. Турбулентные столкновения, обязанные взаимодействию волн, приводят к неоднозначности в связи между частотой и волновым числом турбулентного плазмона.

Уже отмечалось, что не все сингулярности ликвидированы в уравнении (3.7), а именно, $\tilde{\varepsilon}_{-k}$ может обращаться в нуль. Задача фактически сводится к учету турбулентных столкновений однако не в функции Грина частиц $1/(\omega - \mathbf{kv})$, а в функции Грина плазмона $1/\tilde{\varepsilon}_k$. Расходимость $1/\tilde{\varepsilon}_k$ возникает из-за незаконности деления на $\tilde{\varepsilon}_k$ в выражении типа (2.14), если $\tilde{\varepsilon}_k$ близко к нулю. Размазка резонанса $\omega = \mathbf{kv}$ меняет лишь S на $\tilde{S}$ и ε на $\tilde{\varepsilon}$, но операция деления на $\tilde{\varepsilon}_k$ остается незаконной. Ситуация в данном случае весьма сходна с той, которая была описана для взаимодействия частиц и волн. Дело просто в том, что отбрасывание следующих нелинейных членов становится при $\tilde{\varepsilon}_k = 0$ неправомочным. Усовершенствованная теория возмущений, устраняющая эту трудность, была развита сначала в работе [11] без учета уширения резонанса частиц и волн (т. е. резонанса $\omega = \mathbf{kv}$) и, кроме того, в предположении, что в членах, содержащих интегралы от $1/\varepsilon_k$, турбулентная размазка резонанса несущественна, так как можно пользоваться аппроксимацией (2.16). Такое приближение достаточно, например, для рассмотрения корреляционных функций лэнгмюровской турбулентности, но, как показывает анализ, не обладает необходимой точностью для ионнозвуковой турбулентности. Более точная теория была развита в работе [10], но без учета уширения резонанса $\omega = \mathbf{kv}$. Мы здесь изложим общий случай, следуя наиболее близко к тем рассуждениям, которые были уже использованы в предыдущей главе.

Выделим в уравнении типа (2.11) диагональный по φ_k^{st} член в левую часть, обозначив

$$\tilde{\varepsilon}_k^N = \int \tilde{\Sigma}'_{k,\,k_2} |\varphi_{k_2}|^2 \, dk_2, \tag{4.1}$$

где $\tilde{\Sigma}'_{k,\,k_2}$ — неизвестная величина, которую требуется найти. Она, как будет видно, является обобщением введенной выше величины $\Sigma_{k,\,k_2}$. Тогда, с учетом уширения резонанса $\omega = \mathbf{kv}$, вместо (2.11) имеем

$$\begin{aligned} k^2 (\tilde{\varepsilon}_k + \tilde{\varepsilon}_k^N)\, \varphi_k^{\mathrm{st}} = \\ = \int \tilde{S}_{k,\,k_1,\,k_2} (\varphi_{k_1}^{\mathrm{st}} \varphi_{k_2}^{\mathrm{st}} - \langle \varphi_{k_1}^{\mathrm{st}} \varphi_{k_2}^{\mathrm{st}} \rangle)\, \delta(k - k_1 - k_2)\, dk_1\, dk_2 + \\ + \int \{ \tilde{\Sigma}_{k,k_1,k_2,k_3} (\varphi_{k_1}^{\mathrm{st}} \varphi_{k_2}^{\mathrm{st}} \varphi_{k_3}^{\mathrm{st}} - \langle \varphi_{k_1}^{\mathrm{st}} \varphi_{k_2}^{\mathrm{st}} \rangle \varphi_{k_3}^{\mathrm{st}} - \varphi_{k_1}^{\mathrm{st}} \langle \varphi_{k_2}^{\mathrm{st}} \varphi_{k_3}^{\mathrm{st}} \rangle - \\ - \langle \varphi_{k_1}^{\mathrm{st}} \varphi_{k_2}^{\mathrm{st}} \varphi_{k_3}^{\mathrm{st}} \rangle) + \tilde{\Sigma}'_{k,\,k_2,}\, \varphi_{k_1}^{\mathrm{st}} \langle \varphi_{k_2}^{\mathrm{st}} \varphi_{k_3}^{\mathrm{st}} \rangle \}\, \delta(k - k_1 - k_2 - k_3)\, dk_1\, dk_2\, dk_3. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Здесь мы использовали $\langle \varphi_{k_2}^{\mathrm{st}} \varphi_{k_3}^{\mathrm{st}} \rangle = |\varphi_{k_2}|^2\, \delta(k_2 + k_3)$. Далее мы потребуем, чтобы, хотя бы в первом приближении по W/nT, в правой части диагональный член исчезал. Для этого умножим (4.2) на $\varphi_{k'}^{\mathrm{st}}$ и получим уравнение для корреляционной функции $|\varphi_k|^2$. Для вычисления $\langle \varphi_{k'}^{\mathrm{st}} \varphi_{k_1}^{\mathrm{st}} \varphi_{k_2}^{\mathrm{st}} \rangle$ используем

$$\varphi_k^{\mathrm{st}} = (\tilde{\varepsilon}_k + \tilde{\varepsilon}_k^N)^{-1} \int \tilde{S}_{k,\,k_1,\,k_2} (\varphi_{k_1}^{\mathrm{st}} \varphi_{k_2}^{\mathrm{st}} - \langle \varphi_{k_1}^{\mathrm{st}} \varphi_{k_2}^{\mathrm{st}} \rangle)\, \delta(k - k_1 - k_2)\, dk_1\, dk_2$$

и потребуем, чтобы диагональные по $|\varphi_k|^2$ члены в правой части получаемого уравнения отсутствовали в первом приближении по $|\varphi_k|^2$. Отсюда получим конкретное выражение для $\tilde{\Sigma}'_{k,k_1}$:

$$\tilde{\Sigma}'_{k,k_1} = \tilde{\Sigma}_{k,k_1,k,-k_1} + \frac{\tilde{S}_{k,k_1,k,-k_1}(\tilde{S}_{k-k_1,k,-k_1} + \tilde{S}_{k-k_1,-k_1,k})}{|\mathbf{k}-\mathbf{k}_1|^2(\tilde{\varepsilon}_{k-k_1} + \tilde{\varepsilon}^N_{k-k_1})}. \tag{4.3}$$

Таким образом, $\tilde{\Sigma}'_{k,k_1}$ отличается от $\tilde{\Sigma}_{k,k_1}$ лишь тем, что в выражении в квадратных скобках вместо $\tilde{\varepsilon}_{k-k_1}$ стоит $\tilde{\varepsilon}_{k-k_1} + \tilde{\varepsilon}^N_{k-k_1}$. Таким образом, (4.1) и (4.3) совместно являются системой интегральных уравнений для $\tilde{\varepsilon}^N_k$. В ряде случаев в силу того, что (4.1) содержит интеграл по всем значениям k_1, величина $1/(\tilde{\varepsilon}_{k-k_1} + \tilde{\varepsilon}^N_{k-k_1})$ может быть аппроксимирована выражением

$$-i\pi\delta(\tilde{\varepsilon}_{k-k_1} + \tilde{\varepsilon}^N_{k-k_1}) \approx -i\pi\delta(\tilde{\varepsilon}_{k-k_1}), \tag{4.4}$$

т. е. учет $\tilde{\varepsilon}^N_k$ здесь мало существен. Однако пренебрежение $\tilde{\varepsilon}^N$ под знаком δ-функции законно лишь тогда, когда распадные процессы хорошо разрешены. Мы имеем в виду следующее. В принципе возможна такая ситуация, когда распадный процесс почти разрешен, т. е. достаточно, например, в законе сохранения энергии добавить некоторую малую порцию энергии (к частоте одной из волн добавить $\Delta\omega \ll \omega_{\mathbf{k}}$), чтобы процесс распада из запрещенного стал разрешенным. Такой запрет распадного процесса называем *слабым*. Отсюда ясно, что мы понимаем под словом хорошо разрешенного распадного процесса (случай, противоположный слабо разрешенному). В турбулентной плазме все законы сохранения не могут быть строгими, в частности и распадные процессы должны выполняться лишь с точностью до эффективных турбулентных столкновений. Величина $\Delta\omega \sim \nu_{\text{эфф}}$ имеет конкретный смысл и, как будет видно, равна средней корреляционной ширине. Таким образом, можно конкретно определить, что́ нужно понимать в турбулентной плазме под словами «слабо запрещенный» распад и «хорошо разрешенный». А именно, хорошо разрешенному соответствует равенство (4.4), а для слабо запрещенного $\tilde{\varepsilon}_{k-k_1}$ не обращается в нуль, тогда как $\tilde{\varepsilon}_{k-k_1} + \tilde{\varepsilon}^N_{k-k_1}$ обращается, т. е. равенство (4.4) неверно. Отсюда уже видно, что учет $\tilde{\varepsilon}^N$ в (4.3) очень существен именно для слабо запрещенных распадов. Таковыми, как оказывается, являются ионнозвуковые колебания [10]. Если использовать (4.3), то можно далее следовать ходу рассуждений работы [11], составить интегральное уравнение для $\langle\varphi^{st}_{k_1}\varphi^{st}_{k_2}\varphi^{st}_{k_3}\rangle$ и в приближении (1.2) решить его. Уравнение для корреляционной функции принимает вид

$$|\varphi_k|^2 = 2k^{-2}\int \frac{|\tilde{S}_{k,k_1,k_2} + \tilde{S}_{k,k_2,k_1}|^2}{|\tilde{\varepsilon}_k + \tilde{\varepsilon}^N_k|^2}|\varphi_{k_1}|^2|\varphi_{k_2}|^2\delta(k-k_1-k_2)\,dk_1\,dk_2. \tag{4.5}$$

Отличие его от (3.7) состоит в том, что в правой части вместо $\tilde{\varepsilon}_{-k}$ входит $\varepsilon_{-k} + \tilde{\varepsilon}^N_{-k}$, а $\tilde{\varepsilon}^N_k$ определяется системой интегральных уравнений (4.3) и (4.1). Таким образом, полученный результат не содержит расходимостей.

б) Структура корреляционных функций турбулентного потенциала. Уравнение для корреляционных функций удовлетворяет необходимому требованию положительности $|\varphi_k|^2$ — результат, которого не удавалось достичь непротиворечиво в развиваемых до сих пор моделях турбулентности несжимаемых жидкостей. Учитывая, что первый множитель под интегралом (4.5) вблизи резонанса является медленно меняющейся функцией, получим, что структура корреляционной функции вблизи резонанса носит характер лоренцевой кривой

$$|\varphi_k|^2 = \text{const}\cdot[(\omega - \omega_k^N)^2 + \gamma_N^2]^{-1}. \qquad (4.6)$$

Вдали резонанса она имеет прежний вид (2.18).

В (4.6) ω_k^N — содержит нелинейные сдвиги частот, а γ_N описывает сумму линейных и нелинейных инкрементов. Очевидно, что (4.6) указывает на то, что между ω и $\mathbf{k}$ в турбулентной плазме нет однозначного соответствия, а мерой этой неоднозначности в основном является γ_N. Поскольку $\tilde{\varepsilon}$ содержит $\nu_{эфф}$ (которое, например, задается (3.19)), может показаться, что γ_N имеет порядок этого $\nu_{эфф}$. Но это не так по следующим причинам. Во-первых, в $\tilde{\varepsilon}$ входит как электронная, так и ионная составляющие (сумма по зарядам, как условлено, простоты ради опускалась). Во-вторых, мнимая часть $\tilde{\varepsilon}$, как показано, дает величину порядка линейного инкремента и в хорошем приближении не зависит от W. Это имеет место, например, для ионнозвуковых колебаний. Для лэнгмюровских колебаний в силу их нерезонансности необходимо производить разложение по $\hat{\nu}$, и его значение вдали от резонанса, сложенное с другими процессами, дает индуцированное рассеяние и не имеет ничего общего с (3.19). Индуцированное рассеяние дают и ионы для ионнозвуковой турбулентности. Более того, условие стационарности турбулетности состоит в том, чтобы сумма линейных и нелинейных γ (т. е. γ_N) обращалась в нуль. Например, для ионнозвуковых колебаний это означало бы компенсацию линейной раскачки на электронах, индуцированным рассеянием на ионах. Так, кстати, и был впервые получен спектр для ионнозвуковой турбулентности Кадомцевым и Петвиашвили [1, 50]. Спектр лэнгмюровской турбулентности также в определенной области находится из требования, чтобы γ_N, связанное с индуцированным рассеянием, обращалось в нуль [19]. Таким образом, ни эффективная частота, связанная с черенковским резонансом (3.19), ни $\nu_{эфф}$ порядка инкремента индуцированного рассеяния не характеризуют корреляционную ширину (4.6). Дело в том, что все эти процессы есть процессы взаимодействия волн и частиц, тогда как (4.6) определяется взаимодействием волн между собой. Действительно (4.5) описывает распадный процесс, что видно и из δ-функции. Так как каждая из $|\varphi_{k_1}|^2$ и $|\varphi_{k_2}|^2$ имеет резкий максимум около $\omega_{\mathbf{k}_1}$ и $\omega_{\mathbf{k}_2}$ соответственно, резонансный знаменатель $1/(\tilde{\varepsilon}_k + \tilde{\varepsilon}_k^N)$ фактически «сажает» третью частоту ω внутрь распадного резонанса, т. е. $\omega = \omega_k$. Таким образом, (4.5) описывает распадный резонанс. Более точно, правая часть (4.5) содержит так называемые *спонтанные распады*, тогда как индуцированные распады содержатся в ε^N. Уравнение баланса с учетом распадов не может иметь вид $\tilde{\varepsilon} + \tilde{\varepsilon}_{\mathbf{k}} = 0$ (из которого и следовало $\gamma_N = 0$), так как индуцированные распады должны компенсироваться спонтанными. Таким образом, γ_N должно иметь порядок характерного времени распадного взаимодействия. Иными словами, каждое из взаимодействий «создает себе» свои $\nu_{эфф}$, а корреляционные ширины волн определяются взаимодействием волн между собой.

в) Влияние турбулентных корреляций на нелинейные взаимодействия. Насколько все эти соображения важны не только для понимания физических процессов, протекающих в турбулентной плазме, но и для практического использования теории для интерпретации экспериментов, видно на примере ионнозвуковой турбулентности. Корреляционные измерения проводятся сейчас в большинстве экспериментов по плазменной турбулентности. Для ионнозвуковой турбулентности, возбуждаемой внешним квазистатическим полем E, они подробно измерены в работе [38], причем было показано, что величина турбулентной электропроводности существенно зависит от времени корреляции, которая лишь в 4—10 раз превосходит период колебаний. Наличие такой большой корреляционной ширины указывает, следовательно, на наличие какого-то распадного взаимодействия. Но он казалось бы запрещен для звуковых волн. Однако такой запрет является лишь слабым, и наличие сильных корреляций снимает этот запрет, а возникающий распад определяет корреляции. Эти аргументы были основными в анализе спектров ионнозвуковой турбулентности, предпринятом в работе [10].

Если использовать экспериментальное значение корреляционной ширины $\Delta\omega$, то уже при всех частотах меньше $\sim \omega_{pi}/2$ распадные процессы определяют спектр. Он был измерен в работе [22] от ω_{pi} вплоть до $10^{-1}\,\omega_{pi}$, а в работе [21] — до $10^{-2}\omega_{pi}$ и соответствует $W_\omega \sim \omega^{-1} \ln \Lambda(\omega)$. Таким образом, почти вся область спектра попадает в ту, для которой учет корреляций в нелинейных взаимодействиях существенно сказывается на самом характере взаимодействия. Кстати, и спектр, предсказываемый в работе [10, 50], совпадает с наблюдаемым. Эффективность взаимодействия [10] оказывается в $8T_e/T_i$ раз больше индуцированного рассеяния [50] на ионах. Оказывается, что это различие во временах при попытках интерпретировать измерения [22] спектра ионнозвуковых колебаний на фронте ударных волн очень существенно, а именно, если бы спектр формировался индуцированным рассеянием, то он в условиях [22] не мог бы успеть установиться, тогда как в случае формирования спектра при учете распадного взаимодействия времени прохождения фронта ударной волны по плазме достаточно для установления спектра. Имеются и другие указания в пользу распадного механизма. Так, при индуцированном рассеянии нелинейная стабилизация неустойчивости приводит к оттоку энергии из области неустойчивого черенковского конуса в любые другие направления с примерно одинаковой вероятностью. Это значит, что если действительно стационарная турбулентность достигнута и спектр сформирован нелинейным взаимодействием, а об этом как будто свидетельствуют результаты [21, 22], то значительная доля энергии турбулентности должна присутствовать вне черенковского конуса (примерно лишь в v_s/u раз меньшая, чем внутри конуса). Для распадного взаимодействия, наоборот, углы в процессе взаимодействия приближенно не меняются, а энергия лишь постепенно «диффундирует» к границе черенковского конуса с шагом «диффузии» $\Delta\theta \sim (\Delta\omega/\omega)^{1/2}$. Измерения [22] показали, что турбулентная энергия заключена внутри конуса углов, величина которого практически близка к черенковскому. Наконец, величина турбулентной электропроводности, согласно [10], есть

$$\sigma = (ne^2/m_e)\,\tau^*, \tag{4.7}$$

$$\tau^* = \frac{v_s \cdot 192\,\left[\int\limits_0^1 s^2\rho(s)\,(1-s^2)^{-1/2}\,ds\right]^2}{u\omega_*\int\limits_0^1 \psi(\lambda)\,d\lambda} \approx (v_s/u)\cdot 10^2\,(\omega_{pi})^{-1}, \tag{4.8}$$

$$\sigma = \sigma_0/E^{1/2}, \quad \sigma_0 \approx 10\omega_{pe}\,(env_s/4\pi\omega_{pi})^{1/2}, \tag{4.9}$$

где u — направленная скорость дрейфа электронов, v_s — скорость звука, а $\rho(s)$ и $\psi(\lambda)$ — функции, характеризующие угловое и частотное распределения ионнозвуковых колебаний, интегралы от которых порядка или несколько меньше единицы, $\omega_* = \omega_{pi}\,(\Delta\omega/\omega)^{1/2}$. Величина (4.7) соответствует измеренной как непосредственно, так и по ширине ударных волн. При получении (4.8) предполагалось, что спектр турбулентности определяется нелинейными процессами. Однако при достаточно малых E квазилинейные процессы, рассмотренные в работе [51], могут быть более существенны. При этом, однако,

$$\sigma = env_s/E. \qquad (4.10)$$

Численный коэффициент 10^2 в (4.9) существенно снижает значения полей, для которых турбулентная электропроводность будет определяться квазилинейными эффектами:

$$E/(4\pi nT)^{1/2} \leqslant 0{,}01 m_e/m_i \equiv E_c/(4\pi nT)^{1/2}. \qquad (4.11)$$

В большинстве экспериментов $E > E_c$ и $u \sim (4-10)\, v_s$ (согласно (4.9) $u = v_s\, (E/E_c)^{1/2} > v_s$), но если бы отсутствовал фактор 10^2, то для многих экспериментов было бы справедливо обратное неравенство. Следует вместе с тем отчетливо указать на то, что такие выводы получаются в условиях, когда корреляционные эффекты довольно существенно сказываются на турбулентной электропроводности. Можно попытаться проследить, как будет видоизменяться величина критического поля E_c, разделяющего квазилинейную электропроводность (4.10) и нелинейную, при уменьшении роли корреляционных эффектов. Во-первых, нужно напомнить, что нелинейные взаимодействия, определяющие нелинейную электропроводность, будут при уменьшении $\Delta\omega$ в существенно большей области частот описываться индуцированным рассеянием на ионах, впервые рассмотренным Кадомцевым и Петвиашвили [50]. Величина турбулентной электропроводности вычислена для этого случая Сагдеевым [52]. Действительно, корреляционные эффекты усиливают нелинейные взаимодействия лишь при $\omega < \omega_{pi}\, (\Delta\omega/\omega)^{1/2}$, при уменьшении $\Delta\omega/\omega$ эта область отодвигается к все меньшим частотам. В области $\omega > \omega_{pi}\, (\Delta\omega/\omega)^{1/2}$ корреляционное уширение несущественно, эффективность нелинейного взаимодействия падает, а следовательно, W_k увеличивается.

Во-вторых, эффективная частота $1/\tau^*$, определяющая турбулентную электропроводность, пропорциональна интегралу

$$1/\tau^* \sim \int W_k k\, dk. \qquad (4.12)$$

Таким образом, при малых $\Delta\omega/\omega$ основной вклад в интеграл (4.12) будет вносить уже область, где «работает» индуцированное рассеяние. Тогда при сравнении с (4.10) нужно пользоваться формулой Сагдеева [52]

$$\tau^* = (v_s/u)\, (10^2/\omega_{pi})\, T_i/T_e. \qquad (4.13)$$

Численный фактор 10^2 в этой формуле, приведенный в работе Сагдеева [52], по-видимому, может сильно варьироваться в зависимости от деталей углового распределения колебаний. Если воспользоваться именно этим значением численного коэффициента в (4.13), то для значения критического поля E_c получится величина в $T_e\omega/T_i\Delta\omega$ раз больше (4.11). Точное значение критического отношения $\Delta\omega/\omega$, при котором основной вклад в интеграл (4.12) начинает вносить индуцированное рассеяние, может быть получено лишь в результате подробного численного анализа нелинейных процессов вблизи $\omega \sim \omega_{pi}$. Спектр, найденный Кадомцевым и Петвиашвили, как подчеркнуто Сагдеевым [59], справедлив лишь при $\omega \ll \omega_{pi}$. В области $\omega \sim \omega_{pi}$ перекачка интегральна и изменяет частоты плазмонов сразу на заметную величину, так что необходимо экстраполировать спектр [50] до $\omega \sim \omega_{pi}$. Возможна и ситуация, когда одним шагом нелинейной трансформации энергия может перекачаться в ту область, где уже корреляционные эффекты существенны (нужно также иметь в виду, что максимум инкремента приходится на частоту $\omega_{pi}/\sqrt{2}$ все же заметно меньше ω_{pi}). Тогда в области $\omega \sim \omega_{pi}$ большой плотности энергии W_k не возникает и вклад области, где «работает» индуцированное рассеяние, в величину (4.12) будет мал. Можно ожидать, что если такая интегральность перекачки отсутствует, то при переходе в область частот $\omega > \omega_{pi}$ $(\Delta\omega/\omega)^{1/2}$ должен возникнуть резкий максимум в спектре, соответствующий увеличению W_k хотя бы в T_e/T_i раз. Именно тогда можно использовать (4.13). В экспериментах [21,22] такого максимума не наблюдалось, что указывает, по-видимому, на малую роль индуцированного рассеяния (которое, кстати, в [21, 22] интегрально в интервале от $\omega_{pi}/\sqrt{2}$ до $\omega_{pi}/2$). Очевидно также, что область частот, в которой рассеяние на ионах интегрально, сильно зависит от отношения T_e/T_i, а тем самым и критическое значение $\Delta\omega/\omega$, для которых нужно переходить от (4.8) к (4.13), также сильно зависит от T_e/T_i. Вместе с тем в работе [10] было показано, что при развитии ионнозвуковой турбулентности величина $\Delta\omega/\omega$ растет во времени, достигая достаточно больших значений. Очевидно, что более детальную информацию о критических значениях $\Delta\omega/\omega$ и их зависимость от T_e/T_i можно получить в будущем лишь при детальном численном решении нелинейных уравнений, учитывающих корреляционные эффекты. Таким образом, действительно корректный учет турбулентного уширения резонансов играет важную роль при интерпретации существующих экспериментов. В большинстве экспериментов по плазменной турбулентности, кроме того, непосредственно измеряются корреляционные эффекты, и их детальное сопоставление с теорией, предсказывающей как форму корреляционной кривой (4.6), так и величину корреляционного уширения, представляет собой одну из важных задач.

г) Корреляционные уширения и линейные электромагнитные свойства турбулентной плазмы. Под линейными электромагнитными свойствами плазмы обычно понимают ее отклик на внешнее электромагнитное поле [53]. Можно ожидать, что отклик турбулентной плазмы будет коренным образом отличаться от отклика спокойной плазмы для частот $\omega \ll \nu_{\text{эфф}}$. Область низких частот представляет особый интерес, так как в этой области находятся наиболее опасные для удержания плазмы неустойчивости. Их коренное видоизменение или исчезновение в условиях развитой высокочастотной турбулентности имеет важное значение. Новые моды турбулентной плазмы в области низких частот впервые обсуждались в работах [54, 55] на основе модельного описания турбулентности при помощи эффективных сил Миллера. Стабилизация дрейфовых неустойчивостей в турбулентной плазме рассматривалась в работах [60]. В работе [56] был рассмотрен общий метод, позволяющий вычислять тензор диэлектрической проницаемости турбулентной плазмы. Он основан на рассмотрении возмущений f^r, f^{st} и φ^{st} со стороны слабого внешнего поля φ^r (см. гл. 2) и последовательном разложении всех величин по φ^r [57]. Этот метод позволяет установить, что ряд новых «неустойчивостей», возникающих в турбулентной плазме, формально обязан тому, что в области низких частот $1/\varepsilon_{k_1-k}$ стремится к бесконечности, так как $\varepsilon_{k_1-k} \to 0$ при $k \to 0$. Как показано в работе [58], корректный учет турбулентных столкновений устраняет эту расходимость, так как возникает $(\varepsilon_{k_1-k} + \varepsilon^N_{k_1-k})^{-1}$. Но вместе с этим существенно видоизменяется и неустойчивость.

В области фазовых скоростей продольных плазмонов $v_p^2 \gg v_{Te}^2\ (9m_i/m_e)$, согласно [58], инкременты неустойчивостей сохраняют вид, найденный в работе [54], однако при этом турбулентная энергия W должна быть вся сосредоточена в очень узком интервале фазовых скоростей и узком интервале абсолютных значений, что практически невозможно для тех широких спектров, которые устанавливаются в результате нелинейных взаимодействий (см. рис. 2). Правда, здесь имеются и исключения, примером которых может служить турбулентность, диссипируемая в излучении на частоте $2\omega_{pe}$ [42] в условиях, когда область волновых чисел, в которой генерируются плазмоны, близка к области волновых чисел, где они поглощаются, превращаясь в электромагнитное излучение частоты $2\omega_{pe}$. В области же $v_p^2 \gg \gg v_{Te}^2 (9m_e/m_i)$, где обычно накапливается основная энергия турбулентности (см. рис. 2), согласно [58] инкременты неустойчивостей существенно видоизменяются турбулентными столкновениями. Эти вопросы требуют, конечно, еще дальнейшей более подробной разработки, однако приведенные примеры показывают, что последовательный учет турбулентных столкновений при построении линейных электромагнитных свойств турбулентной плазмы может существенно сказаться на представлениях о механизмах бесстолкновительной диссипации энергии лэнгмюровской турбулентности, накапливающейся в максимуме спектра (см. рис. 2).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенный здесь анализ показывает, что сейчас имеется последовательная картина физических процессов в турбулентной плазме, хотя, конечно, целый ряд конкретных вопросов требует дальнейших расчетов, например корреляционные ширины для различных колебаний во внешнем поле, структура турбулентных спектров, электромагнитные свойства турбулентной плазмы и т. п. Все больше становится ясным значение метода элементарных возбуждений, который, с одной стороны, получает хорошее обоснование со стороны непосредственных расчетов, учитывающих турбулентные столкновения, а с другой, будучи весьма наглядным и простым, может служить для проверки различных уточнений теории. Так, ряд из них дают поправки, которые находятся за пределами точности метода элементарных возбуждений. Наконец, в данной статье неоднократно подчеркивалось, что концепция эффективных турбулентных соударений, важная для построения общей теории, имеет многочисленные приложения и важна для сравнения теоретических результатов с результатами наблюдений.

Изложенная концепция эффективных турбулентных соударений, возможно, поможет экспериментаторам в наглядной качественной трактовке процессов в турбулентной плазме, а теоретикам — в проведении четкого различия турбулентных элементарных возбуждений от тех, которые описывают состояния, близкие к статистическому равновесию.

Физический институт
им. П. Н. Лебедева АН СССР

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Б. Кадомцев, сборник «Вопросы теории плазмы», т. 4, М., Атомиздат, 1964.
2. А. А. Веденов, АЭ 13, 5 (1962); А. А. Галеев и др., Ядерный синтез 5, 20 (1965); Е. К. Завойский, Л. И. Рудаков, Физика плазмы (коллективные процессы в плазме и турбулентный нагрев), М., «Знание», 1967; Я. Б. Файнберг, A Survey of Phenomena in Ionised Gases. Invated Papers, Vienna, IAEA, 1968; В. Н. Цытович, Стохастические процессы в плазме. Обзорный доклад на международной конференции по явлениям в ионизированных газах (Бухарест, 1969). Препринт ФИАН СССР, Москва, 1969.
3. С. А. Каплан, В. Н. Цытович, УФН 97, 77 (1969).

4. Л. Д. Ландау, ДАН СССР **44**, 339 (1944); W. Heisenberg, Zs. Phys. **124**, 628 (1948).
5. А. А. Веденов, УФН **84**, 533 (1964).
6. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, М., Гостехиздат, 1954.
7. В. Н. Цытович, Нелинейные эффекты в плазме, М., «Наука», 1967.
8. Л. И. Рудаков, В. Н. Цытович, Plasma Phys. **13**, 213 (1971).
9. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ **16**, 949 (1945).
10. V. N. Tsytovich, Plasma Phys. **13**, 741 (1971); Culham Lab. Preprint CLM-P244, 1970.
11. В. Г. Маханьков, В. Н. Цытович, Ядерный синтез **10**, 405 (1970).
12. А. Н. Колмогоров, ДАН СССР **98**, 527 (1949).
13. P. G. Saffman, — Topics in Nonlinear Physics, ed. by N. Zabusky, New York—Berlin — Heidelberg, Spinger-Verlag, 1968.
14. S. F. Edwards, D. McComb, J. Phys. **A2**, 157 (1969).
15. R. H. Kraichnan, Phys. Fluids **7**, 1163 (1964).
16. А. А. Веденов и др., Ядерный синтез, прил. 2, 465 (1962); W. E. Drummond, D. Pines, Nucl. Fusion, Suppl. **3**, 1042 (1962).
17. P. Sturrock, Proc. Roy. Soc. **A242**, 277 (1957). Л. М. Горбунов, В. П. Силин, ЖЭТФ **47**, 200 (1969).
18. С. Б. Пикельнер, В. Н. Цытович, ЖЭТФ **55**, 977 (1968).
19. В. А. Липеровский, В. Н. Цытович, ЖЭТФ **57**, 1252 (1969).
20. Е. П. Жидков и др., Plasma Phys. **12**, 191 (1970); Препринт ОИЯИ Р-4464, Дубна, 1969.
21. J. Jancarik, S. M. Hamberger, Phys. Rev. Lett. **25**, 999 (1970).
22. J. W. Paul et al., ibid., p. 497.
23. Б. А. Демидов, С. Д. Фанченко, Письма ЖЭТФ **2**, 533 (1965); Ю. Г. Калинин и др., ЖЭТФ **59**, 1056 (1970).
24. В. Н. Цытович, Препринт ФИАН СССР № 12, Москва, 1968.
25. Л. Д. Ландау, Собрание трудов, т. 1, М., «Наука», 1969, стр. 46.
26. А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий, Квантовая электродинамика, М., «Наука», 1964.
27. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Элсктродинамика сплошных сред, М., Гостехиздат, 1957.
28. В. Л. Гинзбург и др., УФН **94**, 63 (1968).
29. В. В. Железняков, ЖЭТФ **52**, 1406 (1967).
30. C. F. Kennel, F. Engelman, Phys. Fluids 9, 2377 (1966); I. B. Bernstein, F. Engelman, ibid., p. 937.
31. А. А. Галеев, Л. И. Рудаков, ЖЭТФ 45, 1231 (1963).
32. I. Lerch, Phys. Fluids **11**, 1720 (1968).
33. В. Н. Цытович, А. Б. Шварцбург, ЖЭТФ 49, 797 (1965); М. А. Лившиц, В. Н. Цытович, Ядерный синтез **10**, 242 (1970).
34. Р. Пайерлс, Квантовая теория твердых тел, М., ИЛ, 1956; А. А. Абрикосов, А. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, Метод функций Грина в статистической физике, М., Физматгиз, 1962; Д. А. Киржниц, Полевые методы теории многих частиц, М., Атомиздат, 1963.
35. Н. Бломберген, Нелинейная оптика, М., «Мир», 1969.
36. V. A. Suprunenko, et al., Plasma Phys. **12**, 627 (1970).
37. Г. М. Батанов, К. А. Сарксян, Письма ЖЭТФ 13, 539 (1971); Г. М. Батанов и др., Кр. сообщ. ФИАН СССР, № 8,60 (1971).
38. S. M. Hamberger, J. Jancarik, Culham Lab. Preprint CLM-P269, 1971.
39. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ 7, 203 (1937).
40. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Статистическая физика, М., «Наука», 1964.
41. В. Н. Арнольд, УМН 18 (6), 91 (1963); Г. М. Заславский, Препринт ИЯФ СО АН СССР № 39, Новосибирск, 1966; Б. В. Чириков, Автореферат докт. диссертации, Новосибирск, ИЯФ СО АН СССР, 1968.
42. В. Н. Цытович, Теория турбулентной плазмы, М., Атомиздат, 1971.
43. W. E. Drummond, M. L. Sloan, Phys. Fluids **12**, 1849 (1969).
44. Ф. Г. Басс и др., ЖЭТФ 49, 329 (1965).
45. T. H. Dupree, Phys. Fluids **9**, 1773 (1966).
46. T. H. Dupree, ibid. **10**, 1049 (1967).
47. J. Weinstock, ibid. **12**, 1045, (1969).
48. В. Д. Шапиро, В. Н. Шевченко, ЖЭТФ **42**, 1515 (1962).
49. N. H. Krall, P. L. Book, Phys. Fluids **12**, 347 (1969); В. Л. Сизоненко, К. Н. Степанов, Письма ЖЭТФ 9, 282 (1969).
50. Б. Б. Кадомцев, В. И. Петвиашвили, **43**, 2234 (1962).
51. Л. И. Рудаков, Л. В. Кораблев, ЖЭТФ **50**, 220 (1966).

52. Р. З. Сагдеев, Proc. on the 18th Symposium on Applied Mathematics, New York, 1967.
53. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, М., «Наука», 1967; В. Л. Гинзбург, А. А. Рухадзе, Волны в магнитоактивной плазме, М., «Наука», 1970.
54. А. А. Веденов, Л. И. Рудаков, ДАН СССР **159**, 767 (1964).
55. А. Гайлитис, Изв. АН Латв. ССР, сер. физ.-тех. наук **4**, 13 (1965); A. A. Vedenov et al. Plasma Phys. 9, 719 (1967).
56. В. Н. Цытович, ДАН СССР **181**, 60 (1968).
57. В. Н. Цытович, Препринт ФИАН СССР № 150, Москва, 1969.
58. В. Н. Цытович, ЖЭТФ **57**, 141 (1969).
59. Р. З. Сагдеев, Сборник «Теория плазмы» (Материалы Международной конференции по теории плазмы (Киев, 1971)), Киев, «Наукова думка», 1972.
60. E. N. Krivoroutsky, V. G. Makhankov, V. N. Tsytovich, Nucl. Fusion **9**, 97 (1969); A. Rogister, Proc. of the 4th Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics (Rome, 1970), C.N.E.N., p., 159; M. Dobrowolny, P. Negrini, Proc. of the 10th Intern. Conference on Phenomena in Ionised Gases, Oxford, 1971, p. 300.