

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ФЕРРОМАГНИТНЫХ ДОМЕНОВ

И. А. Привороцкий

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	43
1. Условия сосуществования фаз. Поверхностное натяжение	44
а) Термодинамические соотношения (44). б) Одноосные и кубические ферромагнетики (47). в) Условия сосуществования фаз (49). 1) Ферромагнетик с большой анизотропией ($\beta = \infty$) (50). 2) Ферромагнетик с малой анизотропией ($\beta/4\pi \ll 1$) (51). 3) Угол между границей и осью легкого намагничивания мал (β произвольно) (52). г) Структура доменной границы. Поверхностное натяжение (52)	
2. Доменные структуры в ферромагнетиках	55
а) Простейшие доменные структуры (55). б) Плоская модель разветвленной доменной структуры одноосных ферромагнетиков (57). в) Плоская модель разветвленной доменной структуры кубических ферромагнетиков (62).	
3. Глубинные свойства доменных структур. Теория идеальной кривой намагничивания (поляризации)	64
а) Постановка задачи (64). б) Глубинные свойства доменных структур. Идеальная кривая намагничивания одноосных ферромагнетиков (65). в) Магнито-стрикция и электрострикция (68).	
4. Теория мелких ферромагнитных частиц	70
а) Теорема Брауна (70). б) Критический радиус в случае малой анизотропии (72).	
5. Теория зародышей перемагничивания	73
а) Термическая активация зародышей (73). б) Вытянутые зародыши (слабые поля) (74). в) Сферические зародыши в случае сильной анизотропии и поверхностные зародыши (76). 1) Сферические зародыши (76). 2) Поверхностные зародыши (76).	
Приложение. Термодинамическая теория магнито-стрикции. Тензор напряжений	77
Цитированная литература	79

ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что в ферромагнетиках возможно образование доменной структуры, т. е. расслоение образца на области сосуществующих фаз с различными значениями магнитного момента M (см., например, ¹⁻³). Аналогичное явление имеет место в сегнетоэлектриках ^{1,4,5}, а также в сверхпроводниках (промежуточное состояние) ^{1,6}. Недавно обнаружено существование доменной структуры у неферромагнитных металлов в условиях эффекта де Гааза — ван Альфена ^{7,8} и в антиферромагнетиках ⁹.

Различные вопросы теории доменных структур рассмотрены в большом числе книг и обзорных статей. В частности, очень популярен обзор Киталя по ферромагнетикам ¹⁰ (см. также ^{11,12}). В нашей статье подробно изложены те результаты, которые были получены недавно и до сих пор не освещались в монографиях или обзорах. Значительная часть статьи посвящена

рассмотрению принципиальных вопросов теории. Подробно описаны те свойства доменных структур, которые не зависят от свойств модели. В качестве конкретных примеров рассмотрены доменные структуры в одноосных и кубических ферромагнетиках. Результаты экспериментов приводятся лишь в качестве иллюстрации.

Некоторые общепринятые представления оказались неправильными и в этой статье подвергнуты критике. Такая критика необходима, так как упомянутые ошибочные представления широко распространены и излагаются во многих учебниках.

Число работ, посвященных теории доменных структур, очень велико. Чтобы не усложнять чтение, мы ограничились минимальным числом ссылок, поэтому список литературы не содержит полной библиографии. Там, где это возможно, мы старались ссылаться на те книги и статьи зарубежных авторов, которые переведены на русский язык.

1. УСЛОВИЯ СОСУЩЕСТВОВАНИЯ ФАЗ. ПОВЕРХНОСТНОЕ НАТЯЖЕНИЕ

а) Термодинамические соотношения. В гл. 1 мы будем пренебрегать эффектами электрострикции и магнестрикции, поэтому не будем делать различие между свободной энергией и термодинамическим потенциалом. Ниже будут выписаны термодинамические соотношения для диэлектриков и магнетиков, которые будем часто использовать в дальнейшем.

Поляризацию диэлектриков можно производить двумя способами: задавая либо распределение сторонних зарядов $\rho(\mathbf{x})$, либо потенциалы проводников φ_i . В первом случае свободной энергией является величина \mathcal{F} , которая определяется следующим образом:

$$\delta \mathcal{F} = (4\pi)^{-1} \int \mathbf{E}(\mathbf{x}) \delta \mathbf{D}(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} = \int \varphi \delta \rho(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x}, \quad (1.1)$$

здесь \mathbf{E} — электрическое поле, \mathbf{D} — индукция, φ — электростатический потенциал ($\mathbf{E} = -\nabla\varphi$), а интегрирование производится по всему пространству, включая объем вне тела. Удобно ввести также так называемую полную свободную энергию тела \mathcal{F}_Π :

$$\mathcal{F}_\Pi = \mathcal{F} - \int [\mathbf{E}_0^2(\mathbf{x})/8\pi] d^3\mathbf{x}, \quad (1.2)$$

$$\delta \mathcal{F}_\Pi = - \int \mathbf{P}(\mathbf{x}) \delta \mathbf{E}_0(\mathbf{x}) dV, \quad (1.3)$$

где $\mathbf{E}_0(\mathbf{x})$ — поле, создаваемое заданными зарядами $\rho(\mathbf{x})$ в вакууме, а $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ — дипольный момент единицы объема. Интегрирование в формуле (1.3) производится лишь по объему V , занятому диэлектриком ($\mathbf{P}(\mathbf{x}) \neq 0$). Если заданы потенциалы проводников φ_i , то свободной энергией является величина

$$\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F} - \int (\mathbf{E}\mathbf{D}/4\pi) d^3\mathbf{x} = \mathcal{F} - \sum_i e_i \varphi_i, \quad (1.4)$$

$$\delta \tilde{\mathcal{F}} = -(4\pi)^{-1} \int \mathbf{D}(\mathbf{x}) \delta \mathbf{E}(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} = - \sum_i e_i \delta \varphi_i; \quad (1.5)$$

здесь e_i — заряды проводников.

Аналогичные соотношения справедливы и для магнетиков. Если заданы токи проводимости $\mathbf{j}(\mathbf{x})$, создающие магнитное поле $\mathbf{H}(\mathbf{x})$, то сво-

бодная энергия $\tilde{\mathcal{F}}$ определяется следующим образом:

$$\delta\tilde{\mathcal{F}} = -(4\pi)^{-1} \int \mathbf{B}(\mathbf{x}) \delta\mathbf{H}(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} = -c^{-1} \int \mathbf{A}(\mathbf{x}) \delta\mathbf{j}(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x}, \quad (1.6)$$

где $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ — магнитная индукция, а c — скорость света.

Полная свободная энергия $\tilde{\mathcal{F}}_{\Pi}$ равна

$$\tilde{\mathcal{F}}_{\Pi} = \tilde{\mathcal{F}} + \int [\mathbf{H}_0^2(\mathbf{x})/8\pi] d^3\mathbf{x}, \quad (1.7)$$

$$\delta\tilde{\mathcal{F}}_{\Pi} = - \int \mathbf{M}(\mathbf{x}) \delta\mathbf{H}_0(\mathbf{x}) dV; \quad (1.8)$$

здесь $\mathbf{H}_0(\mathbf{x})$ — поле, создаваемое заданными токами $\mathbf{j}(\mathbf{x})$ в вакууме, а $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ — магнитный момент единицы объема. Соотношения (1.1)–(1.8) приведены в книге Ландау и Лифшица¹.

Намагничивание магнетика можно производить другим способом, а именно, помещая магнетик в поле сверхпроводящего кольца или же системы таких колец. В этом случае, как известно, поток через кольцо остается неизменным, в то время как сверхпроводящий ток в кольце может изменяться при внесении магнетика. Мы покажем, что в этом случае свободной энергией является величина

$$\mathcal{F} = \tilde{\mathcal{F}} + \int [\mathbf{H}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x})/4\pi] d^3\mathbf{x}, \quad (1.9)$$

$$\delta\mathcal{F} = (4\pi)^{-1} \int \mathbf{H}(\mathbf{x}) \delta\mathbf{B}(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x}, \quad (1.10)$$

где интегрирование производится по объему вне сверхпроводника (внутри сверхпроводника $\mathbf{B} = 0$).

Вводя потенциал φ ($\mathbf{H} = -\nabla\varphi$) и учитывая, что $\text{div } \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \text{div } \delta\mathbf{B}(\mathbf{x}) = 0$, представим подынтегральное выражение в (1.10) в виде

$$-\text{div}(\varphi\delta\mathbf{B}(\mathbf{x})) + \varphi \text{div } \delta\mathbf{B}(\mathbf{x}) = -\text{div}(\varphi\delta\mathbf{B}(\mathbf{x})).$$

Потенциал φ является многозначной функцией, изменяющейся на $4\pi I/c$ при обходе вокруг тока I по замкнутому контуру, проходящему через отверстие кольца. Учитывая, что на поверхности сверхпроводника $B_n = 0$, легко видеть, что интеграл в (1.10) сводится к интегралу по двум сторонам поверхности, закрывающей кольцо, и равен $I\delta Q/c$, где Q — поток через кольцо. В общем случае

$$\delta\mathcal{F} = c^{-1} \sum_i I_i \delta Q_i.$$

Таким образом, величина \mathcal{F} действительно является термодинамическим потенциалом в переменных Q_i и при заданных потоках Q_i должна иметь минимум.

Наряду с этой величиной удобно ввести также полную свободную энергию \mathcal{F}_{Π} при заданных потоках Q_i :

$$\mathcal{F}_{\Pi} = \mathcal{F} - \int [\mathbf{H}_0'^2(\mathbf{x})/8\pi] d^3\mathbf{x}, \quad \delta\mathcal{F}_{\Pi} = (4\pi)^{-1} \int (\mathbf{H}\delta\mathbf{B} - \mathbf{H}_0' \delta\mathbf{H}_0') d^3\mathbf{x}, \quad (1.11)$$

где $\mathbf{H}_0'(\mathbf{x})$ — поле, создаваемое системой сверхпроводящих колец с замороженными в них потоками Q_i в вакууме.

Представим подынтегральное выражение во второй формуле (1.11) в виде $\mathbf{H}\delta\mathbf{B} - \mathbf{H}_0' \delta\mathbf{H}_0' = (\mathbf{H} - \mathbf{B})\delta\mathbf{H}_0' + (\mathbf{B} - \mathbf{H}_0')\delta\mathbf{H}_0' + \mathbf{H}(\delta\mathbf{B} - \delta\mathbf{H}_0')$. Полагая

$\delta H'_0 = -\nabla\delta\varphi'_0$ и $\mathbf{H} = -\nabla\varphi$, получим

$$\begin{aligned}(\mathbf{B} - \mathbf{H}'_0) \delta H'_0 &= -\operatorname{div} [\delta\varphi'_0 (\mathbf{B} - \mathbf{H}'_0)], \\ \mathbf{H} (\delta\mathbf{B} - \delta\mathbf{H}'_0) &= -\operatorname{div} [\varphi (\delta\mathbf{B} - \delta\mathbf{H}'_0)].\end{aligned}$$

При учете того, что

$$\int (\mathbf{B} - \mathbf{H}'_0) d\mathbf{S} = \int (\delta\mathbf{B} - \delta\mathbf{H}'_0) d\mathbf{S} = 0,$$

где интегрирование производится по поверхности, закрывающей отверстие сверхпроводящего кольца, легко видеть, что вклад в $\delta\mathcal{F}_\Pi$ дает только слагаемое $(\mathbf{H} - \mathbf{B}) \delta H'_0$, т. е. что

$$\delta\mathcal{F}_\Pi = - \int \mathbf{M}(\mathbf{x}) \delta H'_0(\mathbf{x}) dV. \quad (1.12)$$

Аналогичное соотношение справедливо и для полной свободной энергии \mathcal{F}'_Π диэлектриков:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{F}}_\Pi &= \tilde{\mathcal{F}} + \int [E_0'^2(\mathbf{x})/8\pi] d^3\mathbf{x}, \\ \delta\tilde{\mathcal{F}}_\Pi &= - \int \mathbf{P}(\mathbf{x}) \delta E'_0(\mathbf{x}) dV.\end{aligned} \quad (1.13)$$

где $E'_0(\mathbf{x})$ — поле, создаваемое в вакууме при заданных потенциалах проводников φ_i .

Все соотношения, которые были приведены выше, справедливы для произвольной связи между \mathbf{H} и \mathbf{B} (или между \mathbf{E} и \mathbf{D}). В частности, эта связь может быть нелокальной (см. раздел в), а также ⁸⁾. Если связь между полем и индукцией локальна, то можно ввести плотность свободной энергии следующим образом:

$$\begin{aligned}\tilde{F} &= -(4\pi)^{-1} \int_0^{\mathbf{E}} \mathbf{D} d\mathbf{E}, & F &= \tilde{F} + (4\pi)^{-1} \mathbf{E}\mathbf{D}, \\ \tilde{F} &= -(4\pi)^{-1} \int_0^{\mathbf{H}} \mathbf{B} d\mathbf{H}, & F &= \tilde{F} + (4\pi)^{-1} \mathbf{H}\mathbf{B}.\end{aligned}$$

Величина \tilde{F} имеет минимум при заданном поле (\mathbf{E} или \mathbf{H}), а F — при заданной индукции (\mathbf{D} или \mathbf{B}).

Для полных свободных энергий в книге ¹ получены также следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\Pi &= \int [F - (E_0^2/8\pi)] dV = \int [F - (\mathbf{E}\mathbf{D}/8\pi) - (1/2) \mathbf{P}\mathbf{E}_0] dV = \\ &= \int [\tilde{F} + (\mathbf{E}\mathbf{D}/8\pi) - (1/2) \mathbf{P}\mathbf{E}_0] dV, \quad (1.14)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{F}}_\Pi &= \int [\tilde{F} + (H_0^2/8\pi)] dV = \int [F - (\mathbf{H}\mathbf{B}/8\pi) - (1/2) \mathbf{M}\mathbf{H}_0] dV = \\ &= \int [\tilde{F} + (\mathbf{H}\mathbf{B}/8\pi) - (1/2) \mathbf{M}\mathbf{H}_0] dV. \quad (1.15)\end{aligned}$$

В этих формулах подынтегральное выражение обращается в нуль вне тела, так что интегрирование производится лишь по объему тела V .

Из формул (1.3), (1.8), (1.12) и (1.13) следует, что свойства пробной частицы (т. е. такого тела, которое вследствие своих малых размеров практически не влияет на источники поля) не зависят от того, каким

образом производится электризация (намагничение), если только поля \mathbf{E}_0 и \mathbf{E}'_0 (или \mathbf{H}_0 и \mathbf{H}'_0) в пределах тела фактически совпадают. Этот результат, впрочем, заранее очевиден.

б) Одноосные и кубические ферромагнетики. В качестве иллюстрации мы рассмотрим вначале модель одноосного ферромагнетика, описанную в книге Ландау и Лифшица¹. В этой модели свободная энергия единицы объема ферромагнетика равна

$$\tilde{F} = F_0(\mathbf{M}) - (4\pi)^{-1} \int_0^{\mathbf{H}} \mathbf{B} d\mathbf{H} = F_0(\mathbf{M}) - \mathbf{M}\mathbf{H} - (\mathbf{H}^2/8\pi). \quad (1.16)$$

Интеграл в формуле (1.16) вычисляется при фиксированном значении магнитного момента \mathbf{M} , которое затем должно быть найдено путем минимизации \tilde{F} при заданном \mathbf{H} , т. е. из уравнения $(\partial\tilde{F}/\partial\mathbf{M})_{\mathbf{H}} = 0$. Определенная таким образом энергия обладает необходимым свойством

$$\frac{\partial\tilde{F}}{\partial\mathbf{H}} = -\frac{\mathbf{B}}{4\pi} = -\frac{\mathbf{H}}{4\pi} - \mathbf{M}(\mathbf{H}),$$

где дифференцирование F производится с учетом зависимости $\mathbf{M}(\mathbf{H})$.

Величина $F_0(\mathbf{M})$ имеет в основном обменное происхождение и в первом приближении изотропна. Анизотропия появляется лишь при учете релятивистских взаимодействий:

$$F_0(\mathbf{M}) = F_0(|\mathbf{M}|) + U_{\text{ан}}.$$

Энергия магнитной анизотропии в рассматриваемой модели равна

$$U_{\text{ан}} = (\beta/2) M^2 \sin^2 \theta, \quad \beta > 0,$$

где θ — угол отклонения магнитного момента от оси легкого намагничения (ось z ; $M_z = M \cos \theta$). В плоскости, перпендикулярной этой оси, анизотропия в указанном приближении отсутствует. Релятивистское происхождение энергии анизотропии проявляется в том, что она пропорциональна M^2 . Константа β , вообще говоря, отнюдь не мала. Она может быть в частности, много больше единицы. Возможен также и противоположный случай.

Абсолютную величину магнитного момента \mathbf{M} можно считать неизменной. В этом случае $F_0(|\mathbf{M}|)$ есть константа, несущественная в термодинамике, и мы в дальнейшем не будем ее учитывать.

Минимизируя \tilde{F} при заданном \mathbf{H} , получим уравнение, определяющее ориентацию магнитного момента:

$$\beta M \sin \theta \cos \theta = -H_z \sin \theta + H_x \cos \theta; \quad (1.17)$$

магнитное поле \mathbf{H} расположено в плоскости x, z .

В случае $H_x^{2/3} + H_z^{2/3} < (\beta M)^{2/3}$ свободная энергия \tilde{F} как функция угла θ имеет два минимума, один из которых соответствует абсолютно стабильному, а другой метастабильному состоянию. Таким образом, в этом случае при одном и том же \mathbf{H} возможны два различных значения \mathbf{M} (две фазы). В области $H_x^{2/3} + H_z^{2/3} > (\beta M)^{2/3}$ метастабильные состояния невозможны, и, следовательно, направление магнитного момента \mathbf{M} при заданном \mathbf{H} определяется однозначно.

Естественным параметром, характеризующим величину анизотропии, является не β , а

$$\beta/4\pi = \{(\partial B_x/\partial H_x)_{H_z=0} - 1\}^{-1}.$$

В случае слабой анизотропии этот параметр мал по сравнению с единицей, а при большой анизотропии велик. В нижеследующей таблице приведены значения β , $\beta/4\pi$, M и $\beta M^2/2$ для некоторых одноосных ферромагнетиков.

Вещество	Параметр β	$\beta/4\pi$	M , гс	$(\beta M^2)/2$, эрг/см ³
Со	4,2	0,33	1400	$4,1 \cdot 10^6$
MnSb	0,025	$2 \cdot 10^{-3}$	8900	$1 \cdot 10^6$
Mn ₂ Sb	0,06	$4,8 \cdot 10^{-3}$	2900	$0,25 \cdot 10^6$
RF ₁₂ O ₁₉ (магнетоплюмбит)	43,4	3,45	330	$2,2 \cdot 10^6$

В кубических ферромагнетиках энергия анизотропии имеет вид

$$U_{\text{ан}} = \beta' M^2 (m_1^2 m_2^2 + m_2^2 m_3^2 + m_3^2 m_1^2)/2,$$

где m_1 , m_2 , m_3 — направляющие косинусы вектора \mathbf{M} относительно трех взаимно перпендикулярных осей. В случае $\beta' > 0$ эти оси являются осями легкого намагничивания. Константа β' обычно мала по сравнению с единицей. В железе $\beta' = 0,29$, $M = 1700$ гс, $\beta' M^2/2 = 4,2 \cdot 10^5$ эрг/см³. Вместо уравнения (1.17) для кубических ферромагнетиков получится более сложное уравнение, которое мы не будем выписывать. Максимальное число фаз в заданном поле \mathbf{H} в кубических ферромагнетиках равно шести (в случае $\mathbf{H} = 0$).

В неоднородном случае к свободной энергии добавляется член, зависящий от производных намагниченности:

$$\tilde{\mathcal{F}} = \int [U_{\text{ан}} - \mathbf{M}\mathbf{H} - (H^2/8\pi) + U_{\text{неодн}}] d^3\mathbf{x}, \quad (1.18)$$

$$U_{\text{неодн}} = (\alpha/2) (\partial M_i / \partial x_h)^2.$$

Вследствие обменного происхождения энергии неоднородности, последняя не зависит от абсолютного направления \mathbf{M} в кристалле. Константа α обычно порядка 10^{-12} см².

Связь между \mathbf{M} и \mathbf{H} в неоднородном случае находится из условия минимума свободной энергии $\tilde{\mathcal{F}}$, рассматриваемой как функционал от $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ при фиксированном $\mathbf{H}(\mathbf{x})$. При учете того, что $|\mathbf{M}| = M = \text{const}$, т. е. что бесконечно малая вариация $\delta\mathbf{M}(\mathbf{x})$ перпендикулярна $\mathbf{M}(\mathbf{x})$: $\delta\mathbf{M}(\mathbf{x}) = [\delta\mathbf{a}(\mathbf{x}), \mathbf{M}(\mathbf{x})]$, можно записать условие минимума $\tilde{\mathcal{F}}$ в виде

$$\begin{aligned} [\mathbf{M}, \mathbf{H}_{\text{эфф}}] &= 0, \\ \mathbf{H}_{\text{эфф}} &= -(\delta\tilde{\mathcal{F}}/\delta\mathbf{M}(\mathbf{x}))_{\mathbf{H}(\mathbf{x})}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

В одноосных ферромагнетиках

$$\mathbf{H}_{\text{эфф}} = \mathbf{H} + \beta (M\mathbf{l}) + \alpha\Delta\mathbf{M}, \quad (1.20)$$

где \mathbf{l} — орт оси легкого намагничивания (оси z). Этот результат получен в работе ¹³. На границе между ферромагнетиком и вакуумом должна обращаться в нуль производная от \mathbf{M} по нормали к поверхности:

$$\partial\mathbf{M}/\partial n = 0.$$

Это и есть условие обращения в нуль поверхностной части вариации свободной энергии $\tilde{\mathcal{F}}$ (естественное граничное условие).

В связи с тем, что свободная энергия $\tilde{\mathcal{F}}$ не меняется при бесконечно малых изменениях $\delta\mathbf{M}(\mathbf{x})$, удовлетворяющих условию $|\mathbf{M}| = \text{const}$,

т. е. $\delta M \perp M$, вариация свободной энергии может быть представлена в форме (1.6), и, следовательно, в рассматриваемой модели выполняются все необходимые термодинамические соотношения.

в) У с л о в и я с о с у щ е с т в о в а н и я ф а з. На границе раздела фаз в магнетиках должны выполняться электродинамические граничные условия

$$H_t = \text{const}, \quad B_n = \text{const} \quad (1.21)$$

(H_t — тангенциальная составляющая магнитного поля, B_n — нормальная составляющая магнитной индукции), которые следуют из уравнений магнитостатики $\text{rot } \mathbf{H} = 0$, $\text{div } \mathbf{B} = 0$. Кроме этого, на границе раздела фаз должно быть выполнено термодинамическое условие сосуществования фаз. Для вывода этого условия заметим, что непрерывность H_t и B_n на границе раздела фаз играет в нашем случае такую же роль, как и равенство температур и давлений в системе жидкость — пар. Естественно, что для равновесия необходимо равенство термодинамических потенциалов в переменных H_t , B_n . В связи с тем, что мы не учитываем магнитострикцию, таким термодинамическим потенциалом является свободная энергия

$$F' = \tilde{F} + (4\pi)^{-1} H_n B_n. \quad (1.22)$$

При заданных H_t и B_n эта величина в равновесии имеет минимум.

Таким образом, условие равновесия фаз имеет вид

$$F'_1(H_t, B_n) = F'_2(H_t, B_n), \quad F' = -(4\pi)^{-1} \int_0^H \mathbf{B} d\mathbf{H} + (4\pi)^{-1} H_n B_n. \quad (1.23)$$

Равенство $F'_1 = F'_2$ означает, что граница раздела находится в положении безразличного равновесия относительно перемещения в перпендикулярном к ней направлении. Для сегнетоэлектриков аналогичная система условий имеет вид

$$E_t = \text{const}, \quad D_n = \text{const}, \quad (1.24)$$

$$F'(E_t, D_n) = \text{const}, \quad (1.25)$$

$$F'(E_t, D_n) = \tilde{F} + (4\pi)^{-1} E_n D_n = -(4\pi)^{-1} \int_0^E \mathbf{D} d\mathbf{E} + (4\pi)^{-1} E_n D_n. \quad (1.26)$$

Число условий на границе равно четырем и совпадает с числом независимых переменных — три компоненты магнитного (электрического) поля и одна функция $z(x, y)$, определяющая положение границ раздела. Поэтому магнитостатическая (электростатическая) задача о расслоении на домены может быть сформулирована корректно: требуется найти решение уравнений Максвелла с граничными условиями (1.21), (1.23) или (1.24), (1.25).

Подчеркнем, что приведенный выше вывод условия сосуществования фаз не был связан с конкретной природой магнетика (сегнетоэлектрика) и справедлив для всех случаев сосуществования магнитных (сегнетоэлектрических) фаз. Эти результаты были получены в работе ¹⁴ (см. также ⁸).

В случае сосуществования сверхпроводящей и нормальной фаз полученное граничное условие упрощается, так как в сверхпроводящей фазе $\mathbf{B} = 0$. Задача о промежуточном состоянии несколько отличается от других задач теории доменных структур, хотя это отличие не является принципиальным. В сверхпроводящей фазе удобно вообще не вводить вектор \mathbf{H} (см., например, ¹). При таком способе описания граничные условия накладываются только в нормальной фазе, в которой $\mathbf{H} = \mathbf{B}$

(намагниченностью нормального металла можно пренебречь). На границе со сверхпроводником $H_n = 0$ (электродинамическое условие) и $H = H_k = \text{const}$ (термодинамическое условие). Задача о промежуточном состоянии решена Ландау^{15,16}.

Важным частным случаем является такое равновесие фаз, при котором на границе раздела непрерывно не только H_z , но и H_n . Напомним, что условие $H_n = \text{const}$ не следует из уравнений Максвелла. В этом случае соотношения (1.21) — (1.26) могут быть переписаны следующим образом:

$$H = \text{const}, \quad B_n = \text{const}, \quad \tilde{F} = -(4\pi)^{-1} \int_0^H \mathbf{B} dH = \text{const}, \quad (1.27)$$

$$E = \text{const}, \quad D_n = \text{const}, \quad \tilde{F} = -(4\pi)^{-1} \int_0^E \mathbf{D} dE = \text{const}. \quad (1.28)$$

Равенство $\tilde{F} = \text{const}$ следует из условий $F' = \text{const}$, $H_n(E_n) = \text{const}$. Роль этих граничных условий будет выяснена в гл. 3.

Для той модели одноосного ферромагнетика, которая была описана выше, соотношения (1.27) означают, что магнитное поле перпендикулярно оси легкого намагничивания ($H_z = 0$) и по абсолютной величине меньше βM (см. ¹). В этом случае возможны два в равной степени устойчивых состояния

$$M_{x1} = M_{x2} = H_x/\beta, \quad M_{y1} = M_{y2} = H_y/\beta, \\ M_{z1} = -M_{z2} = M [1 - (H/\beta M)^2]^{1/2}.$$

Граница раздела фаз при этом должна быть параллельна оси легкого намагничивания (это следует из равенства $B_{n1} = B_{n2}$, которое в данном случае означает, что $M_{n1} = M_{n2}$). Ориентация границы раздела в плоскости, перпендикулярной легкой оси, может быть произвольной.

Обсудим теперь более подробно условия сосуществования фаз в одноосном ферромагнетике при $H_{n1} \neq H_{n2}$. В этом случае равенства (1.21) — (1.23) нельзя расшифровать столь же просто, как и ранее, и мы рассмотрим лишь наиболее предельные случаи.

1) *Ферромагнетик с большой анизотропией* ($\beta = \infty$). В этом случае энергия анизотропии равна нулю, так как намагниченность \mathbf{M} не отклоняется от легкой оси, и

$$F' = -M_z H_z - (H^2/8\pi) + (H_n B_n/4\pi), \\ M_{z1} = -M_{z2} = M.$$

Пусть граница раздела образует с осью z угол ψ , а ось y выбрана в плоскости границы (рис. 1). Если учесть, что

$$-(H^2/8\pi) + (H_n B_n/4\pi) = \\ = -(H_z^2/8\pi) + (8\pi)^{-1} [B_n^2 - (4\pi M_n)^2],$$

легко видеть, что эта величина одинакова по обе стороны границы раздела. Поэтому условие $F'_1 = F'_2$ принимает вид $M_{z1} H_{z1} = M_{z2} H_{z2}$, откуда следует, что

$$H_{z1} + H_{z2} = 0 \quad (\beta = \infty). \quad (1.29)$$

Так как $H_z = H_{t(x,z)} \cos \psi - (B_n - 4\pi M_n) \sin \psi$, где $H_{t(x,z)}$ — проекция \mathbf{H}_t на плоскость x, z , то это условие эквивалентно следующему:

$$H_{t(x,z)} = B_n \operatorname{tg} \psi \quad (\beta = \infty). \quad (1.30)$$

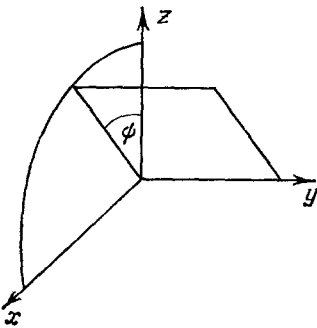


Рис. 1.

Любое из этих двух соотношений ((1.29) или (1.30)) можно использовать в качестве термодинамического граничного условия. Таким образом, если граница раздела наклонена к оси z , то на этой границе H_{z1} и H_{z2} не обращаются в нуль и $H_{x1} \neq H_{x2}$. Справедливо также и обратное утверждение.

Формулы (1.29), (1.30), полученные нами в предположении, что $\beta = \infty$, в действительности справедливы при выполнении неравенств $\beta/4\pi \gg 1$, $H \ll \beta M$.

Аналогичные формулы справедливы для одноосных сегнетоэлектриков, у которых направление и величина вектора поляризации \mathbf{P} не изменяются даже в очень сильном поле \mathbf{E} . В таких сегнетоэлектриках термодинамическое граничное условие имеет вид

$$E_{z1} + E_{z2} = 0,$$

или

$$E_{t(x,z)} = D_n \operatorname{tg} \psi.$$

2) Ферромагнетик с малой анизотропией ($\beta/4\pi \ll 1$). В этом случае сосуществование фаз возможно в полях $H \leq \beta M \ll 4\pi M$. Поэтому условие $B_n = \operatorname{const}$ в нулевом приближении по параметру $\beta/4\pi$ можно записать в виде

$$M_n = \operatorname{const}. \quad (1.31)$$

Для простоты мы рассмотрим только случай

$$H_{y1} = H_{y2} = 0, \quad M_{y1} = M_{y2} = 0$$

и будем считать, что плоскость границы параллельна оси y и образует с осью легкого намагничивания угол ψ (рис. 2). Углы, образованные векторами \mathbf{M}_1 и \mathbf{M}_2 с осью z , равны соответственно θ_1 и $-\theta_2$, причем из условия (1.31) следует, что $\psi - \theta_1 = \pi - \psi - \theta_2$, т. е. $\theta_2 - \theta_1 = \pi - 2\psi$.

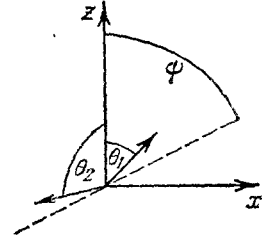


Рис. 2.

Независимыми параметрами можно считать, например, углы θ_1 и θ_2 . Четыре величины H_{x1} , H_{x2} , H_{z1} и H_{z2} связаны четырьмя соотношениями: два соотношения получаются из уравнения состояния магнетика (1.17) при $\theta = \theta_1$ и $\theta = -\theta_2$ *); еще два соотношения представляют собой условия $H_t = \operatorname{const}$, $F'(H_t, B_n) = \operatorname{const}$. Таким образом, при заданных \mathbf{M}_1 и \mathbf{M}_2 поля на границе раздела фаз определяются однозначно.

Следует, однако, отметить, что упомянутая выше система четырех уравнений не при всех значениях параметров θ_1 и θ_2 имеет решение, соответствующее сосуществованию стабильных фаз. В частности, так называемая 90-градусная граница ($\theta_1 = \pi/2$, $\theta_2 = \pi$, $\psi = \pi/4$) в одноосном ферромагнетике с малой анизотропией не может быть реализована **). Действительно, подставляя в уравнение (1.17) значения $\theta = \theta_1$ и $\theta = -\theta_2$, получим два соотношения

$$H_{z1} = H_{x2} = 0.$$

Условие $H_{t1} = H_{t2}$ в данном случае имеет вид

$$H_{x1} = H_{z2}.$$

*) Обычно соотношение (1.17) рассматривают как уравнение для \mathbf{M} при заданном \mathbf{H} . Оно представляет собой условие экстремума (по \mathbf{M}) свободной энергии $\tilde{F}(\mathbf{M}, \mathbf{H}) = U_{\text{ан}} - \mathbf{M}\mathbf{H} - (H^2/8\pi)$. Необходимо помнить, что те значения θ , при которых свободная энергия \tilde{F} имеет максимум, соответствуют абсолютно неустойчивым состояниям и их нужно отбрасывать.

***) В работе ¹⁴ в этом пункте допущена ошибка.

Свободную энергию F' можно представить в форме

$$F' = U_{\text{ан}} - \mathbf{M}_t \mathbf{H}_t - (H_1^2/8\pi) + (H_n^2/8\pi),$$

причем последними двумя слагаемыми можно пренебречь, так как $H \sim \sim \beta M$. С учетом того, что $\mathbf{M}_{t1} \mathbf{H}_{t1} = M H_{x1}/2$, $\mathbf{M}_{t2} \mathbf{H}_{t2} = -M H_{z2}/2$, легко видеть, что из условия $F'_1 = F'_2$ следует

$$H_{x1} = H_{z2} = \beta M/2.$$

Состояние $M_{x1} = M$, $H_{x1} = \beta M/2$, $H_{z1} = 0$ соответствует, как нетрудно проверить, не минимуму, а максимуму свободной энергии \tilde{F} при заданном \mathbf{H} , т. е. абсолютно неустойчиво. Это означает, что в одноосном ферромагнетике с малой анизотропией 90-градусная граница невозможна¹⁷.

Во многих учебниках по ферромагнетизму (см. также¹³) рассматривается 90-градусная граница с $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2 = 0$. На такой границе не удовлетворяется условие $F'_1 = F'_2$, а одна из фаз, намагниченность которой перпендикулярна легкой оси, абсолютно неустойчива. Такая граница также не может быть реализована.

Область значений θ_1 и θ_2 , в которой возможно сосуществование стабильных фаз, имеет размеры (в плоскости θ_1, θ_2) порядка единицы. В аналитическом виде границы этой области не были найдены.

В кубических ферромагнетиках 90-градусная граница возможна; намагниченности \mathbf{M}_1 и \mathbf{M}_2 в этом случае направлены вдоль взаимно перпендикулярных легких осей, так что $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2 = 0$ и $\tilde{F}_1 = \tilde{F}_2 = = F'_1 = F'_2 = 0$. Такая граница рассматривалась в работах Лифшица¹⁸ и Нееля^{19, 20} и неоднократно наблюдалась в железе (см., например, обзор¹⁰).

3) Угол между границей и осью легкого намагничивания мал (β произвольно). Мы приведем без вывода термодинамическое граничное условие для этого случая, полученное с учетом членов порядка ψ^2 . Оно имеет вид

$$H_{z1} + H_{z2} = 0 \quad (\psi \rightarrow 0),$$

такой же, как и в случае $\beta = \infty$ (см. (1.29)), но на этот раз оно справедливо лишь во втором порядке по ψ .

г) Структура доменной границы. Поверхностное натяжение. Рассмотрим теперь задачу о переходном слое между доменами, предполагая, что ширина этого слоя велика по сравнению с расстоянием между атомами (такая ситуация имеет место во всех случаях сосуществования магнитных фаз). Будет показано, в частности, что задача о переходном слое имеет решение только тогда, когда выполнено условие сосуществования фаз (1.23). Эта задача является одномерной и вследствие уравнений Максвелла величины \mathbf{H}_t и B_n не меняются в переходном слое. Величины \mathbf{V}_t и H_n могут изменяться в направлении, перпендикулярном границе раздела (вдоль оси ξ). Далеко от границы раздела (при $\xi \rightarrow \pm \infty$) они должны стремиться к асимптотическим значениям \mathbf{V}_t^\pm и H_n^\pm . Ориентацию границы раздела относительно кристаллографических осей считаем здесь произвольной.

Свободная энергия в рассматриваемом случае является функционалом от распределения $\mathbf{V}_t(\xi)$ и $H_n(\xi)$:

$$\tilde{\mathcal{F}} = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}\{\mathbf{V}_t(\xi), H_n(\xi)\} d\xi.$$

Конкретный вид этого функционала нам пока не понадобится.

Введем также свободные энергии

$$\mathcal{F} = \tilde{\mathcal{F}} + (4\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}(\xi) \mathbf{B}(\xi) d\xi$$

и

$$\mathcal{F}' = \tilde{\mathcal{F}} + (4\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} H_n(\xi) B_n d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} F' \{H_n(\xi), \mathbf{B}_t(\xi)\} d\xi. \quad (1.32)$$

Величины B_n и \mathbf{H}_t связаны с $\tilde{\mathcal{F}}$ и \mathcal{F} следующим образом:

$$B_n(\xi)/4\pi = -(\delta \tilde{\mathcal{F}} / \delta \mathbf{H}_n(\xi))_{\mathbf{H}_t(\xi)},$$

$$\mathbf{H}_t(\xi)/4\pi = (\delta \mathcal{F} / \delta \mathbf{B}_t(\xi))_{B_n(\xi)}.$$

Легко видеть, что эти уравнения есть уравнения Эйлера — Лагранжа для функционала \mathcal{F}' при дополнительных условиях $B_n = \text{const}$, $\mathbf{H}_t = \text{const}$. Если между $\mathbf{B}_t(\xi)$ и $H_n(\xi)$ существует функциональная связь, то одно из этих уравнений является следствием двух других.

Для того чтобы функционал \mathcal{F}' мог иметь экстремум, необходимо, чтобы подинтегральная функция в (1.32) принимала одинаковые значения при $\xi \rightarrow \pm \infty$. Таким образом, мы вновь получаем условие сосуществования фаз $F'_1(\mathbf{H}_t, B_n) = F'_2(\mathbf{H}_t, B_n)$.

Проделанное исследование показывает, что структура переходного слоя, может быть найдена¹⁴ путем минимизации свободной энергии \mathcal{F}' .

Аналогичная постановка задачи для сегнетоэлектриков имеет смысл вблизи точки Кюри. Вдали от точки Кюри изменение \mathbf{D}_t и E_n на границе раздела фаз происходит на расстояниях порядка междоатомных, т. е. задача о структуре доменной стенки теряет смысл. Поверхностное натяжение Δ представляет собой вклад доменной стенки в свободную энергию $\tilde{\mathcal{F}}$ (здесь мы считаем, что заданы токи $\mathbf{j}(\mathbf{x})$, создающие магнитное поле). Если на границах раздела фаз, помимо условий (1.21) и (1.23), выполняется также условие $H_{n1} = H_{n2}$ (при этом внутри стенки H_n по-прежнему может изменяться), то из равенства $F'_1 = F'_2$ следует, что $\tilde{F}_1 = \tilde{F}_2$ (см. (1.27)). В этом случае поверхностное натяжение можно определить следующим образом:

$$\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} [\tilde{F} \{B_t(\xi), H_n(\xi)\} d\xi - \tilde{F}(\xi = \pm \infty)].$$

Если же $H_{n1} \neq H_{n2}$, то и $\tilde{F}_1 \neq \tilde{F}_2$ и величину Δ нельзя определить подобным способом. Дело в том, что положение границы раздела определено лишь с точностью до толщины стенки δ . Поэтому в случае $\tilde{F}_1 \neq \tilde{F}_2$ нельзя однозначно выделить из величины $\int \tilde{F} \{B_t(\xi), H_n(\xi)\} d\xi$ ту часть, которая связана с образованием доменной границы. Неопределенность в поверхностной энергии порядка $\delta(\tilde{F}_1 - \tilde{F}_2)$. Если эта величина мала, то поверхностное натяжение можно определить приближенно. В противном случае энергия, связанная с образованием доменной границы, становится нелокальной и понятие поверхностного натяжения теряет смысл¹⁷.

В одноосных ферромагнетиках условие $\tilde{F}_1 = \tilde{F}_2$ выполняется лишь для границ, параллельных оси легкого намагничивания. При больших углах наклона границы поверхностное натяжение нельзя определить разумным способом.

В сверхпроводниках указанная трудность отсутствует, так как на границах раздела $B_n = 0$ и, следовательно, $\tilde{F}_1 = \tilde{F}_2$.

Наиболее простой и в то же время наиболее важный случай сосуществования фаз в одноосных ферромагнетиках исследован в работах Блоха²¹ и Ландау и Лифшица¹³. В этом случае намагниченности сосуществующих фаз противоположны по направлению и параллельны легкой оси, а поле \mathbf{H} равно нулю. Внутри переходного слоя намагниченность \mathbf{M} поворачивается вокруг нормали к границе раздела (ось x), оставаясь параллельной плоскости границы ($M_z = M \cos \theta$, $M_y = M \sin \theta$, $M_x = 0$). Зависимость $\theta(x)$ определяется в результате минимизации функционала (см. (1.18)):

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\beta}{2} M^2 \sin^2 \theta + \frac{\alpha}{2} (\partial M / \partial x)^2 \right] dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\beta}{2} M^2 \sin^2 \theta + \frac{\alpha}{2} M^2 (\partial \theta / \partial x)^2 \right] dx \end{aligned} \quad (1.33)$$

при условиях $\theta(-\infty) = 0$, $\theta(+\infty) = \pi$. Уравнение Эйлера — Лагранжа для этой задачи имеет вид

$$\alpha \theta'' - \beta \sin \theta \cos \theta = 0.$$

После простых вычислений получается

$$\cos \theta = -\operatorname{th}(x/\delta),$$

где $\delta = (\alpha/\beta)^{1/2}$ — толщина доменной границы.

Поверхностное натяжение Δ равно интегралу (1.33):

$$\Delta = 2 (\alpha\beta)^{1/2} M^2 = 2\beta\delta M^2. \quad (1.34)$$

Доменная стенка в кристаллах кубической симметрии исследована в работах^{18, 19}. Поверхностное натяжение 180-градусной границы, параллельной плоскости типа (001) в кубическом кристалле, равно

$$\Delta_{180^\circ} = (\alpha\beta')^{1/2} M^2.$$

Толщина 180-градусной границы в данном случае определяется магнитострикцией и значительно больше $(\alpha/\beta')^{1/2}$. В железе $\Delta_{180^\circ} = 1,8 \text{ эрг/см}^2$ ¹⁰.

В кубических ферромагнетиках часто наблюдаются 90-градусные границы: $\mathbf{H} = 0$, намагниченности \mathbf{M}_1 и \mathbf{M}_2 параллельны кристаллографическим осям $[100]$ и $[010]$, а плоскость границы есть плоскость (110). Энергия такой границы Δ_{90° равна¹⁹

$$\Delta_{90^\circ} = 0,863 (\alpha\beta')^{1/2} M^2,$$

а толщина переходной области порядка $(\alpha/\beta')^{1/2}$.

Структура доменной границы в сегнетоэлектриках вблизи точки Кюри описана в обзоре²². Переходная область в сверхпроводниках исследована Гинзбургом и Ландау²³. Другие типы доменных границ рассмотрены в работах⁸.

Некоторыми специфическими свойствами обладают границы раздела фаз в тонких магнитных пленках, толщина которых сравнима с толщиной переходного слоя. Этот случай мы не рассматриваем. Теория тонких магнитных пленок изложена, например, в книгах²⁴.

2. ДОМЕННЫЕ СТРУКТУРЫ В ФЕРРОМАГНЕТИКАХ

а) Простейшие доменные структуры. Поясним прежде всего, почему в массивных образцах происходит расслоение на домены. Рассмотрим в качестве примера плоскопараллельную ферромагнитную пластинку толщины l , вырезанную перпендикулярно легкой оси (ферромагнетик предполагается одноосным). Размеры пластинки в плоскости, перпендикулярной легкой оси, мы будем считать бесконечными, а анизотропию предельно большой ($\beta/4\pi \rightarrow \infty$). Кроме того, для простоты будем считать, что внешнее поле отсутствует ($H_0 = 0$).

В такой пластинке возможно однородное состояние: намагниченность M параллельна легкой оси, а внутреннее поле $H = -4\pi M$. Свободная энергия в расчете на единицу объема в этом случае равна $F_{\text{одн}} = \tilde{F}_{\text{одн}} = 2\pi M^2$. Рассмотренное состояние является метастабильным, так как H и M антипараллельны (в случае малой анизотропии это состояние было бы абсолютно неустойчивым) и очевидно, что существует структура с меньшей свободной энергией.

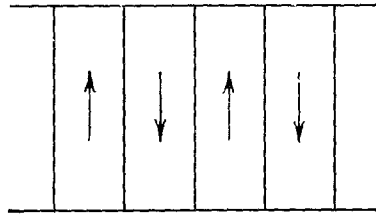


Рис. 3.

Такой структурой является так называемая *структура Киттеля*²⁵, изображенная на рис. 3. Стрелки указывают направления намагниченностей. Свободная энергия этой структуры состоит из двух частей: энергии поверхностного натяжения на границах раздела фаз (эта энергия в расчете на единицу площади пластинки равна $\Delta U/a = 2\beta\delta M^2 l/a$) и энергии выхода доменов к поверхности. Последняя возникает из-за того, что вблизи поверхности образца (на расстояниях порядка ширины доменов a) появляется неоднородное магнитное поле $H \sim 4\pi M$ (в общем случае энергия выхода включает также энергию анизотропии). Вследствие симметрии очевидно, что поле H на границах раздела фаз перпендикулярно к границам раздела, так что выполняются не только условия сосуществования фаз (1.21), (1.23), но и более жесткая система условий (1.27). Распределение магнитного поля рассчитано, например, в книге Ландау и Лифшица¹. Энергия выхода доменов к поверхности образца в расчете на единицу площади пластинки (с учетом двух сторон пластинки) равна $1,7 M^2 a$. Ширина доменов a определяется путем минимизации суммы

$$2\beta\delta M^2 (l/a) + 1,7 M^2 a,$$

т. е.

$$a \approx 1,1 (\beta\delta l)^{1/2}.$$

Суммарная свободная энергия доменной структуры, изображенная на рис. 3, при увеличении толщины пластинки l растет пропорционально $l^{1/2}$, в то время как свободная энергия однородного состояния пропорциональна первой степени l . Ясно поэтому, что расслоение на домены будет энергетически выгодным при достаточно больших размерах образца ($l > l_k \sim \beta\delta$).

Роль энергии поверхностного натяжения и энергии выхода доменов к поверхности была установлена (для другой модели) в работе Ландау и Лифшица¹³. В той же работе получена зависимость ширины доменов a от толщины пластинки l , она имеет вид $a \sim l^{1/2}$.

Во внешнем магнитном поле H_0 , перпендикулярном поверхности образца, концентрации фаз изменяются, а границы слоев вблизи поверхности должны искривляться¹⁴, так же как и в сверхпроводниках¹. Если бы

границы остались прямыми, то не выполнялось бы условие сосуществования фаз $F'(H_t, B_n) = \text{const}$ (при заданном распределении намагниченности $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ магнитостатическая задача решается однозначно и нельзя наложить еще одно дополнительное условие). Искривление границ вблизи поверхности образца порядка $H_0/4\pi M$ (магнитостатическая задача не содержит других безразмерных параметров, так как $\beta/4\pi = \infty$).

Простая структура, изображенная на рис. 3, в действительности наблюдается лишь в достаточно тонких пластинках (см., например, ^{26, 27}) а при больших размерах l происходит усложнение этой структуры (см.

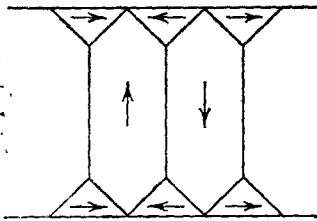


Рис. 4.

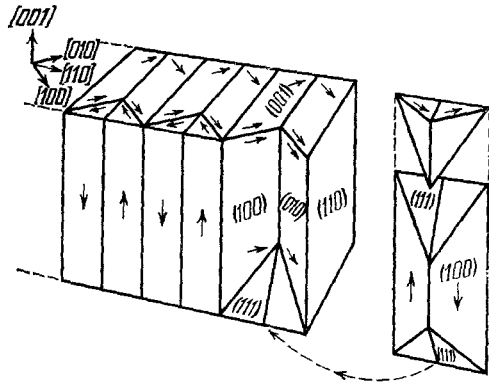


Рис. 5.

следующий раздел) и зависимость a от l изменяется. Однако в основе образующихся структур по-прежнему лежит расслоение на две фазы с противоположными намагниченностями.

В кубических кристаллах с положительной константой анизотропии β' в отсутствие внешнего поля возможна структура с замкнутым потоком, предложенная Лифшицем ¹⁸ (рис. 4). Энергией выхода в данном случае является магнитоэлектрическая энергия, которая пропорциональна объему замыкающих призм, т. е. в расчете на единицу площади поверхности пластинки пропорциональна ширине доменов a . Энергию магнитоэлектрики можно оценить ¹⁸, приписывая трехугольным доменам эффективную энергию одноосной анизотропии $U = kM^2$. В железе $k = 3,3 \cdot 10^{-4}$. Таким образом, получается верхняя граница для магнитоэлектрической энергии всего тела ¹⁸. Энергия структуры, изображенной на рис. 4, в расчете на единицу площади поверхности пластинки, равна

$$E = (kM^2 a/2) + (\Delta_{180^\circ} l/a).$$

Минимизируя это выражение, получим зависимость a от l :

$$a = (2\Delta_{180^\circ} l/kM^2)^{1/2}.$$

В случае железа

$$a = 6,2 \cdot 10^{-2} l^{1/2} \text{ см.}$$

Для отношения $a/l^{1/2}$ мы получили оценку снизу, так как энергия магнитоэлектрики в действительности меньше $kM^2 a/2$.

Строго говоря, в бесконечной пластинке такая структура является метастабильной и предпочтительней было бы однородное состояние с намагниченностью, ориентированной вдоль той легкой оси, которая параллельна плоскости пластинки. Однако уже в малом внешнем поле, перпендикулярном плоскости пластинки, структура, изображенная на рис. 4, становится энергетически выгодной. В отсутствие поля эта структура

может быть энергетически выгодной в пластинке конечных размеров, если торцы пластинки параллельны легкой оси. Структура, изображенная на рис. 4, неоднократно наблюдалась в железе (см., например, ^{10, 12, 28}). Любопытна структура Нееля ²⁰, наблюдаемая в железных полосках, вырезанных так, чтобы длина полоски совпадала с направлением [110] (рис. 5). Способ замыкания магнитного потока, изображенный на рис. 5, предложен Лаутоном (неопубликовано) и описан в статье ²⁸.

Во многих учебниках предполагается, что в одноосных ферромагнетиках с малой анизотропией также реализуется структура с замкнутым потоком (внутреннее поле $\mathbf{H} = 0$), изображенная на рис. 4. В действительности такая структура невозможна, даже если предположить, что намагниченность в треугольных замыкающих доменах отклоняется от легкой оси внутренним полем $H \sim \beta M$ ¹⁷. Дело в том, что 90-градусная граница не может быть реализована: условие сосуществования фаз $F'(\mathbf{H}_i, B_n) = \text{const}$ может быть выполнено лишь в том случае, если одна из фаз абсолютно неустойчива (см. раздел в) гл. 1) *).

Условия сосуществования фаз можно получить из уравнений микротеории (см. раздел г) гл. 1). В данной модели это статические уравнения Ландау и Лифшица (1.19), (1.20), которые сами выводятся из условия минимума свободной энергии $\tilde{\mathcal{F}}$. Поэтому структура, не удовлетворяющая граничному условию $F'_1 = F'_2$, не соответствует минимуму энергии.

Вопрос о доменной структуре одноосных ферромагнетиков с малой анизотропией еще не решен. В работе ¹⁷ предложена довольно сложная модель такой структуры и обсуждаются трудности теории (см. также следующий раздел). Очевидно, однако, что в нулевом приближении по параметру $\beta/4\pi \ll 1$ поток должен замыкаться в образце, т. е. на поверхности образца должна обращаться в нуль нормальная к поверхности составляющая намагниченности M_n . Так как намагниченность \mathbf{M} может отклониться от легкой оси лишь при наличии внутреннего поля \mathbf{H} , очевидно, что вблизи поверхности образца появится неоднородное поле $H \sim \beta M$ ^{14, 17}, которое должно ориентировать намагниченность почти перпендикулярно легкой оси. Перпендикулярная легкой оси и, следовательно, параллельная поверхности составляющая этого поля должна быть отлична от нуля. Это поле будет проникать за пределы образца (на расстояния порядка ширины доменов a) и может быть измерено. Отметим, что поля порядка 10^4 э неоднократно наблюдались над поверхностью монокристаллов кобальта ²⁹, у которого $\beta/4\pi \approx 1/3$, и не могут быть объяснены в рамках общепринятой теории, в которой допускается отклонение намагниченности от легкой оси в отсутствие внутреннего поля H .

б) Плоская модель разветвленной доменной структуры одноосных ферромагнетиков. При увеличении толщины пластинки l термодинамически выгодным становится прогрессирующее разветвление доменов вблизи поверхности. Это было

*) В литературе часто предполагается, что образование локально-неустойчивых состояний необходимо для достижения минимума свободной энергии всего тела $\tilde{\mathcal{F}}$. При этом ссылаются на то, что уравнения Максвелла делают задачу нелокальной. Однако можно показать, что из условия минимума свободной энергии $\tilde{\mathcal{F}}$ следует локальное условие минимума плотности свободной энергии \tilde{F} , рассматриваемой как функция \mathbf{M} при заданном локальном значении \mathbf{H} . Для доказательства неустойчивости треугольных замыкающих доменов достаточно ограничиться рассмотрением бесконечно малых возмущений вида $\delta\mathbf{H} = 0$, $\delta\mathbf{M} = (4\pi)^{-1} \text{rot } \delta\mathbf{A}$, $\delta\mathbf{A} = \{\delta A(x), 0, 0\}$, где $\delta A(x)$ — произвольная функция трех переменных ($\delta M_z \neq 0$), локализованная внутри треугольных доменов, а ось x выбрана вдоль направления \mathbf{M} в треугольниках. Такое возмущение уменьшает энергию анизотропии, не нарушая уравнений $\text{rot } \mathbf{H} = 0$, $\text{div } \mathbf{B} = 0$.

впервые обнаружено Ландау при исследовании промежуточного состояния сверхпроводников¹⁶. В работе Лифшица¹⁸ рассматривалась начальная стадия разветвления в ферромагнетиках.

В одноосных ферромагнетиках, в отличие от сверхпроводников, разветвление доменов становится выгодным при довольно малых размерах l . Поэтому большой интерес представляет задача о предельно разветвленной структуре. В работе¹⁷ была построена плоская модель такой структуры для случая одноосного ферромагнетика с малой анизотропией. Было показано, что зависимость ширины слоев a от толщины пластинки l изменяется: $a \sim l^{2/3}$. Эта зависимость была обнаружена у кобальта (см. например, ^{26, 30}). Такая же зависимость была получена Ландау для сверхпроводников¹⁶.

Сформулируем магнитостатическую задачу о выходе доменов к поверхности. Считаем, что внешнее магнитное поле отсутствует, а ось легкого намагничивания перпендикулярна плоскости ферромагнитной пластинки. Плотность энергии выхода равна

$$F = U_{\text{ан}} + (H^2/8\pi) = (1/2) \beta M^2 \sin^2 \theta + (H^2/8\pi).$$

В пределе малой анизотропии вторым слагаемым можно пренебречь, так как $H \sim \beta M \sin \theta$. Таким образом, поле H в первом приближении можно не учитывать и уравнения магнитостатики сведутся к одному уравнению

$$\operatorname{div} \mathbf{M} = 0 \quad (|\mathbf{M}| = M = \text{const}).$$

С математической точки зрения задача сводится к решению уравнений эйконала

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)^2 = 1, \quad \frac{\mathbf{M}}{M} = \operatorname{rot} \mathbf{A},$$

$$\mathbf{A} = \{0, A(x, z), 0\}.$$

Силовые линии есть линии равных значений вектор-потенциала \mathbf{A} .

Модель разветвленной структуры показана на рис. 6. На глубине h , которая ниже будет вычислена, каждый домен расщепляется. По мере приближения к поверхности ширина новых доменов увеличивается до тех пор, пока она не станет равной $a/3$. В этот момент происходит новое расщепление. Процесс продолжается до тех пор, пока размеры образовавшихся доменов не станут сравнимы с толщиной доменной стенки δ .

Концентрация противоположной фазы в исходном домене (ширины a) после n -го расщепления определяется рекуррентным соотношением

$$c_n = (2/3)c_{n-1} + (1/3)(1 - c_{n-1}); \quad c_1 = 1/3,$$

т. е.

$$c_n = (1/3) + (1/9) + \dots + (1/3^n).$$

При $n \rightarrow \infty$ получаем $c_\infty = 1/2$. Это означает замыкание магнитного потока в образце, т. е. равенство нулю нормальной к поверхности составляющей намагниченности (усредненной по расстояниям порядка δ).

Схема расщепления показана на рис. 7. Тонкие сплошные линии изображают силовые линии. Жирными линиями показаны границы раздела фаз. Силовые линии состоят из отрезков прямых и дуг окружностей, центры которых находятся в точках O, O', O'' . В центральном домене

силовые линии параллельны оси легкого намагничения. Намагниченность M параллельна (или антипараллельна) легкой оси в начале и в конце каждой стадии расщепления.

Из условия сохранения потока следует, что должны быть равны расстояния от точки на границе раздела до прямой силовой линии, исходящей из точки O' , и дуги, проходящей через центр рисунка, которая является продолжением этой прямой в качестве силовой линии (в последнем случае имеется в виду расстояние вдоль радиальной прямой). Поэтому

$$a_n/3 = R_n [(\cos \theta_n)^{-1} - 1].$$

Имеем далее

$$h_n = R_n \operatorname{tg} \theta_n.$$

Ниже будет показано, что углы θ_n малы (порядка $(\delta/a_n)^{1/2}$). Поэтому

$$\begin{aligned} R_n &= 2a_n/3\theta_n^2, \\ h_n &= 2a_n/3\theta_n, \end{aligned} \quad (2.1)$$

причем

$$a_n = a/3^{n-1},$$

Параметры R_n , h_n и θ_n определяются условием минимальности полной энергии, связанной с расщеплением. Энергия анизотропии на участке высотой h_n равна

$$U^{(n)} = \beta M^2 \int_0^{\theta_n} \sin^2 \theta d\theta \left[\int_{[R_n - (a_n/2)]/\cos \theta}^{R_n/\cos^2(\theta/2)} r dr + \int_{a_n/6 \cos^2(\theta/2)}^{a_n/2 \cos \theta} r' dr' \right].$$

Учитывая (2.1), а также то, что $\theta_n \ll 1$, и пренебрегая слагаемыми порядка $a_n^2 \theta_n^3$, получим

$$U^{(n)} = (4/45) \beta M^2 a_n^2 \theta_n.$$

Энергия поверхностного натяжения $E^{(n)}$ равна *)

$$E^{(n)} = 3h_n \Delta,$$

где $\Delta = 2\beta\delta M^2$, δ — толщина доменной стенки, т. е.

$$E^{(n)} = 4\beta\delta M^2 a_n / \theta_n.$$

Угол θ_n определяется условием минимума суммы $U^{(n)} + (2E^{(n)}/3)$. Второе слагаемое включает лишь энергию границ центрального домена. Таким образом, на данном этапе мы будем минимизировать ту энергию, которая связана с расщеплением. После простых вычислений получим

$$\theta_n^2 = 30\delta/a_n.$$

Полная энергия области толщиной a_n и высотой h_n равна

$$F^{(n)} = U^{(n)} + E^{(n)} = (2\sqrt{10}/3 \sqrt{3}) \beta M^2 a_n^{3/2} \delta^{1/2}.$$

Учитывая, что

$$\sum_n a_n^{3/2} = a^{3/2} [1 - (1/3 \sqrt{3})]^{-1}, \quad \sum_n 3^{n-1} a_n^{3/2} = a^{3/2} [1 - (1/\sqrt{3})]^{-1},$$

*) В разделе г) гл. 1 было показано, что понятие поверхностного натяжения для границ, наклоненных к оси легкого намагничения, строго говоря, теряет смысл, так как поверхностная энергия определяется лишь с точностью до $\delta (\tilde{F}_1 - \tilde{F}_2)$. Для границ, параллельных легкой оси, $\tilde{F}_1 = \tilde{F}_2$. В рассматриваемом случае наклон границ мал (порядка θ_n) и неопределенность в поверхностной энергии мала по сравнению с Δ .

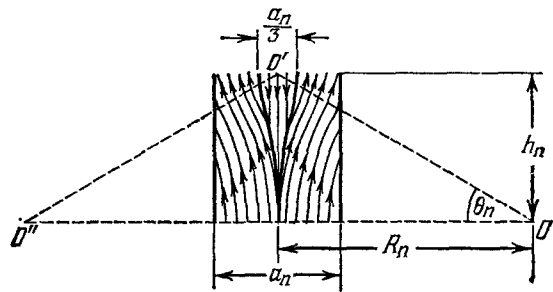


Рис. 7.

получаем

$$\sum_n 3^{n-1} F^{(n)} = (5/2) \lambda_1 \beta M^2 a^{3/2} \delta^{1/2}, \quad \lambda_1 = 8/3 \sqrt{10} (\sqrt{3} - 1) = 1,15;$$

$$h = \sum_n h_n = 1/4 \lambda_2 (a^{3/2} \delta^{1/2}), \quad \lambda_2 = 8/\sqrt{10} (3\sqrt{3} - 1) = 0,60.$$

Полная энергия образца в расчете на один домен толщины a равна

$$E = 2 \sum_n 3^{n-1} F^{(n)} + 2\beta\delta M^2 (l - 2h) = 2\beta M^2 a (2\lambda a^{1/2} \delta^{1/2} + \delta l a^{-1}),$$

$$\lambda = (5\lambda_1 - \lambda_2)/4 = 1,29,$$

где l — толщина пластинки.

Далее следует минимизировать энергию, отнесенную к единице площади поверхности пластинки, т. е. E/a . Это дает

$$a = \delta^{1/3} l^{2/3} / \lambda^{2/3}, \quad E/a = 6\lambda^{2/3} \beta M^2 \delta^{2/3} l^{1/3},$$

$$h = (\lambda_2/4\lambda) l = 0,117l, \quad h_1 = h [1 - (1/3)\sqrt{3}], \quad h_n = h_1 / (3\sqrt{3})^{n-1},$$

$$\theta_n = 3^{n/2} \sqrt{10} (\delta/\lambda l)^{1/3}. \quad (2.2)$$

Легко показать, что

$$h - \sum_{n'=1}^{n'=n} h_{n'} = h / (3\sqrt{3})^n.$$

Если эта величина порядка δ , т. е. $(3\sqrt{3})^n \sim l/8\delta$, то $a_n \sim \delta$, а $\theta_n \sim 1$. Таким образом, полное число расщеплений

$$n_{\max} \sim (2/3 (\ln 3)^{-1} \ln (l/\delta)).$$

Рис. 6 соответствует случаю $l/\delta \sim 10^4$. Видно, что число расщеплений еще довольно мало. При увеличении l отношение a/l уменьшается, т. е. уменьшаются углы наклона границ, а число расщеплений увеличивается.

Реально наблюдаемая структура не является плоской. На поверхности монокристаллов кобальта, перпендикулярной легкой оси, наблюдаются весьма сложные узоры (см., например, ²⁸). Аналогичные узоры наблюдались на Mn_2Sb ³¹. Тем не менее зависимость $a \sim l^{2/3}$ выполняется ^{26, 30}.

Интересно сравнить энергию разветвленной структуры (2.2) с энергией неразветвленной структуры, которая, очевидно, порядка $\beta M^2 (\delta l)^{1/2}$. Легко видеть, что неразветвленная структура перестает быть стабильной при $l > l_K \sim C\delta$, где C — численный коэффициент, который не зависит от β . Чтобы оценить этот коэффициент, необходимо точно знать энергию неразветвленной структуры, так как в отношении l_K/δ все численные множители входят в шестой степени *).

В сверхпроводниках, согласно оценкам Лифшица и Шарвина ³², численный коэффициент $l_K/\delta \sim (50)^6$, в связи с чем разветвленная структура никогда не наблюдается. В ферромагнетиках с малой анизотропией положение иное. Из эксперимента следует, что множитель C не очень велик, во всяком случае он на много порядков меньше, чем в сверхпроводниках. В связи с тем, что множитель C не содержит буквенных параметров, задача о неразветвленной структуре не может быть поставлена корректно в рамках макротeorии ¹⁷. В частности, существенный вклад в энергию неразветвленной структуры вносят границы, наклоненные к оси легкого намагничивания, и этот вклад в рамках макротeorии нельзя учесть. Трудности

*) Строго говоря, для того чтобы вычислить l_K точно, следовало бы рассмотреть начальную стадию разветвления, т. е. исследовать устойчивость неразветвленной структуры относительно бесконечно малых возмущений.

связаны с тем, что отношение l/a не очень велико и не содержит больших параметров типа $4\pi/\beta$. Выяснить свойства неразветвленной структуры, строго говоря, можно было бы, лишь решив статическое уравнение Ландау и Лифшица (1.19) во всем объеме образца, что представляется нам невозможным. Как уже указывалось, в сверхпроводниках ситуация гораздо благоприятнее. Хотя отношение δ/l_K и не содержит малого параметра, оно тем не менее столь мало, что используемое приближение не вызывает сомнений.

Приведенные выше результаты исследования разветвленной структуры справедливы и для ферромагнетиков кубической симметрии. В данном случае энергию анизотропии при малых отклонениях от легкой оси можно записать в виде $U_{ан} = (\beta' M^2 \theta^2)/2$. Энергия поверхностного натяжения Δ может быть представлена в виде $\Delta = 2\beta'\delta M^2$, где $\delta = [(\alpha/\beta)^{1/2}]/2$ — коэффициент пропорциональности, не совпадающий с толщиной доменной стенки. В кубических ферромагнетиках критический размер l_K значительно больше из-за того, что энергия неразветвленной структуры очень мала¹⁸. Рассматривая начальную стадию разветвления, Лифшиц¹⁸ получил для l_K значение

$$l_K = 8 (\beta'/k)^3 (\alpha/\beta')^{1/2}.$$

В железе эта величина порядка 10^4 см. Именно поэтому кубические ферромагнетики особенно удобны для наблюдения простой доменной структуры с замыкающими треугольниками.

Можно рассмотреть также задачу о разветвленной доменной структуре в ферромагнетиках с произвольной константой анизотропии. Чтобы оценить параметры такой структуры, предположим, что и в этом случае реализуется картина, показанная на рис. 6, т. е. $a_{n+1}/a_n = 1/3$. Это предположение не согласуется с термодинамическим граничным условием $H_{z1} + H_{z2} = 0$ (см. раздел в) гл. 1), так что изложенный ниже метод позволяет найти лишь верхнюю границу для энергии разветвленной структуры (как уже отмечалось, термодинамическое граничное условие следует из условия минимума свободной энергии тела $\tilde{\mathcal{F}}$).

Предположим, что на каждой стадии расщепления границы центрального домена — параболы $r = R_n/\cos^2(\theta/2)$ и $r' = a_n/6 \cos^2(\theta/2)$. Скачок нормальной компоненты намагниченности на границах раздела фаз приводит к появлению магнитного поля в боковых доменах:

$$H_x(x, z) \approx 8\pi M \mu^{-1} \theta_0(z), \quad H_z \leq H_x, \quad \mu = 1 + 4\pi\beta^{-1}.$$

В центральном домене в первом приближении $H_x = 0$. Энергия выхода есть энергия магнитного поля $\int (H^2/8\pi) dV$. Опуская вычисления, аналогичные тем, которые были сделаны в случае $\beta/4\pi \leq 1$, приведем лишь окончательные результаты:

$$E/a = 6M^2 (\lambda\beta\delta)^{2/3} (4\pi l/\mu)^{1/3}, \quad a = (\beta\mu\delta/4\pi)^{1/3} (l/\lambda)^{2/3}, \quad h = 0,117l.$$

Зависимость $a \sim l^{2/3}$ наблюдалась также в магнетоплюмбите^{26, 27}. При сравнении энергии разветвленной и неразветвленной структур в случае $\beta/4\pi \gg 1$ можно оценить критический размер l_K , выше которого разветвление заведомо выгодно: $l_K \approx 0,87 \cdot 10^4 \beta\delta$. Отношение a_K/l_K (где a_K — размер домена в неразветвленной структуре при $l = l_K$) равно $1,2 \cdot 10^{-2}$. Отметим, что полученное значение l_K завышено, а отношение a_K/l_K занижено. На начальной стадии усложнения простой неразветвленной структуры происходит искривление плоских доменных границ, причем структура перестает быть двумерной, а затем вблизи поверхности появляются зародыши обратной намагниченности²⁶.

в) Плоская модель разветвленной доменной структуры кубических ферромагнетиков *). Простейшим обобщением доменной структуры с замыкающими треугольниками для случая, когда поверхность пластинки наклонена относительно легкой оси, является структура, изображенная на рис. 8, где

$$\delta_1 = (\pi/4) - (\gamma/2),$$

$$\delta_2 = (\pi/4) + (\gamma/2).$$

Плотность энергии анизотропии в треугольных доменах равна $U_{ан} = (1/2)\beta' M^2 \sin^2 \gamma \times \cos^2 \gamma$. В железе $\beta' = 0,28$. Эта структура неразветвленная, так что $a \sim l^{1/2}$.

В случае $\gamma \sim 1$ структура, изображенная на рис. 8, энергетически невыгодна. Полная энергия может быть существенно уменьшена, если образуется разветвленная структура, показанная на рис. 9. На этом рисунке показаны лишь две последовательные стадии разветвления.

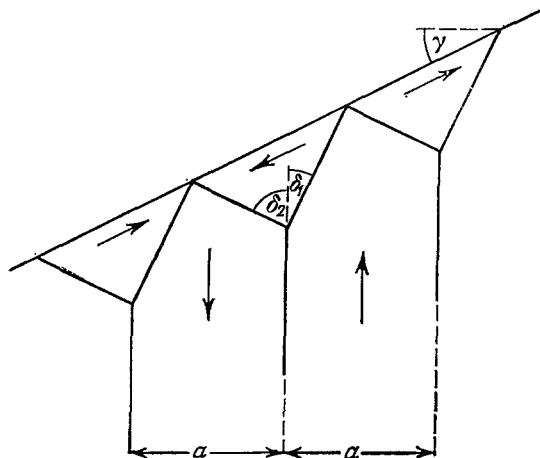


Рис. 8.

В действительности дробление происходит до тех пор, пока размеры образующихся доменов не станут сравнимы с толщиной 180-градусной

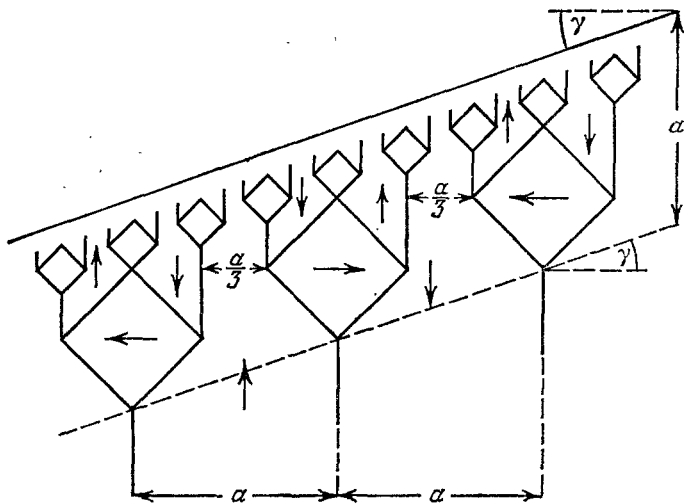


Рис. 9.

границы δ_{180° (последняя много больше толщины 90-градусной границы δ_{90°). Это дает возможность оценить число разветвлений:

$$n \sim \ln(a/\delta_{180^\circ})/\ln 3.$$

Таким способом удается почти полностью избавиться от энергии анизотропии. Последняя сосредоточивается лишь в узком слое, вблизи

*) Результаты, описанные в этом разделе, получены в работе ³³.

поверхности образца (на расстояниях порядка δ_{180°). Энергия такой структуры в расчете на единицу площади поверхности пластинки (с учетом двух сторон пластинки) равна

$$E = [(4/3 \ln 3) (2\sqrt{2} \Delta_{90^\circ} + \Delta_{180^\circ}) \ln (a/\delta_{180^\circ}) + (2kM^2 a/3) + \Delta_{180^\circ} (l - 2a) a^{-1}] \cos \gamma. \quad (2.3)$$

Слагаемое, пропорциональное $\ln (a/\delta_{180^\circ})$, есть энергия разветвленных границ (Δ_{90° и Δ_{180° — энергия 90-градусной и 180-градусной границ: $\Delta_{90^\circ} = 0,863 \Delta_{180^\circ} \sim \beta' \delta_{90^\circ} M^2$). После каждого разветвления размеры доменов уменьшаются втрое, но число их соответственно увеличивается,

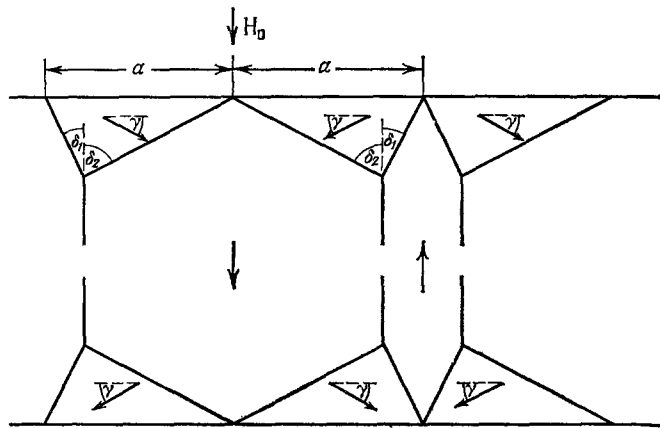


Рис. 10.

и поэтому полная энергия разветвленных границ пропорциональна числу разветвлений n . Разветвление энергетически выгодно, если эта энергия меньше энергии анизотропии треугольных доменов, изображенных на рис. 8. При $\gamma \sim 1$ и $a \geq \delta_{180^\circ}$ это условие всегда выполняется.

Второй член представляет энергию магнитострикции. Мы оценим ее, приписывая четырехугольным доменам эффективную энергию одноосной анизотропии $U_{МС} = kM^2$. В железе $k = 3,3 \cdot 10^{-4}$. Как уже указывалось, таким образом получается верхняя граница для магнитострикционной энергии всего тела¹⁸. Последний член представляет энергию поверхностного натяжения на неразветвленных границах (толщина пластинки l измеряется вдоль легкой оси). Минимизируя это выражение, получим для a квадратное уравнение. Положительный корень этого уравнения имеет вид

$$a = 0,466l [1 + (1 + U_{к1}^{-1})^{1/2}]^{-1}, \quad (2.4)$$

$$l_{к1} = (2\sqrt{2} \Delta_{90^\circ} + \Delta_{180^\circ}) / kM^2 \ln 3 \sim \delta_{90^\circ} \beta' / k \sim \delta_{180^\circ} \beta' / k \ln (\beta' / k). \quad (2.5)$$

В случае железа $l_{к1} = 6 \cdot 10^{-3}$ см.

Таким образом, при малых толщинах $l \ll l_{к1}$ должна выполняться зависимость $a = 0,233 l$, в то время как при $l \gg l_{к1}$ эта зависимость становится корневой: $a = 0,466 (l_{к1} l)^{1/2}$, несмотря на то, что структура является разветвленной. В последнем случае энергия $E = 0,62 kM^2 (l_{к1} l)^{1/2}$. При очень больших значениях l должна наблюдаться предельно разветвленная структура с $a \sim l^{2/3}$ типа той, которая была рассчитана в предыдущем разделе. Энергия такой структуры порядка $\beta' \delta_{90^\circ}^{2/3} M^2 l^{1/3}$. Сравнивая энергии, получим для критической толщины значение $l_{к} \sim (\beta' / k)^3 \delta_{90^\circ}^*$.

*) Мы не смогли учесть численные множители, так как энергия разветвленной структуры для рассматриваемого случая не была рассчитана.

В случае железа эта величина порядка 10^3 см, так что предельно разветвленная структура практически не может быть реализована.

До сих пор мы предполагали, что внешнее поле отсутствует. При наличии внешнего поля H_0 , перпендикулярного поверхности пластинки, разветвление будет энергетически выгодным и в том случае, когда поверхность пластинки перпендикулярна легкой оси. Вместо структуры, изображенной на рис. 10, где $\sin \gamma = H_0/4\pi M$, $\delta_1 = (\pi/4) - (\gamma/2)$, $\delta_2 = (\pi/4) + (\gamma/2)$,

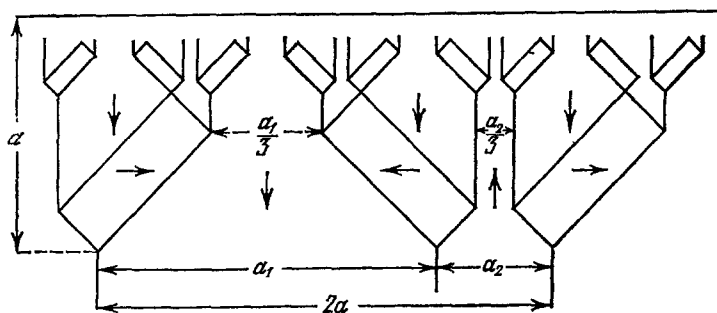


Рис. 11.

которая была рассчитана в работе ³⁴ (см. также ²), в случае $H_0 \sim 2\pi M$ должна образовываться структура, показанная на рис. 11. Все формулы для этого случая аналогичны предыдущим. Они получаются из формул (2.3)–(2.5), если положить $\gamma = 0$ и сделать замену

$$k \rightarrow k [1 - (H_0/4\pi M)^2].$$

3. ГЛУБИННЫЕ СВОЙСТВА ДОМЕННЫХ СТРУКТУР. ТЕОРИЯ ИДЕАЛЬНОЙ КРИВОЙ НАМАГНИЧЕНИЯ (ПОЛЯРИЗАЦИИ)

а) П о с т а н о в к а з а д а ч и. В предыдущей главе мы видели, что расслоение на домены приводит к выигрышу в энергии, который пропорционален объему образца. Энергия, связанная с выходом доменов к поверхности, мала. Так, например, в случае разветвленной структуры в одноосном ферромагнетике эта энергия пропорциональна объему образца в степени $1/3$. Во многих задачах эффекты, связанные с выходом доменов к поверхности, могут быть несущественными. К числу таких задач относится, в частности, задача об идеальной кривой намагничивания (поляризации).

Наиболее просты глубинные свойства доменных структур в массивных эллипсоидальных телах, в плоскопараллельных пластинках и в цилиндрических образцах эллипсоидального сечения. Если внешнее поле однородно, то при пренебрежении эффектами, связанными с выходом доменов к поверхности, можно считать, что в образце сосуществует несколько однородных фаз, разделенных плоскопараллельными границами. В простейших случаях число фаз равно двум. Каждая из фаз представляет собой систему доменов, соприкасающихся с доменами другой фазы. Ширина доменов в массивных образцах мала по сравнению с размерами образца.

Усредненные по доменной структуре значения магнитного поля H и магнитной индукции B (или же электрического поля E и электрической индукции D) внутри таких образцов однородны. Эти величины связаны внешним полем H_0 (или E_0) соотношениями

$$H_{0i} = (\delta_{ik} - n_{ik}) \langle H_k \rangle + n_{ik} \langle B_k \rangle, \quad (3.1)$$

$$E_{0i} = (\delta_{ik} - n_{ik}) \langle E_k \rangle + n_{ik} \langle D_k \rangle; \quad (3.2)$$

здесь двойные угловые скобки — символ усреднения по объему образца, n_{ik} — тензор коэффициентов размагничивания (деполяризации).

Глубинные свойства доменных структур полностью характеризуются заданием \mathbf{H}_t, B_n (или \mathbf{E}_t, D_n), двумя углами, определяющими ориентацию границ раздела, и концентрациями фаз. Эти величины удовлетворяют трем уравнениям (3.1) (или (3.2)) и условию сосуществования фаз

$$F'_1(\mathbf{H}_t, B_n) = F'_2(\mathbf{H}_t, B_n)$$

или

$$F'_1(\mathbf{E}_t, D_n) = F'_2(\mathbf{E}_t, D_n).$$

Число уравнений на два меньше числа неизвестных. Два параметра должны быть определены из условия минимума полной свободной энергии единицы объема

$$\begin{aligned} \tilde{F}_n(\mathbf{H}_0) &= V^{-1} \int [\tilde{F}(x) + (H_0^2/8\pi)] d^3x = \tilde{F}_n(\mathbf{H}_0 = 0) - \int_0^{\mathbf{H}_0} \langle\langle \mathbf{M} \rangle\rangle d\mathbf{H}_0, \\ F_n(\mathbf{E}_0) &= V^{-1} \int [F(x) - (E_0^2/8\pi)] d^3x = F_n(\mathbf{E}_0 = 0) - \int_0^{\mathbf{E}_0} \langle\langle \mathbf{P} \rangle\rangle d\mathbf{E}_0. \end{aligned}$$

Рассмотрим сначала ферромагнитный образец в отсутствие внешнего поля ($\mathbf{H}_0 = 0$). Легко показать, что если $\mathbf{H}_0 = 0$, т. е. равны нулю внешние токи \mathbf{j} , то свободные энергии

$$\tilde{\mathcal{F}} = -(4\pi)^{-1} \int \left(\int_0^{\mathbf{H}(x)} \mathbf{B} d\mathbf{H} \right) d^3x$$

и

$$\mathcal{F} = \tilde{\mathcal{F}} + (4\pi)^{-1} \int \mathbf{H}(x) \mathbf{B}(x) d^3x$$

совпадают независимо от природы и геометрии образца. Действительно, $\mathbf{H}\mathbf{B} = \text{div}[\mathbf{A}, \mathbf{H}] + \mathbf{A} \text{rot} \mathbf{H}$, где \mathbf{A} — вектор-потенциал. Второе слагаемое в этом выражении равно нулю, так как $\mathbf{j} = 0$, и, следовательно, интеграл от $\mathbf{H}\mathbf{B}$ сводится к интегралу от дивергенции, т. е. равен нулю.

Аналогичная ситуация имеет место в сегнетоэлектриках, если $\mathbf{E}_0 = 0$, т. е. равны нулю сторонние заряды и заряды проводников. В данном случае $\mathbf{E}\mathbf{D} = -\text{div}(\varphi\mathbf{D}) + \varphi \text{div} \mathbf{D}$ (φ — скалярный потенциал), причем $\text{div} \mathbf{D} = 0$, а на поверхности проводников $\varphi = \text{const}$ и $\int D_n dS = 0$.

Свободная энергия F в ферромагнетике равна $U_{\text{ан}} + (H^2/8\pi)$. Очевидно, что при $\mathbf{H}_0 = 0$ минимум свободной энергии достигается в том случае, когда в глубине образца $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2 = 0$, $\mathbf{M}_1 = -\mathbf{M}_2$ (при этом $U_{\text{ан}} = 0$) и $c_1 = c_2$, т. е. имеет место частный случай условий (1.27). Этот результат не зависит от модели. Аналогичное утверждение справедливо и для сегнето-электриков.

б) Глубинные свойства доменных структур. Идеальная кривая намагничения одноосных ферромагнетиков. Далее мы покажем, что в произвольном однородном внешнем поле \mathbf{H}_0 , независимо от модели, условия сосуществования фаз (1.27) есть условия минимума объемной части полной свободной энергии \tilde{F}_n ¹⁴.

Для вычисления \tilde{F}_n удобно воспользоваться соотношением (1.15), которое может быть представлено в виде

$$\tilde{F}_n = \langle\langle F \rangle\rangle - (8\pi)^{-1} \langle\langle \mathbf{H}\mathbf{B} \rangle\rangle - (\mathbf{H}_0 \langle\langle \mathbf{M} \rangle\rangle / 2).$$

Для того чтобы найти условия минимума \tilde{F}_n , мы вычислим в линейном приближении изменение \tilde{F}_n при малом изменении параметров, характеризующих свойства доменной структуры (это означает малое изменение всех величин, в том числе $\langle\langle H_i \rangle\rangle$, $\langle\langle M_i \rangle\rangle$, ориентации границы раздела и т. д., при неизменном H_0). Соотношение (3.1) эквивалентно следующему:

$$H_{0i} = \langle\langle H_i \rangle\rangle + 4\pi n_{ik} \langle\langle M_k \rangle\rangle. \quad (3.3)$$

Если использовать (3.3), то легко показать, что

$$-H_0 \delta \langle\langle M \rangle\rangle / 2 = - (1/2) (\langle\langle H \rangle\rangle \delta \langle\langle M \rangle\rangle + 4\pi n_{ik} \langle\langle M_k \rangle\rangle \delta \langle\langle M_i \rangle\rangle).$$

При учете того, что

$$4\pi n_{ik} \delta \langle\langle M_i \rangle\rangle = -\delta \langle\langle H_k \rangle\rangle,$$

легко видеть, что

$$\begin{aligned} -H_0 \delta \langle\langle M \rangle\rangle / 2 &= - (1/2) (\langle\langle H \rangle\rangle \delta \langle\langle M \rangle\rangle - \langle\langle M \rangle\rangle \delta \langle\langle H \rangle\rangle) = \\ &= (8\pi)^{-1} (\langle\langle H \rangle\rangle \delta \langle\langle B \rangle\rangle - \langle\langle B \rangle\rangle \delta \langle\langle H \rangle\rangle). \end{aligned}$$

Среднее $\langle\langle HB \rangle\rangle$ удобно преобразовать следующим образом:

$$\langle\langle HB \rangle\rangle = \langle\langle H_t B_t \rangle\rangle + \langle\langle H_n B_n \rangle\rangle = H_t \langle\langle B_t \rangle\rangle + \langle\langle H_n \rangle\rangle B_n = \langle\langle H \rangle\rangle \langle\langle B \rangle\rangle.$$

Поэтому вариацию $\delta \tilde{F}_n$ можно представить в виде

$$\delta \tilde{F}_n = \delta \langle\langle F \rangle\rangle - (4\pi)^{-1} \langle\langle H \rangle\rangle \delta \langle\langle B \rangle\rangle.$$

Вариация $\delta \langle\langle F \rangle\rangle$ имеет вид

$$\delta \langle\langle F \rangle\rangle = \delta c_1 (F_1 - F_2) + \langle\langle \delta F \rangle\rangle = \delta c_1 (F_1 - F_2) + \frac{1}{4\pi} \langle\langle H \delta B \rangle\rangle,$$

где δc_1 — изменение концентрации, а усреднение в правой части производится с концентрациями фаз нулевого приближения. Аналогично

$$\delta \langle\langle B \rangle\rangle = \delta c_1 (B_1 - B_2) + \langle\langle \delta B \rangle\rangle = \delta c_1 (B_{1t} - B_{2t}) + \langle\langle \delta B \rangle\rangle.$$

Учитывая, что

$$\langle\langle H \delta B \rangle\rangle - \langle\langle H \rangle\rangle \langle\langle \delta B \rangle\rangle = \langle\langle H_n \delta B_n \rangle\rangle - \langle\langle H_n \rangle\rangle \langle\langle \delta B_n \rangle\rangle = \langle\langle (H_n - \langle\langle H_n \rangle\rangle) \delta B_n \rangle\rangle,$$

получим окончательно

$$\delta \tilde{F}_n = \delta c_1 (F'_1 - F'_2) + (4\pi)^{-1} [c_1 (H_{1n} - \langle\langle H_n \rangle\rangle) \delta B_{1n} + c_2 (H_{2n} - \langle\langle H_n \rangle\rangle) \delta B_{2n}].$$

Следует отметить, что δB_{1n} и δB_{2n} — проекции δB_1 и δB_2 на нормаль к невозмущенной границе раздела. Поэтому $\delta B_{1n} \neq \delta B_{2n}$. Если не предполагать заранее, что $F'_1 = F'_2$, то доменная структура обладает тремя степенями свободы и вариации δc_1 , δB_{n1} и δB_{n2} независимы. Таким образом, из условия обращения в нуль первой вариации $\delta \tilde{F}_n$ получаются условия

$$F'_1 = F'_2, \quad H_{n1} = H_{n2} = \langle\langle H_n \rangle\rangle.$$

Следовательно, термодинамическое граничное условие $F'_1 = F'_2$ само может быть получено из условия минимума \tilde{F}_n .

Таким образом, минимизируя объемную часть свободной энергии \tilde{F}_n , мы получили лишь одно дополнительное условие $H_{n1} = H_{n2}$. Число соотношений остается на единицу меньше числа параметров, определяющих свойства доменной структуры, т. е. в задаче имеется вырождение. Если задано поле H ($H_1 = H_2 = H$, $B_{n1} = B_{n2}$, $\tilde{F}_1 = \tilde{F}_2$) и концентрации фаз c_1 и c_2 , то величины $\langle\langle M \rangle\rangle$ и \tilde{F}_n не меняются при повороте границы раздела фаз вокруг вектора $B_1 - B_2$.

Итак, соотношения (1.27) и (3.1) допускают однопараметрическое семейство структур, обладающих одинаковыми значениями $\langle\langle M \rangle\rangle$ и \tilde{F}_n . Незвестный параметр, определяющий ориентацию границы раздела фаз, как и ширина слоев, может быть найден лишь при учете эффектов, связанных с выходом доменов к поверхности. Тем не менее зависимость $\langle\langle M \rangle\rangle$ от H_0 (идеальная кривая намагничения) может быть определена в результате решения гораздо более простой задачи: при заданном H_0 следует рассмотреть любую из структур, удовлетворяющих условиям (1.27) и (3.1), и вычислить для нее $\langle\langle M \rangle\rangle$.

Если число сосуществующих фаз $N > 2$, а домены по-прежнему представляют собой плоскопараллельные слои*), то первая вариация $\delta\tilde{F}_n$ имеет вид

$$\delta\tilde{F}_n = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=N} \delta c_\lambda F'_\lambda + (4\pi)^{-1} \langle\langle (H_n - \langle\langle H_n \rangle\rangle) \delta B_n \rangle\rangle.$$

При $N = 3$ условия $H_{n1} = H_{n2} = H_{n3}$ вместе с условиями сосуществования фаз (1.21), (1.23) и соотношениями (3.1) однозначно определяют глубинные свойства доменной структуры. Сосуществование трех фаз возможно, например, в кубических ферромагнетиках, если внутреннее поле \mathbf{H} параллельно диагональной оси [111], а границы раздела перпендикулярны полю.

Сосуществование четырех фаз возможно, по-видимому, лишь в особых случаях. В частности, в кубических ферромагнетиках четыре фазы могут сосуществовать, если поле \mathbf{H} параллельно одной из легких осей, а границы раздела фаз перпендикулярны полю. Если в гексагональном ферромагнетике константа одноосной анизотропии β отрицательна (таким свойством обладает кобальт при температурах выше 200° С), то в поле \mathbf{H} , параллельном гексагональной оси, возможно сосуществование шести фаз.

Так как формулы (1.14) для \mathcal{F}_n в диэлектриках аналогичны формулам (1.15) для $\tilde{\mathcal{F}}_n$ в магнетиках, то очевидно, что в глубине сегнетоэлектрического образца должны выполняться условия сосуществования фаз (1.28).

В одноосном ферромагнетике условия $\mathbf{H} = \text{const}$, $B_n = \text{const}$, $\tilde{F} = \text{const}$, как уже указывалось, означают, что граница раздела фаз параллельна легкой оси, а поле \mathbf{H} перпендикулярно этой оси. При заданных концентрациях фаз c_1 и c_2 ($c_1 + c_2 = 1$) и при заданном поле $\mathbf{H} \perp z$ объемная часть намагниченности $\langle\langle M \rangle\rangle$, как и \tilde{F}_n , не меняется при повороте границы раздела вокруг оси z . Это дает возможность найти связь между $\langle\langle M \rangle\rangle$ и H_0 в области существования доменной структуры для всех ориентаций H_0 и кристаллографических осей относительно осей эллипсоида³⁵.

Учтем, что при $H_z = 0$ и $H_x^2 + H_y^2 < (\beta M)^2$ «уравнение состояния» одноосного ферромагнетика принимает вид

$$\beta M_x = H_x, \quad \beta M_y = H_y, \quad M_z = \pm (M^2 - M_x^2 - M_y^2)^{1/2}.$$

Так как $\mathbf{H} = \text{const}$, то соотношение (3.3) может быть переписано в виде

$$H_{0i} = H_i + 4\pi n_{ik} \langle\langle M_k \rangle\rangle,$$

или же в виде

$$H_{0i} = 4\pi \tilde{n}_{ik} \langle\langle M_k \rangle\rangle, \tag{3.4}$$

*) Структуры типа «шахматной доски» и цилиндрические структуры обладают меньшим числом степеней свободы и могут быть реализованы лишь в случае $N = 2$.

где

$$\tilde{n}_{ik} = n_{ik} + (\beta/4\pi) (\delta_{ik} - \delta_{i3}\delta_{k3}). \quad (3.5)$$

Формулы (3.4) и (3.5) определяют идеальную кривую намагничения. Концентрации фаз определяются из условий

$$\langle\langle M_z \rangle\rangle = (c_1 - c_2) (M^2 - M_x^2 - M_y^2)^{1/2}, \quad M_x = M_{x1} = M_{x2} = \langle\langle M_x \rangle\rangle, \\ M_y = M_{y1} = M_{y2} = \langle\langle M_y \rangle\rangle.$$

в) Магнитострикция и электрострикция. До сих пор мы не учитывали энергию упругих деформаций. В ферромагнетиках магнитострикционная энергия мала по сравнению с энергией анизотропии и магнитоэлектрической энергией, но есть вещества, в которых они сравнимы (см., например, книгу ³⁶). В сегнетоэлектриках энергия электрострикции, как правило, сравнима с другими видами энергии ⁵. Отметим также, что задача об упругих деформациях при намагничении (поляризации) представляет самостоятельный интерес. Далее мы изложим кратко некоторые результаты, полученные в работе ³⁵.

Магнитострикционные эффекты описываются термодинамическим соотношением для свободной энергии \tilde{F} ³⁵ (см. приложение)

$$d\tilde{F} = \left(\sigma_{ik} - \tilde{F}\delta_{ik} - \frac{1}{4\pi} H_i B_k \right) d \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{1}{4\pi} \mathbf{B} d\mathbf{H}, \quad (3.6)$$

где $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$ — тензор напряжений. В анизотропном теле свободная энергия зависит не только от симметричных компонент тензора деформаций $u_{ik} = (1/2) [(\partial u_i/\partial x_k) + (\partial u_k/\partial x_i)]$, но и от антисимметричных $v_{ik} = (1/2) (\partial u_i/\partial x_k) - (\partial u_k/\partial x_i)$ *. Введем также свободную энергию F' в переменных $\mathbf{H}_t, \mathbf{B}_n, \partial u_i/\partial x_k$, где индексы t и n обозначают компоненты, касательные и нормальные к границе раздела фаз:

$$F' = \tilde{F} + (4\pi)^{-1} H_n B_n,$$

$$dF' = \left(\sigma_{ik} - F'\delta_{ik} + \frac{1}{4\pi} H_n B_n \delta_{ik} - \frac{1}{4\pi} H_i B_k \right) d \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{1}{4\pi} \mathbf{B}_t d\mathbf{H}_t + \frac{1}{4\pi} H_n dB_n.$$

Вместо величин \tilde{F} и F' , отнесенных к единице объема вещества, в теории упругости удобно ввести свободные энергии, соответствующие заданной массе, а именно массе единицы недеформированного объема. Такие величины мы будем снабжать индексом 0:

$$d\tilde{F}'_0 = \left(\sigma_{ik} - \frac{1}{4\pi} H_i B_k \right) d \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{1}{4\pi} (1 + u_{ll}) \mathbf{B} d\mathbf{H},$$

$$dF'_0 = \left(\sigma_{ik} + \frac{1}{4\pi} H_n B_n \delta_{ik} - \frac{1}{4\pi} H_i B_k \right) d \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{1}{4\pi} (1 + u_{ll}) (-\mathbf{B}_t d\mathbf{H}_t + H_n dB_n).$$

На границе раздела фаз, помимо \mathbf{H}_t и \mathbf{B}_n , сохраняются также величины $\partial u_i/\partial x_\alpha$ и $\sigma_{ik}n_k = \sigma_{in}$, где индекс α нумерует компоненты в плоскости границы. Чтобы получить условие сосуществования фаз, необходимо построить термодинамический потенциал в сохраняющихся переменных. Для этого представим dF'_0 в виде

$$dF'_0 = \left(\sigma_{i\alpha} + \frac{1}{4\pi} H_n B_n \delta_{i\alpha} - \frac{1}{4\pi} H_i B_\alpha \right) d \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + \\ + \left(\sigma_{\alpha n} - \frac{1}{4\pi} H_\alpha B_n \right) d \frac{\partial u_\alpha}{\partial n} + \sigma_{nn} d \frac{\partial u_n}{\partial n} + \frac{1}{4\pi} (1 + u_{ll}) (-\mathbf{B}_t d\mathbf{H}_t + H_n dB_n).$$

* В литературе часто утверждается, что в анизотропном теле тензор напряжений σ_{ik} несимметричен (см., например, книги ³⁷). Это утверждение неверно. Правильный результат получается при учете несимметричных (пропорциональных v_{ik}) членов в выражении для свободной энергии.

Искомый термодинамическим потенциалом, который имеет минимум при заданных H_α , B_n , $\partial u_i/\partial x_\alpha$ и σ_{in} , является термодинамический потенциал

$$\Phi'_0 \left(H_\alpha, B_n, \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha}, \sigma_{\alpha n} - \frac{1}{4\pi} H_\alpha B_n, \sigma_{nn} \right) = \\ = F'_0 - \left(\sigma_{\alpha n} - \frac{1}{4\pi} H_\alpha B_n \right) \frac{\partial u_\alpha}{\partial n} - \sigma_{nn} \frac{\partial u_n}{\partial n}.$$

Полная система граничных условий имеет вид

$$H_\alpha = \text{const}, \quad B_n = \text{const}, \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} = \text{const}, \quad \sigma_{in} = \text{const}, \\ \Phi'_0 \left(H_\alpha, B_n, \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha}, \sigma_{\alpha n} - \frac{1}{4\pi} H_\alpha B_n, \sigma_{nn} \right) = \text{const}. \quad (3.7)$$

Рассмотрим теперь эллипсоидальный образец, форма которого подерживается неизменной, помещенный в однородное внешнее поле \mathbf{H}_0 . В таком образце возможна неоднородная деформация (меняющаяся от домена к домену), которая в среднем равна нулю.

Глубинные свойства доменной структуры полностью определяются заданием восьми параметров, которые не меняются при переходе через границу раздела:

$$H_\alpha, B_n, \sigma_{in}, \mathbf{n},$$

и концентрации c'_1 (по весу) одной из двух фаз (\mathbf{n} — единичный вектор нормали к плоской границе раздела фаз). Еще шесть таких параметров ($\partial u_i/\partial x_\alpha$) равны нулю, так как эллипсоид в среднем остается недеформированным. Эти величины удовлетворяют трем уравнениям (3.1), условию сосуществования фаз (3.7) и еще трем уравнениям

$$\left\langle \frac{\partial u_i}{\partial n} \right\rangle = 0, \quad (3.8)$$

где

$$\langle f \rangle = c'_1 f_1 + c'_2 f_2.$$

Таким образом, число уравнений равно семи и на два меньше числа параметров, определяющих глубинные свойства доменной структуры. Кроме того, следует получить условия минимума объемной части полной свободной энергии \tilde{F}_Π , рассматриваемой как функция девяти параметров, определяющих глубинные свойства доменной структуры, при семи дополнительных условиях (3.1), (3.7) и (3.8).

В работе ³⁵ было показано, что из условия минимума \tilde{F}_Π получается лишь одно дополнительное условие $H_{n1} = H_{n2}$, такое же, как и в отсутствие магнитострикции. Таким образом, в задаче сохраняется вырождение. Однако при наличии магнитострикции это вырождение уже не может быть интерпретировано столь же просто, как ранее.

До сих пор речь шла об эллипсоиде, форма которого предполагалась неизменной. Это означает, что к телу приложены механические силы, которые препятствуют изменению его формы. Если же такие силы отсутствуют, то тело, имевшее форму эллипсоида в размагниченном (неполяризованном) состоянии, будет деформироваться при наложении внешнего поля и, в частности, может повернуться во внешнем поле под действием чисто магнито-статических максвелловских напряжений

$$\sigma_{ik} = (4\pi)^{-1} [H_i H_k - (H^2 \delta_{ik}/2)].$$

Вращательный момент может отсутствовать лишь в определенных случаях, например в случаях длинного цилиндра (провода) или же плоскопараллельной пластинки в параллельном им внешнем поле \mathbf{H}_0 .

Именно такие случаи имеет смысл рассмотреть. Эллипсоидальность образца в таких случаях сохранится с точностью до эффектов, связанных с выходом доменов к поверхности, несущественных при вычислении объемных энергий. Это связано с тем, что средняя деформация du_i/dx_k будет однородной. То же самое может иметь место и в случаях, когда к телу приложены напряжения, не создающие вращательного момента. Такая ситуация осуществляется, например, в опытах с растянутыми проволоками. Чтобы исследовать глубинные свойства доменных структур в этих случаях, мы укажем, что в предыдущей задаче (эллипсоид неизменной формы) понятие недеформированного состояния носило условный характер, так как не предполагалось, что в отсутствие деформации ($du_i/dx_k = 0$) и в отсутствие поля ($\mathbf{H} = 0$) напряжения σ_{ik} также равны нулю. Далее мы будем определять недеформированное состояние именно таким образом. Тогда очевидно, что в тех случаях, когда эллипсоидальность образца сохраняется (хотя отношения полуосей могут изменяться) и образец в среднем остается однородным, в глубине образца должны выполняться соотношения

$$\mathbf{H} = \text{const}, \quad B_n = \text{const}, \quad \Phi'_0 = \text{const}, \quad du_i/dx_k = \text{const}, \quad \sigma_{in} = \text{const}, \quad \langle v_{ik} \rangle = 0.$$

Последнее соотношение есть условие того, что тело как целое не поворачивается во внешнем поле.

В работе ³⁵ была вычислена магнитострикция одноосного ферромагнетика с учетом доменной структуры. Аналогичные результаты справедливы и для сегнетоэлектриков (во всех формулах этого раздела необходимо лишь сделать замену $\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{E}$, $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{D}$).

4. ТЕОРИЯ МЕЛКИХ ФЕРРОМАГНИТНЫХ ЧАСТИЦ

а) Т е о р е м а Б р а у н а ³⁸. До сих пор мы рассматривали массивные образцы, размеры которых предполагались большими по сравнению с толщиной доменной стенки δ . Если размеры образца меньше δ , то такой образец должен быть однодоменным. Это было впервые предсказано Френкелем и Дорфманом ³⁹. Далее мы для простоты будем рассматривать сферические ферромагнитные частицы с одноосной анизотропией в отсутствие внешнего поля. Браун показал, что если радиус R такой частицы меньше некоторого критического значения R_k , то намагниченность \mathbf{M} в образце будет строго однородной *). Возможность однодоменного состояния объясняет большие значения коэрцитивной силы мелких частиц в случае слабой анизотропии.

Свободная энергия $\mathcal{F} = \tilde{\mathcal{F}}$ ферромагнитной частицы может быть представлена в виде суммы трех слагаемых

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{неодн}} &= (1/2) \alpha \int (\partial M_i / \partial x_k)^2 dV, \\ \mathcal{F}_{\text{ан}} &= (1/2) \beta \int (M_x^2 + M_y^2) dV, \\ \mathcal{F}_m &= \int (H^2/8\pi) d^3x = \int [(H^2/8\pi) - (\mathbf{H}\mathbf{B}/8\pi)] d^3x = -(1/2) \int \mathbf{M}\mathbf{H} dV. \end{aligned}$$

Если намагниченность в образце однородна и направлена вдоль оси легкого намагничивания, то свободная энергия частицы равна

$$\mathcal{F}_{\text{одн}} = (2\pi M^2/3)V. \quad (4.1)$$

*) Подчеркнем, что в массивном сферическом образце с малой анизотропией состояние с однородной намагниченностью было бы абсолютно неустойчивым, так как поле размагничивания $\mathbf{H} = -4\pi\mathbf{M}/3$ находилось бы за пределами области метастабильности (см. п. б) гл. 1).

Далее мы покажем, что в неоднородном состоянии со средней намагниченностью $\langle\langle M \rangle\rangle$

$$\mathcal{F}_m \geq (2\pi\langle\langle M \rangle\rangle^2/3)V. \quad (4.2)$$

Для этого введем в рассмотрение поле $\mathbf{H}_{\langle\langle M \rangle\rangle}(\mathbf{x})$, создаваемое сферической частицей с однородной намагниченностью $\langle\langle M \rangle\rangle$ (внутри образца $\mathbf{H}_{\langle\langle M \rangle\rangle} = -4\pi\langle\langle M \rangle\rangle/3$), и поле $\delta\mathbf{H} = \mathbf{H} - \mathbf{H}_{\langle\langle M \rangle\rangle}$, где \mathbf{H} — истинное поле, создаваемое неоднородно намагниченной частицей. Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_m &= \int (H^2/8\pi)d^3x \geq \int [(H_{\langle\langle M \rangle\rangle}^2/8\pi) + (\mathbf{H}_{\langle\langle M \rangle\rangle}, \delta\mathbf{H}/4\pi)]d^3x = \\ &= (2\pi\langle\langle M \rangle\rangle^2/3)V + \int [\mathbf{H}_{\langle\langle M \rangle\rangle} (\delta\mathbf{V} - 4\pi\delta\mathbf{M})/4\pi] d^3x. \end{aligned}$$

Заметим далее, что

$$\int (\mathbf{H}_{\langle\langle M \rangle\rangle}, \delta\mathbf{V}/4\pi) d^3x = 0,$$

так как $\mathbf{H}_{\langle\langle M \rangle\rangle} = -\nabla\varphi_{\langle\langle M \rangle\rangle}$, а $\delta\mathbf{V} = \text{rot } \delta\mathbf{A}$, и

$$\int \mathbf{H}_{\langle\langle M \rangle\rangle}, \delta\mathbf{M} d^3x = 0,$$

так как внутри образца $\mathbf{H}_{\langle\langle M \rangle\rangle}$ однородно, а $\langle\langle\delta\mathbf{M}\rangle\rangle = 0$. Это доказывает неравенство (4.2).

Таким образом, можно утверждать, что

$$\mathcal{F} \geq \min \mathcal{F}_0, \quad \mathcal{F}_0 = \int \left[\frac{\alpha}{2} \left(\frac{\partial M_i}{\partial x_k} \right)^2 + \frac{\beta}{2} (M_x^2 + M_y^2) + \frac{2\pi}{3} \langle\langle M_i \rangle\rangle M_i \right] dV.$$

Вместо того чтобы минимизировать правую часть при условии $M_i^2 = M^2$, мы ослабим это условие, потребовав лишь, чтобы было

$$V^{-1} \int M_i^2 dV = M^2. \quad (4.3)$$

Кроме того, мы потребуем также, чтобы на границах образца выполнялось условие $\partial M_i/\partial n = 0$, которому должно удовлетворять точное решение неоднородной задачи (см. п. б) гл. 1).

Варьируя \mathcal{F}_0 при условии (4.3), получим линейное уравнение

$$-\alpha\Delta M_i + \beta M_i (1 - \delta_{i3}) + (4\pi/3)\langle\langle M_i \rangle\rangle = \lambda M_i, \quad (4.4)$$

где собственное значение λ есть множитель Лагранжа. Искомый минимум может быть следующим образом выражен через λ_{\min} :

$$\min \mathcal{F}_0 = \lambda_{\min} M^2 V/2. \quad (4.5)$$

Уравнение (4.4) имеет однородное решение с $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_{\text{одн}}$ (см. формулу (4.1)). В неоднородном случае минимальному λ соответствует решение вида

$$M_z = \text{const} \cdot j_1(kr)Y_{1m}(\mathbf{n}), \quad M_x = M_y = 0, \quad k^2 = \lambda/\alpha,$$

где $j_1(x) = I_{3/2}(x)/x^{1/2}$, а $I_{3/2}$ — функция Бесселя. Собственное значение λ находится из граничного условия $\partial M_i/\partial n = 0$, которое в данном случае принимает вид

$$j_1'(kR) = 0,$$

т. е.

$$kR = x_0 = 2,08, \quad \lambda = \alpha x_0^2/R^2,$$

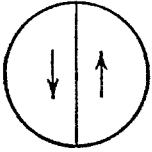
где x_0 — первый корень функции $j_1'(x)$.

При учете (4.5) легко видеть, что однородное состояние заведомо выгодно, если

$$R < (3\alpha/4\pi)^{1/2}x_0.$$

Таким образом, мы доказали существование критического радиуса и нашли для него нижнюю границу.

Очевидно, что в случае высокой анизотропии ($\beta/4\pi \gg 1$) критический радиус $R_K \gg \delta \sim (\alpha/\beta)^{1/2}$. Естественно ожидать, что в этом случае однородное состояние перестанет быть выгодным тогда, когда станет выгодным расслоение на домены. При сравнении свободной энергии структуры с двумя доменами (рис. 12) с $\mathcal{F}^{\text{одн}}$ можно найти верхнюю границу для R_K . Свободная энергия структуры, изображенной на рис. 12, равна



$$\mathcal{F} = (8\pi^2\gamma R^3 M^2/3) + 2(\alpha\beta)^{1/2}M^2\pi R^2, \quad \gamma = 0,215$$

Рис. 12. (первое слагаемое — магнитостатическая энергия, второе — энергия поверхностного натяжения на границе раздела фаз). После простых вычислений получим окончательно *)

$$(3\alpha/4\pi)^{1/2}x_0 \leq R_K \leq 3(\alpha\beta)^{1/2}/4\pi^2 [(4/3) - 2\gamma] \quad (\beta/4\pi \gg 1).$$

Отметим, что $(\alpha\beta)^{1/2} \sim \beta\delta$. По-видимому, в случае высокой анизотропии полученная нами верхняя граница совпадает, по крайней мере по порядку величины, с истинным значением критического радиуса R_K .

б) К р и т и ч е с к и й р а д и у с в с л у ч а е м а л о й а н и з о т р о п и и. В случае малой анизотропии можно показать, если основываться на работе Фрея и др.⁴⁰, что верхняя граница для критического радиуса R_K смыкается с нижней, так что формула

$$R_K = (3\alpha/4\pi)^{1/2}x_0 \quad (4.6)$$

в пределе $\beta/4\pi \rightarrow 0$ становится точной.

В работе⁴⁶ рассматривалась устойчивость однородного состояния сферической частицы относительно бесконечно малых возмущений, что дает возможность найти для R_K границу сверху. Предполагалось, что компоненты намагниченности в неоднородном состоянии имеют вид

$$M_z = M \cos \omega \approx M [1 - (1/2)\omega^2], \quad M_\varphi = M \sin \omega \approx M\omega, \\ \omega = \omega(r, \theta) \ll 1,$$

где r и θ — сферические координаты, а M_φ — азимутальная проекция вектора M .

Изменение поля $\delta H(x) = H(x) - H_0(x)$ пропорционально изменению плотности фиктивных магнитных зарядов. Последнее в свою очередь пропорционально ω^2 . Поэтому изменение магнитостатической энергии $\delta \mathcal{F}_m$ равно

$$\delta \mathcal{F}_m = \int (H_0 \delta H / 4\pi) d^3x = \int [H_0 (\delta V - 4\pi \delta M) / 4\pi] d^3x = \\ = - \int H_0 \delta M dV = - (2\pi M^2/3) \int \omega^2 dV.$$

Пренебрегая энергией анизотропии, запишем изменение полной свободной энергии следующим образом:

$$\delta \mathcal{F} = \pi M^2 \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \left\{ \alpha \left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{\omega^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right] - \frac{4\pi \omega^2}{3} \right\}.$$

*) Мы здесь несколько улучшили оценку сверху, полученную Брауном³⁸.

Разобьем $\delta \mathcal{F}$ на два слагаемых:

$$\delta \mathcal{F} = \delta \mathcal{F}_1 + \delta \mathcal{F}_2,$$

$$\delta \mathcal{F}_1 = \pi \alpha M^2 \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{\omega^2}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{x_0^2 \omega^2}{R^2} \right],$$

$$\delta \mathcal{F}_2 = \pi \alpha M^2 x_0^2 (R^{-2} - R_K^{-2}) \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \cdot \omega^2;$$

здесь R_K определяется формулой (4.6), а x_0 определено в предыдущем разделе.

Условия минимума $\delta \mathcal{F}_1$ имеют вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right) - \frac{\omega}{r^2 \sin^2 \theta} + k^2 \omega^2 = 0, \quad (4.7)$$

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial r} \right)_{r=R} = 0, \quad k^2 = \frac{x_0^2}{R^2}.$$

Если умножить это уравнение на ω и проинтегрировать по объему, то нетрудно проверить, что минимум $\delta \mathcal{F}_1$ равен нулю.

Решением краевой задачи (4.7) является

$$\omega \sim j_1(kr) \sin \theta.$$

Так как при таком возмущении $\delta \mathcal{F}_1 = 0$, легко видеть, что в случае $R > R_K$ величина $\delta \mathcal{F}$ отрицательна. Учитывая результат, полученный в предыдущем разделе, мы убеждаемся в том, что формула (4.6) определяет точное значение критического радиуса.

5. ТЕОРИЯ ЗАРОДЫШЕЙ ПЕРЕМАГНИЧЕНИЯ *)

а) Термическая активация зародышей. Как известно, причиной магнитного гистерезиса является возможность существования метастабильных состояний. В одноосном ферромагнетике метастабильные состояния могут быть реализованы в случае

$$H_z^{2/3} + (H_x^2 + H_y^2)^{1/3} < (\beta M)^{2/3}.$$

Если поле \mathbf{H} направлено вдоль оси легкого намагничивания ($H_x = H_y = 0$) и по абсолютной величине меньше βM , то метастабильным является состояние с намагниченностью, антипараллельной полю.

Метастабильное состояние может быть, например, разрушено, если в результате термических флуктуаций образуется зародыш обратной намагниченности, размеры которого достаточно велики для того, чтобы рост зародыша привел к уменьшению свободной энергии тела \mathcal{F} ⁴². Напомним, что метастабильное состояние устойчиво относительно бесконечно малых возмущений (такие возмущения увеличивают свободную энергию тела) и, следовательно, для образования зародыша, который может расти, необходимо преодолеть конечный энергетический барьер. Вероятность образования таких зародышей в результате термических флуктуаций пропорциональна $\exp(-R_{\min}/T)$, где T — температура, а энергетический барьер R_{\min} есть работа, необходимая для образования так называемого *критического зародыша*, который находится в неустойчивом равновесии со средой: его форма такова, что при заданной толщине зародыша свободная энергия тела $\tilde{\mathcal{F}}$ будет минимальной, а толщина соответствует максимуму

*) В этой главе мы приводим результаты, полученные в работе ⁴¹.

свободной энергии $\tilde{\mathcal{F}}$. Таким образом, критический зародыш соответствует седловой точке функционала $\tilde{\mathcal{F}}\{z(x, y)\}$, где функция $z(x, y)$ описывает форму зародыша. Здесь мы предполагаем, что размеры зародыша велики по сравнению с толщиной доменной стенки δ , что, как будет показано ниже, справедливо лишь в случае слабой метастабильности ($H \ll \beta M$). Именно в этом случае зародыши могут рассматриваться в рамках макротeorии; в противном случае параметры критического зародыша должны быть найдены в результате решения статического уравнения Ландау и Лифшица ¹³ $[\mathbf{M}, \mathbf{H}]_{\text{эфф}} = 0$.

В работе Дёринга ⁴³ (см. также ²) рассматривались только зародыши эллипсоидальной формы и не учитывалась возможность отклонения намагниченности от легкой оси. В случае слабой анизотропии это отклонение приводит к существенному уменьшению суммы магнитостатической энергии и энергии магнитной анизотропии. В работе ⁴¹ была получена точная форма критических зародышей для ряда предельных случаев. Было показано, что энергетический барьер R_{min} в случае слабой анизотропии значительно меньше, чем у Дёринга.

Работа R , которую нам следует вычислить, равна изменению свободной энергии, $\tilde{\mathcal{F}}$ связанному с наличием зародыша. Она может быть представлена в виде (см. ⁴¹)

$$R = \int [-\delta \mathbf{M} \cdot \mathbf{H} + [(\delta \mathbf{H})^2 / 8\pi] + U_{\text{ан}}] d^3 \mathbf{x} + \int \Delta dS. \quad (5.1)$$

В формуле (5.1) \mathbf{H} — поле в однородном метастабильном состоянии (т. е. вдали от зародыша), а $\delta \mathbf{H}$ и $\delta \mathbf{M}$ — изменения поля и намагниченности, связанные с образованием зародыша. Последний член — поверхностное натяжение на границе раздела фаз, а интегрирование производится по поверхности зародыша.

Рассмотрим поверхностное натяжение. В гл. 1 было показано, что для границ, наклоненных относительно оси легкого намагничивания, понятие поверхностного натяжения при $\beta/4\pi \ll 1$ имеет смысл лишь при малых углах наклона границы. Можно показать ⁴¹, что в случае $\beta/4\pi \gg 1$ в полях $H \ll \beta M$ поверхностное натяжение может быть определено с хорошей точностью при произвольном наклоне границы и не зависит от угла наклона. Ниже нам придется рассматривать лишь такие границы, для которых поверхностное натяжение Δ можно определить согласно (1.34).

В заключение этого раздела отметим, что на границах зародыша не выполняется термодинамическое граничное условие (1.23). Причины этого те же, по которым в аналогичной задаче о зародышах в системе жидкость — пар не выполняется условие равенства давлений.

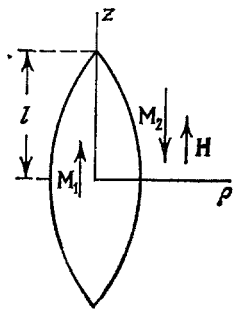


Рис. 13.

б) Вытянутые зародыши (слабые поля). В рассматриваемом случае (одноосный ферромагнетик; $\mathbf{H} \parallel z$) критический зародыш симметричен относительно легкой оси (оси z). Осевое сечение зародыша схематически изображено на рис. 13. Форма критического зародыша описывается функцией $\rho(z)$.

В поле, малом по сравнению с βM , «уравнение состояния» одноосного ферромагнетика имеет вид

$$\delta H_\rho = \beta M_\rho,$$

т. е. магнитная проницаемость μ в направлении, перпендикулярном легкой оси, равна

$$\mu = 1 + 4\pi\beta^{-1}.$$

Ниже будет показано, что в слабом поле ($\mu H \ll 4\pi M$) зародыш вытянут вдоль легкой оси ($\rho_0(0) \ll l$; см. рис. 13), а отклонение намагниченности от легкой оси мало ($M_\rho \ll M$). В этом случае уравнение $\text{div } \mathbf{B} = 0$ может быть линеаризовано:

$$\text{div } \mathbf{B} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \delta H_\rho) + \frac{\partial \delta H_z}{\partial z} = 0.$$

Поле δH и поляризация M_ρ создаются фиктивными «магнитными зарядами», сосредоточенными на поверхности зародыша. Так как зародыш вытянут, плотность «зарядов» меняется медленно и не слишком далеко от зародыша $\delta H_z \ll \mu \delta H_\rho$ (в случае бесконечного однородно заряженного цилиндра поле δH_z было бы равным нулю). Внутри зародыша поле δH_ρ также мало (значительно меньше, чем вне его). Поэтому в первом приближении по $\rho_0(0)/l$ намагниченность M_1 внутри зародыша не отклоняется от оси легкого намагничивания:

$$M_\rho^{(1)} = \delta H_\rho^{(1)} = 0$$

На границе раздела фаз (при $\rho = \rho_0(z)$) должно быть выполнено условие $B_n = \text{const}$:

$$-4\pi M \dot{\rho}_0 = 4\pi M \dot{\rho}_0 + \mu \delta H_\rho^{(2)} \quad (\dot{\rho}_0 = d\rho_0/dz),$$

т. е.

$$\mu \delta H_\rho^{(2)} = -8\pi M \dot{\rho}_0.$$

На не слишком больших расстояниях поле $\delta H_\rho^{(2)}$ равно

$$\delta H_\rho^{(2)} = -8\pi M \dot{\rho}_0 / \mu \rho. \quad (5.2)$$

Чтобы определить область применимости этой формулы, мы произведем в уравнениях магнитостатики замену

$$\delta H_\rho = M h_\rho, \quad \delta H_z = \mu^{1/2} M h_z, \quad \rho = \mu^{1/2} r.$$

Тогда уравнения магнитостатики приобретают вид

$$\text{div } \mathbf{h} = 0, \quad \text{rot } \mathbf{h} = 0,$$

причем поле \mathbf{h} создается поверхностным «зарядом»

$$\sigma(z) = -(2/\mu) \dot{\rho}_0(z).$$

При $r \gg l$ поле \mathbf{h} имеет вид диполя, т. е. убывает как $(r^2 + z^2)^{-3/2}$. Очевидно, что формула (5.2) справедлива лишь при

$$\rho \ll L \sim \mu^{1/2} l.$$

В этой области сумма энергии анизотропии и энергии размагничивающих полей δH равна

$$(1/2) \beta M_\rho^2 + [(\delta H)^2/8\pi] \approx (\delta H_\rho)^2/8\pi \gg (\delta H_z)^2/8\pi.$$

Обрезая логарифмический интеграл (по ρ) на расстояниях $\rho \sim \mu^{1/2} l$, получим

$$R = \int_{-l}^l [\mu^{-1} (4\pi M)^2 \ln [\mu^{1/2} l / \rho_0(0)] \rho_0^2 \dot{\rho}_0^2 + 2\pi M H \rho_0 (\rho_m - \rho_0)] dz;$$

здесь введено обозначение

$$\rho_m = \Delta/MH = 2\beta\delta M/H \gg \delta.$$

Седловой точке функционала R , т. е. критическому зародышу соответствует форма, заданная уравнением (см. ⁴¹)

$$z/\rho_m = \pm [(4\pi M/\mu H) \ln(4\pi M/\mu H)]^{1/2} \{\arcsin(1 - \rho_0 \rho_m^{-1}) + \rho_m^{-1} [\rho_0(\rho_m - \rho_0)]^{1/2}\}.$$

Энергетический барьер R_{\min} равен

$$R_{\min} = (\mu^2/4) \beta^3 M^2 \delta^3 (4\pi M/\mu H)^{5/2} [\ln(4\pi M/\mu H)]^{1/2}.$$

в) Сферические зародыши в случае сильной анизотропии и поверхностные зародыши. 1) *Сферические зародыши*. В случае $\beta/4\pi \leq 1$ область $\mu H \ll 4\pi M$ совпадает с областью слабой метастабильности $H \ll \beta M$. В случае сильной анизотропии ($\beta/4\pi \gg 1$) возможен также случай $4\pi M \ll H \ll \beta M$, который будет исследован ниже.

Если анизотропия велика, то отклонение намагниченности от легкой оси энергетически невыгодно ($U_{\text{ан}} = 0$). На границе зародыша нормальная компонента намагниченности претерпевает скачок $\sigma = 2M_{1n}$, который можно рассматривать как поверхностную плотность фиктивных магнитных зарядов, создающих поле размагничивания δH .

В рассматриваемом случае l оказывается порядка $\rho_0(0)$ и роль полей размагничивания несущественна:

$$(\delta H)^2/8\pi \sim 4\pi M^2 \ll MH.$$

Работа R может быть представлена в виде

$$R = -2MHV + \Delta S = MH(2V + \rho_m S), \quad (5.3)$$

где V и S — объем и площадь зародыша. Это выражение отличается только множителем при V от соответствующего выражения для изотропной системы жидкость — пар. Поэтому очевидно, что критический зародыш должен быть сферическим, т. е.

$$R = 4\pi MH [- (2r^3/3) + \rho_m r^2],$$

где r — радиус зародыша. Максимуму функции $R(r)$ соответствует

$$r = \rho_m,$$

$$R_{\min} = (4\pi/3) MH \rho_m^3 = (32\pi/3) \beta M^2 \delta^3 (\beta M/H)^2.$$

2) *Поверхностные зародыши*. В некоторых случаях образование поверхностных зародышей может быть более вероятным, так как соответствующий энергетический барьер $R_{\min}^{(S)}$ меньше, чем барьер, определяющий вероятность образования зародышей в объеме образца (последний мы здесь обозначим через $R_{\min}^{(V)}$ *).

Простейшим примером является случай $4\pi M \ll H \ll \beta M$. Поясним здесь, что поле $\mathbf{H} = \{0, 0, H\}$ есть внутреннее поле, которое не совпадает с полем в вакууме $\mathbf{H}^{(e)}$. Последнее может быть определено из условий непрерывности \mathbf{H}_t и B_n на границе образца. Работа R определяется формулой (5.3), где V — объем зародыша, а S — площадь границы раздела.

*) Следует иметь в виду, что вероятность образования поверхностных зародышей пропорциональна поверхности образца, а не его объему.

Полагая $V = V'/2$ и $S = S'/2$, где V' и S' — объем и площадь поверхности удвоенной фигуры, легко убедиться в том, что критический зародыш имеет форму полушария и

$$R_{\min}^{(S)} = R_{\min}^{(V)}/2 = (16\pi/3) \beta M^2 \delta^3 (\beta M/H)^2.$$

Подчеркнем, что этот результат не зависит от ориентации легкой оси относительно поверхности образца.

Характерное значение R_{\min}/T для типичных ферромагнетиков (Fe, Co) при комнатных температурах порядка 10^3 , так что в обычных условиях термическая активация зародышей невозможна. Однако при разумной близости к температуре Кюри барьер R_{\min} может быть существенно уменьшен вследствие уменьшения намагниченности (величины β и δ мало меняются при приближении к точке Кюри). Полученные формулы пригодны и вблизи температуры Кюри, где термическая активация зародышей должна стать наблюдаемой. Наши оценки позволяют предположить, что барьер R_{\min} будет мал в наблюдаемой области вблизи границы метастабильности (при $H = \beta M$ барьер $R_{\min} = 0$).

В недавних работах Лифшица и Кагана ⁴⁴ и Иорданского и Финкельштейна ⁴⁵ исследовано образование зародышей в результате квантового туннелирования. В этом случае вероятность образования зародышей пропорциональна $\exp(-2\hbar^{-1} \text{Im } S)$, где $\text{Im } S$ — мнимая часть классического действия. В случае ферромагнетиков можно получить оценку показателя в экспоненте с помощью уравнения Ландау и Лифшица ¹³

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \gamma [\mathbf{M}, \mathbf{H}_{\text{эфф}}].$$

Из соображений размерности следует, что

$$\hbar^{-1} \text{Im } S = (M\delta^3/\hbar\gamma) f(\beta/4\pi, \beta M/H),$$

где f — неизвестная функция, значение которой при $\beta \sim 4\pi$ и $\beta M \sim H \sim H \sim \beta M$ должно быть порядка единицы. При $M = 10^3$ гс, $\delta \sim \sim 10^{-6}$ см величина

$$M\delta^3/\hbar\gamma \sim 10^5,$$

и, следовательно, вероятность квантового туннелирования чрезвычайно мала, что связано с большой величиной «массы» доменной границы ^{11, 46}.

Аналогичные результаты для сверхпроводников и неферромагнитных металлов получены в работе ⁴⁷.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ МАГНИТОСТРИКЦИИ. ТЕНЗОР НАПРЯЖЕНИЙ

Найдем прежде всего зависимость свободной энергии от антисимметричных компонент тензора деформации

$$v_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right).$$

Рассмотрим, например, свободную энергию магнетика

$$\tilde{F} \left(\mathbf{H}, \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) = \tilde{F} \left(\mathbf{H} = 0, \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) - \frac{1}{4\pi} \int_0^{\mathbf{H}} \mathbf{B} d\mathbf{H}.$$

Эта величина не меняется при поворотах

$$\mathbf{u} = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}], \quad v_{ik} = -\varepsilon_{ikl}\omega_l, \quad u_{ik} = 0,$$

если одновременно поворачивается поле \mathbf{H} :

$$\delta\mathbf{H} = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{H}],$$

т. е.

$$\varepsilon_{ikl}\omega_l \frac{\partial \tilde{F}}{\partial v_{ik}} + \frac{1}{4\pi} \varepsilon_{ikl} B_i \omega_k H_l = 0.$$

Отсюда легко найти, что

$$(\partial \tilde{F} / \partial v_{ik})_{\mathbf{H}}, u_{ik} = -\frac{1}{8\pi} (H_i B_k - H_k B_i). \quad (\text{П.1})$$

Чтобы получить выражение для тензора напряжений σ_{ik} , мы вычислим изменение свободной энергии $\delta \tilde{\mathcal{F}}$ при бесконечно малом перемещении точек тела $\delta \mathbf{u}(\mathbf{x})$. Эта величина с обратным знаком равна работе внутренних сил

$$\delta R = \int f_i \delta u_i d^3 \mathbf{x}, \quad f_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}.$$

Для простоты мы будем считать, что границы тела закреплены (т. е. что $\delta \mathbf{u}_{\text{гп}} = 0$) и деформация не влияет на источники магнитного поля, находящиеся вне тела, т. е. что $\delta \mathbf{j}(\mathbf{x}) = 0$.

Изменение свободной энергии может быть представлено в виде

$$\delta \tilde{\mathcal{F}} = \int_{V_0} \tilde{F}'(\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x}' - \int_{V_0} \tilde{F}(\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x} - (4\pi)^{-1} \int_{V'} \mathbf{B} \delta \mathbf{H} d^3 \mathbf{x},$$

где V_0 — объем тела, V' — объем вне тела, $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \delta \mathbf{u}(\mathbf{x})$, $\tilde{\mathcal{F}}'(\mathbf{x}')$ — измененное значение свободной энергии в той точке тела, которая до деформации имела координаты \mathbf{x} . В линейном приближении

$$\delta \tilde{\mathcal{F}} = \int_{V_0} [\tilde{F}'(\mathbf{x} + \delta \mathbf{u}) - \tilde{F}(\mathbf{x}) \delta u_{ll}] d^3 \mathbf{x} - (4\pi)^{-1} \int_{V'} \mathbf{B} \delta \mathbf{H} d^3 \mathbf{x}.$$

Величина $\delta' \tilde{F} = \tilde{F}'(\mathbf{x} + \delta \mathbf{u}) - \tilde{F}(\mathbf{x})$ есть так называемое материальное изменение. Оно равно

$$\delta' \tilde{F} = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial u_{ik}} \delta u_{ik} + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial v_{ik}} \delta v_{ik} - \frac{\mathbf{B}}{4\pi} \delta' \mathbf{H},$$

где

$$\delta' H_k = H'_k(\mathbf{x} + \delta \mathbf{u}) - H_k(\mathbf{x}) = \delta H_k + \delta u_i \frac{\partial H_k}{\partial x_i}$$

и учтено, что при малых деформациях $\delta' u_{ik} = \delta u_{ik}$ и $\delta' v_{ik} = \delta v_{ik}$.

Таким образом, сумма членов, пропорциональных изменению магнитного поля $\delta \mathbf{H}$, равна

$$-(4\pi)^{-1} \int_{V_0+V'} \mathbf{B} \delta \mathbf{H} d^3 \mathbf{x} = -(4\pi)^{-1} \int \text{rot } \mathbf{A} \delta \mathbf{H} d^3 \mathbf{x} = c^{-1} \int \mathbf{A} \delta \mathbf{j} d^3 \mathbf{x} = 0.$$

Равенство нулю имеет место в связи с тем, что источники поля предполагаются неизменными: $\delta \mathbf{j}(\mathbf{x}) = 0$. Поэтому $\delta \tilde{\mathcal{F}}$ может быть представлено в виде

$$\delta \tilde{\mathcal{F}} = \int d^3 \mathbf{x} \left[\frac{\partial \tilde{F}}{\partial u_{ik}} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} + \tilde{F} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_i} - \frac{1}{8\pi} (H_i B_k - H_k B_i) \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} - \delta u_i \frac{B_k}{4\pi} \frac{\partial H_k}{\partial x_i} \right].$$

Заметим, что внутри тела

$$\frac{1}{4\pi} B_k \frac{\partial H_k}{\partial x_i} = \frac{1}{4\pi} B_k \frac{\partial H_i}{\partial x_k} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_k} (H_i B_k).$$

Поэтому

$$\delta \tilde{\mathcal{F}} = - \int \delta u_i \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{\partial \tilde{F}}{\partial u_{ik}} + \tilde{F} \delta_{ik} + \frac{1}{8\pi} (H_i B_k + H_k B_i) \right] d^3 \mathbf{x}.$$

Отсюда следует, что

$$\sigma_{ik} = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial u_{ik}} + \tilde{F} \delta_{ik} + \frac{1}{8\pi} (H_i B_k + H_k B_i). \quad (\text{П.2})$$

Соотношения (П.1) и (П.2) эквивалентны соотношению (3.6) основного текста.

Аналогичное выражение для тензора напряжений в диэлектриках получено (другим методом) в книге Ландау и Лифшица ¹.

Институт теоретической физики
им. Л. Д. Ландау АН СССР

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, М., Гостехиздат, 1957, гл. II, IV—V.
2. С. В. Вонсовский, Я. С. Шур, Ферромагнетизм, М., Гостехиздат, 1948.
3. Р. Бозорт, Ферромагнетизм, М., ИЛ, 1956, гл. 11 и 18.
4. В. Кенциг, Сегнетоэлектрики и антисегнетоэлектрики, М., ИЛ, 1960, гл. 5; Ф. Иона, Д. Ширане, Сегнетоэлектрические кристаллы, М., «Мир», 1965.
5. Дж. Барфут, Введение в физику сегнетоэлектрических явлений, М., «Мир», 1970, гл. 18.
6. П. Де Жен, Сверхпроводимость металлов и сплавов, М., «Мир», 1968, гл. I—II.
7. J. H. Condon, Phys. Rev. 145, 526 (1966); J. H. Condon, R. E. Walstedt, Phys. Rev. Lett. 21, 612 (1966).
8. И. А. Привороцкий, Письма ЖЭТФ 5, 280 (1967); ЖЭТФ 52, 1755 (1967); И. А. Привороцкий, М. Я. Азбель, ЖЭТФ 56, 398 (1969).
9. К. Л. Дудко и др., ЖЭТФ 61, 678, 1553 (1971).
10. C. Kittel, Rev. Mod. Phys. 21, 541 (1949) (см. перевод в сборнике «Физика ферромагнитных областей», М., ИЛ, 1951, а также УФН 41, 452 (1950)).
11. C. Kittel, J. Galt, Sol. State Phys. 3, 437 (1956) (см. перевод в сборнике «Магнитная структура ферромагнетиков», М., ИЛ, 1959).
12. Ч. Киттель, Введение в физику твердого тела. М., Физматгиз, 1963, гл. VIII и XV.
13. L. D. Landau, E. M. Lifshitz, Sov. Phys. 8, 153 (1935) (см. перевод: Л. Д. Ландау, Собрание трудов, т. 1, М., «Наука», 1969).
14. И. А. Привороцкий, ЖЭТФ 56, 2129 (1969).
15. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ 7, 371 (1937).
16. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ 13, 377 (1943).
17. И. А. Привороцкий, ЖЭТФ 59, 1779 (1970).
18. Е. М. Лифшиц, ЖЭТФ 15, 97 (1945).
19. L. Néel, Cahiers de Phys., Nr. 25, 1 (1944) (см. перевод по ¹⁰).
20. L. Néel, J. de Phys. Rad. 5, 241 (1944) (см. перевод по ¹⁰).
21. F. Bloch, Zs. Phys. 74, 295 (1932).
22. В. Л. Гинзбург, УФН 38, 490 (1949).
23. В. Л. Гинзбург, Л. Д. Ландау, ЖЭТФ 20, 1064 (1950).
24. Р. Суху, Магнитные тонкие пленки, М., «Мир», 1967; М. Праттон, Тонкие ферромагнитные пленки, М., «Судостроение», 1967.
25. Ch. Kittel, Phys. Rev. 70, 965 (1946) (см. перевод по ¹⁰).
26. Я. Кацер, ЖЭТФ 46, 1787 (1964).
27. R. Gemperle, Phys. Stat. Sol. 6, 89 (1964).
28. Х. Вильямс, Р. Шервуд, сборник «Магнитные свойства металлов и сплавов», М., ИЛ, 1961.
29. L. H. Germer, Phys. Rev. 62, 295 (1942); M. V. Blaskman, G. Grünbau, Proc. Roy. Soc. A241, 508 (1957); В. П. Биленский, сборник «Физика магнитных пленок. Материалы международного симпозиума (1968)», Иркутск, ИФ СО АН СССР 1968.
30. R. Gemperle et al., Phys. Stat. Sol. 3, 2101 (1963).
31. R. Pertheil, W. Andrá, Ann. d. Phys. 19, 265 (1957) (см. перевод по ¹¹).
32. Е. М. Лифшиц, Ю. В. Шарвин, ДАН СССР 79, 783 (1951).
33. И. А. Привороцкий, Письма ЖЭТФ 13, 222 (1971).
34. Л. П. Холоденко, ЖЭТФ 17, 698 (1947).
35. И. А. Привороцкий, ЖЭТФ 60, 1525 (1971).
36. К. П. Белов и др., Редкоземельные ферро- и антиферромагнетики, М., «Наука», 1965.

37. Дж. А. Стреттон, Теория электромагнетизма, М., Гостехиздат, 1948, гл. 2; И. Е. Тамм, Основы теории электричества, М., «Наука», 1966, гл. II; W. F. Brown, Jr., Micromagnetics, N.Y.—L., Intersci. Publ.—J. Wiley and Sons, 1963.
 38. W. F. Brown, Jr., Appl. Phys. **39**, 993 (1968).
 39. Я. И. Френкель, Я. Г. Дорфман, Nature **126**, 274 (1930).
 40. E. H. Frei et al., Phys. Rev. **106**, 446 (1957).
 41. И. А. Привороцкий, ЖЭТФ **62**, 1185 (1972).
 42. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Статистическая физика, М., «Наука», 1964, гл. XV.
 43. W. Döring, Zs. Phys. **108**, 137 (1938) (см. перевод: УФН **22**, 78 (1939)).
 44. И. М. Лифшиц, Ю. М. Каган, ЖЭТФ **62**, 385 (1972).
 45. С. В. Иорданский, А. М. Финкельштейн, ЖЭТФ **62**, 403 (1972).
 46. W. Döring, Zs. Naturforsch. **3a**, 373 (1948) (см. перевод в сборнике «Ферромагнитный резонанс», М., ИЛ, 1952).
 47. И. А. Привороцкий, Письма ЖЭТФ **14**, 613 (1971).
-