1972 г. Апрель Том 106, вып. 4

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

530.145

ПРИМЕНЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ И ТЕОРИИ ПОЛЯ

Д. И. Блохинцев, Б. М. Барбашов

СОДЕРЖАНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ

Создание инвариантной теории возмущений и приспособленного к ней метода перенормировок дало возможность построить согласующуюся с опытом количественную теорию квантовых электромагнитных процессов, которая в принципе позволяет вычислять физические величины с точностью до любого порядка по константе $e^2/\hbar c = 1/137$. Однако проблема сильных взаимодействий и изучение процессов с элементарными частицами высоких энергий, а также вопросы математической структуры квантовой теории поля (КТП) потребовали разработки новых методов, не связанных с теорией возмущений. В этом направлении был достигнут значительный успех, прежде всего связанный с разработкой аксиоматического подхода в КТП. Одним из бесспорных достижений такого подхода явилось открытие и обоснование дисперсионных соотношений, а также выяснение ряда важных физических свойств амплитуд реакций сильно взаимодействующих частиц на основе установленной в рамках аксиоматического подхода аналитической структуры этих амплитуд.

Несмотря на успехи, в аксиоматической формулировке КТП остается принципиальным вопрос о построении нетривиальных моделей КТП, сформулированных на языке полевых операторов, которые удовлетворяли бы всем требованиям аксиоматического метода.

В настоящее время физические величины, полученные методом теории возмущений, остаются единственными объектами, на которых проверяются или угадываются общие физические свойства теории сильных взаимодействий, такие, как аналитические, асимптотические свойства амплитуд и т. д. Таким образом, ряды теории возмущений остаются пока той «мастерской», где физики-теоретики опробуют новые методы или выводы аксиоматического подхода.

В связи с этим большой интерес представляет нахождение точно решаемых модельных примеров в КТП или, еще важнее, разработка приближенных методов решения уравнения КТП, не опирающихся на разложение по константе связи. Одним из таких методов, представляющих собой кардинальную попытку выхода за рамки теории возмущений, является метод функционального интегрирования, или, иначе, «метод интегрирования по траекториям», впервые предложенный Фейнманом. Этот метод базируется на идее о движении микрочастицы как последовательности квантовых переходов по ненаблюдаемым траекториям. Это представление квантовой механики эквивалентно в принципиальном отношении обычному, однако физическая наглядность и изящество математической формулировки основной задачи квантовой теории — вычисления вероятностных амплитуд для квантовых переходов, характерные для этого нового метода, привлекли к нему внимание многих исследователей.

Целью настоящего обзора является краткое описание существа этого еще недостаточно популярного метода и рассмотрение важных физических результатов, которые были получены на этом пути в КТП. Как и всякий метод, претендующий на решение задач квантовой теории, метод функциональных интегралов не является универсальным и имеет свои проблемы и трудности. Эти трудности связаны, во-первых, с нахождением решения уравнений квантовых частиц в произвольном внешнем поле и, во-вторых, с функциональным усреднением этих решений по внешним полям с соответствующим весовым функционалом. Как первая, так и вторая задачи представляют в общем случае проблемы большой математической сложности. Дело в том, что в математике мы до сих пор не имеем разработанной теории и техники функционального интегрирования; единственный вид интегралов, поддающихся вычислению — это гауссовы интегралы или приводимые к ним путем замены функционального аргумента.

В этом обзоре мы ограничиваемся физическими результатами и оставляем в стороне вопросы строгого математического обоснования применяемых в описываемом методе приемов. Читателя, интересующегося математической стороной задачи интегрирования в функциональных пространствах, мы отсылаем к математическим обзорам Гельфанда и Яглома [1], Ковальчика [2] и к книге Каца [3].

2. ЦЕПИ МАРКОВА В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

В 1948 г. появилась теперь хорошо известная статья Фейнмана [4], в которой предлагалась новая формулировка нерелятивистской квантовой механики (КМ). В отличие от шрёдингеровской формы КМ, где основным объектом является волновая функция $\psi(x, t)$, подчиняющаяся уравнению Шрёдингера, в новой формулировке таким объектом стал пропагатор $K(x', t'; x^0, t^0)$ волновой функции, знание которого позволяет определить $\psi(x', t')$ в любой момент времени t' по начальному значению $\psi(x^0, t^0)$:

$$\psi(x', t') = \int K(x', t'; x^0, t^0)\, \psi(x^0, t^0)\, d^3x^0. \tag{1}$$

Из (1) видно, что если в момент времени t^0 частица находилась в точке x^0 [это означает, что $\psi(x^0 - x, t^0) = \delta(x^0 - x)$], то волновая функция $\psi(x', t')$ попросту равна пропагатору $K(x', t'; x^0, t^0)$. Следовательно, пропагатор может рассматриваться как амплитуда вероятности перехода частицы из точки x^0, где она находилась в момент t^0, в точку x' к моменту времени t', а эта вероятность $P(x', t'; x^0, t^0)$, согласно основному принципу КМ, равна

$$P(x', t'; x^0, t^0) = |\psi(x', t')|^2 = |K(x', t'; t^0, x^0)|^2. \tag{2}$$

С другой стороны, из самого определения пропагатора следует, что

$$K(x', t'; x^0, t^0) = \int K(x', t'; x'', t'')\, K(x'', t''; x^0, t^0)\, dx''. \tag{3}$$

Таким образом, амплитуда перехода из точки (x^0, t^0) в точку (x', t') может рассматриваться как результат перехода частицы из точки (x^0, t^0) в любую промежуточную точку x'' в некоторый момент времени t'' и последующего перехода из точки x'' в точку x' к моменту времени

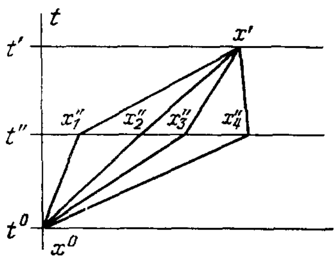


Рис. 1.

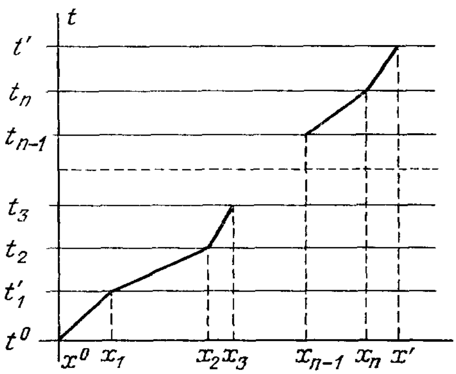


Рис. 2.

t'. Рис. 1 иллюстрирует сказанное. Это важное свойство пропагатора, насколько нам известно, впервые было отмечено Дираком.

Заметим, что в классической теории. например, в теории броуновского движения, вместо (2) мы имели бы для вероятности перехода

$$P(x', t'; x^0, t^0) = \int P(x', t'; x'', t'')\, P(x'', t''; x^0, t^0)\, dx'', \tag{4}$$

т. е. вероятность перехода из точки x^0 в точку x' за время $t' - t^0$ равна произведению вероятностей частицы попасть в любую промежуточную точку x'' за время $t'' - t^0$ (ясно, что $t' > t'' > t^0$), а затем из точки x'' за время $t' - t''$ «окончательно» попасть в точку x'.

Дробя промежутки времени и вводя новые промежуточные точки, получим из формулы (4)

$$P(x', t'; x^0, t^0) = \int\limits_1 \ldots \int\limits_n P(x', t'; x_n, t_n)\, dx_n\, P(x_n, t_n; x_{n-1}, t_{n-1}) \ldots$$
$$\ldots P(x_2, t_2; x_1, t_1)\, dx_1\, P(x_1, t_1; x^0, t^0), \tag{5}$$

в которой переход из точки (x^0, t^0) в точку (x', t') рассматривается как результат подобных же переходов через последовательность промежуточных точек (x_1, t_1), (x_2, t_2), . . ., (x_n, t_n).

Такая последовательность называется цепью Маркова. В квантовой теории из выражения (3) для пропагатора мы можем получить формулу, аналогичную (5); именно,

$$K(x'. t'; x^0, t^0) =$$
$$= \int\limits_1 \ldots \int\limits_n K(x', t'; x_n, t_n)\, dx_n\, K(x_n, t_n; x_{n-1}, t_{n-1})\, dx_{n-1} \ldots$$
$$\ldots K(x_2. t_2; x_1, t_1)\, dx_1\, K(x_1, t_1; x^0, t^0). \quad (6$$

Таким образом, в КМ цепь Маркова образована не вероятностями, а амплитудами вероятностей. Эта особенность квантовой теории («интерференция вероятностей») является чертой, радикально отличающей ее от классических теорий. Заметим, что различные попытки положить в основу КМ механику классическую, терпят неудачу именно в этом пункте. На рис. 2 изображена одна из «траекторий», ведущих частицу из точки (x^0, t^0) в точку (x', t'); времена t_j взяты эквидистантными так, что $t_j = \Delta t \cdot j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

Слово «траектория» взято в кавычки, так как по самому смыслу цепи Маркова каждый отрезок $(x_j, t_j; x_{j-1}, t_{j-1})$ можно разбивать на более мелкие ломаные. Стало быть, наша «траектория» не имеет производной, как не имеет ее траектория частицы, совершающей броуновское движение.

В основе метода функционального интегрирования (или «интегрирования по путям») лежит предположение, что фаза пропагатора $K(x_{j+1}, t_{j+1}; x_j, t_j)$, равного амплитуде вероятности перехода из точки x_j, t_j в точку x_{j+1} в соседний момент времени $t_{j+1} = t_j + \Delta t$ ($\Delta t > 0$ и мало́) определяется классическим действием $W[x_{j+1}(t), x_j(t)]$, равным

$$W[x_{j+1}, t_{j+1}; x_j, t_j] = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \mathscr{L}(\dot{x}(t), x(t))\, dt, \tag{7}$$

где $\mathscr{L}(\dot{x}, x)$ — лагранжиан классической системы, выписанный здесь для системы с одной степенью свободы. Подробнее, в нерелятивистском случае:

$$\mathscr{L}(\dot{x}, x) = {}^1/_2 m\dot{x}^2(t) - U(x(t)),$$

где m — масса частицы, $\dot{x}(t)$ ее скорость, U — потенциальная энергия, зависящая от координаты частиц $x(t)$. В малом промежутке времени Δt кривую $x(t)$ заменим отрезком ломаной $\tilde{x}(t)$, проходящей через точки $x(t_{j+1}) = x_{j+1}$ и $x(t_j) = x_j$. Тогда $\dot{x}(t) \approx (x_{j+1} - x_j)/\Delta t$ и вместо (7) получим

$$W[x_{j+1}, t_{j+1}; x_j, t_j] = [m(x_{j+1} - x_j)^2/2\Delta t] - U(x_j)\,\Delta t.$$

Фейнмановский постулат квантования заключается в предположении, что

$$K(x_{j+1}, t_{j+1}; x_j, t_j) = \\ = (m/2\pi i\hbar\,\Delta t)^{1/2} \exp[(i/\hbar)\{[m(x_{j+1} - x_j)^2/2\Delta t^2] - U(x_j)\}\,\Delta t], \tag{8}$$

причем стоящий перед экспонентой множитель выбран так, что

$$K(x_{j+1}, t_{j+1}; x_j, t_j)_{\substack{t_{j+1}\to t_j \\ \Delta t\to 0}} = \delta(x_{j+1} - x_j).$$

Чтобы получить пропагатор, относящийся к конечному промежутку времени, построим цепь Маркова согласно формуле (6):

$$K(x', t'; x^0, t^0) = \\ = \int K(x', t'; x_{n-1}, t_{n-1})\, dx_{n-1} \int K(x_{n-1}, t_{n-1}; x_{n-2}, t_{n-2})\, dx_{n-2} \ldots \\ \ldots \int K(x_2, t_2; x_1, t_1)\, dx_1\, K(x_1, t_1; x^0, t^0), \tag{9}$$

где $x' = x_n$, $t' = t_n$, $x(t^0) = x^0, \ldots$, и предположим, что $t_j = t_0 + j\,\Delta t$, $\Delta t > 0$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n$, так что $t' = t_n > t_{n-1} > \ldots \ldots > t_{n-r} > \ldots > t_1 > t_0$.

Перейдем теперь к пределу $\Delta t \to 0$ и $n \to \infty$ (при фиксированных $t_n = t'$ и t_0). Тогда каждый из пропагаторов в (9) может быть представлен в виде (8), и мы получим

$$K(x', t';\ x^0, t^0) = \lim_{\substack{n\to\infty,\\ \Delta t\to 0}} \left[(m/2\pi i\hbar\,\Delta t)^{n/2} \int dx_1 \int dx_2 \ldots \int dx_{n-1} \right] =$$

$$= \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{m}{2} \frac{(x_{j+1}-x_j)^2}{\Delta t} - U(x_j)\,\Delta t \right] \right\} = \int \delta x \exp\left(\frac{i}{\hbar} W\{x(t)\} \right), \quad (10)$$

где $\delta x = (m/2\pi i\hbar\,\Delta t)^{n/2}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_{n-1}$, а

$$W\{x(t)\} = \int_{t^0}^{t'} \mathscr{L}(\dot{x}(t),\ x(t))\, dt, \quad (11)$$

и интеграл взят по всем возможным путям, соединяющим точки x', t' и x^0, t^0. Из этих траекторий только одна, именно, отвечающая минимуму функции действия:

$$\delta W\{x(t)\} = 0, \quad (12)$$

является классической траекторией частицы, движущейся из x^0, t^0 в x', t'. Из (12) следуют уравнения движения частицы в лагранжевой форме.

Интеграл (10), являющийся пределом последовательности n-кратных интегралов, есть функциональный интеграл или интеграл по путям. Его существование в смысле указанного предела доказано в математической литературе [5] для широкого класса потенциалов $U(x)$.

Как известно, $K(x',\ t';\ x^0,\ t^0)$ может быть выражено через собственные функции $\varphi_n(x)$ и собственные значения E_n оператора энергии $\hat{\mathscr{H}}$:

$$K(x',\ t';\ x^0,\ t^0) = \sum_n \varphi_n(x')\, \varphi_n{}^*(x^0)\, e^{-iE_n(t'-t_0)/\hbar}. \quad (13)$$

Фейнман дает новое определение этой величины, которое одновременно является его постулатом квантования.

Важно отметить, что для построения квантовой величины K необходимо знать лагранжиан $\mathscr{L}$ классической системы, а не гамильтониан $\mathscr{H}$, как в шрёдингеровской схеме. Кроме того, нет канонического постулата квантования, который требует замены классических c-числовых величин на операторы $\hat{x}$ и $\hat{p}$.

Далее мы хотим остановиться на гамильтоновой форме интеграла Фейнмана. В работах [6] было показано, что вместо функционального интеграла по траекториям (10) в конфигурационном пространстве $\{x(t)\}$ в некоторых случаях более удобно рассматривать выражение для $K(x',\ t';\ x^0,\ t^0)$, представленное через функциональный интеграл, содержащий функцию гамильтониана $\mathscr{H}(x,\ p)$, где интегрирование ведется по траекториям в фазовом пространстве $\{x(t),\ p(t)\}$:

$$K(x',\ t';\ x^0,\ t^0) =$$

$$= C \int \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t^0}^{t'} [p(t)\,\dot{x}(t) - \mathscr{H}(x(t),\ p(t))]\, dt \right\} \delta^3 x\, \delta^3 p. \quad (14)$$

Для простейшего гамильтониана $\mathscr{H} = (p^2/2m) + U(x)$ (и вообще для $\mathscr{H}$, квадратично зависящего от p) легко доказывается эквивалентность (10) и (14). Действительно, в показателе экспоненты (14) стоит опять интеграл действия, выраженный через гамильтоновскую функцию. Разбивая, как и раньше, отрезок $[t^0, t']$ на n равных интервалов Δt и аппроксимируя функции $x(t)$ и $p(t)$ кусочно-линейными и кусочно-постоянными функциями, соответственно можем записать (14) как предел $2n+1$-кратного интеграла (на концах траекторий значения импульсов p_1, p_n не фиксированы; по ним также ведется интегрирование):

$$\lim_{n\to\infty}\Big[(1/2\pi\hbar)^{3n}\int\limits_{1\ldots n}\ldots\int d^3p_1d^3p_2\ldots d^3p_n\,d^3x_1\ldots d^3x_{n-1}\times$$
$$\times\exp\Big\{(i/\hbar)\sum_{j=1}[p_j(x_j-x_{j-1})-(p_j^2/2m)\,\Delta t-U(x_j)\,\Delta t]\Big\}\Big]=$$
$$=K(x',\ t';\ x^0,\ t^0). \qquad (15)$$

Теперь интегрируем по всем p_j, что легко сделать, если заметить следующее:

$$p_j\Delta x_j-\frac{p_j^2}{2m}\Delta t=-\frac{\Delta t}{2m}\left(p_j-\frac{m}{\Delta t}\Delta x_j\right)^2+\frac{m}{2}\left(\frac{\Delta x_j}{\Delta t}\right)^2,$$

где $\Delta x_j=x_j-x_{j-1}$;

$$\int d^3p_j\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\frac{\Delta t}{2m}\left(p_j-\frac{m}{\Delta t}\Delta x_j\right)^2\right]=\left(\frac{2\pi\hbar m}{i\Delta t}\right)^{3/2}.$$

В результате получаем, что оба определения K совпадают:

$$\lim_{n\to\infty}\Big[\left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{3n}\int\limits_{1\ldots n}\ldots\int d^3p_1\ldots d^3p_n\,d^3x_1\ldots d^3x_{n-1}\times$$
$$\times\exp\Big\{\frac{i}{\hbar}\sum_{j=1}^{n}\Big[p_j(x_j-x_{j-1})-\frac{p_j^2}{2m}\Delta t-U(x_j)\,\Delta t\Big]\Big\}\Big]=K(x',\ t';\ x^0,\ t^0)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\Big[\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\Delta t}\right)^{3n/2}\int d^3x_1\ldots\int d^3x_{n-1}\times\exp\Big\{\frac{i}{\hbar}\sum_{j=1}^{n}\Big[\frac{m}{2}\frac{\Delta x_j^2}{\Delta t}-U(x_j)\,\Delta t\Big]\Big\}\Big]=$$
$$=C\int\exp\Big\{\frac{i}{\hbar}\int\limits_{t^0}^{t'}\Big[\frac{m}{2}\dot{x}^2(t)-U(x(t))\Big]dt\Big\}\,\delta x.$$

3. УРАВНЕНИЕ ШРЁДИНГЕРА

Вывод уравнения Шрёдингера для $\psi(x',\ t')$ в лагранжевой и гамильтоновой формах записи $K(x',\ t';\ x^0,\ t^0)$ осуществляется следующим образом. Рассмотрим равенство (1), когда времена t^0 и t' отличаются на бесконечно малую величину Δt, $t'=t^0+\Delta t$; тогда

$$\psi(x',\ t^0+\Delta t)=\int K(x',\ t^0+\Delta t;\ x^0,\ t^0)\,\psi(x^0,\ t^0)\,d^3x^0. \qquad (16)$$

Возьмем для $K(x',\ t^0+\Delta t;\ x^0,\ t^0)$ лагранжеву форму (8):

$$K(x',\ t^0+\Delta t;\ x^0,\ t^0)=\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\Delta t}\right)^{3/2}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\Delta t\left[\frac{m}{2}\frac{(x'-x^0)^2}{\Delta t^2}-U(x')\right]\right\};$$

разлагая по малой величине Δt в (16), имеем

$$\psi(x', t^0) + \Delta t \frac{\partial \psi(x', t^0)}{\partial t^0} = \left[1 - \frac{i}{\hbar} \Delta t U(x)\right] \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t}\right)^{3/2} \times$$
$$\times \int \exp\left[\frac{i}{\hbar} \frac{m}{2} \Delta t \frac{(x' - x^0)^2}{\Delta t^2}\right] \psi(x^0, t^0)\, d^3x^0. \qquad (17)$$

Введем замену $\xi = x' - x^0$; тогда

$$\psi(x^0, t^0) = \psi(x', t^0) - \xi \nabla \psi(x', t^0) + (\xi^2/2) \nabla^2 \psi(x', t^0) + \ldots \qquad (18)$$

Интегрируя по ξ в (17) с учетом замены, замечаем, что последующие члены разложения в (18) дают более высокие порядки по Δt. Действительно,

$$\int d^3\xi \exp[(im/2\hbar\, \Delta t)\, \xi^2] = (2\pi \hbar i\, \Delta t/m)^{3/2},$$
$$\int d^3\xi \xi \exp[(im/2\hbar\, \Delta t)\, \xi^2] = 0,$$
$$\int d^3\xi \xi^2 \exp[(im/2\hbar\, \Delta t)\, \xi^2] = (2\pi \hbar i\, \Delta t/m)^{5/2}.$$

В результате получаем уравнение Шрёдингера 128

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi(x', t^0)}{\partial t^0} = \left[\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - U(x')\right] \psi(x', t^0). \qquad (19)$$

В гамильтоновой формулировке для случая, когда $t' = t^0 + \Delta t$, имеем

$$\psi(x', t^0 + \Delta t) =$$
$$= \int d^3x^0 \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[p(x' - x^0) - \frac{p^2 \Delta t}{2m} - \Delta t \cdot U(x')\right]\right\} \psi(x^0, t^0), \qquad (20)$$

и, учитывая малость Δt, можно по p интегрировать не точно, как в (11), а разлагая до Δt; тогда

$$\left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^3 \int d^3p e^{(i/\hbar)p(x'-x^0)} \left\{1 - \Delta t \frac{i}{\hbar}\left[\frac{p^2}{2m} + U(x')\right]\right\} =$$
$$= \delta^3(x' - x^0) + \Delta t \frac{i}{\hbar}\left[\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - U(x')\right] \delta^3(x' - x^0). \qquad (20')$$

Подставляя это выражение для $K(x', t^0 + \Delta t; x^0, t^0)$ в (20) и интегрируя по x^0, вновь придем к уравнению Шрёдингера:

$$\psi(x', t^0 + \Delta t) = \psi(x', t^0) + \Delta t\, (i/\hbar)\, [(\hbar^2/2m) \nabla^2 - U(x')]\, \psi(x', t^0),$$

откуда получаем (19).

Схема квантования с помощью функциональных интегралов приводит к необходимости рассматривать объекты, теория которых недостаточно разработана с математической точки зрения и требует введения новых математических понятий, но она обладает по сравнению с канонической процедурой квантования, как уже отмечалось, рядом преимуществ. Одним из них является то, что в обычной схеме мы должны задавать правила расстановки некоммутирующих величин, в то время как здесь такая неопределенность отсутствует, так как порядок следования p и x в самом функционале несуществен, поскольку это c-числовые функции; особенность схемы, по-видимому, важна при квантовании нелинейных систем [7, 8].

В этой связи следует отметить, что в недавно появившейся работе Березина [9] было указано на важную особенность функциональных интегралов в фазовом пространстве p, x. Автор привел ряд примеров, показывающих, что пределы конечномерных интегралов [см. формулу (15)], аппроксимирующих функциональный интеграл (14), могут стремиться к разным значениям при $n \to \infty$ в зависимости от способа разбиения $p(t)$ и $x(t)$ на дискретные значения p_k, x_k, и указал на связь проблемы расстановки операторов $\hat{p}$ и $\hat{x}$ в обычной квантовой теории и способа построения аппроксимирующих конечномерных интегралов Таким образом, вопрос о том, что в рамках функционального метода проблемы расстановки операторов не существует, остается открытым, во всяком случае для интегралов в фазовом пространстве p, x.

4. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ АРГУМЕНТОВ

Как видно из предыдущих формул, функциональные интегралы записывались в декартовых координатах $x_j(t)$, $p_j(t)$, однако для расширения круга практического применения этого метода необходимо выражение таких величин в криволинейных координатах и в первую очередь в сферических, что существенно для рассмотрения квантовых задач со сферической симметрией. Правильная форма интеграла в полярных координатах была получена в работе [10]; в работе Эдвардса и Гуляева [11] указывалось на трудности этой проблемы. Действительно, если в декартовых координатах при каноническом квантовании справедливо соответствие $p_j \to -i\frac{\partial}{\partial x_j}$, то в полярных это уже не так Авторы работы [10] рассматривают частицу массы m в центральном поле $U(|\mathbf{x}|)$. Функция действия (7) в рамках лагранжевой формулировки для малого интервала $\Delta t = t_j - t_{j-1}$ и близких координат x_j, x_{j-1} может быть в полярных координатах

$$\mathbf{x}_j = \{r_j \sin\theta_j \sin\varphi_j,\ r_j \sin\theta_j \cos\varphi_j,\ r_j \cos\theta_j\} \tag{21}$$

записана так:

$$W(x_j, x_{j-1}) = (m/2)\left[(r_j^2 + r_{j-1}^2)/\Delta t\right] - m(r_j r_{j-1}/\Delta t)\cos\Theta_j - \Delta t \cdot U(r_j); \tag{22}$$

здесь учтено, что $\cos\Theta_j = \cos\theta_j \cos\theta_{j-1} + \sin\theta_j \sin\theta_{j-1}\cos(\varphi_j - \varphi_{j-1})$,

$$(x_j - x_{j-1})^2 = r_j^2 + r_{j-1}^2 - 2r_j r_{j-1}\cos\Theta_j$$

Если использовать разложение по полиномам Лежандра

$$e^{u\cos\Theta} = \left(\frac{\pi}{2u}\right)^{1/2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos\Theta)\, I_{l+\frac{1}{2}}(u),$$

где $I_{l+\frac{1}{2}}$ — функция Бесселя, то величину $\exp\left[(i/\hbar)\sum_j W_j\right]$, входящую в (10), можно представить в виде

$$\exp\left[\frac{i}{\hbar}\sum_j W(x_j, x_{j-1})\right] = \prod_{j=1}^{n} \sum_{l_j=0}^{\infty} (2l_j+1) P_{l_j}(\cos\Theta_j)\, R_{l_j}(r_j;\, r_{j-1});$$

здесь R_{l_j} — радикальная часть выражения

$$R_{l_j}(r_j;\, r_{j-1}) = \left(\frac{i\pi\,\Delta t}{2m r_j r_{j-1}}\right)^{1/2} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[\frac{r_j^2 + r_{j-1}^2}{\Delta t} - \Delta t U(r_j)\right]\right\} I_{l_j+\frac{1}{2}}\left(\frac{m\hbar}{i\,\Delta t} r_j r_{j-1}\right).$$

После изменения порядка суммирования и умножения в этой формуле, получаем для функции $K(x', t'; x^0, t^0)$

$$K(x', t'; x^0, t^0) = \\ = \lim_{n\to\infty} \left\{ \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\,\Delta t}\right)^{3n/2} \sum_{l_1, l_2, \ldots, l_n}^{\infty} \int \prod_{j=1}^{n} [(2l_j+1) P_{l_j}(\cos\Theta_j) R_{l_j}(r_j, r_{j-1})] \times \right. \\ \left. \times \prod_{t,\, i=1}^{n-1} r_i^2(t)\, dr_i(t) \sin\theta_i(t)\, d\theta_i(t)\, d\varphi_i(t) \right\}.$$

Далее оказывается, что для рассматриваемой угловой зависимости (22) можно выполнить точно интегрирование по всем угловым переменным; для этого достаточно учесть только следующие равенства:

$$P_{l_j}(\cos\Theta_j) = \frac{4\pi}{2l_j+1} \sum_{n_j=-l_j}^{l_j} Y_{l_j}^{n_j^*}(\theta_j, \varphi_j) Y_{l_j}^{n_j}(\theta_{j-1}, \varphi_{j-1}),$$

где Y_l^n — сферические гармоники и

$$\int\int Y_l^{n*}(\theta, \varphi) Y_{l'}^{n'}(\theta, \varphi)\, d\varphi \sin\theta\, d\theta = \delta_{ll'}\delta_{nn'}. \tag{23}$$

Поэтому

$$\int \ldots \int \prod_{j=1}^{n} [(2l_j+1) P_{l_j}(\cos\Theta_j)] \prod_{i=1}^{n-1} \sin\theta_i\, d\theta_i\, d\varphi_i = \\ = (4\pi)^n \delta_{ll_n} \prod_{j=1}^{n} \delta_{l_{j+1}l_n} \sum_{n=-l}^{l} Y_l^{n*}(\theta', \varphi') Y_l^n(\theta^0, \varphi^0),$$

$$x' = x'(r', \theta', \varphi'),\quad x^0 = x^0(r^0, \theta^0, \varphi^0).$$

В результате для каждого квантового числа l радиальный и угловые вклады в пропагатор K разделяются:

$$K(x', t'; x^0, t^0) = \\ = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=-l}^{l} K_l(r', t'; r^0, t^0) Y_l^{n*}(\theta', \varphi') Y_l^n(\theta^0, \varphi^0). \tag{24}$$

Радиальная часть пропагатора для l-волны дается функциональным интегралом только по переменной $r(t)$:

$$K_l(r', t'; r^0, t^0) = \\ = \lim_{n\to\infty} \left[(4\pi^n) \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\,\Delta t}\right)^{3n/2} \int \prod_{j=1}^{n} R_l(r_j; r_{j-1}) \prod_{i=1}^{n-1} r_i^2\, dr_i \right], \tag{25}$$

и его вычисление уже определяется конкретным видом потенциала $U(r)$.

Таким образом, возможность для данного W выполнить функциональные квадратуры по угловым переменным по $\theta(t)$ и $\varphi(t)$ в сферически-симметричной задаче дает возможность записать для K функциональный интеграл только по радиальной переменной $r(t)$ в форме (24) и (25).

Для гамильтоновой формы интеграла в сферических координатах можно написать аналогичное выражение [10]:

$$K(x',\ t';\ x^0,\ t^0) = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{3n}\int \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_{t^0}^{t'}(p_r\dot{r}+p_\theta\dot{\theta}+p_\varphi\dot{\varphi}-\mathscr{H})\,dt\right]\times\right.$$
$$\left.\times\prod_{j=1}^{n}(dp_{r_j}\,dp_{\theta_j}\,dp_{\varphi_j})\prod_{i=1}^{n-1}(r_i^2\sin\theta_i\,dr_i\,d\theta_i\,d\varphi_i)\right\},$$

и после выполнения интегрирования по dp_{θ_j}, dp_{φ_j}, $d\theta_j$, $d\varphi_j$ получаем в результате формулу (24) с радиальной функцией

$$R_l(r',\ t';\ r^0,\ t^0) = \frac{1}{r'r^0}\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{m\hbar}{2\pi i\Delta t}\right)^{3n/2}\times\right.$$
$$\left.\times\int\exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_{t^0}^{t'}(p\dot{r}-\mathscr{H}_l)\,dt\right]\prod_{j=1}^{n}dp_j\prod_{i=1}^{n}r_i^2\,dr_i\right\},$$

где

$$\mathscr{H}_l(r_j,\ p_j) = (2m)^{-1}\{p_j^2+[l(l+1)/r_j^2]\}+U(r_j).$$

Если, например, рассматривается частица в притягивающем потенциале $U(r) = k^2/r^2$, то интегрирование по всем r_j в формуле (25) может быть выполнено (см. [10]), и тогда имеем замкнутое выражение

$$K(x',\ t';\ x^0,\ t^0) = [m/i(t'-t^0)(r'r^0)^{1/2}]\exp[im(r'^2+r^{0^2})/2(t'-t^0)]\times$$
$$\times\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{n=-l}^{l}I_{\lambda(l)}(mr'r^0/i(t'-t^0))\,Y_l^{n*}(\theta',\ \varphi')\,Y_l^n(\theta^0,\ \varphi^0),$$
$$\lambda(l) = [(l+1/2)^2+k^2]^{1/2}.$$

В заключение отметим, что, к сожалению, этот изящный способ интегрирования по угловым переменным в функциональном интеграле оказывается не эффективным для более сложных функционалов, с которыми мы встречаемся в теории поля. Например, для интеграла [12]

$$\int\exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_{t^0}^{t'}D(t_1-t_2)\,\mathbf{x}(t_1)\,\mathbf{x}(t_2)\,dt_1\,dt_2+i\frac{g}{\hbar}\int_{t^0}^{t'}U(\mathbf{x}^2)\,dt\right]\delta\mathbf{x}$$

введение полярных координат r, θ, φ:

$$\int\exp\left[\frac{i}{\hbar}\int\int_{t^0}D(t_1-t_2)\,r(t_1)\,r(t_2)\cos\theta(t_1,\ t_2)\,dt_1\,dt_2+\right.$$
$$\left.+i\frac{g}{\hbar}\int_{t^0}^{t'}U(r^2(t))\,dt\right]\prod_{i=1}^{n}d\varphi_i r_i^2\,dr_i\sin\theta_i\,d\theta_i,$$

где

$$\cos\theta(t_1,\ t_2) = \cos\theta(t_1)\cos\theta(t_2)+\sin\theta(t_1)\sin\theta(t_2)\cos(\varphi(t_1)-\varphi(t_2)),$$

приводит при разложении по сферическим гармоникам к выражению

$$\exp\left(\frac{i}{\hbar}\sum_{j,\,k=1}^{n}D_{jk}r_jr_k\cos\theta_{jk}\right) = \sum_{j,\,k}4\pi\left(\frac{\pi\hbar}{iD_{jk}r_jr_k}\right)^{1/2}\times$$
$$\times\sum_{l_{jk}=0}^{\infty}I_{l_{jk}+\frac{1}{2}}\left(\frac{i}{\hbar}D_{jk}r_jr_k\right)\sum_{n_{jk}=-l_{jk}}^{l_{jk}}Y_{l_{jk}}^{n_{jk}^*}(\theta_j,\ \varphi_j)\,Y_{l_{jk}}^{n_{j,k}}(\theta_k,\ \varphi_k),\qquad(26)$$

которое интегрировать по θ_j, φ_j чрезвычайно затруднительно, так как при каждом фиксированном угле θ_j, φ_j интегрируется произведение n сомножителей $Y_{l_{jk}}^{n_{jk}}(\theta_j, \varphi_j)$ и формула (23) неприменима. Это связано с тем, что квадратичная форма в показателе экспоненты в (19) по $\mathbf{x}(t)$ зависит от двух времен, t_1, t_2, и при одном фиксированном $t_1 = t_j$ у нас остается сумма в экспоненте или произведение сомножителей в (26) по $t_2 = t_k$.

В функциональной записи более наглядно проступает связь канонических преобразований в классической и квантовой механике.

Рассмотрим простой, но важный частный случай канонического преобразования [6]

$$x \to p, \quad p \to -x.$$

Выражение для пропагаторов (15) переходит при этом в следующее:

$$K(p', t'; p^0, t^0) = \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3n}} \int \ldots \int d^3x_1 \ldots d^3x_n \, d^3p_1 \ldots d^3p_n \times \right.$$
$$\left. \times \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \left(\int x\,dp + \int \mathscr{H}\,dt \right) \right] \right\}.$$

Если по-прежнему $\mathscr{H} = (p^2/2m) + U(x)$ и рассматривать случай, когда $t' = t^0 + \Delta t$ то, поступая как и при выводе (20′), получаем

$$K(p', t^0 + \Delta t; p^0, t^0) =$$
$$= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3x \exp\left\{ -\frac{i}{\hbar} x(p' - p^0) - \frac{i}{\hbar} \Delta t \left[\frac{p^2}{2m} + U(x) \right] \right\}.$$

Далее, предполагая, что потенциал $U(x)$ разложим в ряд: $U(x) = U_0 + U_1 x + U_2 x^2 + \ldots$, получаем

$$K(p', t^0 + \Delta t; p^0, t^0) = \delta^3(p' - p^0) -$$
$$- \frac{i}{\hbar} \Delta t \left[\frac{p^2}{2m} + U_0 + U_1 \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial p'} \right) + U_2 \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial p'} \right)^2 + \ldots \right] \delta(p' - p^0).$$

Отсюда для волновой функции $\psi(p', t^0)$ следует уравнение Шрёдингера, но в импульсном представлении.

В литературе [6, 8] имеются доказательства, что линейным каноническим преобразованиям в классической механике соответствуют в фейнмановской формулировке КМ унитарные преобразования. Изучение нелинейных канонических преобразований вызывает в рамках функциональной формулировки КМ затруднения, поскольку не разработаны математические вопросы нелинейных преобразований для функциональных интегралов (см. [1, 2]).

Недавно Фаддеев [8] указал на важное применение фейнмановского метода квантования при помощи функционального интеграла в гамильтоновой форме к ситуациям, в которых канонический метод сталкивается с трудностями.

Дело в том, что классическая система может иметь лагранжиан $\mathscr{L}(\dot{q}, q)$, для которого соотношения

$$p_j = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

не разрешимы относительно $\dot{q}_j$, т. е. мы не можем выразить $\dot{q}$ через p и q, что необходимо для написания функции Гамильтона $\mathscr{H}(q, p)$. Такие лагранжианы в работе [8] называются сингулярными. Наиболее интересные примеры систем с сингулярными лагранжианами дает теория поля для калибровочно-инвариантных полей (электромагнитное поле, поле Янга — Миллса, гравитационное поле). Все они описываются сингулярными лагранжианами с дополнительными условиями или связями на канонические переменные. Поэтому в n-мерном случае классической механики канонические переменные $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ и $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ не пробегают все $2n$-мерное фазовое пространство из-за связей

$$\varphi_\alpha(q, p) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, m), \quad m < n.$$

Квантованию таких систем в канонической схеме были посвящены работы Дирака [13]. Его схема содержит ряд трудностей, и прежде всего трудность с расстановкой или, по терминологии Фейнмана, упорядочением операторных множителей.

Учет дополнительных условий в гамильтоновой форме функционального интеграла производится следующим образом. Если соотношения $\varphi_\alpha(q, p) = 0$ можно разрешить относительно m координат и выразить в виде

$$q_\alpha = q_\alpha(q^*, p)$$

(q^* — суть $n - m$ независимых координат), то для этого необходимо, чтобы $\det\left|\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial q_\beta}\right| \neq 0$. Далее оказывается, что наблюдаемые выражаются не через все n импульсов p_j, а только через $n - m$, т. е. существуют еще m соотношений $f_\alpha(q, p) = 0$. Поэтому после канонического преобразования, в котором новые импульсы равны $p_\alpha^* = f_\alpha(q, p)$, у нас будет $2(n - m)$ переменных $(q_1^*, q_2^*, \ldots, q_{n-m}^*)$, $(p_1^*, p_2^*, \ldots, p_{n-m}^*)$, с помощью которых записывается функциональный интеграл:

$$K(q', t'; q^0, t^0) = \int \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int\limits_{t^0}^{t'}\left(\sum_{j=1}^{n-m} p_j^*\dot{q}_j^* - \mathscr{H}\right)dt\right]\prod_{t,\, j=1}^{n-m}\frac{dp_j^*(t)\, dq_j^*(t)}{(2\pi\hbar)^{n-m}}.$$

Можно также записать K через $2n$ переменных, с учетом связей и дополнительных условий, в форме интеграла по всем $2n$ переменным:

$$K = \int \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int\limits_{t^0}^{t'}\left(\sum_{j=1}^{n} p_j\dot{q}_j - \mathscr{H}\right)dt\right]\times$$

$$\times \prod_{t,\,\alpha=1}^{m}\delta(p_\alpha)\,\delta(q_\alpha - q(q^*, p^*))\,dp_\alpha(t)\,dq_\alpha(t)\prod_{t,\, j=1}^{n-m}\frac{dp_j^*(t)\, dq_j^*(t)}{(2\pi\hbar)^{n-m}}.$$

В заключение этой главы укажем на один интересный численный расчет функционального интеграла, дающий значение основного уровня атома гелия. Еще в работе Гельфанда и Ченцова [14] был дан метод вычисления функционального интеграла Винера, который состоит в следующем. Функциональный интеграл аппроксимируется конечно кратными интегралами Римана или Стилтьеса, последние вычисляются методом Монте Карло на электронно-вычислительной машине. Так был сосчитан низший энергетический уровень полярона. Для этого считались 190-кратный и 280-кратный аппроксимирующие интегралы. Результаты таковы: 300 траекторий — 0,9912, 400 тр.—09940; 600 тр.—0,9999; точное значение 1,0000 в соответствующих единицах.

В работе Евсеева [15] рассчитывалась таким способом величина интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(x',\ t';\ x^0,\ 0)\, e^{(i/\hbar)Et'}\, dt' = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' e^{(i/\hbar)Et'} \int e^{(i/\hbar)W[x',\ t',\ x^0]} \delta x,$$

где W — классическое действие двух электронов в поле ядра гелия. Поскольку, с другой стороны, по формуле (13) имеем

$$\int e^{(i/\hbar)Et'} K(x',\ t';\ x^0,\ 0)\, dt' = \sum_n \varphi_n(x')\, \varphi_n^*(x^0) \cdot 2\pi\delta(E_n - E),$$

приближенный расчет K дает при интегрировании по t максимумы (вместо $\delta(E_n - E)$) в точках E_n. Интегрирование в m-кратном аппроксимирующем интеграле по x_i ведется в пределах от $-a$ до $+a$ ($a = \hbar/me^2$ — радиус первой боровской орбиты), поскольку функция $e^{iW/\hbar}$ при больших x быстро осциллирует и дает малый вклад в интеграл. Для основного уровня гелия было получено значение $2{,}92 \pm 0{,}05$, которое отличается от экспериментального 2,90351 на 0,57%.

5. КОНТИНУАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ГРИНА В ТЕОРИИ КВАНТОВАННЫХ ПОЛЕЙ

Обратимся теперь к КТП. Фундаментальную роль в КТП играют функции Грина квантованных полей, знание которых позволяет находить физические характеристики взаимодействующих полей; в частности, они дают возможность находить и амплитуды рассеяния (на этом вопросе мы далее остановимся подробнее).

Многими авторами [16, 17] с помощью функциональных интегралов были получены замкнутые выражения для функций Грина. Например, одночастичная функция Грина фермионного поля представляется следующим образом:

$$G(x,\ y) = \int G(x,\ y\,|\,A)\, S_0(A) \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\int\int d^4\xi\, d^4\eta D^{-1}_{\mu\nu}(\xi-\eta) A_\mu(\xi) A_\nu(\eta)\right] \delta^4 A \times$$

$$\times \left\{\int S_0(A) \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\int\int d^4\xi\, d^4\eta D^{-1}_{\mu\nu}(\xi-\eta) A_\mu(\xi) A_\nu(\eta)\right] \delta^4 A\right\}^{-1}; \qquad (27)$$

здесь $\delta^4 A = \prod_x d^4 A(x)$; $G(x,\ y\,|\,A)$ — функция Грина фермиона в классическом внешнем поле A_μ, $S_0(A)$ — среднее по фермионному вакууму от S-матрицы, где операторы бозонного (электромагнитного) поля A_μ заменены на классические функции поля; $D^{-1}_{\mu\nu}$ — обратная функция к свободной функции распространения бозона:

$$\int D^{-1}_{\mu\nu}(x - z)\, D_{\nu\lambda}(z - y)\, d^4 z = \delta^4(x - y)\, \delta_{\mu\lambda}.$$

Первая задача, возникающая при вычислении (27),— это нахождение функции $G(x,\ y\,|\,A)$ для произвольного внешнего поля A_μ. Для электронно-позитронного поля G подчиняется уравнению Дирака

$$[i\gamma_\mu\partial_\mu - m + e\gamma_\nu A_\nu(x)]\, G(x,\ y\,|\,A) = -\delta^4(x - y). \qquad (28)$$

Уже решение этого уравнения с произвольным полем $A_\mu(x)$ в математике представляется проблемой огромной трудности. Однако, как впервые было показано Фейнманом [4], решение этого уравнения может быть формально представлено также в виде функционального интеграла (таким путем получаются функции Грина уравнений Клейна — Гордона, Дирака и Шрёдингера [16, 18, 19] для произвольного внешнего поля. В случае, если внешнее поле допускает замкнутое решение уравнения (28), функциональные квадратуры могут быть выполнены [18]. Удачным в этом подходе является то, что функция Грина $G(x, y \mid A)$, полученная таким способом, позволяет, если пренебречь в формуле (27) вакуумными вкладами [положив $S_0(A) = 1$], выполнить функциональное усреднение по внешним полям и получить квантовую функцию $G(x, y)$ без учета поляризации фермионного вакуума. Как будет следовать из дальнейшего, рассматриваемый формализм имеет полностью ковариантную форму, поскольку, в отличие от предыдущих формул, выделенной переменной здесь является не время t, а собственное время τ.

Рассмотрим этот формализм на примере уравнения Дирака (28) и введем, как обычно, функцию Грина $\mathcal{G}$ квадрированного уравнения Дирака:

$$G(x, y \mid A) = [i\gamma_\mu\partial_\mu + m + e\gamma_\mu A_\mu(x)]\, \mathcal{G}(x, y \mid A).$$

Тогда для $\mathcal{G}$ имеется уравнение

$$[(i\partial_\mu + eA_\mu(x))^2 - m^2 + e\sigma_{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu(x)]\, \mathcal{G}(x, y \mid A) = -\delta^4(x-y). \quad (29)$$

Применяя предложенное Фоком [20] и развитое Фейнманом [21] представление обратного оператора в экспоненциальном виде, представим решение (29) в операторной форме:

$$\mathcal{G}(x, y \mid A) = i\int_0^\infty d\tau e^{-im^2\tau} \exp\left\{i\int_0^\tau d\xi\, [(i\partial_\mu(\xi) + eA_\mu(\xi))^2 + e\sigma_{\mu\nu}(\xi)\,\partial_\mu(\xi)\, A_\nu(\xi)]\right\} \delta^4(x-y); \quad (30)$$

здесь экспонента, в показателе которой стоят некоммутирующие операторы ∂_μ, A_μ, $\sigma_{\mu\nu}$, понимается [21] как T_τ-экспонента, где упорядочивающий индекс τ имеет смысл собственного времени, деленного на массу m. Все операторы в (30) считаются коммутирующими функциями, зависящими от параметра τ. Произведем теперь функциональное преобразование Фурье, приводящее к первой степени оператора дифференцирования ∂_μ в показателе экспоненты:

$$\exp\left\{i\int_0^\tau d\xi\, [i\partial_\mu(\xi) + eA_\mu(x, \xi)]^2\right\} = C\int \delta^4\nu \exp\left\{-i\int_0^\tau \nu_\mu^2(\xi)\, d\xi + 2i\int_0^\tau \nu_\mu(\xi)\, [i\partial_\mu(\xi) + eA_\mu]\right\}, \quad (31)$$

где

$$\delta^4\nu = \prod_\xi d^4\nu(\xi), \qquad C = 1/\exp\left[-i\int_0^\tau \nu_\mu^2(\xi)\, d\xi\right].$$

Имея теперь первую степень оператора ∂_μ в показателе (31), можем подействовать им как оператором сдвига согласно правилам «выпутывания» [21]; в результате получим следующее выражение для $\mathcal{G}(x, y \mid A)$:

$$\mathcal{G}(x, y \mid A) = i\int_0^\infty d\tau e^{-im^2\tau} C\int \delta^4\nu \exp\left\{-i\int_0^\tau d\xi \left[\nu_\mu^2(\xi) - 2e\left[\nu_\mu(\varepsilon) + \frac{i}{2}\sigma_{\mu\nu}(\xi)\,\partial_\nu(\xi)\, A_\mu\left(x - 2\int_\xi^\tau \nu(\eta)\, d\eta\right)\right]\right]\right\} \delta^4\left(x - y - 2\int_0^\tau \nu(\eta)\, d\eta\right). \quad (32)$$

В этом выражении операторы $\sigma_{\mu\nu}(\xi)$ остаются, по терминологии Фейнмана, не «распутанными» *), т. е. они зависят от ξ как от упорядочивающего индекса и для них остается T_τ-упорядочение.

Функция Грина для уравнения Клейна — Гордона получается из (32) при $\sigma_{\mu\nu}=0$. Для сходимости интеграла по τ на верхнем пределе считается, что масса m имеет отрицательную мнимую добавку $-i\varepsilon$; таким образом, формула (32) определяет причинную функцию Грина уравнений Дирака или Клейна — Гордона.

Аналогичным образом может быть получена запаздывающая функция Грина уравнения Шрёдингера [19] с произвольным потенциалом $U(\mathbf{x}, t)$:

$$G(x', t';\ x^0, t^0) = i\theta(t'-t^0)\, C \int \delta^3\nu \times$$
$$\times \exp\left[\frac{im}{2}\int_0^{t'-t^0}\mathbf{v}^2(\xi)\,d\xi\right]\exp\left[-i\int_0^{t'-t^0} U\left(t'+\xi;\ \mathbf{x}^0+2\int_0^{\xi}\mathbf{v}(\eta)\,d\eta\right)d\xi\right]\times$$
$$\times\ \delta^{(3)}\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0-2\int_0^{t'-t^0}\mathbf{v}(\eta)\,d\eta\right). \qquad (33)$$

Оба выражения, (32) и (33), легко привести к виду фейнмановского интеграла по траекториям от e^{iW}, где W в обоих случаях будет интегралом действия. Для этого достаточно перейти от интегрирования по $\nu_\mu(\xi)$ к новым функциональным переменным $\dot{x}_\mu(\xi) = 2\nu_\mu(\xi)$. Детерминант этого преобразования равен единице, и для релятивистской функции $\mathcal{G}$ получаем

$$\mathcal{G}(x, y\,|\,A) =$$
$$= iC\int\delta^4 x\int_0^{\infty}d\tau\exp\left\{-i\int_0^{\tau}d\xi\,[\dot{x}_\mu^2(\xi) - 2e\dot{x}_\mu(\xi)A_\mu(x) + m^2 - i\sigma_{\mu\nu}\,\partial_\nu A_\mu]\right\} \qquad (34)$$

(из-за δ^4-функции в (32) мы положили $x_\mu(\tau)=x$ и $x_\mu(0)=y$). В показателе экспоненты (34) стоит релятивистская функция действия заряженной частицы в поле A_μ:

$$W = \int_0^{\tau}[\dot{x}_\mu^2(\xi) - 2e\dot{x}_\mu A_\mu(x) - m^2]\,d\xi$$

и спиновая часть $i\sigma_{\mu\nu}\,\partial_\mu A_\nu$, не имеющая аналога в классике. Интеграл берется по всем траекториям, соединяющим x и y. Для шрёдингеровской функции (33) делается замена $\mathbf{v}(\xi) = \dot{\mathbf{x}}(\xi)$, где ξ уже просто время.

В работе [18] даны примеры конкретных полей $A_\mu(x)$, для которых интегрирование по ν_μ в (32) может быть выполнено точно.

6. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ В ФУНКЦИОНАЛЬНОМ ИНТЕГРИРОВАНИИ

Для приближенного вычисления функциональных интегралов в КМ и КТП многие авторы [4, 19, 23] рассматривали, во-первых, метод стационарной фазы, развитый в математике для обыкновенных интегралов. Его применимость можно считать оправданной, когда действие $W \gg \hbar$,

*) Проблема «распутывания» дираковских матриц при решении уравнения Дирака в произвольном внешнем поле рассмотрена в работе Фрадкина [22].

однако пока еще не существует оценки этого метода даже для простейших функциональных интегралов [23, 24]. В этом методе ищутся экстремальные траектории [классические, см. (12)] из условия

$$\delta W\,[x^{\text{кл}}] = 0. \tag{35}$$

Действие разлагается около этих траекторий:

$$W\,[x] = W\,[x^{\text{кл}}] + \frac{1}{2}\,\delta^2 W\,[x^{\text{кл}}] + \frac{1}{6}\,\delta^3 W\,[x^{\text{кл}}] + \ldots,$$

где, например,

$$\delta^2 W\,[x^{\text{кл}}] = \int\limits_{t^0}^{t} dt\,\left\{\frac{\partial^2 \mathscr{L}}{\partial x^2}\bigg|_{x=x^{\text{кл}}} (x - x^{\text{кл}})^2 + \frac{\partial^2 \mathscr{L}}{\partial x\,\partial \dot{x}}\bigg|_{x=x^{\text{кл}}} (x - x^{\text{кл}})\,(\dot{x} - \dot{x}^{\text{кл}})\right\}$$

— квадратичный функционал относительно $x\,(t)$. Уравнение (35) на классические траектории в случае релятивистской задачи (34) (без члена $\sigma_{\mu\nu}\,\partial_\nu A_\mu$) выглядит так:

$$\frac{\partial^2 x^{\text{кл}}\,(\xi)}{\partial \xi^2} = e\,\frac{\partial x^{\text{кл}}\,(\xi)}{\partial \xi}\left[\frac{\partial A_\mu\,(x)}{\partial x_\nu^{\text{кл}}} - \frac{\partial A_\nu\,(x)}{\partial x_\mu^{\text{кл}}}\right]. \tag{36}$$

Для уравнения Шрёдингера имеем (см. [19])

$$m\ddot{\mathbf{x}}^{\text{кл}} = \frac{\partial U\,(t^0 + \xi,\ x^{\text{кл}}\,(\xi))}{\partial \mathbf{x}^{\text{кл}}}. \tag{37}$$

Уравнения (36) и (37) отличаются от уравнений движения классической частицы тем, что в начальный момент задаются не координата и скорость, а два значения координаты на концах интервала $[t^0,\ t']$:

$$\mathbf{x}_{\text{кл}}\,(t' - t^0) = \mathbf{x},\quad \mathbf{x}^{\text{кл}}\,(0) = \mathbf{x}^0.$$

К сожалению, для произвольных полей A_μ и потенциалов U, которые нужно рассматривать для построения квантовой функции $G\,(x,\ y)$ согласно (27), найти решения уравнений (36) и (37) точно не удается. Поэтому практическая польза от этого квазиклассического приближения для функционального интеграла может быть получена там, где (36) и (37) могут быть решены тем или иным способом вне рамок теории возмущений.

В работе [25] было обращено внимание на то, что вычисления функциональных интегралов методом стационарной фазы может быть применено для квантования полей, описываемых лагранжианами вида $\mathscr{L} = \mathscr{L}\,(K, I)$, где $K = \partial_\mu \varphi\, \partial_\mu \varphi / 2$ — лагранжиан свободного поля, а $I = \varphi^2/2$. Такие поля были названы одним из авторов (Д. Б.) существенно-нелинейными. В цитированной работе было показано, что если в практически важной области пространства — времени безразмерная величина $M = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial K} \gg 1$, то возможно применение метода стационарной фазы. При этом действие $W\,\{\varphi\,(x)\}$ может быть взято в виде

$$W\,\{\varphi\,(x)\} = W\,\{\varphi_{\text{кл}}\,(x)\} + \frac{M}{2!}\,Q\,\{\psi\,(x)\} + \ldots,$$

где $\varphi\,(x) = \varphi_{\text{кл}}\,(x) + \psi\,(x)$. Квадратичная форма $Q\,\{\psi\,(x)\}$ есть действие для свободного квантового поля $\psi\,(x)$, однако распространяющегося в пространстве с кривой метрикой. Эта метрика определяется полем $\varphi\,(x)$ и его первыми производными. Оказывается, что это приближение эквивалентно введению в квантовые скобки Пуассона

$$[\psi\,(x),\ \psi\,(x')] = i\hbar^* \delta\,(x - x')$$

эффективной постоянной Планка $\hbar^* = \hbar/\overline{M}$, где $\overline{M}$ — среднее значение M, в предположении, что $\overline{M} \gg 1$. В этом случае квантовые флуктуации величин $\dot{\psi}(x)$ и $\psi(x)$ малы и квантовое поле становится близким к классическому.

Перейдем к рассмотрению другого способа аппроксимации функциональных интегралов частного вида, который дает возможность получать асимптотику в инфракрасной области квантовой электродинамики, а также изучать асимптотическое поведение некоторых процессов рассеяния частиц при высоких энергиях и малых передачах импульса. Чтобы не усложнять задачи, мы рассмотрим простую релятивистски-инвариантную модель [18] взаимодействия двух скалярных полей: φ с массой μ и ψ с массой m. Лагранжиан взаимодействия этой системы имеет вид

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = g\psi^2(x)\,\varphi(x).$$

Функция Грина частицы поля ψ в классическом внешнем поле $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению

$$[i^2\partial_\mu^2 - m^2 + g\varphi(x)]\,G(x, y \mid \varphi) = -\delta^4(x-y).$$

Повторяя процедуру, изложенную в гл. 5, имеем

$$G(x, y\mid\varphi) = i\int_0^\infty d\tau e^{-im^2\tau}\exp\left\{i\int_0^\tau [i^2\partial_\mu^2 + g\varphi(x, \xi)]\,d\xi\right\}\delta^4(x-y). \qquad (38)$$

Аналогично (31), преобразуем

$$\exp\left[i\int_0^\tau d\xi i^2\partial_\mu^2(\xi)\right] = C\int\delta^4\nu\exp\left[-i\int_0^\tau \nu_\mu^2(\xi)\,d\xi + 2i\int_0^\tau \nu_\mu(\xi)\,\partial_\mu(\xi)\,d\xi\right].$$

Подставляя это выражение в (38) и «выпутывая» оператор дифференцирования ∂_μ, будем иметь

$$G(x, y\mid\varphi) = -i\int_0^\infty d\tau e^{-im^2\tau}\times$$
$$\times C\int\delta^4\nu\exp\left\{-i\int_0^\tau\left[\nu_\mu^2(\xi) - g\varphi\left(x - 2\int_\xi^\tau\nu(\eta)\,d\eta\right)\right]d\xi\right\}\times$$
$$\times\,\delta^4\left(x - y - 2\int_0^\tau\nu(\eta)\,d\eta\right). \qquad (39)$$

Далее нам потребуется фурье-образ G-функции

$$G(p, q\mid\varphi) = \int d^4x\,d^4y e^{ipx - iqy}G(x, y\mid\varphi) =$$
$$= -i\int d^4y e^{i(p-q)y}\int_0^\infty d\tau e^{i(p^2-m^2)\tau}C\int\delta^4\omega\times$$
$$\times\exp\left\{-i\int_0^\tau\left[\omega_\mu^2 - g\varphi\left(x + 2p\xi + 2\int_0^\xi\omega(\eta)\,d\eta\right)\right]d\xi\right\}; \qquad (40)$$

здесь сделана замена функциональной переменной $\nu_\mu(\xi) = p_\mu + \omega_\mu(\xi)$; интеграл по d^4x снимается δ^4-функцией в (39). При $g = 0$ из (38) следует свободная функция распространения

$$G_0(p) = (2\pi)^4\delta^4(p-q)/(p^2-m^2+i\varepsilon),$$

так как

$$C\int \delta^4\omega \exp\left[-i\int_0^\tau \omega_\mu^2(\eta)\,d\eta\right] = 1.$$

Если нас интересует инфракрасная область в этой модели при $\mu=0$, то доказано[28, 26], что вкладами поляризации вакуума поля ψ можно пренебречь, $S_0(\varphi)=1$, и из формулы (27) получаем квантовую функцию $G(p)$, интегрируя по φ согласно (27) и (40):

$$G(p)=$$
$$= i\int_0^\infty d\tau e^{i\tau(p^2-m^2)}\, C\int \delta^4\omega \exp\left\{-i\int_0^\tau d\xi\omega_\mu^2(\xi) - \frac{ig_1^2}{2}\int_0^\tau\int d\xi_1\, d\xi_2\, \Delta(\xi_1, \xi_2\,|\,\omega)\right\}, \tag{41}$$

где

$$\Delta(\xi_1, \xi_2\,|\,\omega) = \int d^4kD(k)\exp\left[-2ikp\,|\,\xi_1-\xi_2\,|-2ik\int_{\xi_1}^{\xi_2}\omega(\eta)\,d\eta\right],$$

$$D(k) = 1/(k^2+i\varepsilon),\quad g_1 = g/(2\pi)^2.$$

а) Инфракрасная асимптотика функции Грина. Точное выполнение интегрирования по $\delta\omega$ в (41) не представляется возможным, поэтому займемся приближенным вычислением интеграла в изучаемой инфракрасной области (эффективно-виртуальные импульсы k малы). Для этого выясним, какова роль функционального аргумента ω в $\Delta(\xi_1, \xi_2\,|\,\omega)$.

Если рассматривать ряд теории возмущений, раскладывая (41) по g_1^2, то функциональные интегралы легко берутся, поскольку возникают выражения типа

$$\overline{\Delta}(\xi_1, \xi_2) = C\int\delta^4\omega\exp\left[-i\int_0^\tau \omega^2(\eta)\,d\eta\right]\Delta(\xi_1, \xi_2\,|\,\omega) =$$
$$= \int d^4kD(k)\exp\left[-i(2pk+k^2)\,|\,\xi_1-\xi_2\,|\right]. \tag{42}$$

Отсюда видно, что функциональный аргумент в $\Delta(\xi_1, \xi_2\,|\,\omega)$ приводит после интегрирования к появлению квадратичной зависимости от виртуальных импульсов k. Поэтому, если нас интересует низко энергетическая область, где k эффективно малы, можно пренебречь в Δ зависимостью от ω. Результаты, относящиеся к инфракрасной области в таком приближении, но другим методом, были получены Фрадкиным[16] и Милехиным[27]. Однако такое приближение существенно меняет поведение $\overline{\Delta}(\xi_1, \xi_2)$ при больших импульсах k и, в частности, приводит к более сильным расходимостям неперенормированных величин, поэтому мы не будем пренебрегать этой зависимостью, а прибегнем к другой процедуре — аппроксимации интегралов по ω.

Для выяснения смысла этой аппроксимации рассмотрим разложение в ряд по g_1^2 величины

$$A = C \int \delta^4\omega \exp\left[-i \int_0^\tau \omega_\mu^2(\xi)\, d\xi\right] \exp\left[-\frac{ig_1^2}{2} \int\int_0^\tau d\xi_1\, d\xi_2\, \Delta(\xi_1, \xi_2 \mid \omega)\right] =$$
$$= 1 - \frac{ig_1^2}{2} \int\int_0^\tau d\xi_1\, d\xi_2 \overline{\Delta}_1(\xi_1 - \xi_2) +$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{ig_1^2}{2}\right)^2 \int_0^\tau \ldots \int_0^\tau d\xi_1 \ldots d\xi_4 \overline{\Delta}_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) + \ldots; \quad (43)$$

$\overline{\Delta}_1(\xi_1, \xi_2)$ определено в (42), а

$$\overline{\Delta}_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = C \int \delta^4\omega \exp\left[-i \int_0^\tau \omega^2(\eta)\, d\eta\right] \times$$
$$\times \Delta_1(\xi_1, \xi_2 \mid \omega)\, \Delta_1(\xi_3, \xi_4 \mid \omega) = \int d^4k_1 \int d^4k_2 D(k_1) D(k_2) \exp\{i(k_1^2 + 2pk_1) \mid \xi_1 -$$
$$- \xi_2 \mid + i(k_2^2 + 2pk_2) \mid \xi_3 - \xi_4 \mid + 2ik_1k_2\theta(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)\}, \quad (44)$$

где

$$\theta(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = \xi_1 [\theta(\xi_3 - \xi_1) - \theta(\xi_4 - \xi_1)] + \xi_2 [\theta(\xi_4 - \xi_2) - \theta(\xi_3 - \xi_2)] +$$
$$+ \xi_3 [\theta(\xi_1 - \xi_3) - \theta(\xi_2 - \xi_3)] + \xi_4 [\theta(\xi_2 - \xi_4) - \theta(\xi_3 - \xi_4)],$$
$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Возьмем в качестве аппроксимации функционала $\Delta(\xi_1, \xi_2 \mid \omega)$ в инфракрасной области его среднее значение $\overline{\Delta}(\xi_1 - \xi_2)$, определенное в (42). Перепишем (43) теперь в виде

$$A = \exp\left[-\frac{ig_1^2}{2} \int\int_0^\tau \overline{\Delta}(\xi_1 - \xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2\right] \times$$
$$\times C \int \delta^4\omega \exp\left\{-i \int_0^\tau \omega^2(\eta)\, d\eta - \frac{ig_1^2}{2} \int\int_0^\tau [\Delta - \overline{\Delta}]\, d\xi_1\, d\xi_2\right\},$$

и разложим экспоненту под интегралом в ряд по разности $\Delta - \overline{\Delta}$. Тогда получим для A вместо разложения (43) новый ряд с выделенным экспоненциальным фактором:

$$A = \exp\left[-\frac{ig_1^2}{2} \int\int_0^\tau \overline{\Delta}(\xi_1\, \xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2\right] \times$$
$$\times C \int \delta^4\omega \exp\left[-i \int_0^\tau \omega^2(\eta)\, d\eta\right] \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{ig_1^2}{2}\right)^2 (n!)^{-1} \left[\int\int_0^\tau (\Delta - \overline{\Delta})\, d\xi_1\, d\xi_2\right]^n. \quad (45)$$

Преимущество такого разложения по сравнению с теорией возмущений состоит в том, что после выделения множителя

$$\exp\left[-i \frac{g_1^2}{2} \int\int_0^\tau \overline{\Delta}(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2\right]$$

перед всем рядом и выполнения интегрирования по ω каждый член ряда в (45) уже не содержит инфракрасных особенностей, а они содержатся только в экспоненциальном множителе.

Отметим, что можно дальше частично суммировать ряд (43). Для этого надо выбрать в качестве аппроксимации

$$\int_0^\tau\int \Delta(\xi_1, \xi_2 \mid \omega)\, d\xi_1\, d\xi_2$$

величину

$$-\frac{ig_1^2}{2}\int_0^\tau\int \overline{\Delta}(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2+\frac{1}{2}\left(\frac{-ig_1^2}{2}\right)^2\int_0^\tau \ldots \int_0^\tau d\xi_{1,2,3,4}(\overline{\Delta}_2-\overline{\Delta}_1^2). \quad (46)$$

Тогда вместо (45) будем иметь общим множителем экспоненту с показателем (46) и ряд, начинающийся после 1 с g_1^6. Однако в инфракрасной области это не изменяет результата, поскольку второй член в (46) не имеет инфракрасных особенностей, а первый является определяющим.

Если (45) подставить в выражении для функции Грина (41), то получим разложение по степеням g_1^2 с общим множителем

$$\exp\left[-\frac{ig_1^2}{2}\int_0^\tau\int \overline{\Delta}(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2\right],$$

который, как это показано в работе [18], включает все инфракрасные особенности функции Грина.

Каждый член ряда (45) представляет собой разность между выражением $\overline{\Delta}(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, получаемым в теории возмущений, и таким же выражением, но в котором отброшены члены k_ik_j для $i \neq j$. Это легко видеть в g_1^4-порядке:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{ig_1^2}{2}\right)^2\int \ldots \int d\xi_1 \ldots d\xi_4\,[\overline{\Delta}_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)-\overline{\Delta}_1(\xi_1, \xi_2)\,\overline{\Delta}_1(\xi_3, \xi_4)],$$

сравнивая (42) и (44). Таким образом, предлагаемая аппроксимация функционального интеграла на языке теории возмущений означает отбрасывание в пропагаторах частиц членов вида k_ik_j,

$$1/[(p+\sum_i k_i)^2-m^2] \to 1/(2p\sum_i k_i+\sum_i k_i^2). \quad (47)$$

б) Асимптотическое поведение амплитуд рассеяния при больших энергиях и малых углах рассеяния частиц. В последнее время рядом авторов [28, 29] было высказано утверждение, что аппроксимация пропагаторов (47) справедлива также при больших энергиях сталкивающихся частиц, когда импульс $|\mathbf{p}| \gg m$. В этом случае предполагается, что член $2p\sum_i k_i$ в пропагаторе (47) является доминирующим по сравнению с $\sum_{i,j} k_ik_j$. Анализ этого приближения в рамках теории возмущений показал [30, 31], что оно правильно передает асимптотическое поведение амплитуд при больших энергиях $s \to \infty$ и малых передачах импульса t, $t/s \ll 1$.

Как следует из предыдущего раздела, метод функционального интегрирования позволяет получать в замкнутом виде выражения для функций Грина в приближении (47). В данном разделе будет продемонстрирована эффективность этого метода при изучении высокоэнергетической асимптотики амплитуд рассеяния. Исходя из предыдущих соображений, здесь удается получить глауберовское [32] представление, которое еще называют эйкональным или приближением геометрической оптики для амплитуды рассеяния в теории поля. Метод геометрической оптики применительно к рассеянию элементарных частиц был развит авторами этой статьи в ранних работах [33,34].

Начнем рассмотрение с рассеяния высокоэнергетической скалярной частицы на внешнем потенциале [35] $\varphi(x)$. Амплитуду процесса $f(p, q \mid \varphi)$ (p и q — импульсы частицы до и после рассеяния) мы можем найти, зная функцию Грина $G(p, q \mid \varphi)$ этой частицы [формула (40)]. Для этого нужно перейти по внешним импульсам на массовую поверхность согласно соотношению

$$f(p, q \mid \varphi) = \lim_{p^2,\, q^2 \to m^2} [(p^2 - m^2)(q^2 - m^2)\, G(p, q \mid \varphi)]. \tag{48}$$

Процедура предельного перехода (48) заключается в том, что из функции $G(p, q \mid \varphi)$, заданной интегралом (40), необходимо выделить два полюсных выражения $(p^2 - m^2)^{-1}$ и $(q^2 - m^2)^{-1}$ — две свободные функции Грина. Подробно эта процедура изложена в работах [29, 35, 36]. Здесь мы приведем окончательный результат для $f(p, q \mid \varphi)$:

$$f(p, q \mid \varphi) = \int d^4x e^{i(p-q)x} g\varphi(x)\, C \underbrace{\int \delta^4\omega \exp\left[-i \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2(\eta)\, d\eta\right]}_{[\delta^4\omega]} \times$$

$$\times \int_0^1 d\lambda \exp\left\{i\lambda g \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(x + 2\xi[p\theta(\xi) + q\theta(-\xi)] + 2\int_0^{\xi} \omega(\eta)\, d\eta\right) d\xi\right\}. \tag{49}$$

Переходя к новой функциональной переменной $z(\xi) = \int_0^{\xi} \omega(\eta)\, d\eta$, выражению (49) придадим вид фейнмановского интеграла по траекториям $z(\xi)$:

$$f(p, q \mid \varphi) = g \int d^4x e^{i(p-q)x} \varphi(x) \int_1^1 d\lambda \int \delta z e^{iW[z]},$$

где

$$W[Z] = \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \{-\dot{z}^2(\xi)^2 + \lambda g\varphi\, [x + 2(p\theta(\xi) + q\theta(-\xi))\xi + 2z(\xi)]\},$$

— функция действия релятивистской частицы, движущейся в потенциале φ; ξ играет роль собственного времени частицы, при $\xi = 0$ частица находится в точке x, а $z(\xi)$ — переменная, описывающая отклонение этой частицы от прямолинейных траекторий вдоль 4-импульса p ($\xi > 0$) до рассеяния и вдоль q ($\xi < 0$) после рассеяния.

Рассматривая асимптотическое поведение амплитуды (49) при больших импульсах $p_0, q_0 \gg m$, естественно поставить вопрос: можем ли мы пренебречь функциональной переменной $z(\xi)$ в аргументе φ по сравнению с большой величиной $p\theta(\xi) + q\,\theta(-\xi)$ и будет ли это хорошей аппроксимацией интеграла при больших p_0 и q_0?

Ответ на этот вопрос связан с характером функции φ, если потенциал φ — гладкая, неосциллирующая, ограниченная функция, удовлетворяющая условиям

$$p_0^2 \gg g \max|\varphi(x)|, \quad |\mathbf{p}| \gg \left|\frac{\partial\varphi}{\partial \mathbf{x}}\right| \Big/ |\varphi(x)|, \quad p_0 \gg \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}\right| \Big/ |\varphi(x)|, \tag{50}$$

то тогда можно доказать [35], что разложение φ в ряд Тейлора по функциональному аргументу в (49) и последующее интегрирование по ω приводит в показателе экспоненты (49) к выражению

$$\varphi(x + 2\xi[p\theta(\xi) + q\theta(-\xi)]) + O(1/|p|) \tag{51}$$

Этот результат можно понять, исходя из следующих рассуждений. Два последних условия (50) — суть условия справедливости квазиклассического приближения. Поэтому для приближенного вычисления функционального интеграла можно применить рассмотренный выше метод стационарной фазы, когда основной вклад в интеграл дает классическая траектория. Из-за первого условия (50) оказываются хорошим приближением для классической траектории и два прямолинейных пути вдоль p, когда $\xi > 0$, и вдоль q, когда $\xi < 0$. В этом случае справедливо также (и дает более точный результат, чем (51)) аппроксимация потенциала φ его средним значением согласно (42):

$$\bar{\varphi}(x + 2\xi[p\theta(\xi) + q\theta(-\xi)]) =$$

$$= C \int \delta^4\omega \exp\left[-i \int \omega^2(\eta)\, d\eta\right] \varphi\left(x + 2\xi[p\theta(\xi) + q\theta(-\xi)] + 2\int_0^\xi \omega(\eta)\, d\eta\right).$$

Условия (50) являются условиями справедливости глауберовского [32], или эйконального, представления для амплитуды рассеяния, которое сразу следует из (49) при малых передачах импульса $|p - q|$ [угол рассеяния $\alpha \ll (pR)^{-1/2}$, R — радиус действия потенциала]. В случае потенциала $\varphi(r)$, не зависящего от времени, имеем

$$f(p, q \mid \varphi) = 4\pi\delta(p_0 - q_0)\,|p|\, i \int d^2x_\perp e^{i(p-q)_\perp x_\perp}\,[1 - e^{i\chi(x_\perp)}],$$

где

$$x_\perp = (x_1, x_2); \quad \chi(x_1) = \frac{g}{2|p|} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, \varphi\left(x_1 + \frac{p\xi}{|p|}\right).$$

Полученное таким образом эйкональное представление справедливо, как было выяснено [35], в более широкой области углов; при этом удалось уточнить результаты Шиффа [37], найденные в рамках теории возмущений. На основе изложенного здесь подхода в работе [38] получено эйкональное представление для амплитуды рассеяния дираковской частицы на произвольном потенциале.

Рассмотрим еще возможность применения аппроксимации (45) и, следовательно, (47) при вычислении асимптотического поведения амплитуды рассеяния двух частиц в высокоэнергетической области и при фиксированных передачах импульса. В работах [29, 39] было исследовано этим методом асимптотическое поведение амплитуды упругого рассеяния, в последующих работах [40] было изучено влияние радиационных поправок к диаграммам рассеяния.

Схема построения упругой амплитуды в рамках обсуждаемого приближения состоит в следующем. Зная $G(p, q \mid \varphi)$, можно, пренебрегая вкладами от поляризации нуклонного вакуума, $S_0(\varphi) = 1$, найти квантовую двухчастичную функцию Грина:

$$G(p_1, p_2 \mid q_1, q_2) = C\varphi \int \delta\varphi \exp\left[-\frac{i}{2}\int D^{-1}(q)\,\varphi(q)\,\varphi(-q)\,d^4q\right] \times$$
$$\times [G(p_1, q_1 \mid \varphi)\,G(p_2, q_2 \mid \varphi) + G(p_1, q_2 \mid \varphi)\,G(p_2, q_1 \mid \varphi)],$$

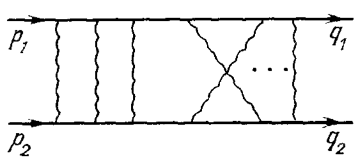
выполнив интегрирование по φ.

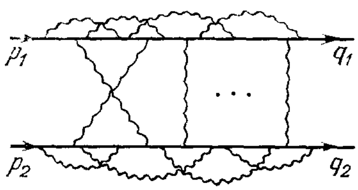
С помощью перехода на массовую поверхность по внешним импульсам можно построить двухчастичную амплитуду

$$(2\pi)^4\delta^4(p_1 + p_2 - q_1 - q_2)\, f(p_1, p_2; q_1, q_2) =$$
$$= \lim_{p_i^2, q_i^2 \to m^2} [(p_1^2 - m^2)(q_1^2 - m^2)(p_2^2 - m^2)(q_2^2 - m^2) \times$$
$$\times G(q_1, q_2 \mid p_1, p_2)],$$

которая, в отличие от одночастичной амплитуды (49), выражается двойным функциональным интегралом по ω_1 и ω_2 (интегралы по траекториям двух рассеивающихся частиц).

Выражение для f, имеющее довольно громоздкий вид (см. [29, 39]), включает в себя вклады сумм графов Фейнмана типа, указанных слева и графов второго типа с радиационными поправками (справа):





В работе [31] показано, что аппроксимация (47) верна в высокоэнергетической области $s \to \infty$ и при малых передачах импульса t для выражений, связанных с графами первого типа и не верна для каждого графа второго типа. Однако в работах [41] доказывается до шестого порядка включительно, что в каждом порядке теории возмущений сумма графов второго типа, а не отдельный граф, имеет ту же асимптотику при $s \to \infty$ и фиксированном t, что и получаемая при аппроксимации (45).

Таким образом, изучение асимптотического поведения отдельного фейнмановского графа может и не передавать асимптотического поведения суммы графов данного порядка, поэтому рассмотренные здесь приемы суммирования и аппроксимации ряда теории возмущений с помощью техники функциональных интегралов могут оказаться более адекватными приемами для исследования асимптотик в КТП, чем изучение асимптотики каждого графа в отдельности с их последующим суммированием. При этом мы еще раз хотим подчеркнуть, что в математическом отношении трудно привести доказательства области применимости делаемых приближений при вычислении функциональных интегралов [42].

Из описанных в обзоре примеров применения метода функционального интегрирования в КМ и КТП видно, что этот метод делает лишь только первые шаги как в математическом аспекте, так и в физических приложениях. Однако физическая наглядность и изящество формулировки основных задач КТП в рамках этого метода позволяет надеяться, что он будет развиваться и в будущем.

Объединенный институт ядерных исследований,
Дубна

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Гельфанд, А. М. Яглом, УМН 11 (1), 77 (1956).
2. И. М. Ковальчик, ibid. 18 (1), 109 (1963).
3. М. Кац, Вероятность и смежные вопросы в физике, М., «Мир», 1965, гл. IV.
4. R. Feynman, Rev. Mod. Phys. **20**, 367 (1948); Р. Фейнман, А. Хибс, Квантовая механика и интегралы по траекториям, М., «Мир», 1968.
5. H. Davies, Proc. Cambr. Phil. Soc. **59**, 147 (1963); D. Babbitt, J. Math. Phys. **4**, 36 (1963).
6. R. Feynman, Phys. Rev. **24**, 108 (1951): C. Garrod, Rev. Mod. Phys. **38**, 483 (1966).
7. Б. М. Барбашов, ЖЭТФ **54**, 1096 (1968).
8. Л. Д. Фаддеев, ТМФ **1**, 3 (1969).
9. Ф. А. Березин, ibid. **6**, 194 (1971).
10. D. Peak, A. Inomata, J. Math. Phys. **10**, 1422 (1969).
11. S. Edwards, Yu. Gulyaev, Proc. Roy. Soc. **A249**, 229 (1964).
12. Б. М. Барбашов, В. Н. Первушин, ТМФ **3**, 320 (1970).
13. P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. **A246**, 326, 333 (1968); Phys. Rev. **114**, 924 (1959).
14. И. М. Гельфанд, Н. Н. Ченцов, ЖЭТФ **31**, 1106 (1956).
15. А. В. Евсеев, ДАН СССР **189**, 1197 (1969).
16. И. М. Гельфанд, Д. А. Минлос, ibid. **97**. 209 (1954). Е. С. Фрадкин, Тр. ФИАН **29**, 3 (1965); ДАН СССР **98**, 47 (1954).
17. Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, Введение в теорию квантованных полей, М., Гостехиздат, 1957, гл. VII; Н. Н. Боголюбов, ДАН СССР **99**, 225 (1954); S. F. Edwards, R. E. Peierls, Proc. Roy. Soc. **A224**, 1154 (1954).
18. Б. М. Барбашов, ЖЭТФ **48**, 607 (1965).
19. И. А. Баталин, Е. С. Фрадкин, Приближение стационарной фазы в функциональном методе. I. Препринт ФИАН № 137, 1968.
20. В. А. Фок, Изв. АН СССР, ОМЕН, № 4/5, 551 (1937).
21. R. Feynman, Phys. Rev. **84**, 108 (1951).
22. E. S. Fradkin, Nucl. Phys. **76**, 588 (1966).
23. C. Lam, Nuovo Cimento **A42**, 451 (1966).
24. В. П. Маслов, ТМФ **2**, 30 (1970); C. Morette, Phys. Rev. **71**, 848 (1951).
25. Д. И. Блохинцев, ТМФ **4**, 145 (1970).
26. D. Yennie et al., Ann. Phys. **13**, 379 (1961).
27. Г. А. Милехин, ЖЭТФ **43**, 1012 (1962).
28. E. S. Fradkin, Acta Hung. **19**, 175 (1965); M. Levy, I. Sucher, Phys. Rev. **186**, 1656 (1969); **D2**, 1716 (1970).
29. Б. М. Барбашов и др., ТМФ **3**, 342 (1970).
30. G. Tiktopoulos, S. Treiman, Phys. Rev. **D2**, 805 (1970).
31. Б. М. Барбашов, В. В. Нестеренко, ТМФ **4**, 283 (1970).
32. R. Glauber,— Lectures in Theoretical Physcis, v. 1 (W. E. Brittin, L. G. Dunham, Eds.), Interscience Publ., N.Y.— L., 1959, p. 315.
33. Д. И. Блохинцев и др., УФН **68**, 417 (1959); D. I. Blokhintsev, Nucl. Phys. **31**, 628 (1963).
34. D. I. Blokhintsev, Nuovo Cimento **30**, 1094 (1963).
35. В. Н. Первушин, ТМФ **4**, 22 (1970); V. N. Pervushin, Path Integration Method and Semiclassical Approximation for the Potential Scattering Amplitude. JINR Preprint E2-5938, Dubna, 1971.
36. Г. А. Милехин, Е. С. Фрадкин, ЖЭТФ **45**, 1926 (1963); Б. М. Барбашов, М. К. Волков, ibid. **50**, 13 (1966).
37. L. I. Schiff, Phys. Rev. **176**, 1390 (1968).
38. В. Н. Первушин, ТМФ **9**, 264 (1971).
39. H. D. Abarbanel, C. Itzykson, Phys. Rev. Lett. **23**, 53 (1969); И. В. Андреев, ЖЭТФ **58**, 257 (1970); ЯФ **14**, 837 (1971); Б. М. Барбашов и др., ТМФ **5**, 330 (1970).
40. B. M. Barbashov et al., Phys. Lett. **A33**, 419 (1970); Nuovo Cimento **A4**, 731 (1971).
41. S.-J. Chang, Phys. Rev. **D1**, 2977 (1970); Y. P. Yao, ibid. **D4**, 1364 (1971).
42. Б. М. Барбашов, В. В. Нестеренко, ТМФ **9**, 343 (1971); **10**, 196 (1972); B. M. Barbashov, V. V. Nesterenko, Eikonal Representation of the Scattering Amplitude Containing the Veneziano Virtual Blocks. JINR Preprint E2-6069, Dubna, 1971; Investigation of the High Energy Behaviour of the «Meson-Nucleon» Scattering Amplitude in Scalar Model by Functional Method. JINR Preprint E2-6161, Dubna. 1971.