

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

535.1+535.225

ЭФФЕКТ ВАВИЛОВА — ЧЕРЕНКОВА И ЭФФЕКТ ДОПЛЕРА ПРИ ДВИЖЕНИИ ИСТОЧНИКОВ СО СКОРОСТЬЮ БОЛЬШЕ СКОРОСТИ СВЕТА В ВАКУУМЕ *)

Б. М. Болотовский, В. Л. Гинзбург

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	577
2. Об источниках, движущихся со скоростью больше скорости света в вакууме	580
3. Излучение сверхсветовых источников	584
4. Заключение	590
Цитированная литература	591

1. ВВЕДЕНИЕ

При равномерном и прямолинейном движении некоторого «источника» в однородной среде излучение возникает только при условии, что скорость источника v больше фазовой скорости c_Φ рассматриваемых волн в данной среде. При этом волновой вектор в излучаемых волнах $\mathbf{k}$ составляет со скоростью источника $\mathbf{v}$ угол θ_0 , где

$$\cos \theta_0 = c_\Phi / v. \quad (1)$$

В акустике подобное излучение источника, движущегося со скоростью больше скорости звука, давно известно (волны Маха); то же можно сказать о различных волнах на поверхности жидкости. В электродинамике же излучение равномерно движущегося источника (например, заряда) известно как эффект Вавилова — Черенкова и было открыто только в 1934 г. Теория этого эффекта, построенная в 1937 г. Таммом и Франком¹, приводит, естественно, к условию излучения (1), а для энергии, испускаемой зарядом q в единицу времени, дает выражение

$$dW/dt = (q^2 v / c^2) \int_{\frac{c}{n(\omega)v} \leq 1} \{1 - [c^2 / n^2(\omega) v^2]\} \omega d\omega, \quad (2)$$

где $n(\omega)$ — показатель преломления на частоте ω для рассматриваемой прозрачной изотропной среды (как известно, фазовая скорость волн $c_\Phi = c / n(\omega)$).

*) В основу статьи положен доклад, сделанный на научной сессии Отделения общей физики и астрономии и Отделения ядерной физики АН СССР 25 ноября 1971 г.

Поскольку условие излучения (1) справедливо для волн любой природы, ясно, что оно носит кинематический (интерференционный) характер. Действительно, согласно принципу Гюйгенса каждая точка среды на пути излучателя служит источником вторичных волн. Огибающая этих волн является конусом, раствор которого определяется углом $\theta_0 = \arccos(c_\phi/v)$ (см. рис. 1, на котором расстояние $O'O$ равно v — пути, пройденному источником за единицу времени; за это же время волновой фронт проходит путь $c_\phi = c/n$). Известно, что именно использование принципа Гюйгенса и привело к получению условия (1) для черенковского излучения². Разумеется, соответствующее условие интерференции автоматически учитывается при электродинамическом расчете, в котором используются

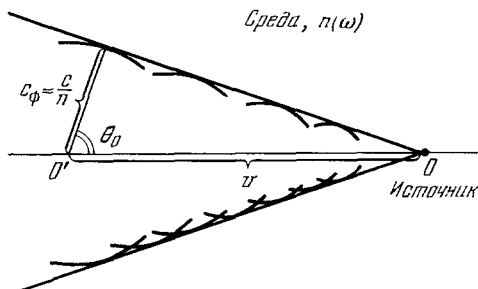


Рис. 1.

выражения для поля излучения¹. Условие излучения (1) или, конкретно, условие черенковского излучения

$$\cos \theta_0 = c/n(\omega) v \quad (3)$$

можно получить и другими способами: как условие резонанса $k v = (\omega/c) n(\omega) v \cos \theta = \omega$ между действующей «силой», связанной с наличием источника, и осцилляторами поля³, а также из законов сохранения энергии и

импульса (в последнем случае удобна квантовая формулировка)^{4, 5}. Условие (1) или (3) сохраняется не только в случае безграничной среды, но и при движении источника в каналах и щелях, а также параллельно границе раздела двух сред. В анизотропной среде это условие относится к каждой из нормальных волн в отдельности, причем показатель преломления для нормальной волны $n_e(\omega)$ зависит также от углов между волновым вектором $\mathbf{k}$ и, например, осями кристалла. Что касается интенсивности излучения, то она может вычисляться разными методами¹⁻⁵ и, главное, зависит от характера источника, причем формула (2) относится только к случаю заряда, движущегося в безграничной изотропной среде. Ряд выражений для интенсивности излучения для диполей и других мультиполей, а также при наличии границ, можно найти в обзорах⁵⁻⁷. Из условия излучения (3) ясно, что эффект Вавилова — Черенкова возможен лишь, если

$$v \geq c/n(\omega) = c_\phi, \quad (4)$$

т. е., как это уже подчеркивалось, для появления излучения необходимо, чтобы скорость источника превосходила фазовую скорость света. То же условие необходимо для появления аномального эффекта Доплера, для которого

$$[v n(\omega)/c] \cos \theta > 1. \quad (5)$$

Собственно, неравенство (5) является определением аномального эффекта Доплера, при котором волны излучаются внутри черенковского конуса, т. е. с волновым вектором $\mathbf{k}$, составляющим со скоростью источника v угол $\theta < \theta_0 = \arccos[c/n(\omega)v]$. Сказанное очевидно из формулы для эффекта Доплера в среде^{5, 8}

$$\omega = \omega_{00} [1 - (v^2/c^2)]^{1/2} / [1 - (v/c) n(\omega) \cos \theta], \quad (6)$$

где ω_{00} — частота в системе отсчета, связанной с источником, а частота ω и угол θ относятся к «лабораторной» системе отсчета (в этой системе

источник имеет скорость v). Из условия (4) обычно делают вывод, что излучение Вавилова — Черенкова и аномальный эффект Доплера возможны лишь в средах с положительным показателем преломления.

$$n(\omega) > 1. \quad (7)$$

Подобное ограничение весьма существенно. Достаточно сказать, что в изотропной плазме в широко используемом приближении имеет место условие

$$n(\omega) = [1 - (\omega_e^2/\omega^2)]^{1/2} < 1, \quad \omega_e^2 = 4\pi e^2 N/m.$$

Поэтому считается, что в такой плазме черенковское излучение поперечных волн [именно для этих волн $c_\Phi = c/n(\omega) > c$] невозможно.

Требование (7) в качестве условия, допускающего появление излучения Вавилова — Черенкова и аномального эффекта Доплера, связано с предположением, что скорость источника меньше скорости света в вакууме, т. е. что

$$v < c = 3 \cdot 10^{10} \text{ см/сек.} \quad (8)$$

Именно в силу такого требования была в свое время признана не относящейся к реальности, а затем на долгие годы забыта работа Зоммерфельда, еще в 1904 г. пришедшего к выводу о наличии излучения у электрона, движущегося в вакууме равномерно, но со скоростью $v > c$ (см. ^{9, 10}). Фактически Зоммерфельд рассмотрел эффект Вавилова — Черенкова в недиспергирующей среде — вакууме. Соответствующий расчет формально корректен, поскольку уравнение электромагнитного поля и, в частности, уравнение

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \rho \mathbf{v} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (9)$$

справедливы и при $v > c$. Не нарушается при этом и релятивистская инвариантность теории — в противоположность довольно распространенному ошибочному мнению. Действительно, как подчеркивалось Эйнштейном еще в 1907 г. (см. ¹¹, а также ¹²), условие $v < c$ для скорости материального «тела» или какого-то «действия» связано не с вопросом о релятивистской инвариантности, а с требованием причинности: ни в одной системе отсчета следствие не должно опережать причину.

Из релятивистского выражения для массы $m = m_0/[1 - (v^2/c^2)]^{1/2}$ и уравнения движения $dm\mathbf{v}/dt = \mathbf{F}$ ясно, правда, что никакое тело (частица) не может быть ускорено до скорости $v \geq c$. Но и это само по себе еще не закрывает возможности существования гипотетических частиц, получивших название тахионов и всегда движущихся со скоростью $v > c$. Тахионы можно было бы считать частицами с мнимой массой $m^* = im$, энергией $E = (m^{*2}c^4 + c^2p^2)^{1/2} = (-m^2c^4 + c^2p^2)^{1/2}$, импульсом $p = m^*v/[1 - (v^2/c^2)]$ и скоростью $v = dE/dp = c^2p/E = c^2p/(-m^2c^4 + c^2p^2)^{1/2}$. Очевидно, для тахионов импульс p является вещественным, если $v > c$ и, следовательно, $p > mc$; скорость тахионов $v \rightarrow c$ при $p \rightarrow \infty$, и наоборот, $v \rightarrow \infty$ при $p \rightarrow mc$. Величина $E^2 - c^2p^2 = m^{*2}c^4 \equiv -m^2c^4$ остается инвариантной при преобразованиях Лоренца и «закрывает» возможность существования тахионов удастся ¹³, в частности, из условия причинности. Впрочем, быть может, не все еще согласится с тем, что существование тахионов невозможно, хотя нам такой вывод и представляется достаточно надежным. Подчеркнем поэтому, что тахионы, во всяком случае, не обнаружены и, таким образом, условие $v \leq c$ для всех известных частиц заведомо отвечает действительности.

Тем не менее столь же несомненно, что источники электромагнитных (да и всяких других) волн могут двигаться со скоростями $v > c$! Речь при этом идет, однако, не об отдельных частицах (фотонах, электронах, протонах и т. д.), а об их совокупностях или сгустках (точнее см. ниже). Поэтому требование $v < c$ [см. (8)], как условие на скорость источника волн, является неправильным или, иными словами, такого требования выдвигать нельзя. Тем самым эффект Вавилова — Черенкова и аномальный эффект Доплера могут существовать и в средах с показателем преломления $n(\omega) < 1$, когда $c_\phi = c/n > c$. В известном смысле то же можно сказать и о вакууме, где $c_\phi = c$.

Насколько нам известно, излучение источников, движущихся со скоростью $v > c$ (если не говорить о работах Зоммерфельда^{9,10} и о статье Франка⁸) до последнего времени не рассматривалось. Между тем соответствующие возможности¹⁴⁻¹⁶ довольно любопытны, их освещение и составляет тему настоящей статьи.

2. ОБ ИСТОЧНИКАХ, ДВИЖУЩИХСЯ СО СКОРОСТЬЮ БОЛЬШЕ СКОРОСТИ СВЕТА В ВАКУУМЕ

Тот факт, что в физике и астрономии возможны и фактически встречаются скорости, превосходящие скорость света в вакууме, конечно, давно и хорошо известен. Не говоря уже о фазовой скорости волн при $n(\omega) < 1$ или относительной скорости двух разлетающихся в данной системе отсчета частиц (эта скорость может достигать значения $2c$), скоростью больше c могут обладать сечения волновых фронтов и, вообще, различные «зайчики». Конкретно, представим себе вращающийся прожектор, или «маяк». Если угловая скорость «маяка» равна Ω , то по экрану, удаленному от источника на расстояние R , световое пятно («зайчик») будет бежать со скоростью (см. также ниже)

$$v = \Omega R. \quad (10)$$

Модель «маяка» является сейчас общепринятой для пульсаров (см., например,¹⁷), причем в этом случае скорость «зайчика» на Земле для всех

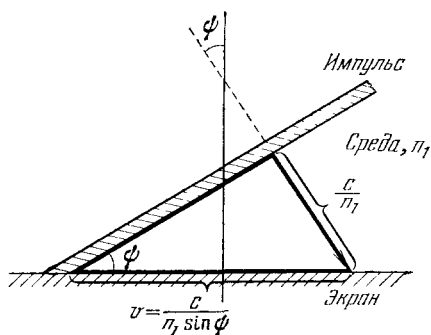


Рис. 2.

известных пульсаров превосходит скорость света c . Конкретно, для пульсара NP 0532 в Крабовидной туманности $\Omega \approx 200$ и $R \approx 2000$ пс $\approx 6 \cdot 10^{21}$ см, откуда $v = \Omega R \approx 1,2 \cdot 10^{24}$ см/сек. Если обеспечить вращение луча от лазера или вращение электронного пучка, например, со скоростью $\Omega = 10^5$, то $v > c$ уже для расстояний $R > 3 \cdot 10^5$ см.

Самой простой в известном отношении моделью или примером движения со сверхсветовой скоростью может служить световой импульс из

плоских волн, наклонно падающий на некоторую плоскую границу раздела (экран)⁸. Если угол падения волны на экран обозначить через ψ (очевидно, ψ есть угол между волновым вектором в импульсе $\mathbf{k}$ и нормалью к экрану; рис. 2), то сечение импульса экраном (т. е. световое пятно на экране — «зайчик») перемещается по этому экрану со скоростью

$$v = c/n_1 \sin \psi, \quad (11)$$

где $n_1 > 1$ — показатель преломления в среде над экраном, которая для простоты считается недиспергирующей (по сути дела, для нас существенно лишь то, что скорость светового импульса считается равной c/n_1). Очевидно, что скорость светового пятна (или, точнее, полоски) при уменьшении угла падения ψ всегда может быть сделана больше c , а в вакууме последнее вообще имеет место при всех углах ψ , так как в этом случае

$$v = c/\sin \psi. \quad (12)$$

Роль светового импульса может, конечно, играть поток электронов, движущихся нормально к фронту потока со скоростью $u < c$; при этом

$$v = u/\sin \psi \quad (13)$$

и сверхсветовая скорость пятна также всегда, в принципе, достижима. Более того, скорость v во всех случаях (11) — (13) может быть сделана сколь угодно большой — при приближении к нормальному падению (при $\psi \rightarrow 0$) скорость $v \rightarrow \infty$. Последнее вполне понятно, так как при нормальном падении импульс пересекает экран одновременно по всей его поверхности. Механическим аналогом импульса, падающего на экран, служат ножницы (роль «зайчика» в этом случае играет точка пересечения образующих ножницы двух лезвий).

Для вращающегося источника, упомянутого выше, большая скорость «зайчика», как и для пересекающего экран импульса, достигается за счет уменьшения угла между поверхностью постоянной фазы (волновым фронтом) и экраном. В самом деле, рассматривая для простоты цилиндрический источник в вакууме, вращающийся с угловой скоростью Ω , запишем поле в волновой зоне в виде *)

$$E = \sum_{s=1}^{\infty} E_s r^{s-1/2} \exp \{ i s [(\Omega/c) r + \varphi - \Omega t] \}.$$

Поверхность постоянной фазы определяется уравнением

$$(\Omega/c) r + \varphi - \Omega t = \text{const},$$

или

$$r(\varphi) = \text{const} + c [t - (\varphi/\Omega)]. \quad (14)$$

Уравнение (14) есть уравнение спирали. На удаленном цилиндрическом экране радиуса R поверхность равной фазы пересекается с экраном по образующей цилиндра, для которой

$$R = \text{const} + c [t - (\varphi_0/\Omega)],$$

причем угол φ_0 , определяющий рассматриваемую образующую, меняется со временем по закону $d\varphi_0/dt = \Omega$. Иными словами, линия пересечения («зайчик») бежит по экрану со скоростью

$$v = R d\varphi_0/dt = \Omega R.$$

Таким образом, более формальным путем мы получили очевидный (или, во всяком случае, хорошо известный) результат (10). Существенно, что

*) Эта формула дает решение скалярной задачи. Функция E удовлетворяет волновому уравнению при $r > r_0$ и граничному условию $E = f(\varphi - \Omega t)$ на поверхности цилиндра $r = r_0$. Таким образом, в системе координат, вращающейся вокруг оси z с угловой скоростью Ω , поле является статическим.

угол ψ между поверхностью равной фазы и экраном равен (рис. 3)

$$\operatorname{tg} \psi = -dr/R d\varphi = c/\Omega R = c/v.$$

Для малых углов ψ , разумеется, $\operatorname{tg} \psi \approx \sin \psi \approx \psi$ и $v = c/\sin \psi$ в согласии с (12). Другими словами, как это и отмечалось выше, большая скорость «зайчика» обусловлена (например, при $v \gg c$) малостью угла ψ между волновым фронтом и экраном.

Выше фактически не делалось предположений о природе рассматриваемого поля и лишь (да и то для простоты) скорость его распространения считалась равной c . Отсюда ясно, что «зайчики» со скоростью $v > c$ можно получить не только в случае электромагнитных волн, но и для гравитационных волн. Пользуясь лучевой трактовкой, приходим к возможности иметь «зайчики» произвольной скорости как для нейтрино (скорость c), так и для любых других частиц (скорость $u < c$) *). То обстоятельство, что появление скоростей $v > c$ для «зайчиков» не противоречит теории относительности, не может вызывать и тени сомнений.

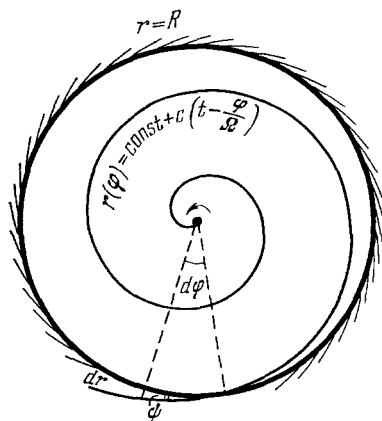


Рис. 3.

Достаточно сказать, что этот результат получается для вполне реальных примеров, например, при падении импульса света или электронов на экран (см. рис. 2). В качестве дополнения все же отметим, что применение скорости света для синхронизации часов, обычно используемое при изложении теории относительности, во-первых, является не единственным, а лишь одним из возможных методов; во-вторых, этот метод действительно в большинстве случаев наиболее удобен и целесообразен не в связи с тем, что скорость света является максимально возможной, а потому, что эта скорость универсальна — одинакова во всех инерциальных системах отсчета (разумеется, при условии выбора в этих системах одинаковых

масштабов и часов). Наконец, когда все же говорят о скорости света в вакууме c как о максимально возможной, то имеют в виду скорость передачи возмущений, взаимодействий, или «сигналов». Подобное утверждение действительно справедливо (по крайней мере, в рамках теории относительности и всей известной нам физики). Световые и иные пятна и «зайчики», о которых мы говорили, хотя и могут двигаться со скоростью $v > c$, но никак не нарушают сделанного утверждения, т. е. они не могут быть использованы для передачи сигнала со скоростью $v > c$. В самом деле, рассмотрим импульс (света, электронов), сечение которого экраном («зайчик») движется по экрану вдоль оси x со скоростью $v > c$ и достигает точек x_1 и x_2 соответственно в моменты времени t_1 и t_2 (рис. 4). Очевидно, что $x_2 = x_1 + v(t_2 - t_1)$ и при $v = u/\sin \psi > c$ события 1 и 2 разделены пространственноподобным интервалом, т. е. $(x_2 - x_1)^2 > c^2(t_2 - t_1)^2$. Возмущение («зарубка»), которое в точке 1 «написится» на движущийся импульс в момент t_1 , окажется в точке 3 с координатами $x_3 = x_1 + u \sin \psi (t_2 - t_1)$, $y_3 = u \cos \psi (t_2 - t_1)$, причем $(x_3 - x_1)^2 + y_3^2 = u^2(t_2 - t_1)^2 \leq c^2(t_2 - t_1)^2$. В точку же 1 это возмущение не попадает.

*) При испускании вращающимся источником частиц со скоростью u траектория частиц такова: $r = r_0 + u(t - t_0)$, $\varphi = \Omega t_0$, откуда $r = r_0 + u[t - (\varphi/\Omega)]$, причем выше t_0 — время испускания.

Лишь сравнительно недавно была со всей определенностью выяснена и подчеркнута необходимость различать форму и скорость движущихся объектов, которые они имеют в данной системе отсчета в данный момент времени, от их формы и скорости, фиксируемых в какой-либо определенной точке в один и тот же момент времени прихода (но не времени излучения) испускаемых объектом световых лучей (см., например, ^{18, 19}). Одним из важных для астрофизики следствий этого обстоятельства является тот факт, что расширяющийся со скоростью u объект (скажем, оболочка взорвавшегося ядра галактики или квазара) при наблюдении из удаленной точки представляется на небе расширяющимся со скоростью (подробнее см. ¹⁹)

$$u' = u/[1 - (u^2/c^2)]^{1/2}. \quad (15)$$

Обсуждаемый эффект, как и эффект Доплера, связан с конечностью скорости распространения света, в силу чего свет от различных частей объекта приходит в точку наблюдения, вообще говоря, в разное время. «Кажущаяся» (наблюдаемая в фиксированной точке) скорость объектов [например, скорость u' в (15)] может превосходить скорость света c . Но мы хотим

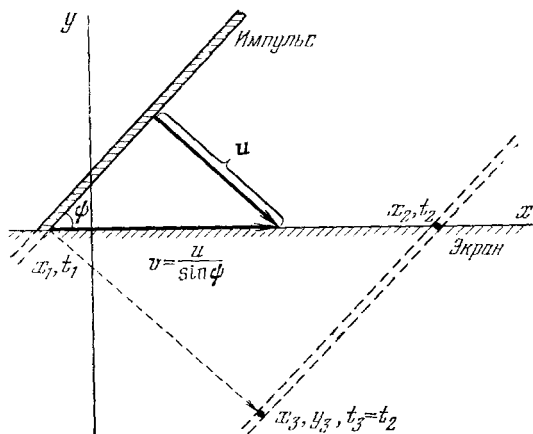


Рис. 4.

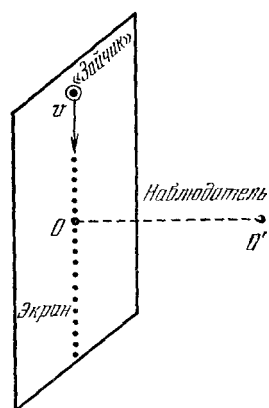


Рис. 5.

подчеркнуть, во-первых, что такая сверхсветовая скорость имеет другую природу, чем рассмотренная выше сверхсветовая скорость «зайчиков». Во-вторых, учет запаздывания, обусловленного конечностью скорости распространения света, существенно сказывается и на «поведении» «зайчиков» при их наблюдении в какой-либо точке (на это обстоятельство обратил наше внимание А. А. Любушин). В качестве простейшего примера ограничимся здесь случаем светового «зайчика», бегущего с постоянной скоростью v по плоскому экрану и наблюдаемому в точке O' (рис. 5). Под наблюдением здесь понимается прием света, испускаемого «зайчиком» в результате шероховатости экрана (т. е. в результате рассеяния) или в силу люминесценции экрана при его освещении. Если $v \leq c$, то «зайчик» будет наблюдаться «обычным» образом, как бегущее по экрану сверху вниз пятно. Допустим теперь, что $v \rightarrow \infty$, т. е. весь след «зайчика» прочерчивается мгновенно. Тогда «зайчик» раньше всего будет замечен в точке O , ближайшей к O' (прямая OO' перпендикулярна экрану). Затем наблюдатель увидит, очевидно, два зайчика, разбегающихся от точки O в противоположных направлениях. При $c < v < \infty$ определенное время также могут наблюдаться два «зайчика».

3. ИЗЛУЧЕНИЕ СВЕРХСВЕТОВЫХ ИСТОЧНИКОВ

Существование сверхсветовых скоростей и сверхсветовых источников (так, для краткости, мы будем в дальнейшем называть источники, движущиеся со скоростью $v > c$ *)), как уже отмечалось, давно и хорошо известно. В тени оставался лишь тот факт, что такие источники в рамках макроскопической теории и всего макроскопического подхода «ничем не хуже» досветовых источников. Макроскопичность здесь понимается в том смысле, что сверхсветовой источник не является одной точечной (сколь угодно малой) частицей, а всегда должен быть связан с совокупностью таких (макроскопических) частиц **). Более того, в скольконибудь реальной постановке задачи число частиц, ответственных за движение сверхсветового источника («зайчика»), оказывается очень большим. Адекватным теоретическим аппаратом для рассмотрения излучения сверхсветовых источников служит обычная теория поля и, в частности, уравнение (9), где плотность тока $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ может, в принципе, изменяться и перемещаться с любыми частотой и скоростью.

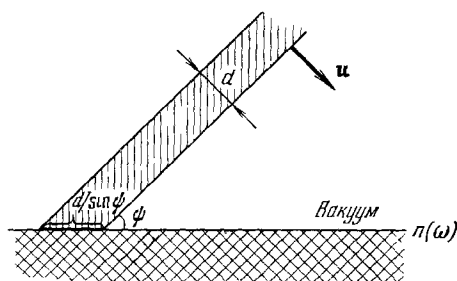


Рис. 6.

Рассмотрим заряженную нить, падающую со скоростью u под углом ψ к границе некоторой прозрачной среды с показателем преломления $n(\omega)$. Другими словами, мы имеем ситуацию, схематически изображенную на рис. 6 и аналогичную представленной на рис. 2. До пересечения границы среды составляющие

нить заряды (скажем, электроны или протоны) движутся равномерно. Но после пересечения границы заряды тормозятся, в силу чего появляется некоторый ток (поляризация), бегущий со скоростью $v = u/\sin \psi$, отвечающей скорости перемещения сечения нити границей среды. Такой ток появляется и без учета торможения зарядов в силу переходного эффекта (изменения параметров среды на пути заряда), приводящего к переходному излучению²⁰. Наглядно можно представлять себе дело так, что, достигая среды, заряды останавливаются, а затем, например, нейтрализуются токами в среде¹⁴. В результате по поверхности среды бежит со скоростью v некоторый заряд q . Будем, для простоты, считать, что нить имеет квадратное сечение (сторона квадрата d) и состоит из зарядов e с концентрацией N . Тогда площадь сечения нити границей среды, т. е. площадь «зайчика», равна $S = d^2/\sin \psi$ и на эту площадь приходится заряд $q = eNd^2 \operatorname{ctg} \psi$ (границу среды за единицу времени пересекает заряд $eNd^2 v \cos \psi$, на единицу длины вдоль скорости прихо-

*) Сверхсветовыми источниками, вообще говоря, называют источники, движущиеся со скоростью $v > c_{\text{ф}} = c/n$. Такая терминология разумна, но, называя в настоящей статье сверхсветовыми лишь источники, скорость которых $v > c$, мы вряд ли внесем путаницу, особенно после того, как это оговорено.

**) Макроскопичность, о которой здесь идет речь, довольно относительна и значительно «слабее» условий, связанных с переходом к макроскопической электродинамике от уравнений микроскопической электродинамики (или, по старой терминологии, от уравнений электронной теории). В самом деле, из уравнений электродинамики следует лишь уравнение непрерывности, а в остальном движение зарядов может быть задано «извне» (совместимо ли такое движение с уравнением движения для частиц, — это другой вопрос). Отсюда ясно, что уже в рамках электронной теории можно непротиворечивым образом считать плотность тока $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ в широких пределах произвольной и, в частности, полагать $v > c$ (в этом смысле расчеты Зоммерфельда⁹ были вполне корректны).

дится заряд $eNd^2 \cos \psi$ и, следовательно, длине «зайчика» $d/\sin \psi$ отвечает как раз заряд q). Решение задачи об излучении заряда, движущегося на границе вакуума и среды, известно ⁶. Результат для излучаемой энергии можно записать в виде

$$dW/dt = (q^2 v/c^2) \int \{1 - [c^2/n^2(\omega) v^2]\} F\omega d\omega. \quad (16)$$

Очевидно, что при $F = 1$ эта формула переходит в выражение (2) для однородной среды. Фактор $F(\omega, \dots)$ учитывает влияние границы, размер источника и т. д. Из общих соображений можно думать, что и для сверхсветового источника с $v > c$ применима та же формула, причем $F = F(\omega, \psi, d, \dots)$, а также зависит от распределения заряда в вакууме *). Конкретизировать вид фактора F можно лишь в результате точного расчета, а также, конечно, использования вполне определенной модели источника. Это будет сделано ниже. Сейчас же заметим, что в любом случае интегрирование в (16)

приводится по области частот, удовлетворяющих условию (3). При этом в вакууме, разумеется, нужно положить $n = 1$ (выше предполагалось, что среда граничит с вакуумом). Поэтому при $v > c$ в вакууме (над средой) излучение происходит всегда, если только $F \neq 0$. Практически же фактор F заведомо должен быть весьма мал для волн с длиной $\lambda = 2\pi c/\omega$, меньшей проекции размеров «зайчика»

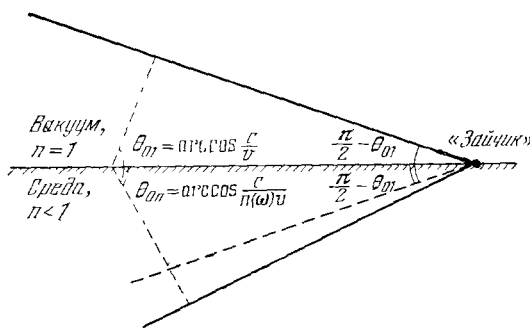


Рис. 7.

на направление волнового вектора k . В среде при $n(\omega) < 1$ ситуация такая же, но при $n(\omega) > 1$ роль обрезającego фактора может играть также условие (4) — излучение в среде возможно только при его соблюдении. В общем случае можно также утверждать, что излучение характеризуется углом $\theta_{01} = \arccos(c/v)$ в вакууме и углом $\theta_{02} = \arccos[c/n(\omega)v]$ в среде (угол θ — это угол между k и v ; рис. 7). Поскольку скорость переднего фронта электромагнитных волн в любой среде при учете дисперсии равна c , излучение сверхсветового источника в среде характеризуется не только углом θ_{02} , но и углом $\theta_{01} = \arccos(c/v)$, который в этом случае определяет разворот конуса, соответствующего переднему фронту волны. Таким образом, при $\theta > \theta_{01}$ поле в среде равно нулю. Если говорить об основной части излучения, а не о переднем фронте, то аналогичная ситуация имеет место и для эффекта Вавилова — Черенкова в диспергирующей среде, где групповая скорость $c_{гр} = d\omega/dk = c[d(\omega n)/d\omega]^{-1}$ меньше фазовой скорости $c_\phi = c/n$. Здесь нет поэтому особой необходимости специально останавливаться на этой стороне проблемы (см. ^{1, 21}).

*) Точнее было бы записать правую часть выражения (16) в виде суммы двух членов

$$\int [1 - (c^2/v^2)] F_1\omega d\omega + \int \{1 - [c^2/n^2(\omega) v^2]\} F_2\omega d\omega,$$

где первый член отвечает мощности излучения в вакууме, а второй — мощности излучения в среде. Однако до тех пор, пока фактор F не конкретизируется, выражение (16) носит символический характер и поэтому может быть сохранено.

Остановимся теперь на точном решении задачи о падении заряженной нити на идеально проводящую плоскость¹⁵. Геометрия задачи такая же, как на рис. 6, но среда с показателем преломления $n(\omega)$ заменена идеальным проводником. Попадая на проводник (пересекая его границу), заряд для внешнего наблюдателя исчезает, т. е. в смысле механизма излучения речь идет о переходном излучении; нас, однако, интересует результат интерференции такого излучения от движущейся нити, причем заранее известно, что результирующее излучение будет направлено под углом $\theta_{01} = \arccos(c/v)$. Поле нити в вакууме представляет собой сумму полей самой нити и ее изображения, т. е. генерируется током с плотностью

$$\mathbf{j} = Q\delta(z) [\mathbf{u}_1\delta(s_1\mathbf{r} - ut) - \mathbf{u}_2\delta(s_2\mathbf{r} - ut)]; \quad (17)$$

здесь Q — заряд единицы длины нити. $\mathbf{u}_1 = u\mathbf{s}_1$ и $\mathbf{u}_2 = u\mathbf{s}_2$ — скорости нити и ее изображения ($s_1 = s_2 = 1$, $s_{1x} = s_{2x}$, $s_{1y} = -s_{2y}$, $s_{1z} = s_{2z} = 0$; нить лежит в плоскости x, y и, для простоты, считается бесконечно тонкой). Кроме того, в (17) нужно, разумеется, считать отличным от нуля первое слагаемое в вакууме, а второе — в металле. Компонента Фурье

$$\mathbf{j}_\omega = (1/2\pi) \int \mathbf{j} e^{i\omega t} dt = [Q\delta(z)/2\pi] (\mathbf{s}_1 e^{i(\omega/u)s_1\mathbf{r}} - \mathbf{s}_2 e^{i(\omega/u)s_2\mathbf{r}}).$$

На больших расстояниях от экрана для фурье-компоненты векторного потенциала имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\omega &= \frac{e^{ikr}}{cr} \int \mathbf{j}_\omega(\mathbf{r}') e^{-ik\mathbf{r}'} d\mathbf{r}' = \\ &= i \frac{Qe^{ikr}}{cr} \left[\frac{\mathbf{s}_1}{(\omega/u)s_{1y} - k_y} + \frac{\mathbf{s}_2}{(\omega/u)s_{2y} - k_y} \right] \delta\left(\frac{\omega}{u}s_{1x} + k_x\right), \end{aligned} \quad (18)$$

где $\mathbf{k} = (\omega/c)\mathbf{k}_1 = k\mathbf{k}_1$ — волновой вектор излучаемой волны (очевидно, $k_1^2 = 1$, $k = \omega/c$). Далее, легко найти магнитное поле $\mathbf{H}_\omega = i[\mathbf{k}\mathbf{A}_\omega]$, а затем интеграл

$$\begin{aligned} \frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H^2 dt &= \frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' H_\omega H_{\omega'} e^{i(\omega+\omega')t} = \\ &= \frac{c}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' H_\omega H_{\omega'} \delta(\omega + \omega') = \frac{c}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |H_\omega|^2 d\omega = c \int_0^\infty |H_\omega|^2 d\omega. \end{aligned}$$

Выберем ось x , по которой бежит «зайчик», за полярную ось; пусть волновой вектор излучения $\mathbf{k} = (\omega/c)\mathbf{k}_1$ составляет с полярной осью угол θ ; азимутальный угол обозначим через φ (рис. 8), причем в вакууме $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$.

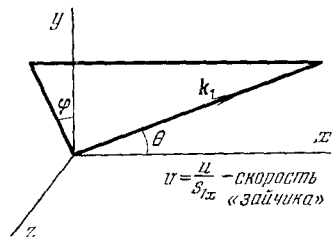


Рис. 8.

Из формулы (18) видно, что $\mathbf{A}_\omega$ пропорционально δ -функции от аргумента $(\omega/u)s_{1x} - k_x$. Очевидно, что и магнитное поле $\mathbf{H}_\omega$ будет пропорционально δ -функции, а энергия излучения — квадрату δ -функции. Интеграл от квадрата δ -функции расходится, что указывает на бесконечную энергию излучения. Эта бесконечность физически легко объяснима (мы считаем, что нить

пересекает экран в течение бесконечно большого времени). Чтобы получить конечный результат, можно рассмотреть движение нити в течение большого, хотя и конечного, времени T . Очевидно, энергия излучения

будет пропорциональна T . К той же цели ведет следующая формальная процедура. Запишем

$$\delta^2 ((\omega/u) s_{1x} - k_x) = (u/s_{1x}) \delta (\omega - (k_x u/s_{1x})) \delta ((\omega/u) s_{1x} - k_x).$$

Теперь первый сомножитель разложим в интеграл Фурье:

$$\delta^2 \left(\frac{\omega}{u} s_{1x} - k_x \right) = \frac{u}{2\pi s_{1x}} \delta \left(\frac{\omega}{u} s_{1x} - k_x \right) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i[\omega - (k_x u/s_{1x})]t} dt.$$

Из-за наличия в этом произведении δ -функции мы можем показатель степени под интегралом положить равным нулю, в силу чего имеем

$$\delta^2 ((\omega/u) s_{1x} - k_x) = (vT/2\pi) \delta ((\omega/u) s_{1x} - k_x),$$

где T — полное время движения нити и $v = u/s_{1x}$ — скорость источника («зайчика»). Действуя таким образом, получаем для энергии, излученной в телесный угол $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$, в интервале частот $d\omega$ за единицу времени следующее выражение:

$$\begin{aligned} \frac{dW_{\omega, \theta, \varphi}}{dt} &= \frac{1}{T} c |H_{\omega}|^2 r^2 \sin \theta d\theta d\varphi d\omega = \\ &= \frac{Q^2 v}{2\pi\omega} \left\{ \frac{[\mathbf{k}_1 \mathbf{s}_1]}{(c/u) s_{1y} - k_{1y}} - \frac{[\mathbf{k}_1 \mathbf{s}_2]}{(c/u) s_{1y} + k_{1y}} \right\}^2 \delta \left(\frac{c}{v} - k_{1x} \right) \sin \theta d\theta d\varphi d\omega. \end{aligned}$$

В связи с присутствием δ -функции, отсюда ясно, что излучение происходит только с волновым вектором $\mathbf{k}$, удовлетворяющим условию $k_{1x} = \cos \theta = c/v = \cos \theta_{01}$, как это и должно быть. После интегрирования по θ

$$\left. \begin{aligned} \frac{dW_{\omega, \varphi}}{dt} &= \frac{Q^2 v}{2\pi\omega} \left\{ \frac{[\mathbf{k}_1 \mathbf{s}_1]}{(c/u) s_{1y} - k_{1y}} - \frac{[\mathbf{k}_1 \mathbf{s}_2]}{(c/u) s_{1y} + k_{1y}} \right\}^2 d\varphi d\omega, \\ \mathbf{k}_1 &= \{\cos \theta_{01}, \sin \theta_{01} \cos \varphi, \sin \theta_{01} \sin \varphi\}, \\ \mathbf{s}_1 &= \{\sin \psi, -\cos \psi, 0\}, \quad \mathbf{s}_2 = \{\sin \psi, \cos \psi, 0\}, \\ \cos \theta_{01} &= c/v, \quad v = u/\sin \psi, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

где ψ — угол между скоростью частиц u и осью x .

Наконец, получаем

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \frac{2Q^2 v}{\pi} \frac{c^2}{u^2} \times \\ &\times \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \frac{[1 - (u^2/v^2)] - [1 - (c^2/v^2)] (1 - u^2/c^2 v^2) \cos^2 \varphi}{[(c^2/u^2) \cos^2 \psi - [1 - (c^2/v^2)] \cos^2 \varphi]^2}. \end{aligned} \quad (20)$$

Заряд q , движущийся в однородной среде, как ясно из (2), излучал бы на интервал $d\omega d\varphi$ с мощностью

$$dW_{\omega, \varphi}/dt = (q^2 v/2\pi c^2) [1 - (c^2/v^2)] \omega d\varphi d\omega,$$

где положено $n = 1$. Сравнивая это выражение с (19), мы видим, что нить эквивалентна заряду

$$q = Q \left| \frac{[\mathbf{k}_1 \mathbf{s}_1]}{(c/u) s_{1y} - k_{1y}} - \frac{[\mathbf{k}_1 \mathbf{s}_2]}{(c/u) s_{1y} + k_{1y}} \right| \frac{c}{\omega}. \quad (21)$$

Поскольку Q — заряд единицы длины нити, множитель при Q в (21) представляет собой эффективную длину нити, ответственную за излучение в направлении $\mathbf{k}_1$. Эта длина есть не что иное, как длина формирования переходного излучения в направлении $\mathbf{k}_1$. Интегралы (19) и (20) расходятся при $\omega \rightarrow 0$, но это просто связано с предположением о бесконечной протяженности нити. Излучение падает с ростом ω , очевидно, в силу происходящего при этом уменьшения длины формирования переходного излучения. В других задачах аналогичного типа частотная зависимость может быть иной (см. ниже).

Как отмечалось, механизмом излучения отдельных частиц или нити как целого при пересечении границы проводника можно считать переходное излучение. Однако с таким же успехом (и конечным результатом) можно предполагать, что происходит тормозное излучение в результате мгновенной остановки зарядов на границе (в случае идеального проводника обе эти возможности неразличимы при вычислении поля в вакууме²⁰). Вообще, механизм «элементарного акта» излучения, приводящего в конечном счете к черенковскому излучению, в известном отношении несуществен — характер черенковского излучения [в первую очередь речь идет об условии излучения (3)] определяется интерференцией волн, излучаемых вдоль пути источника. Сказанное находится, разумеется, в полном соответствии с принципом Гюйгенса. Таким образом, рассмотренное излучение заряженной нити, падающей на экран, представляет собой именно эффект Вавилова — Черенкова при $v > c$, и к тому же еще в вакууме (правда, наличие какой-то границы со средой здесь необходимо). Интенсивность излучения и его угловое распределение по φ будут изменяться в зависимости от свойств сред 1 и 2 (разумеется, для наблюдения черенковского излучения по крайней мере одна из этих сред должна быть прозрачной; выше сред 1 мы считали вакуумом). Для анизотропной среды в условии излучения (3) показатель $n(\omega)$ нужно брать для каждой нормальной волны в отдельности, причем значение n зависит также от углов с осями симметрии (осями кристалла, направлением внешнего магнитного поля и т. д.).

Особо отметим излучение волн в волноводах^{22 *}. В общем, здесь возникает большое количество задач, аналогичных тем, которые встречаются в теории черенковского излучения при $v < c$ (см. ⁵⁻⁷). Очевидно также, что рассматриваемые источники («зайчики») излучают и в «досветовом» режиме, т. е. когда $c/n < v < c$. Такие источники представляют интерес также для возбуждения, например, поверхностных волн разных типов в результате эффекта Вавилова — Черенкова или переходного излучения на неоднородной поверхности (в последнем случае требование $v > c/n$, конечно, отпадает). Сказанное справедливо и в случае волн неэлектромагнитной природы; в качестве примера укажем на возможность генерации второго звука в гелии II движущимся источником тепла (скажем, движущимся по поверхности гелия лучом лазера).

Излучение сверхсветового источника ни в коей мере не ограничивается эффектом Вавилова — Черенкова. Так, уже при равномерном движении, но с «модуляцией» источника некоторой частотой ω_0 будет наблюдаться излучение с доплеровской частотой

$$\omega = \omega_0 / |1 - (v/c) n \cos \theta|.$$

Отличие этой формулы от (6) связано лишь с тем обстоятельством, что

*) Отметим, что еще несколько лет назад Л. Г. Ломизе обратил внимание на возможность возбуждения волн в волноводе, близкую к обсуждаемой в работе²².

частота ω_0 определена в той же лабораторной системе, что и частота излучения ω . Модуляцию можно осуществить разными способами — дополнительным качанием луча, изменением его плотности (вдоль луча), нанесением «решетки» (периодических неоднородностей) на экран и т. д. Наконец, особенности сверхсветового излучения с $v > c$, как и в случае $c/n < v < c$, проявляются и при неравномерном движении источника. Примером может служить синхротронное (или, лучше, — квазисинхротронное) излучение, возникающее при движении источника по окружности. Такой случай реализуется, когда частицы или фотоны, испускаемые вращающимся источником, падают на сферический или цилиндрический экран. Более конкретная модель такова¹⁶: вращающийся источник (скажем, пульсар) испускает направленный поток γ -лучей, которые падают на «экран», состоящий из более или менее плотного вещества (плазмы), находящийся на расстоянии R от источника. Попадая на экран, γ -лучи рассеиваются на электронах, которые в силу отдачи создают некоторую радиальную поляризацию, бегущую по экрану со скоростью $v = \Omega R$. В результате по экрану бежит ток с плотностью

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{j} &= \frac{d}{dt} [\mathbf{p}(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}(t))], \\ \mathbf{p}(t) &= p \{\cos \Omega t, \sin \Omega t, 0\}, \\ \mathbf{R}(t) &= R \{\cos \Omega t, \sin \Omega t, 0\}, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

где $\mathbf{p}$ — электрический дипольный момент, отвечающий созданной поляризации, которая считается точечной; последнее возможно, если рассматривать излучение волн с длиной волны λ , значительно превосходящей размеры источника l . Возникающее излучение при $v = \Omega R > c$ по своему характеру аналогично синхротронному излучению в среде при условиях, когда $v > c/n$ (см. ⁵); полная излучаемая мощность

$$\frac{dW}{dt} \approx \frac{p^2 [1 + (v^2/c^2)]}{2v^3} \int_{\Omega < \omega < c/l} \omega^3 d\omega. \quad (23)$$

Интеграл обрезается на высоких частотах в связи с конечными размерами диполя, что не было учтено в (22) и (23); кстати, в расчете¹⁶ диполь $\mathbf{p}$ в (22) считался направленным не по радиусу, а по оси z (т. е. полагалось $\mathbf{p} = p \{0, 0, 1\}$), что в формуле (23), вероятно, сказывается лишь на численном коэффициенте. В моделях пульсаров бегущее со скоростью $v > c$ возмущение в плазме может быть создано также магнитодипольным излучением или потоками частиц, исходящими от пульсара.

В связи с развитием лазерной техники приобретает особый интерес возможность создания сверхсветового источника с помощью света. Использование вращающегося луча и с помощью лазера не так уж легко, если требовать, чтобы напряженность поля в «зайчике» при $v = \Omega R > c$ была достаточно большой. Поэтому проще осуществить падение импульса на экран (границу раздела сред), как

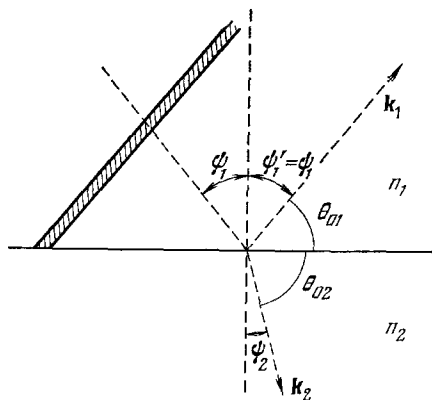


Рис. 9.

это обсуждалось в гл. 2 [см. рис. 2 и формулы (11), (12)]. Если экран является идеально-плоской границей раздела двух сред, а задача может рассматриваться в линейном приближении (слабое поле), то мы имеем дело с обычной задачей об отражении и преломлении света. Поэтому сразу ясно (и, конечно, следует из уравнений поля), что импульс, падающий под углом ψ_1 , отразится также под углом $\psi'_1 = \psi_1$, а угол преломления ψ_2 определится из закона преломления (рис. 9)

$$\sin \psi_2 / \sin \psi_1 = n_1 / n_2, \quad \psi'_1 = \psi_1. \quad (24)$$

Любопытно, как это было давно отмечено Франком⁸, что условия (24) совпадают с условиями появления эффекта Вавилова — Черенкова для рассматриваемого импульса, сечение которого экраном движется со скоростью $v = c/n_1 \sin \psi_1$ (см. (11)). В самом деле, черенковский угол в среде 1 определяется условием $\cos \theta_{01} = c/n_1 v = \sin \psi_1$, откуда $\psi_1 = \psi'_1 = (\pi/2) - \theta_{01}$, как это и должно быть (см. рис. 9). Для среды 2 имеем $\cos \theta_{02} = c/n_2 v = (n_1/n_2) \sin \psi_1$, что совпадает с (24), поскольку $\cos \theta_{02} = \sin \psi_2$. Можно буквально сказать, что мы очень долго «не знали, что говорим прозой» и что сверхсветовое (и более общее при $n_1 > 1$) черенковское условие известно уже несколько столетий. Сказанное о соответствии между законами отражения и преломления и черенковским условием вместе с тем естественно, поскольку все эти соотношения получаются из принципа Гюйгенса одинаковым образом. Для получения каких-либо новых результатов нужно рассмотреть задачу с учетом нелинейности для различных сред (в частности, для пьезоэлектриков).

Последнее замечание, которое мы хотим здесь сделать, касается световых пятен и «зайчиков» в случае шероховатых или люминесцирующих экранов. В последнем случае излучение, исходящее от «зайчика», вообще говоря, некогерентно. То же практически имеет место для шероховатых экранов, поскольку речь идет при этом обычно о достаточно больших световых пятнах (размеры значительно больше длины волны света). Если излучение некогерентно, то интерференция невозможна и такие специфические черты, как резкая направленность черенковского излучения, пропадают.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Историческая судьба исследований излучения источников, движущихся со скоростью больше фазовой скорости света, весьма своеобразна. Речь идет о классических эффектах, качественно ясных уже в рамках простейших оптических представлений (принцип Гюйгенса, интерференция), а количественно описываемых с помощью уравнений Максвелла. Как мы видели, элементарные законы отражения и преломления света на плоской границе раздела двух сред, по сути дела, совпадают с условием излучения Вавилова — Черенкова от бегущего вдоль границы источника. Черенковское условие для заряда — сверхсветового источника (скорость $v > c$) — было получено в 1904 г. Тем не менее эффект Вавилова — Черенкова оказался экспериментально обнаруженным лишь в 1934 г., да и то случайно (в том смысле, что исследовался совсем другой вопрос), а создание теории этого эффекта потребовало больших и довольно длительных усилий². Любопытно также, что на первом этапе возможности применения эффекта Вавилова — Черенкова в физике, как для измерительных целей, так и для понимания различных явлений, казались весьма скромными. В действительности же эффект Вавилова — Черенкова и родственные явления сейчас во всех отношениях широко используются, и можно сказать, что их изучение составляет целую главу физики, которой

посвящено огромное количество статей и ряд обзоров⁵⁻⁷. Казалось бы, проблема, если и не исчерпана, то, во всяком случае, уже достаточно полно и всесторонне исследована. Но и это оказалось не вполне верным, о чем свидетельствует настоящая статья. В самом деле, широко было распространено мнение (в частности, мы сами его придерживались), что эффект Вавилова — Черенкова и аномальный эффект Допплера могут наблюдаться лишь для волн, которым отвечает показатель преломления $n(\omega) > 1$ (условие $c/n < v < c$). В согласии с этим в вакууме соответствующие явления считались невозможными. Между тем существуют сверхсветовые источники, движущиеся со скоростью $v > c$. Эти источники в широких пределах могут рассматриваться на тех же основаниях, как и «обычные» источники, движущиеся со скоростью $v < c$. Конкретно, сверхсветовые источники способны порождать излучение Вавилова — Черенкова в любой среде, в том числе в вакууме или при условии $n(\omega) < 1$. Сверхсветовые источники общего типа обладают в целом теми же особенностями, которые известны для источников, движущихся со скоростью $c/n < v < c$ (аномальный эффект Допплера и т. д.). С точки зрения теории излучения существенное отличие сверхсветовых источников ($v > c$) от досветовых ($v < c$) заключается в том, что сверхсветовой источник не может состоять из отдельной «элементарной» частицы и поэтому всегда является протяженным. Именно размеры сверхсветового источника в первую очередь и определяют, особенно при изучении в вакууме, коротковолновую границу излучаемого спектра частот. В связи с этим трудно надеяться на использование сверхсветовых источников, например, для генерации рентгеновских лучей (подобная возможность могла бы показаться соблазнительной, поскольку стремление при высоких частотах показателя $n(\omega)$ к единице, препятствующее для источников с $v < c$ использованию эффекта Вавилова — Черенкова в рентгеновской области, не играет столь критической роли при $v > c$). Мы не были бы удивлены, однако, если бы в будущем нашлись те или иные интересные применения и для сверхсветовых источников. Кроме того, сверхсветовые источники могут встретиться в астрономии. Независимо от таких возможностей излучение сверхсветовых источников ($v > c$) электромагнитных и гравитационных волн (а возможно, и нейтрино) и вся совокупность связанных с ними вопросов представляет, по нашему мнению, несомненный физический интерес.

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. И. Е. Тамм, И. М. Франк, ДАН СССР 14, 107 (1937); см. также: I. E. Tamm, J. Phys. USSR 1, 439 (1939).
2. И. М. Франк, О когерентном излучении быстрого электрона в среде. Препринт ОИЯИ Р4-5954, Дубна, 1971 (войдет также в сборник памяти И. Е. Тамма «Проблемы теоретической физики», выпускаемый издательством «Наука»).
3. В. Л. Гинзбург, ДАН СССР 24, 130 (1939).
4. В. Л. Гинзбург, ЖЭТФ 10, 589 (1940).
5. В. Л. Гинзбург, УФН 69, 537 (1959).
6. Б. М. Болотовский, УФН 62, 201 (1957); 75, 295 (1964).
7. Дж. Джелли, Черенковское излучение и его применения, М., ИЛ, 1960; В. П. Зрелов, Излучение Вавилова — Черенкова и его применение в физике высоких энергий, т. 1, М., Атомиздат, 1968.
8. И. М. Франк, Изв. АН СССР, сер. физ. 6, 3 (1942).
9. A. Sommerfeld, Göttingen Nachr., 99, 363 (1904); 201 (1905).
10. А. Зоммерфельд, Оптика, М., ИЛ, 1953, § 47.

11. A. E i n s t e i n, Ann. d. Phys. **23**, 371 (1907); см. также: А. Э й н ш т е й н, Собрание научных трудов, т. 1, М., «Наука», 1965, стр. 53.
 12. В. Паули, Теория относительности, М., Гостехиздат, 1947, § 6.
 13. F. A. E. P i r a n i, Phys. Rev. **D1**, 3224 (1970).
 14. В. Л. Гинзбург, ЖЭТФ **62**, 173 (1972).
 15. Б. М. Болотовский, Кр. сообщ. физ. ФИАН СССР, № 6 (1972).
 16. В. Я. Эйдман, Изв. вузов (Радиофизика) **15**, № 4 (1972).
 17. В. Л. Гинзбург, УФН **103**, 393 (1971).
 18. В. Вайскопф, УФН **84**, 183 (1964); N. C. M c G i l l, Contemp. Phys. **9**, 33 (1968).
 19. M. R e e s, Mon. Not. RAS **135**, 345 (1967); V. L. G i n z b u r g, S. I. S y r o v a t s k i i, Ann. Rev. Astron. Astrophys. **7**, 375 (1969); A. C a v a l i e r e et al., Science **173**, 525 (1971).
 20. В. Л. Гинзбург, И. М. Франк, ЖЭТФ **16**, 15 (1946); J. Phys. USSR **9**, 353 (1945).
 21. H. M o t z, L. S c h i f f, Amer. J. Phys. **21**, 258 (1953) (см. перевод в сборнике «Миллиметровые и субмиллиметровые волны», М., ИЛ, 1959, стр. 171).
 22. С. В. Афанасьев, Б. М. Болотовский, Кр. сообщ. физ. ФИАН СССР, № 6 (1972).
-