

## ЕСТЕСТВЕННЫЕ ФЛУКТУАЦИИ В ЛАЗЕРАХ

Ю. Л. Климонтович, А. С. Ковалев, П. С. Ланда

## СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение . . . . .	279
2. Источники флуктуаций в уравнениях для амплитуд и фаз в линейном и кольцевом лазерах . . . . .	282
3. Флуктуации амплитуды и фазы в линейном газовом лазере . . . . .	290
4. Флуктуации амплитуд и интенсивностей встречных волн в кольцевом лазере . . . . .	298
5. Флуктуации частоты и фазы в кольцевом лазере . . . . .	302
6. О предельной чувствительности лазерного гироскопа . . . . .	305
7. Флуктуации амплитуды и фазы в твердотельном лазере . . . . .	306
8. Заключение . . . . .	309
Приложения . . . . .	310
Список обозначений . . . . .	311
Цитированная литература . . . . .	312

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование флуктуаций в лазерах необходимо для оценки стабильности их излучения, определения предельных возможностей лазерных приборов, например предельной чувствительности оптического гироскопа. Флуктуации в лазерах принято разделять на технические и естественные. Технические флуктуации обусловлены нестабильностью параметров резонатора и накачки. Естественные флуктуации обусловлены атомной структурой рабочего вещества и резонатора и квантовым характером излучения. Технические флуктуации могут быть существенно уменьшены путем совершенствования аппаратуры, тогда как естественные флуктуации от этого не зависят. Технические флуктуации являются значительно более медленными (ширина их спектра порядка  $10^3$ — $10^4$  гц), чем естественные. Это и позволяет выделить слабые естественные флуктуации на фоне более сильных технических флуктуаций.

В настоящее время накопился уже значительный экспериментальный и теоретический материал по исследованию естественных флуктуаций в лазерах. Отсутствие единого подхода и сложность теоретических расчетов не дают возможности экспериментаторам и теоретикам, не являющимся специалистами в данной области, использовать имеющийся материал. Вследствие этого возникла необходимость в обзоре результатов, полученных одним из наиболее простых возможных методов, и в сравнении этих результатов с расчетами, проведенными другими, более сложными методами. Тем самым можно будет в какой-то мере понять, насколько необходимо использование более точных, но значительно более громоздких способов расчета.

Наиболее простым подходом является, с нашей точки зрения, использование, в качестве исходных, уравнений, лежащих в основе полуклассической теории лазера. При расчете флуктуаций отличие от полуклассиче-

ской теории Лэмба состоит в том, что исходные уравнения рассматриваются как уравнения Ланжевена с соответствующим образом введенными источниками флуктуаций. Прежде чем переходить к последовательному изложению основного материала, укажем ряд экспериментальных и теоретических работ, посвященных исследованию естественных флуктуаций излучения газовых и твердотельных лазеров.

Первые попытки измерения естественной ширины линий излучения Не — Не-лазера были сделаны в работах Джавана, Балика, Бонда<sup>1</sup> и Джасеи, Джавана, Таунса<sup>2</sup>.

Теоретическая оценка ширины линии проводилась по формуле Шавлова и Таунса<sup>16</sup>

$$\Delta\omega = \hbar\omega_0 (\Delta\omega_p)^2 / 2P_*^*. \quad (1,1)$$

При  $P = 1 \text{ Мвт}$  и потерях в резонаторе порядка 1% ширина линии  $\Delta\omega/2\pi \approx 10^{-3} \text{ Гц}$ . В работе<sup>2</sup> было установлено, что ширина линии при этих данных не превышает 20 Гц. По измерениям Лейкина и др.<sup>3</sup> ширина линии Не — Не-лазера оказалась порядка 3,5 Гц. Это означает, что авторы указанных работ измеряли не естественную ширину линии, а техническую.

Вдали от порога возбуждения при различных значениях мощности достаточно точные измерения естественной ширины линии были произведены Зайцевым и Степановым<sup>4</sup>. Вблизи порога возбуждения измерения ширины линии проводились в работах Зигмана и Арратгона<sup>5</sup>. Экспериментальные результаты работ<sup>4, 5</sup> дают довольно полное представление о зависимости естественной ширины линии излучения лазера от мощности. В работах<sup>4, 5</sup> ширина линии определялась по результатам измерения спектра разностной частоты двух лазеров, один из которых принимался за эталон. В работе Егорова<sup>7</sup> предложен иной способ измерения ширины линии — методом межмодовых биений. Более подробно результаты работ<sup>4, 5</sup> будут рассмотрены далее. Измерения естественной ширины линии твердотельных лазеров, по-видимому, пока еще не производились.

Измерению естественных флуктуаций интенсивности излучения посвящены работы<sup>8–15</sup>. Фридом и Хаусом<sup>8</sup> получены спектральные плотности флуктуаций интенсивности при различных значениях средней мощности. Для области выше порога генерации более детальное исследование флуктуаций интенсивности проведено в работах Андроновой и Зайцева<sup>9–11</sup>. В работе<sup>9</sup> исследовались также флуктуации интенсивностей встречных волн в кольцевом лазере. Измерена, в частности, спектральная плотность коэффициента корреляции интенсивностей встречных волн.

Результаты ряда экспериментальных работ по измерению амплитудных флуктуаций в газовых лазерах приведены в обзорных статьях Смита и Армстронга<sup>12</sup>. В работах Арекки и др.<sup>6, 13</sup> исследовалась статистика фотонов вблизи порога генерации в стационарном режиме и была определена ширина спектра амплитудных флуктуаций вблизи порога. В работах<sup>14, 15</sup> аналогичные исследования проведены для переходного режима.

Укажем основные теоретические работы по расчету естественных флуктуаций в лазерах. В первых работах по теории естественной ширины линии лазерного излучения Шавлова, Таунса<sup>16</sup> и Лэмба<sup>17</sup> учитывались лишь тепловые флуктуации резонатора. Результаты работ<sup>16, 17</sup> отличаются вдвое. Формула Лэмба совпадает с результатами последующих расчетов.

Одновременный учет как теплового, так и поляризационного шума при расчете ширины линии, по-видимому, впервые был проведен в работах Хакена<sup>18</sup>, Хакена и др.<sup>19</sup>, Лэкса<sup>20</sup>. Результат расчета можно

\*) Список обозначений приводится в конце статьи на стр. 311.

представить в виде

$$\Delta\omega = \frac{\hbar\omega_0(\Delta\omega_p)^2}{2P} \left( \bar{n} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\rho_a + \rho_b}{\rho_a - \rho_b} \right). \quad (1,2)$$

Первые два члена, содержащие  $\bar{n} + (1/2)$ , учитывают вклад, который обусловлен равновесными тепловыми флуктуациями в свободном резонаторе. Последний член учитывает вклад неравновесных флуктуаций поляризации рабочего вещества с учетом нулевых колебаний.

Формулу (1,2) можно записать в виде

$$\Delta\omega = \frac{\hbar\omega(\Delta\omega_p)^2}{2P} \left( \bar{n} + \frac{\rho_a}{\rho_a - \rho_b} \right).$$

Это показывает, что суммарный вклад нулевых колебаний в ширину линии равен нулю. Действительно, величина  $\bar{n}$  — среднее число фотонов теплового излучения, а  $\rho_a/(\rho_a - \rho_b)$  — часть флуктуаций поляризации, обусловленная спонтанным излучением.

Формула (1,2) в произвольном поле справедлива лишь для случая неподвижных атомов в режиме одной бегущей волны. Для случая движущихся атомов она справедлива лишь в слабом поле, когда можно пренебречь полем при расчете поляризационного шума. В сильном поле результат расчета ширины линии излучения зависит от формы поля в резонаторе (бегущая волна, стоячая волна, встречные волны) и от характера теплового движения атомов; поэтому формула (1,2) оказывается уже недостаточной.

Все работы по теории естественных флуктуаций в лазерах можно разделить на две группы, отличающиеся друг от друга подходом к решению задачи. К первой группе можно отнести работы, в которых в качестве исходных уравнений используется система операторных уравнений для элементов матрицы плотности и поля. В эти уравнения соответствующим образом вводятся источники флуктуаций, интенсивность которых тем или иным способом вычисляется. При этом получают либо систему уравнений Ланжевена, либо соответствующее уравнение Фоккера — Планка. Поскольку даже на пороге генерации среднее число фотонов в резонаторе оказывается довольно значительным (по данным Арееки<sup>6</sup> — порядка 4000), для поля можно использовать классические уравнения Максвелла со случайными источниками.

Такой подход в той или иной модификации использован в работах Лэмба<sup>17</sup>, Хакена<sup>18</sup>, Хакена и др.<sup>19</sup>, Лэкса<sup>20</sup>, Зауэрмана<sup>21</sup>, Хауса<sup>22</sup>, Флека<sup>23</sup>, Берштейна, Андроновой и Зайцева<sup>24</sup>, Рискена<sup>25</sup>, наших работах<sup>26–30</sup> и др.

Во второй группе работ используется другой подход, который основан на приближенном решении уравнений для первых и вторых функций распределения атомных и полевых переменных. К этой группе можно отнести работы Глаубера<sup>31</sup>, Коренмана<sup>32</sup>, Лэмба и Скалли<sup>33</sup>, Флека<sup>34</sup>, Уиллиса<sup>35</sup>, Бруннера<sup>36</sup>, Казанцева и Сурдутовича<sup>37</sup>, Вайдлиха<sup>38</sup> и ряда других авторов.

Во многих из перечисленных здесь работ проводимые расчеты справедливы только для случая слабых полей. В большинстве работ не учитывается движение активных атомов и не выявляется различие флуктуаций в режимах бегущей и стоячей волн. Учет этих явлений является весьма существенным и приводит к ряду новых интересных эффектов.

Отметим также цикл работ Рискена<sup>25, 60</sup>, в которых приводятся расчеты флуктуаций амплитуды и фазы поля в области, близкой к порогу возбуждения. Автор составляет уравнение Фоккера — Планка и, решая его, находит спектральные характеристики флуктуаций вблизи порога

возбуждения. Такая задача математически довольно громоздка, поскольку приходится искать нестационарное решение уравнения Фоккера — Планка. В работах<sup>25</sup>, а также в работе Хэмпстеда и Лэкса<sup>39</sup> теоретически показано, что даже вблизи порога генерации форма спектра амплитудных флуктуаций близка к лоренцевской. Этот результат весьма полезен, так как, если заранее предположить известной форму спектра, его параметры можно вычислить, исходя из стационарного решения уравнения Фоккера — Планка, которое получить значительно проще.

Ряд результатов для кольцевого лазера был получен в работах Смирнова и Желнова<sup>40</sup> и Беленова<sup>41</sup>, но только для случая слабого поля. В работе<sup>40</sup> для расчета флуктуаций был применен квантовый подход, аналогичный тому, который использовался Казанцевым и Сурдутовичем<sup>37</sup>. В работе<sup>41</sup> источники флуктуаций вводились в волновое уравнение для поля в виде заданных внешних сил. Интенсивность этих источников определялась так же, как и в работе<sup>24</sup>.

## 2. ИСТОЧНИКИ ФЛУКТУАЦИЙ В УРАВНЕНИЯХ ДЛЯ АМПЛИТУД И ФАЗ В ЛИНЕЙНОМ И КОЛЬЦЕВОМ ЛАЗЕРАХ

Расчет флуктуаций может быть проведен на основе системы уравнений для поля и элементов матрицы плотности рабочих уровней  $\rho_a(v)$ ,  $\rho_b(v)$ ,  $\rho_{ab}(v)$ ,  $\rho_{ba}(v)$ :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial r} \right) \rho_a = \frac{ie}{\hbar} (r_{ab}\rho_{ba} - \rho_{ab}r_{ba}) E - \gamma_a (\rho_a - \rho_a^0), \quad (2,1)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial r} \right) \rho_b = - \frac{ie}{\hbar} (r_{ab}\rho_{ba} - \rho_{ab}r_{ba}) E - \gamma_b (\rho_b - \rho_b^0), \quad (2,2)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial r} + i\omega_{ab} + \gamma_{ab} \right) \rho_{ab} = \frac{ie}{\hbar} r_{ab} (\rho_b - \rho_a) E, \quad (2,3)$$

$$\rho_{ba} = \rho_{ab}^*, \quad (2,4)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{\partial E}{\partial t} - c^2 \Delta E = -4\pi \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \omega_0^2 E^{(r)}. \quad (2,5)$$

Вектор поляризации  $P(r, t)$  связан с элементами матрицы плотности известным соотношением

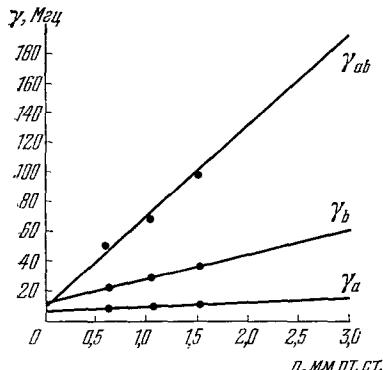


Рис. 1. Зависимость  $\gamma_a$ ,  $\gamma_b$  и  $\gamma_{ab}$  от давления гелия.

$$\mu = 215 \text{ Мэв}, \sqrt{2} k u = 1000 \text{ Мэв}.$$

лазерах посвящены работы Раутиана<sup>55</sup>, Лэмба и др.<sup>65</sup> и Стенхольма<sup>66</sup>.

Отметим еще одно ограничение, заложенное в исходных уравнениях. В уравнении для  $\rho_b$  не учтено увеличение  $\rho_b$  за счет спонтанного перехода

$$P(r, t) = en \int (r_{ba}\rho_{ab} + r_{ab}\rho_{ba}) dv. \quad (2,6)$$

Уравнения (2,1) — (2,5) содержат четыре диссипативных коэффициента:  $\gamma_a$ ,  $\gamma_b$ ,  $\gamma_{ab}$ ,  $\omega_0/Q$ , которые в рамках рассматриваемого здесь описания предполагаются заданными. Величины  $\gamma_a$ ,  $\gamma_b$ ,  $\gamma_{ab}$  зависят от давления. Полученные экспериментально графики зависимости  $\gamma_a$ ,  $\gamma_b$ ,  $\gamma_{ab}$  от давления приведены в работе Форка и Поллака<sup>42</sup> (рис. 1). По указанной причине исходные уравнения (2,1) — (2,5) являются полуфеноменологическими.

В рамках исходных уравнений влияние столкновений учитывается лишь через коэффициенты  $\gamma_a$ ,  $\gamma_b$ ,  $\gamma_{ab}$ . Более детальному учету влияния столкновений в

с уровня  $a$ , т. е. не учтен дополнительный член  $A_b^a \rho_b$ ;  $A_b^a$  — коэффициент Эйнштейна. Обычно  $A_b^a \ll \gamma_a, \gamma_b$ , поэтому роль этого члена несущественна.

Флуктуации поля в лазерах обусловлены двумя причинами. Первая связана с тепловыми флуктуациями поля в пустом резонаторе. Для учета этих флуктуаций в уравнение поля (2,5) введен случайный источник  $E^{(r)}$ .

Спектральная плотность случайного теплового источника  $E^{(r)}$  определяется на основе формулы Каллена — Вельтона (см. 43, 44):

$$(E^{(r)2})_o = \frac{8\pi\hbar\Delta\omega_p}{\omega_0 V} \left( \bar{n} + \frac{1}{2} \right). \quad (2,7)$$

Вторым источником флуктуаций поля является поляризационный шум. Вектор поляризации  $P$  в уравнении (2,5) можно представить в виде суммы двух частей:

$$P = P^{(\text{инд})} + \delta P. \quad (2,8)$$

В этом выражении  $P^{(\text{инд})}$  ( $E$ ) — индуцированная часть поляризации — отклик системы на полное поле  $E = \langle E \rangle + \delta E$ ,  $\delta P$  — флуктуации поляризации, обусловленные атомной структурой рабочего вещества.

Конкретное выражение для спектральной плотности поляризационного шума зависит от формы поля, т. е. от режима работы лазера. Ниже будут приведены результаты для трех режимов: режима бегущей волны, который осуществляется в кольцевых лазерах при подавлении одной из встречных волн; режима стоячей волны — линейный лазер; режима двух встречных волн — кольцевой лазер.

Амплитудные и фазовые флуктуации лазерного излучения существенно зависят от соотношения характерных временных параметров рабочей среды и поля в пустом резонаторе. Можно выделить три случая:

- 1) Газовый лазер,  $\gamma_a \sim \gamma_b \sim \gamma_{ab} \gg \Delta\omega_p$ .
- 2) Молекулярный генератор,  $\gamma_a \sim \gamma_b \sim \gamma_{ab} \ll \Delta\omega_p$ .
- 3) Твердотельный лазер,  $\gamma_a \sim \gamma_b \ll \Delta\omega_p \ll \gamma_{ab}$ .

В газовом лазере поляризация устанавливается значительно быстрее, чем поле; вследствие этого за время установления поляризации поле можно считать постоянным. Рассмотрим сначала этот случай. Другие случаи будут рассмотрены в гл. 6.

При задании поля в виде двух встречных волн

$$E = \frac{1}{2} (E_1 e^{-i(\omega_0 t - k_0 r + \varphi_1)} + E_2 e^{-i(\omega_0 t + k_0 r + \varphi_2)} + \text{к. с.}) \quad (2,9)$$

из уравнения поля (2,5) получаем следующие уравнения для амплитуд и фаз (без учета связи через рассеяние):

$$\frac{dE_{1,2}}{dt} = -\frac{\omega_0}{2} \left( 4\pi\chi'_{1,2} + \frac{1}{Q_{1,2}} \right) E_{1,2} + \omega_0 \xi_{a1,2}(t), \quad (2,10)$$

$$\frac{d\varphi_{1,2}}{dt} = -\frac{\omega_0}{2} \cdot 4\pi\chi'_{1,2} + \frac{\omega_0}{E_{1,2}} \xi_{\phi1,2}(t); \quad (2,11)$$

здесь  $\chi'$ ,  $\chi''$  — действительная и мнимая части комплексной поляризуемости, определяемые из соотношения

$$P_{1,2}^{(\text{инд})} = (\chi'_{1,2} + i\chi''_{1,2}) E_{1,2}; \quad (2,12)$$

$\xi_{a1,2}$  и  $\xi_{\phi 1,2}$  — источники флуктуаций амплитуды и фазы. Они определяются выражениями

$$\begin{aligned}\xi_{a1,2} &= -\frac{1}{V} \int (4\pi e \delta P + eE^{(r)}) \sin(\omega_0 t \mp k_0 r + \varphi) dr, \\ \xi_{\phi 1,2} &= -\frac{1}{V} \int (4\pi e \delta P + eE^{(r)}) \cos(\omega_0 t \mp k_0 r + \varphi) dr.\end{aligned}\quad (2,13)$$

Верхний знак соответствует первой волне, а нижний — второй.  $e$  — единичный вектор, направленный вдоль вектора  $E$ . В формулах (2,13)

$$\delta P = e n \int (r_{ba} \delta \rho_{ab} + r_{ab} \delta \rho_{ba}) dv. \quad (2,14)$$

В уравнениях (2,10), (2,11) для амплитуд и фаз не учтена зависимость от координат. Такое приближение оправдано при выполнении условия квазистационарности, когда характерное время  $Q/\omega_0 \sim 10^{-6}$  сек значительно превышает  $L/C \sim 10^{-8}$  сек — время пробега волны в резонаторе.

В соответствии с (2,5), (2,8), (2,13) представим  $\xi_{a1,2}$  и  $\xi_{\phi 1,2}$  в виде суммы двух частей:

$$\xi_a = \xi_a^{(T)} + \xi_a^{(N)}, \quad \xi_\phi = \xi_\phi^{(T)} + \xi_\phi^{(N)};$$

здесь  $\xi_{a,\phi}^{(T)}$  — части, обусловленные тепловыми шумами свободного резонатора, а  $\xi_{a,\phi}^{(N)}$  — поляризационными.

В газовом лазере выполняются условия  $\Delta\omega, \Delta\omega_a, \Delta\omega_p \ll k u$  ( $\Delta\omega_a$  — ширина спектра амплитудных флуктуаций,  $\Delta\omega$  — ширина спектра излучения лазера), поэтому достаточно знать спектральные плотности теплового и поляризационного шума на нулевой частоте. Здесь неявно предполагается, что спектральная плотность источников флуктуаций монотонно убывает с ростом  $\omega$ . При наличии поля спектр флуктуаций источников, вообще говоря, является немонотонным. На примере неподвижных атомов можно показать, что это не является существенным.

Из формулы (2,7) и определения  $\xi_{a,\phi}^{(T)}$  следует, что спектральные плотности тепловых частей источников флуктуаций на нулевой частоте равны

$$(\xi_{a1,2}^{(T)})_0 = (\xi_{\phi 1,2}^{(T)})_0 = \frac{4\pi\hbar\Delta\omega_p}{V\omega_0} \left( \bar{n} + \frac{1}{2} \right), \quad (2,15)$$

$$(\xi_{a1}^{(T)}\xi_{a2}^{(T)})_0 = (\xi_{\phi 1}^{(T)}\xi_{\phi 2}^{(T)})_0 = (\xi_{a1,2}^{(T)}\xi_{\phi 1,2}^{(T)})_0 = 0.$$

Для вычисления спектральных плотностей источников поляризационного шума представим в исходных уравнениях элементы матрицы плотности в виде суммы индуцированных и флуктуационных частей.

Уравнения для индуцированных частей совпадают с исходными уравнениями (2,1) — (2,4). Уравнения для флуктуационных частей отличаются от уравнений (2,1) — (2,4) отсутствием членов с функциями  $\rho_a^{(o)}, \rho_b^{(o)}$ .

Решение системы уравнений для индуцированных и флуктуационных частей проводится в предположении, что диагональные элементы матрицы плотности не зависят от координат и медленно зависят от времени, а недиагональные представляются в виде суммы двух встречных волн.

В случае слабого поля такое приближение для газового лазера с неоднородным уширением линии может быть строго обосновано. Для сильного поля при произвольных параметрах в режиме двух встречных волн это приближение может оказаться несправедливым.

Для индуцированной части поляризации решение с учетом всех пространственных гармоник получено в работах<sup>45, 46</sup>. В работе<sup>46</sup> показано, что вклад второй и высших пространственных гармоник пропорционален параметру  $(\gamma^2/\gamma_{ab}^2) aE^2$ .

Для лазера с однородным уширением линии при условии  $ku \ll \gamma_{ab}$  роль пространственной модуляции оказывается заметной. Это обусловлено тем, что наличие теплового движения в этом случае не приводит к заметному сглаживанию стоячей волны населеностей уровней атомов. В приближении  $ku \ll \gamma_{ab}$  удается получить точное выражение для поляризации<sup>45-47</sup>.

Сначала рассмотрим случай неоднородного уширения линии. При не очень малых давлениях для Не — Не-лазера параметр  $\gamma^2/\gamma_{ab}^2$  оказывается малым. Это видно из рис. 1. Так, например, при давлении смеси 2,5 мм рт. ст. отношение  $\gamma^2/\gamma_{ab}^2 \approx 0,1$ . Рассматриваемые здесь результаты соответствуют нулевому приближению по этому параметру \*). В этом приближении полагаем

$$\rho_{ab} = \tilde{\rho}_{ab}^{(1)}(t) e^{-i(\omega_0 t - k_0 r + \Phi)} + \tilde{\rho}_{ab}^{(2)}(t) e^{-i(\omega_0 t + k_0 r + \Phi)}. \quad (2,16)$$

Запишем теперь выражения для интенсивностей источников поляризационного шума через спектральные плотности флюктуаций  $\delta\rho_{ab}$ . Представляя в формулы (2,13) выражение (2,14) и представляя  $\delta\rho_{ab}$  в форме (2,16), получим

$$\left. \begin{aligned} (\xi_{ai}^{(1)} \xi_{aj}^{(1)})_{\omega=0} &= \frac{8\pi^2 e^2 n^2 |r_{ab}|^2}{3} \int [(\delta\rho_{ab}^{(i)} \delta\rho_{ba}^{(j)})_{\omega=0} - \\ &\quad - \frac{(r_{ab})^2}{|r_{ab}|^2} (\delta\rho_{ba}^{(i)} \delta\rho_{ba}^{(j)})_{\omega=0}] dv dv', \\ (\xi_{\phi i}^{(1)} \xi_{\phi j}^{(1)})_{\omega=0} &= \frac{8\pi^2 e^2 n^2 |r_{ab}|^2}{3} \int [(\delta\rho_{ab}^{(i)} \delta\rho_{ba}^{(j)})_{\omega=0} + \\ &\quad + \frac{(r_{ab})^2}{|r_{ab}|^2} (\delta\rho_{ba}^{(i)} \delta\rho_{ba}^{(j)})_{\omega=0}] dv dv', \\ (\xi_{\phi i}^{(1)} \xi_{ai}^{(1)})_0 &= (\xi_{\phi i}^{(1)} \xi_{\phi j}^{(1)})_0 = 0; \end{aligned} \right\} \quad (2,17)$$

здесь  $i, j = 1, 2$ . Таким образом, задача нахождения спектральной плотности поляризационного шума сводится к определению спектральных плотностей флюктуаций  $\delta\rho_{ab}^{(1,2)}$ . Ниже нам понадобятся выражения для индуцированных частей элементов матрицы плотности. Они приведены в работе<sup>26б</sup>.

Подставляя  $\tilde{\rho}_{ab}^{(1,2)}$  из работы<sup>26б</sup> в выражение для вектора поляризации (2,6) и интегрируя по скоростям в предположении, что линия неоднородно уширена и интенсивности встречных волн мало отличаются друг от друга, т. е.  $a|E_1^2 - E_2^2| \ll 1$ , получаем следующие значения действительной и мнимой частей поляризуемости:

$$\begin{aligned} \kappa'_{1,2} &= -\frac{d}{4\pi} \frac{\mu}{\gamma_{ab}} f \{ 1 - F \mp f^2 [1 - (1 - 2g) F] a (E_1^2 - E_2^2) \} **), \\ \kappa''_{1,2} &= -\frac{d}{4\pi} f \left\{ 1 + F \left[ 1 \mp 2 \frac{\mu^2}{\gamma_{ab}^2} g f^2 a (E_1^2 - E_2^2) \right] \right\}; \end{aligned} \quad (2,18)$$

\*) Для режима одной бегущей волны приведенные ниже результаты справедливы при произвольном соотношении между параметрами. Заметим, что и для режима двух встречных волн при больших расстройках относительно центра допплеровской линии, т. е. при  $\mu/\gamma_{ab} \gg 1$ , ограничение на параметры  $\gamma_a$ ,  $\gamma_b$ ,  $\gamma_{ab}$  становится несущественным.

\*\*) Выражения (2,18) получены для лазера на чистом изотопе активного газа. Аналогичные выражения для лазера на смеси изотопов в сильном поле получить сложно.

здесь

$$\left. \begin{aligned} f &= \left[ \frac{2}{g} (\sqrt{1+2gaE_0^2} - 1 + 2g + gaE_0^2) \right]^{-1/2}, \\ F &= (1 + 2gaE_0^2)^{-1/2}, \\ E_0^2 &= (E_1^2 + E_2^2)/2, \quad g = \gamma_{ab}^2 / (\mu^2 + \gamma_{ab}^2). \end{aligned} \right\} \quad (2,19)$$

В предельных случаях малых и больших полей функции  $f$  и  $F$  принимают вид

$$\left. \begin{aligned} f &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{aE_0^2}{2} \right), & F &= 1 - gaE_0^2, & aE_0^2 \ll 1, \\ f &= 1/\sqrt{2aE_0^2}, & F &= 1/\sqrt{2gaE_0^2}, & gaE_0^2 \gg 1. \end{aligned} \right.$$

Для одной бегущей волны, полагая в (2,18) и (2,19)  $E_2 = 0$ , получаем

$$\kappa' = 0, \quad \kappa'' = -\frac{d}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{1+aE_0^2}}. \quad (2,20)$$

Для режима стоячей волны ( $E_1 = E_2 = E_0$ ) при  $\mu = 0$  имеем

$$\kappa'_c = 0, \quad \kappa''_c = -\frac{d}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{1+2aE_0^2}}. \quad (2,20')$$

В случае слабых полей выражения (2,18), (2,20), (2,20') можно разложить в ряд по  $aE_0^2$ :

$$\left. \begin{aligned} \kappa'_{1,2} &= -\frac{d}{4\pi} baE_{2,1}^2, & \kappa''_{1,2} &= -\frac{d}{4\pi} (1 - \alpha aE_{1,2}^2 - \beta aE_{2,1}^2), \\ \kappa' &= 0, \quad \kappa'' = -\frac{d}{4\pi} (1 - \alpha aE_0^2), \\ \kappa'_c &= 0, \quad \kappa''_c = -\frac{d}{4\pi} (1 - aE_0^2); \end{aligned} \right\} \quad (2,21)$$

здесь

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{g}{2}, \quad b = \frac{\mu}{\gamma_{ab}} \frac{g}{2}. \quad (2,22)$$

Выражения (2,21) будут справедливы и с учетом пространственной модуляции населенностей. При этом коэффициент  $\beta$  будет иметь вид

$$\beta = \frac{g}{2} - \frac{\gamma^2}{2(ku)^2}.$$

В сильном поле ( $aE_0^2 \gg 1$ ) из формул (2,18) — (2,20) находим

$$\left. \begin{aligned} \kappa'_{1,2} &= -\frac{d}{4\pi} \frac{\mu}{\gamma_{ab}} \frac{1}{\sqrt{2aE_0^2}}, & \kappa''_{1,2} &= -\frac{d}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{2aE_0^2}}, \\ \kappa' &= 0, & \kappa'' &= -d/4\pi \sqrt{aE^2}. \end{aligned} \right.$$

Как уже отмечалось выше, для случая  $ku/\gamma_{ab} \ll 1$ , когда движением атомов можно пренебречь, удается получить точное решение уравнений для матрицы плотности с учетом пространственной модуляции населенностей. Выражения для  $\kappa'_{1,2}$ ,  $\kappa''_{1,2}$  в этом случае имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \kappa'_{1,2} &= (\mu/\gamma_{ab}) \kappa''_{1,2}, \\ \kappa''_{1,2} &= -\frac{e^2 |r_{ab}|^2 n D^0}{6\hbar\gamma_{ab} a E_{1,2}^2} \left\{ 1 - \frac{1 \mp ga(E_1^2 - E_2^2)}{\sqrt{1+2ga(E_1^2 + E_2^2) + g^2 a^2 (E_1^2 - E_2^2)^2}} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (2,23)$$

В режиме стоячей волны в формулах (2,23)  $E_1 = E_2 = E_0$ . Соответствующее выражение для  $\kappa'_{1,2}$  без учета модуляции имеет вид

$$\kappa'_{1,2} = -\frac{e^2 |r_{ab}|^2 n D^0}{3\hbar \gamma_{ab}} \frac{g}{1 + g(aE_1^2 + aE_2^2)}. \quad (2,24)$$

Перейдем к рассмотрению спектральных плотностей спонтанных флуктуаций. Для их вычисления используются уравнения для функций  $\delta\rho_a$ ,  $\delta\rho_b$ ,  $\delta\rho_{ab}$ . Вместо  $\delta\rho_a$ ,  $\delta\rho_b$  удобней использовать функции  $\delta D = \delta\rho_a - \delta\rho_b$  и  $\delta R = \delta\rho_a + \delta\rho_b$ .

Соответствующие уравнения следуют из (2,1) — (2,4) и имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \delta D}{\partial t} &= -\frac{ie}{\hbar} [r_{ba} (\delta\tilde{\rho}_{ab}^{(1)} E_1 + \delta\tilde{\rho}_{ab}^{(2)} E_2) - \\ &\quad - r_{ab} (\delta\tilde{\rho}_{ba}^{(1)} E_1 + \delta\tilde{\rho}_{ba}^{(2)} E_2)] - \gamma_+ \delta D + \gamma_- \delta R, \\ \frac{\partial \delta R}{\partial t} &= \gamma_- \delta D - \gamma_+ \delta R, \\ \frac{\partial \delta\tilde{\rho}_{ab}^{(1,2)}}{\partial t} &= i(\mu \mp k_0 v + i\gamma_{ab}) \delta\tilde{\rho}_{ab}^{(1,2)} - \\ &\quad - \frac{ie}{2\hbar} \delta D r_{ab} E_{1,2}, \\ \delta\tilde{\rho}_{ba}^{(1,2)} &= (\delta\tilde{\rho}_{ab}^{(1,2)})^*. \end{aligned} \right\} \quad (2,25)$$

Умножим уравнения (2,25) на  $\delta\tilde{\rho}_{ba}^{(1,2)}(t')$  и усредним. В результате получим систему однородных уравнений для корреляционных функций от аргумента  $\tau = t - t'$ .

К этой системе уравнений надо добавить начальные условия — значения корреляционных функций при  $\tau = 0$ . Они следуют из формулы (5) приложения 1, если в ней пренебречь последним членом:

$$\begin{aligned} \langle \delta D \delta\tilde{\rho}_{ba}^{(i)} \rangle_{\tau=0} &= 0, \quad \langle \delta R \delta\tilde{\rho}_{ba}^{(i)} \rangle_{\tau=0} = \frac{1}{nV} \tilde{\rho}_{ba}^{(i)} \delta(v - v'), \\ \langle \delta\tilde{\rho}_a^{(i)} \delta\tilde{\rho}_{ba}^{(j)} \rangle_{\tau=0} &= \frac{\delta_{ij} \delta(v - v')}{2nV} \bar{R}, \quad \langle \delta\tilde{\rho}_{ba}^{(i)} \delta\tilde{\rho}_{ba}^{(j)} \rangle_{\tau=0} = 0, \quad i, j = 1, 2. \end{aligned} \quad (2,26)$$

Систему уравнений для корреляционных функций можно решать, используя преобразования Лапласа

$$(\delta\tilde{\rho} \delta\tilde{\rho})_{\omega}^+ = \int_0^{\infty} \langle \delta\tilde{\rho} \delta\tilde{\rho} \rangle_{\tau} e^{i\omega\tau} d\tau. \quad (2,27)$$

В выражения для спектральных плотностей источников шумов (2,17) входят спектральные плотности флуктуаций  $\delta\tilde{\rho}$  на нулевой частоте. Они связаны с функциями (2,27) соотношением

$$(\delta\tilde{\rho} \delta\tilde{\rho})_0 = 2\text{Re} (\delta\tilde{\rho} \delta\tilde{\rho})_{\omega=0}^+.$$

Наиболее простые выражения для спектральных плотностей на нулевой частоте (интенсивностей) источников поляризационного шума получаются в режиме одной бегущей волны:

$$\begin{aligned} (\xi_a^{(n)2})_0 &= \frac{2\pi\hbar \Delta\omega_p}{V\omega_0} \frac{R^0}{D^0}, \\ (\xi_{\Phi}^{(n)2})_0 &= \frac{2\pi\hbar \Delta\omega_p}{V\omega_0} \frac{R^0}{D^0} (1 + aE^2). \end{aligned} \quad (2,28)$$

Общие выражения для интенсивностей шума получены в работе <sup>266</sup>. Они приведены в приложении 2.

Интенсивности источников поляризационного шума в режиме стоячей волны можно получить из общих формул (6), (7) приложения 2, если учесть, что

$$\xi_{a,c} = (\xi_{a1} + \xi_{a2})/2, \quad \xi_{\phi,c} = (\xi_{\phi1} + \xi_{\phi2})/2$$

и, следовательно,

$$(\xi_{a,c}^2)_0 = \frac{1}{2} [(\xi_{a1,2}^2)_0 + (\xi_{a1}\xi_{a2})_0], \quad (\xi_{\phi,c}^2)_0 = \frac{1}{2} [(\xi_{\phi1,2}^2)_0 + (\xi_{\phi1}\xi_{\phi2})_0].$$

Таким образом, в выражении для спектральных плотностей  $(\xi_{a,c}^2)_0, (\xi_{\phi,c}^2)_0$  учитывается вклад корреляций амплитудных и фазовых источников флуктуаций в уравнениях для встречных волн.

В частности, при  $\gamma_a = \gamma_b$  получаем

$$(\xi_{a,c}^{(n)2})_0 = \frac{\pi\hbar\Delta\omega_p}{V\omega_0} \frac{R^0}{D^0},$$

$$(\xi_{\phi,c}^{(n)2})_0 = \frac{\pi\hbar\Delta\omega_p}{V\omega_0} \frac{R^0}{D^0} \left( 1 + \frac{2FaE_0^2}{1+F} \right).$$

В формулах (6), (7), (2,28), (2,29) помимо явной зависимости от поля содержится еще неявная зависимость от поля через параметры  $\Delta\omega_p, D^0, R^0$ . Для сравнения с экспериментальными данными необходимо

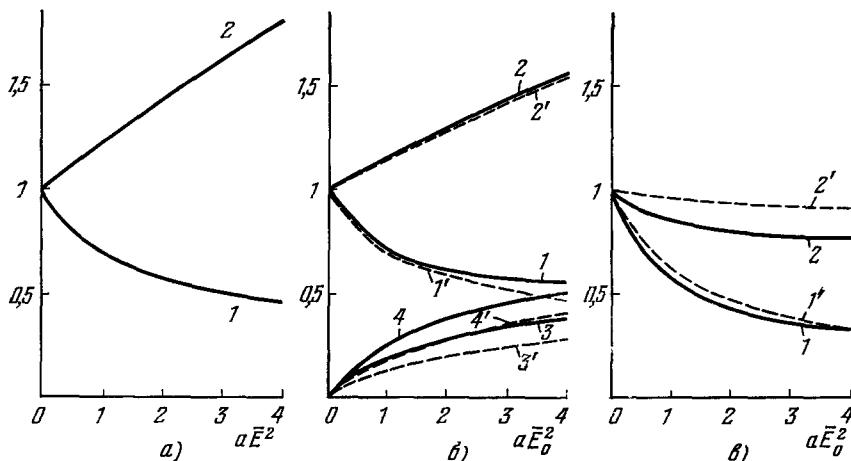


Рис. 2. Зависимость интенсивности источников шумов от амплитуды поля.

а) Режим бегущей волны: 1 —  $(\xi_{a1}^2)_0/(\xi_{a2}^2)_0 | E=0$ , 2 —  $(\xi_{a1}^2)_0/(\xi_{a2}^2)_0 | E \neq 0$ ; б) режим двух встречных волн: 1, 1' —  $(\xi_{\phi1,2}^2)_0/(\xi_{\phi1,2}^2)_0 | E_0=0$ , 2, 2' —  $(\xi_{\phi1,2}^2)_0/(\xi_{\phi1,2}^2)_0 | E_0 \neq 0$ , 3, 3' —  $(\xi_{a1}\xi_{a2})_0/(\xi_{a1,2}^2)_0$ , 4, 4' —  $(\xi_{\phi1}\xi_{\phi2})_0/(\xi_{\phi1,2}^2)_0$ , 1—4 —  $\mu = 0$ , 1'—4' —  $\mu = \gamma_{ab}$ ; в) режим стоячей волны: 1, 1' —  $(\xi_{a,c}^2)_0/(\xi_{a,c}^2)_0 | E_0=0$ , 2, 2' —  $(\xi_{\phi,c}^2)_0/(\xi_{\phi,c}^2)_0 | E_0=0$ , 1, 2 —  $\mu = 0$ , 1', 2' —  $\mu = \gamma_{ab}$ .

исключить эту неявную зависимость. Вид этой зависимости определяется способом изменения поля. В работах Зайцева, Андроновой и др. <sup>9-11</sup> поле изменялось путем изменения потерь в резонаторе, т. е. путем изменения  $\Delta\omega_p$ , при постоянном токе накачки. Подставив в формулы (2,28), (6), (7), (2,29)  $\Delta\omega_p = -4\pi\omega_0\chi''(E_0)$ , получим явную зависимость интенсивностей источников флуктуаций от поля. Графики этих зависимостей представлены на рис. 2.

При записи формул (2,28), (2,29), (6), (7) использовалось условие стационарного режима генерации  $\Delta\omega_p + 4\pi\omega_0\kappa'' = 0$ . Если вместо  $\Delta\omega_p$  в эти формулы снова подставить  $-4\pi\omega_0\kappa''$ , то можно получить предельный переход к равновесному состоянию.

В равновесии  $E = 0$ ,  $\kappa'' > 0$  и

$$-\frac{1}{2} \frac{R^0}{D^0} = \frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\hbar\omega_{ab}/kT} - 1} \equiv \bar{n} + \frac{1}{2}.$$

Поэтому из формул (2,28) следуют выражения

$$(\xi_a^{(n)} \xi_a^{(n)})_0 = (\xi_\phi^{(n)} \xi_\phi^{(n)})_0 = \frac{(4\pi)^2 \hbar \kappa''}{V} \left( \bar{n} + \frac{1}{2} \right).$$

В режиме генерации оба сомножителя ( $\kappa''$  и  $R^0/D^0$ ) меняют знак.

Из формул (2,28), (2,29) и общих формул (6), (7) видно, что интенсивности источников шумов, входящих в уравнения для амплитуд и фаз поля, при отличной от нуля амплитуде поля существенно отличаются друг от друга даже по характеру зависимости от поля. Такое отличие вызвано следующим. Флуктуации матрицы плотности в соответствии с уравнениями (2,25) зависят от мгновенного значения среднего поля  $E$  и, следовательно, не являются стационарными случайными процессами. (Стационарными являются лишь медленно меняющиеся амплитуды этих флуктуаций.) Соответственно флуктуации поляризации  $\delta P$ , входящие в выражения (2,13) для источников шумов, также не являются стационарными. В силу этого выражение  $\langle \delta P(t) \delta P(t + \tau) \cos(\omega_0(2t + \tau) \mp \mp 2k_0r + \varphi) \rangle$  отлично от нуля. Оно входит в выражения для корреляционных функций источников амплитудного и фазового шума с разными знаками, поэтому интенсивности этих источников различны.

По этой же причине получаются отличными от нуля и корреляции источников флуктуаций для встречных волн в кольцевом лазере  $(\xi_a \xi_a)_0$ ,  $(\xi_\phi \xi_\phi)_0$  даже без учета вторых пространственных гармоник населенностей рабочих уровней, т. е. без учета пространственной модуляции населенностей. Учет пространственной модуляции может дать дополнительные члены в корреляционных функциях источников.

Отметим еще одно важное обстоятельство. Из формул (2,13) следует, что средние значения источников шумов  $\xi_a$ ,  $\xi_\phi$  равны нулю, если можно пренебречь корреляцией случайных отклонений  $\delta P$ ,  $E^{(t)}$  и фазы поля. Это имеет место при достаточно большом поле, так как изменение фазы при заданном шуме обратно пропорционально полю.

У порога генерации среднее значение амплитудного шума отлично от нуля и равно <sup>49</sup>

$$\bar{\xi}_a = \omega_0 (\xi_a^2)_0 / 2E, \quad \text{а} \quad \bar{\xi}_\phi = 0.$$

Черта означает усреднение по времени на интервалу  $1/\gamma_{ab} \ll \Delta t \ll 1/\Delta\omega_\phi$ .

Анализ полученных выражений и графиков для источников поляризационного шума показывает, что при достаточно большой расстройке, когда  $|\mu| \gg \gamma_{ab}$ , интенсивности источников шумов для всех трех режимов одинаковы (отличие вдвое для режима стоячей волны связано со способом задания амплитуды). При расстройках  $|\mu| \leq \gamma_{ab}$  интенсивности источников для разных режимов различны.

При изменении мощности путем изменения потерь при всех режимах интенсивности источников шумов, входящих в уравнения для амплитуд, убывают с ростом поля. Интенсивности же источников шумов, входящих в уравнения для фаз, в режиме бегущей волны и двух встречных волн

растут с ростом поля. В режиме же стоячей волны характер зависимости интенсивности фазового шума от поля обусловлен расстройкой. При

$$\mu^2/\gamma_{ab}^2 \geq \gamma_b D^0 / \rho_b \gamma_+$$

интенсивность фазового шума растет с ростом поля, в противном случае убывает. В сильном поле интенсивность источника фазового шума стремится к константе.

Заметим также, что в сильном поле между источниками поляризационного шума для встречных волн имеется почти полная «антикорреляция» (коэффициент корреляции стремится к  $-1$ ). Это означает, что сумма источников флуктуирует значительно слабее, чем их разность.

В режиме стоячей волны при однородном уширении линии, когда  $k_i \ll \gamma_{ab}$  и  $\gamma_a = \gamma_b$ , для спектральных плотностей спонтанных флуктуаций поляризации<sup>47</sup> получаем

$$\begin{aligned} (\xi_{a,c}^{(n)2})_0 &= \frac{\pi\hbar\Delta\omega_p}{\omega_0 V} \frac{R^0}{D^0}, \\ (\xi_{\phi,c}^{(n)2})_0 &= \frac{\pi\hbar\Delta\omega_p}{\omega_0 V} \frac{R^0}{D^0} \left( \frac{2aE_0^2 \sqrt{1+4gaE_0^2}}{\sqrt{1+4gaE_0^2}-1} - \frac{\mu^2}{\gamma_{ab}^2} \right). \end{aligned} \quad (2,30)$$

Величина  $\Delta\omega_p = -4\pi\omega_0\kappa''$ , где  $\kappa''$  определяется формулой (2,23) при  $E_1 = E_2 = E_0$ . Для режима бегущей волны выражения для интенсивностей шума совпадают с формулами (2,28).

Заметим, что расчет интенсивностей источников флуктуаций для кольцевого лазера с однородно уширенной линией показывает, что учет пространственной модуляции оказывает существенное влияние на корреляции источников флуктуаций для встречных волн. Влияние модуляции населенностей на корреляции флуктуаций может оказаться существенным и для случая неоднородно уширенной линии.

Отметим еще раз, что приведенные выражения для источников теплового и поляризационного шумов включают вклады нулевых флуктуаций. Аналогичным путем, используя начальные условия, не включающие нулевых флуктуаций поляризации, можно получить источники шумов, которые определяются лишь спонтанным излучением. Мы не приводим здесь соответствующие выражения, так как выделение спонтанных частей может быть проведено в окончательных выражениях.

### 3. ФЛУКТУАЦИИ АМПЛИТУДЫ И ФАЗЫ В ЛИНЕЙНОМ ГАЗОВОМ ЛАЗЕРЕ

При рассмотрении флуктуаций в линейном лазере зададим поле в виде стоячей волны

$$E(r, t) = E_0 \cos \left( kr - \frac{\Phi}{2} \right) e^{-i(\omega_0 t + \varphi)} + \text{к. с.} \quad (3,1)$$

Это выражение следует из (2,9) для встречных волн, если положить  $E_1 = E_2 = E_0$ ,  $\varphi = (\varphi_1 + \varphi_2)/2$ . Величина  $\Phi$  постоянна и определяется граничными условиями.

Таким образом, описание флуктуаций в линейном лазере отличается от описания флуктуаций в кольцевом лазере тем, что разности  $E_1 - E_2$ ,  $\varphi_1 - \varphi_2$  не флуктуируют.

Уравнения для  $E$ ,  $\varphi$  имеют вид (индекс «0» у  $E_0$  опускаем; в дальнейшем  $E_0$  будет обозначать амплитуду поля без учета флюктуаций)

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= \frac{\omega_0}{2} \left( 4\pi \kappa_c'' + \frac{1}{Q} \right) E + \omega_0 \xi_{a,c}(t), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= -\frac{\omega_0}{2} 4\pi \kappa_c' + \frac{\omega_0}{E} \xi_{\varphi,c}(t).\end{aligned}\quad (3,2)$$

Величины  $\kappa'_c$ ,  $\kappa''_c$  определяются формулами (2,18) при  $E_1 = E_2 = E_0$ .

3.1. Флуктуации амплитуды. В корреляционном приближении, полагая  $E = E_0 + \delta E$ , из первого уравнения (3,2) получаем следующие выражения для спектральных плотностей флюктуаций амплитуды  $E$  и интенсивности  $E^2$ :

$$(\delta E^2)_\omega = \frac{\omega_0^2 (\xi_a^2, c)_0}{\omega^2 - (\Delta\omega_a)^2}, \quad (\delta (E^2)^2)_\omega = 4E_0^2 (\delta E^2)_\omega. \quad (3,3)$$

Ширина спектра амплитудных флюктуаций  $\Delta\omega_a$  определяется формулой

$$\Delta\omega_a = 4\pi\omega_0 \frac{\partial \kappa''}{\partial E^2} E_0^2 = \omega_0 df [f^2 (1 + F)^2 + gF^3] a E_0^2. \quad (3,4)$$

В слабом поле с учетом (2,21) и условия стационарной генерации это выражение принимает вид

$$\Delta\omega_a = \Delta\omega_p \eta, \quad (3,5)$$

где  $\eta = Qd - 1$  — превышение накачки над порогом.

Сравним результаты расчета флюктуаций интенсивности с экспериментальными данными работы Зайцева <sup>9</sup>. На рис. 3 (кривая 1) приведена зависимость ширины спектра  $\Delta\omega_a$  от интенсивности поля, построенная по формуле (3,4) при нулевой расстройке ( $\mu = 0$ ). При этом условии формула (3,4) содержит один неизвестный параметр  $d$ . Однако при сравнении с экспериментальными данными для зависимости  $\Delta\omega_a$  от мощности надо знать еще один параметр, характеризующий связь между  $E_0^2$  и  $P$ .

Полная мощность излучения лазера связана с  $E_0^2$  соотношением

$$P = (E_0^2 / 4\pi) V \Delta\omega_p.$$

Ширина полосы резонатора при неизменной накачке сама изменяется с изменением мощности. Эта зависимость следует из условия стационарного решения уравнений (3,2).

Экспериментально измеряется не величина  $P$ , а доля этой величины  $P_t$ , которая определяется прозрачностью выходного зеркала.

$$P_t = (E_0^2 / 4\pi) V \Delta\omega_t.$$

где  $\Delta\omega_t = c(1 - r)/I$ , т. е. не зависит от  $E_0^2$ .

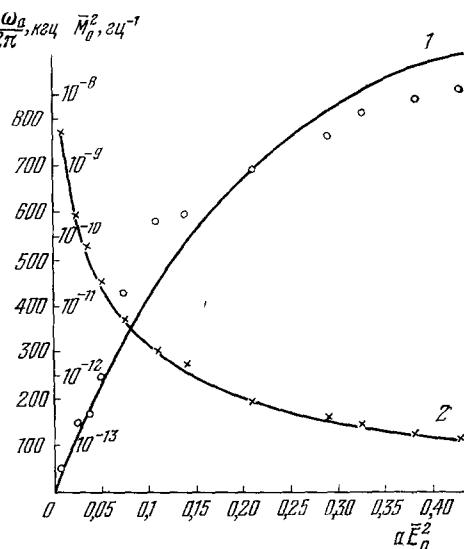


Рис. 3. Зависимость ширины спектра амплитудных флюктуаций (1) и относительной спектральной плотности флюктуаций и интенсивности в нуле (2) от мощности при  $\mu = 0$ .

Величина  $P_t$  пропорциональна  $E_0^2$ :

В работах <sup>9-11</sup> графики построены в зависимости от  $P$ . Это требует дополнительного пересчета экспериментальных и теоретических данных. Более естественно строить графики в зависимости от  $P_t$ . Соответствующие дополнительные сведения о значениях  $P_t$  нам были любезно сообщены авторами работ <sup>9-11</sup>. На основании этих данных на графиках рис. 3 были нанесены экспериментальные точки. Неизвестные параметры  $d$  и  $\gamma_t = aE_0^2/P_t$  были определены из условия совпадения в двух точках.

Величины этих параметров оказались следующими:

$$d = 1,15 \cdot 10^{-8}, \quad \gamma_t = 1,16 \cdot 10^{-2} \text{ мквт}^{-1}.$$

Кривая 2 на рис. 3 представляет собой зависимость относительной плотности флуктуаций интенсивности на нулевой частоте ( $M_0^2 = (\delta(E^2))^2/E_0^2$ ) от мощности  $P_t$ . Видно, что имеет место достаточно хорошее согласие теории с экспериментом. Заметим, что без учета зависимости интенсивности источника амплитудных флуктуаций от  $aE_0^2$  теоретическая кривая, начиная с  $aE_0^2 = 0,2$ , идет заметно выше.

Из формул (3,4), (3,3) находим выражения для дисперсии амплитуды и интенсивности:

$$\langle \delta E^2 \rangle = (\omega_0^2/2\Delta\omega_a) \langle \xi_{\text{sa}}^2, c \rangle_0, \quad \langle \delta (E^2)^2 \rangle = 2\omega_0^2 E_0^2 \langle \xi_{\text{sa}}^2, c \rangle_0 / \Delta\omega_a. \quad (3,6)$$

Установим связь выражений для флуктуаций амплитуды с экспериментально измеряемыми величинами — средним числом фотонов  $\langle n_\Phi \rangle$  и дисперсией числа фотонов  $\langle \delta n_\Phi^2 \rangle$ .

Среднее число фотонов связано со средним значением квадрата поля в режиме бегущей волны соотношением

$$\langle E^2 \rangle = E_0^2 + \langle \delta E^2 \rangle = (8\pi\hbar\omega_0/V) \left( \langle n_\Phi \rangle + \frac{1}{2} \right).$$

Отсюда, зная превышение над порогом и используя формулу (3,6), можно найти среднее число фотонов.

Выражения (3,6) определяют флуктуации интенсивности излучения, непосредственно связанные с  $\langle \delta n_\Phi^2 \rangle$ . Так, для бегущей волны

$$\langle \delta (E^2)^2 \rangle = (8\pi\hbar\omega_0/V)^2 \langle \delta n_\Phi^2 \rangle.$$

Относительная дисперсия интенсивности в слабом поле определяется выражением

$$\frac{\langle \delta (E^2)^2 \rangle}{E_0^4} = \frac{N_c^2}{I^2}, \quad I = \frac{2}{1+g} \eta \frac{1}{Qd}. \quad (3,7)$$

Здесь введено обозначение для безразмерной интенсивности шума

$$N_c^2 = \frac{4}{1+g} \frac{\omega_0 a \langle \xi_{\text{sa}}^2, c \rangle_0}{d}. \quad (3,8)$$

Из формулы (3,7) следует условие применимости корреляционного приближения

$$N_c \ll I. \quad (3,9)$$

В нулевом приближении по полю при значениях параметров  $\omega_0 = 3 \cdot 10^{15} \text{ сец}^{-1}$ ,  $V = 1 \text{ см}$ ,  $d \approx 10^{-8}$ ,  $\frac{a}{V} \left( 1 + \frac{R^0}{D^0} \right) = 2 \cdot 10^3 \text{ CGSE}$ ,  $\mu = 0$  получаем  $N_c = 0,5 \cdot 10^{-4}$ .

Из (3,9) следует, что корреляционное приближение справедливо, если мощность излучения много больше 1 мквт.

Используя формулы (3,4), (2,23), можно рассчитать, например, ширину спектра амплитудных флуктуаций для лазера с однородным уширением линии, когда  $\gamma_{ab} \gg k u$ . В слабом поле получаем для  $\Delta\omega_a$  выражение

$$\Delta\omega_a = 3\Delta\omega_p g a E_0^2.$$

Без учета пространственной модуляции населенности в этой формуле коэффициент 3 заменяется на 2. Если выразить  $\Delta\omega_a$  через превышение накачки над порогом, то результаты совпадут. Действительно, с учетом модуляции

$$aE_0^2 = \frac{1}{4} \left( 3 + 4\eta - 3\sqrt{1 + \frac{8}{9}\eta} \right),$$

откуда при малых  $\eta$  имеем  $aE_0^2 = 2\eta/3$ . Без учета модуляции  $aE_0^2 = \eta$ .

3.2. Флуктуации амплитуды и интенсивности у порога генерации. У порога генерации условие (3,9) не выполняется. Для расчета флуктуаций амплитуды и интенсивности в этом случае следует использовать метод уравнения Фоккера — Планка<sup>48, 49</sup>. Вблизи порога поле мало ( $aE^2 \ll 1$ ), поэтому в уравнении (3,2) для  $E$  функцию  $\kappa''$  можно разложить по  $aE^2$  и удержать два первых члена. В результате уравнение (3,2) принимает вид

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\Delta\omega_p}{4} (1+g) (I - aE^2) E + \omega_0 \xi_a(t). \quad (3,10)$$

В стационарном режиме генерации без учета шумов

$$aE_0^2 = I.$$

Соответствующее уравнение Фоккера — Планка для функции  $W(E)$  с учетом того, что  $\xi_a(t) = (\xi_a^2)_0/2E$ , имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial E} \left\{ \left[ \frac{\Delta\omega_p}{4} (1+g) (I - aE^2) E + \frac{\omega_0^2 (\xi_a^2)_0}{2E} \right] W \right\} + \\ + \frac{\omega_0^2}{2} (\xi_a^2)_0 \frac{\partial^2 W}{\partial E^2}. \end{aligned} \quad (3,11)$$

Отсюда находим стационарное распределение

$$W(E) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2a}{N_c} \left[ 1 + \Phi \left( \frac{I}{N_c} \right) \right]^{-1} E \exp \left( -\frac{(aE^2 - I)^2}{2N_c^2} \right). \quad (3,12)$$

Из этого распределения следует общее выражение для моментов

$$\langle E^n \rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \frac{N_c}{a} \right)^{n/2} \frac{n}{2} \Gamma \left( \frac{n}{2} \right) \left[ 1 + \Phi \left( \frac{I}{N_c} \right) \right]^{-1} e^{-I^2/4N_c^2} D_{-(n/2+1)} \left( -\frac{I}{N_c} \right). \quad (3,13)$$

Представляют интерес три предельных случая:

- 1) При значительном превышении над порогом генерации, когда  $I \gg N_c$ , из (3,13) следуют формулы корреляционной теории.
- 2) У порога генерации ( $|I| \ll N_c$ ) из (3,13) находим

$$\begin{aligned} \langle \delta E^2 \rangle &= 0,12 \frac{N_c}{a} \left( 1 + 0,25 \frac{I}{N_c} \right), \\ \frac{\langle \delta E^2 \rangle}{\langle E \rangle^2} &= 0,18 - 0,05 \frac{I}{N_c}, \quad \frac{\langle (\delta E^2)^2 \rangle}{\langle E^2 \rangle^2} = 0,57 - 0,28 \frac{I}{N_c}. \end{aligned} \quad (3,14)$$

Расчет показывает, что вид формул (3,13), (3,14) остается неизменным и для неподвижных атомов.

3) Ниже порога возбуждения при  $|I| \gg N_c$ ,  $I < 0$  из формулы (3.13) находим

$$\langle E \rangle = \frac{\sqrt{\pi} N_c}{2 \sqrt{a |I|}}, \quad \langle E^2 \rangle = \frac{N_c^2}{a |I|}, \quad \langle E^4 \rangle = \frac{2N_c^4}{a^2 I^2}. \quad (3.15)$$

Отсюда

$$\langle \delta E^2 \rangle = \frac{N_c^2}{a I} \frac{4 - \pi}{4}, \quad \langle (\delta E^2)^2 \rangle = \frac{N_c^4}{a^2 I^2} = \langle E^2 \rangle^2. \quad (3.15')$$

Из второй формулы (3.15') следует выражение для среднего квадратичного значения числа фотонов:

$$\frac{\langle (\delta E^2)^2 \rangle}{\langle E^2 \rangle^2}, \quad \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\langle (\delta E^2)^2 \rangle}{\langle (\delta E^2)^2 \rangle_{\text{пор}}}}$$

$$\langle \delta n_\Phi^2 \rangle = \left( \langle n_\Phi \rangle + \frac{1}{2} \right)^2.$$

Точное выражение для  $\langle \delta n_\Phi^2 \rangle$  имеет вид

$$\langle \delta n_\Phi^2 \rangle = \langle n_\Phi \rangle (\langle n_\Phi \rangle + 1).$$

(3.16)

Они совпадают при большом числе фотонов, когда только и справедливо полуклассическое описание.

По экспериментальным данным Арекки, Родари и Соны<sup>6</sup>, число фотонов на пороге равно 4000. Расчет показывает, что при  $V = 0,25 \text{ см}^3$ ,  $a = 10^2 \text{ CGSE}$ ,  $N_c = 10^{-4}$ ,  $\omega = 3 \cdot 10^{15} \text{ сец}^{-1}$  имеем  $\langle n \rangle = 5 \cdot 10^3$ .

В работах Хэмстеда, Лэкса<sup>39</sup> и Рискена<sup>25</sup> соответствующие расчеты проведены для неподвижных атомов. Полученные ими результаты по форме совпадают с приведенными выше.

Проведем теперь сравнение теоретических и экспериментальных данных для флюктуаций интенсивности вблизи порога. На рис. 4 (кривая 1)

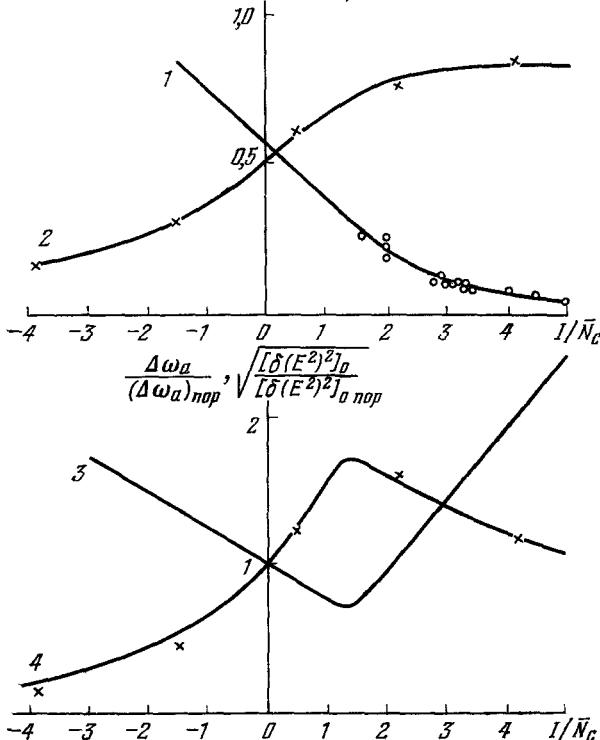


Рис. 4.

$$1 - \frac{\langle (\delta E^2)^2 \rangle}{\langle E^2 \rangle^2}; \quad 2 - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\langle (\delta E^2)^2 \rangle}{\langle (\delta E^2)^2 \rangle_{\text{пор}}}};$$

$$3 - \frac{\Delta \omega_a}{(\Delta \omega_a)_{\text{пор}}}; \quad 4 - \sqrt{\frac{\langle (\delta E^2)^2 \rangle_0}{\langle (\delta E^2)^2 \rangle_{\text{пор}}}}.$$

приведена зависимость относительной дисперсии интенсивности от величины  $I/N_c$ . Кружочками отмечены экспериментальные данные Смита, Армстронга<sup>12</sup>. Кривая 2 изображает зависимость квадратного корня из дисперсии. Крестиками отмечены результаты экспериментов Арекки и др.<sup>13</sup>.

Чтобы определить спектральную функцию флюктуаций амплитуды и интенсивности, надо знать нестационарное решение уравнения Фоккера — Планка (3.11). Такое решение было получено в работах<sup>25, 39</sup>. Ока-

залось, что форма спектральной линии вблизи порога лишь незначительно отличается от лоренцевской.

Приведем результаты расчета ширины спектра амплитудных флуктуаций вблизи порога, полученные в предположении лоренцевской формы линии<sup>27</sup>. Из формулы (3,6) следует, что

$$\Delta\omega_a = \omega_0^2 (\xi_{a,c}^2)_0 / 2 \langle \delta E^2 \rangle. \quad (3,17)$$

Отсюда, используя формулу (3,14), найдем

$$\Delta\omega_a = (\Delta\omega_a)_{\text{пор}} \left( 1 - 0,25 \frac{I}{N_c} \right); \quad (3,18)$$

здесь

$$(\Delta\omega_a)_{\text{пор}} \approx 2\omega_0 dN_c. \quad (3,19)$$

Зависимость  $\Delta\omega_a$  от  $I/N_c$  изображена на рис. 4 (кривая 3). Эта зависимость достаточно хорошо совпадает с приведенной в работе<sup>57</sup>, рассчитанной по точной теории Рискена<sup>25</sup>.

При  $\omega_0 d/2\pi = 10^6 \text{ гц}$ ,  $\mu = 0$ ,  $N_c = 10^{-4}$  из формулы (3,19) находим  $(\Delta\omega_a)_{\text{пор}}/2\pi \approx 200 \text{ гц}$ .

В работе Фрида и Хауса<sup>8</sup> было проведено измерение ширины линии амплитудных флуктуаций в областях выше и ниже порога при

$$8 \leq I/N_c < 800, \quad -80 \leq I/N_c \leq -8.$$

Результаты были экстраполированы на область порога. Из приведенного в работе<sup>8</sup> графика следует, что  $(\Delta\omega_a)_{\text{пор}}/2\pi \approx 100 \text{ гц}$ . В работе Ареекки, Родари и Соны<sup>6</sup> ширина спектра амплитудных флуктуаций при ширине полосы резонатора  $\Delta\omega_p/2\pi = 27 \text{ Мгц}$  равна на пороге  $(\Delta\omega_a)_{\text{пор}}/2\pi = 1,4 \text{ кгц}$ .

Как уже отмечалось, приведенные здесь результаты для движущихся атомов по форме совпадают с результатами расчетов для неподвижных атомов. Обзор этих результатов дан в работе Рискена<sup>60</sup>.

3.3. Флуктуации фазы и частоты. Из уравнения (3,2) в корреляционном приближении находим уравнение для флуктуаций фазы

$$\frac{d\delta\phi}{dt} = \frac{\omega_0}{E} [K\delta E + \xi_{\phi,c}(t)]; \quad (3,20)$$

здесь

$$K = -4\pi \frac{\partial\kappa'}{\partial E^2} E^2 = \frac{\mu}{\gamma_{ab}} da E^2 f [gF^3 - f^2 (1 - F^2)].$$

Член  $K\delta E$  характеризует влияние амплитудных флуктуаций на флуктуации фазы и частоты.

Из уравнения (3,20) следует выражение для спектральной плотности флуктуаций частоты:

$$(\dot{\delta\phi})_\omega^2 = (\omega_0^2/E^2) [K^2 (\delta E^2)_\omega + (\xi_{\phi,c}^2)_\omega]. \quad (3,21)$$

При выводе (3,21) мы учли отсутствие корреляции величин  $\xi_{a,c}$ ,  $\xi_{\phi,c}$  (см. (2,15), (2,17)).

В книгах по статистической радиофизике<sup>48-50</sup> показано, что для времен, значительно превышающих время корреляции источника шума, в уравнении (3,20) среднее квадратичное значение набега фазы равно

$$\langle (\phi(t+\tau) - \phi(t))^2 \rangle \equiv \langle \delta\phi_\tau^2 \rangle = D |\tau|. \quad (3,22)$$

Коэффициент диффузии фазы  $D$  определяется выражением

$$D = (\dot{\delta\phi}^2)_0.$$

Для уравнения (3,20) время корреляции источника определяется временем корреляции амплитудных флуктуаций, поэтому условие применимости формулы (3,22) имеет вид

$$\tau \gg 1/\Delta\omega_a.$$

Подставляя в (3,21) выражение (3,3) для спектральной плотности амплитудных флуктуаций при  $\omega = 0$ , получим

$$D = \frac{\omega_0^2}{E^2} \left[ K^2 \frac{\omega_0^2}{(\Delta\omega_a)^2} (\xi_a^2, c)_0 + (\xi_\Phi^2, c)_0 \right]. \quad (3,23)$$

В слабом поле

$$K = \frac{1}{2} \frac{\mu}{\gamma_{ab}} g da E^2,$$

и, следовательно (с учетом (3,5)),

$$D = \frac{\omega_0^2}{E^2} (\xi_\Phi^2, c)_0 \left[ 1 + \frac{\mu^2}{\gamma_{ab}^2} \frac{g^2}{(1+g)^2} \right]. \quad (3,24)$$

В сильном поле при  $aE^2 \gg 1$

$$D = \frac{\pi\hbar d\omega_0^2}{VE^2 \sqrt{g}} \left( \frac{R^0}{D^0} + \frac{\gamma_-}{2\gamma_+} \right). \quad (3.25)$$

Из формул (3,24) и (3,25) следует, что как в слабом, так и в сильном поле коэффициент диффузии фазы в режиме стоячей волны убывает обратно пропорционально квадрату поля излучения.

Более точная формула для среднеквадратичного набега фазы, справедливая и при  $\tau \leq 1/\Delta\omega_a$ , имеет вид

$$\langle \delta\varphi_t^2 \rangle = D |\tau| - \frac{(\delta E^2)_0 \omega_0^2 K^2}{\Delta\omega_a E^2} (1 - e^{-\Delta\omega_a |\tau|}). \quad (3,26)$$

Определим форму спектра поля в лазере и вычислим естественную ширину линии излучения.

Из формулы (3,1) находим выражение для корреляционной функции поля в лазере:

$$\langle EE_\tau \rangle = \langle (\langle E \rangle + \delta E)_t (\langle E \rangle + \delta E)_{t+\tau} \cos(\omega_0 t + \varphi_t) \cos(\omega_0(t+\tau) + \varphi_{t+\tau}) \rangle. \quad (3,27)$$

При достаточно больших превышениях накачки над порогом, когда распределение вероятностей для флуктуаций амплитуд и набега фазы можно считать гауссовским, из (3,27) получаем следующее приближенное выражение для корреляционной функции поля:

$$\begin{aligned} \langle EE_\tau \rangle &= \left( E_0^2 \cos \omega_0 \tau - \frac{2\omega_0 K \langle \delta E^2 \rangle}{\Delta\omega_a} \sin \omega_0 \tau \right) e^{-\langle \delta\varphi_\tau^2 \rangle / 2} + \\ &+ \left( \langle \delta E^2 \rangle \cos \omega_0 \tau + \frac{2\omega_0 K \langle \delta E^2 \rangle}{\Delta\omega_a} \sin \omega_0 \tau \right) e^{-\Delta\omega_a \tau - \langle \delta\varphi_\tau^2 \rangle / 2} - \\ &- \frac{\omega_0^2 K^2 \langle \delta E^2 \rangle^2}{E_0^2 (\Delta\omega_a)^2} \cos \omega_0 \tau e^{-2\Delta\omega_a \tau - \langle \delta\varphi_\tau^2 \rangle / 2}. \end{aligned} \quad (3,28)$$

Совершая преобразование Фурье, при  $D \ll \Delta\omega_a$  находим \*

$$\begin{aligned} (E^2)_\omega &= \frac{E_0^2 D / 2}{(\omega - \omega_0)^2 + (D^2 / 4)} \left( 1 + \frac{4\omega_0 K \langle \delta E^2 \rangle}{\Delta\omega_a E_0^2} \frac{\omega - \omega_0}{D} \right) + \\ &+ \frac{\langle \delta E^2 \rangle [\Delta\omega_a + (D/2)]}{(\omega - \omega_0)^2 + [\Delta\omega_a + (D/2)]^2} \left[ 1 - \frac{\omega_0^2 K^2}{(\Delta\omega_a)^2} - \frac{2\omega_0 K (\omega - \omega_0)}{(\Delta\omega_a)^2} \right] - \\ &- \frac{2\omega_0^2 K^2 \langle \delta E^2 \rangle^2}{\Delta\omega_a E_0^2} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + 4(\Delta\omega_a)^2}. \end{aligned} \quad (3,29)$$

\*) Выражение, аналогичное (3,29), впервые получено в работе Малахова <sup>63</sup>.

Из выражения (3,29) следует, что спектр генерируемого сигнала в лазере представляет собой сумму трех линий. Одна из линий определяется флуктуациями набега фазы и представляет собой узкую линию почти лоренцевской формы с шириной  $\Delta\omega = D$  и интенсивностью  $\sim E^2$ . Вторая линия, обусловленная амплитудными флуктуациями и корреляцией между фазовыми и амплитудными флуктуациями, имеет ширину  $\sim 2\Delta\omega_a$ . Эта линия значительно шире первой, но значительно менее интенсивна. Заметим, что линия шириной  $2\Delta\omega_a$  является существенно несимметричной. Третья линия, еще более слабая, имеет ширину  $\sim 4\Delta\omega_a$ . В слабом поле наибольшее значение параметра  $\omega_0 K / \Delta\omega_a$  равно 0,25 и, следовательно, влияние амплитудных флуктуаций на фазовые не является существенным. В хорошем приближении спектр поля в лазере можно записать в виде

$$\begin{aligned} (E^2)_\omega &= \frac{\langle E \rangle^2 D/2}{(\omega - \omega_0)^2 + (D/2)^2} + \\ &+ \frac{\langle \delta E^2 \rangle [\Delta\omega_a + (D/2)]}{(\omega - \omega_0)^2 + [\Delta\omega_a + (D/2)]^2}. \end{aligned} \quad (3,30)$$

Зависимость ширины линии излучения  $\Delta\omega \approx D$  от  $aE_0^2$ , вычисленная по формуле (3,23) при нулевой расстройке частоты относительно центра допплеровской линии, приведена на рис. 5. На кривую нанесены экспериментальные данные, полученные в работе Зайцева и Степанова<sup>4</sup>. При выбранных значениях параметров экспериментальные данные отличаются от теоретических не более чем на 20%.

Как уже отмечалось, в слабом поле, а следовательно, и у порога генерации влияние амплитудных флуктуаций на фазовые мало. Вследствие этого даже у порога генерации набег фазы меняется приближенно по диффузионному закону с коэффициентом диффузии

$$D = (\omega_0^2 / \langle E^2 \rangle) (\xi_\Phi^2, c)_0. \quad (3,31)$$

Для спектра излучения лазера вблизи порога приближенно справедлива формула (3,30). Ширину спектра излучения можно найти, разделив интенсивность спектральной линии на значение спектральной плотности при  $\omega = \omega_0$ . Тогда из (3,30) получим

$$\Delta\omega = 4 \frac{\langle E^2 \rangle + \langle \delta E^2 \rangle}{(E^2)_\omega} = \alpha \left( \frac{I}{N_c} \right) D, \quad (3,32)$$

где

$$I = \frac{2}{1+g} \left( 1 - \frac{1}{Qd} \right), \quad \alpha \left( \frac{I}{N_c} \right) = 1 + \frac{\langle \delta E^2 \rangle}{\langle E \rangle^2}$$

При большом превышении над порогом  $\alpha = 1$ . На пороге, используя формулу (3,14), находим  $\alpha = 1,18$ . Ниже порога генерации при  $|I| \gg N_c$   $I < 0$ . Формула (3,32) дает

$$\alpha = 1 + \frac{4-\pi}{\pi} = \frac{4}{\pi}.$$

Однако приближения, при которых получена формула (3,32), в этом случае уже не оправданы. Результат может быть получен непосредственно

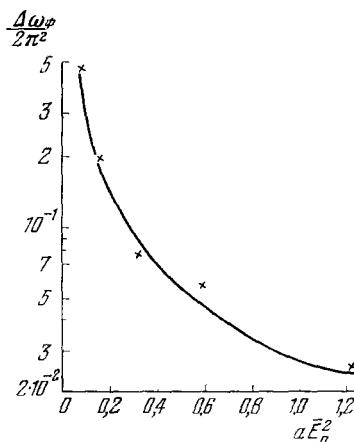


Рис. 5. Зависимость ширины линии излучения от мощности сигнала.

из уравнения для поля и имеет вид

$$\Delta\omega_c = \omega_0 \left( \frac{1}{Q} - d \right) = \Delta\omega_p |\eta|.$$

Из сопоставления с формулами (3,31), (3,45) видим, что  $\Delta\omega_c = 2D$ , т. е.  $\alpha = 2$ . Приведенные значения  $\alpha$  согласуются с полученными в работе <sup>18</sup>.

Оценим значение ширины линии излучения у порога генерации. Из формул (3,32), (3,31), (3,8) при нулевой расстройке получаем

$$\Delta\omega_c = \alpha \frac{\omega_0^2}{\langle E^2 \rangle} (\xi_{\Phi})_0 = \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \Delta\omega_p N_c.$$

При ширине полосы резонатора  $\Delta\omega_p/2\pi = 10^7$  и  $N_c \sim 10^{-4}$  находим  $\Delta\omega_c/2\pi \approx 740$  гц.

Этот результат по порядку величины согласуется с измерениями ширины спектра, проведенными в работе Зигмана и Арратгона <sup>5</sup>.

#### 4. ФЛУКТУАЦИИ АМПЛИТУД И ИНТЕНСИВНОСТЕЙ ВСТРЕЧНЫХ ВОЛН В КОЛЬЦЕВОМ ЛАЗЕРЕ

По кольцевым лазерам нам известна лишь одна экспериментальная работа Зайцева <sup>9</sup>, в которой проводились измерения флюктуаций интенсивности каждой из встречных волн и соответствующих коэффициентов корреляции.

Характер волновых и флюктуационных процессов в кольцевом лазере по сравнению с линейным лазером имеет существенные отличия. Например, при малых расстройках частоты генерации относительно центра допплеровской линии режим двух встречных волн в кольцевом лазере в слабом поле оказывается неустойчивым и происходит переход к режиму одной бегущей волны <sup>64</sup>. В области перехода, как и вблизи порога генерации, флюктуации не являются малыми. Вследствие этого для исследования флюктуаций здесь также приходится использовать метод уравнения Фоккера — Планка.

В корреляционном приближении уравнения для флюктуаций амплитуд встречных волн следуют из (2,10) и имеют вид

$$\frac{d\delta E_{1,2}}{dt} + A_{1,2}\delta E_{1,2} + B_{1,2}\delta E_{2,1} = \omega_0 \xi_{a1,2}(t); \quad (4,1)$$

здесь

$$A_{1,2} = 4\pi\omega_0 \frac{\partial \chi''_{1,2}}{\partial E_{1,2}^2} E_{1,2}^2, \quad B_{1,2} = 4\pi\omega_0 \frac{\partial \chi''_{1,2}}{\partial E_{2,1}^2} E_1 E_2. \quad (4,2)$$

При одинаковых добротностях встречных волн из формул (4,2), (2,18) следует:

$$E_1 = E_2 = E_0,$$

$$A_1 = A_2 = A = 2\omega_0 df \left[ (1+F)^2 + gF \left( F^2 + 4 \frac{\mu^2}{\gamma_{ab}^2} f^2 \right) \right] aE_0^2, \quad (4,3)$$

$$B_1 = B_2 = B = \omega_0 df \left[ f^2 (1+F)^2 + gF \left( F^2 - 4 \frac{\mu^2}{\gamma_{ab}^2} f^2 \right) \right] aE_0^2. \quad (4,4)$$

Из уравнений (4,1) находим спектр амплитудных флюктуаций для встречных волн:

$$(\delta E_1 \delta E_{1,2})_\omega = (\delta E_2 \delta E_{2,1})_\omega = \frac{\omega_0^2}{2} \left[ \frac{(\xi_{a1,2})_0 + (\xi_{a1}\xi_{a2})_0}{\omega^2 + (A+B)^2} \pm \frac{(\xi_{a1,2})_0 - (\xi_{a1}\xi_{a2})_0}{\omega^2 + (A-B)^2} \right], \quad (4,5)$$

$$(\delta E_1^2 \delta E_{1,2}^2)_\omega = (\delta E_2^2 \delta E_{2,1}^2)_\omega = 4E_0^2 (\delta E_1 \delta E_{1,2})_\omega. \quad (4,6)$$

Таким образом, спектральные плотности амплитуд и интенсивностей представляются суммой двух лоренцевских линий с ширинами  $A + B$ ,  $A - B$ . Так как источники флуктуаций антикоррелированы, т. е.  $(\xi_{a1}\xi_{a2})_0 < 0$ , более узкая линия имеет большую интенсивность. Из этого следует, в частности, что флуктуации амплитуд встречных волн всегда антикоррелированы.

Из формул (4,5), (4,6) следуют выражения для дисперсии амплитуд и интенсивностей встречных волн, а также для функции корреляции:

$$\langle \delta(E_1^2) \delta(E_{1,2}^2) \rangle = \langle \delta(E_2^2) \delta(E_{2,1}^2) \rangle = 2\omega_0 E_0^2 \frac{(\xi_{a1}\xi_{a1,2})_0 A - (\xi_{a1}\xi_{a2,1})_0 B}{A^2 - B^2}. \quad (4,7)$$

Отсюда можно получить условие применимости корреляционного приближения:

$$\frac{\omega_0^2}{2E_0^2} \frac{(\xi_{a1,2})_0 A - (\xi_{a1}\xi_{a2})_0 B}{A^2 - B^2} \ll 1. \quad (4,8)$$

На границе устойчивости двухволнового режима  $A = B$  и условие (4,8) не выполняется.

В работе <sup>64</sup> показано, что с учетом пространственной модуляции населеностей при

$$aE_0^2 \geq \gamma_{ab}^2 / (ku)^2 \quad (4,8')$$

область неустойчивости двухволнового режима исчезает, т. е. во всей области расстроек  $A > B$ .

В слабом поле

$$A = \Delta\omega_p \alpha a E_0^2, \quad B = \Delta\omega_p \beta a E_0^2.$$

При не очень малых расстройках, когда  $\mu \gg \gamma_{ab}$ , форма линии близка к лоренцевской. Это подтверждается экспериментальными данными Зайцева <sup>9</sup>.

Относительные дисперсии амплитуд и интенсивностей и коэффициент корреляции встречных волн в слабом поле определяются выражениями

$$\frac{\langle \delta E^2 \rangle}{E^2} = \frac{N^2}{8(aE_0^2)^2} \frac{\alpha}{\alpha^2 - \beta^2}, \quad \frac{\langle \delta(E^2)^2 \rangle}{E_0^4} = \frac{N^2}{2(aE_0^2)^2} \frac{\alpha}{\alpha^2 - \beta^2}, \quad (4,9)$$

$$\rho = \langle \delta(E_1^2) \delta(E_2^2) \rangle / \langle \delta(E_{1,2}^2)^2 \rangle = -\beta/\alpha; \quad (4,10)$$

здесь

$$N = 2 \sqrt{(\xi_{a1,2})_0 \omega_0 a / d}.$$

В работе Зайцева <sup>9</sup> экспериментально исследовалась относительная корреляция флуктуаций интенсивности на частоте  $\omega$ :

$$\rho_\omega = \langle \delta E_1^2 \delta E_2^2 \rangle_\omega / \langle \delta E_{1,2}^2 \rangle_\omega.$$

Общее выражение для  $\rho_\omega$  следует из формул (4,5). В слабом поле

$$\rho_\omega = - \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \frac{\Delta\omega_p^2}{\omega^2 - \Delta\omega_p^2}; \quad (4,11)$$

здесь

$$\Delta\omega_p = \Delta\omega_p a E_0^2 \sqrt{\alpha^2 + \beta^2},$$

$\Delta\omega_p$  — ширина спектра коэффициента корреляции.

С ростом расстройки величина  $\rho_{\omega=0}$  монотонно убывает от единицы до нуля. При  $\mu = \gamma_{ab}$ ,  $\beta = 0,5\alpha$   $\rho_{\omega=0} = -0,8$ .

Ширина  $\Delta\omega_\rho$  также монотонно убывает с ростом расстройки от  $\Delta\omega_\rho = \Delta\omega_p a E^2 / \sqrt{2}$  до значения  $\Delta\omega_\rho = \Delta\omega_p a E^2 / 2$ . На рис. 6 приведена зависимость  $\rho_\omega$  по формуле (4,11) при  $\mu = 1,1\gamma_{ab}$ ,  $\Delta\omega_p = 5,02 \cdot 10^4$  сек<sup>-1</sup>. Значения параметров получены из условия совпадения с экспериментом <sup>9</sup> высоты ( $\rho_\omega = 0$ ) и ширины ( $\Delta\omega_\rho$ ) спектра. При больших частотах экспериментальные точки ложатся выше теоретической кривой. Это обусловлено



Рис. 6. Зависимость спектральной плотности коэффициента корреляции от частоты.

тем, что при выводе формулы (4,11) не учитывался вклад корреляции источников шумов  $(\xi_{a1}\xi_{a2})_0$ . При больших  $\omega$  величина  $\rho_\omega$  стремится не к нулю, а к  $(\xi_{a1}\xi_{a2})_0 / (\xi_{a1}^2)_0$ . Это позволяет по значениям  $\rho_\omega$  при больших  $\omega$  измерить коэффициент антикорреляции источников амплитудных флуктуаций. В случае, когда корреляционное приближение не применимо, т. е. условие (4,8) не выполняется, для расчета флуктуаций используем метод уравнения Фоккера

— Планка. Условие (4,8) не выполняется в двух случаях: вблизи порога генерации ( $E_0 \rightarrow 0$ ) и на границе неустойчивости, когда  $A - B \rightarrow 0$ .

В силу условия (4,8') можно ограничиться приближением слабого поля. В этом случае уравнения (2,10) принимают вид

$$\frac{dE_{1,2}}{dt} = \frac{\omega_0 d}{2} [(\alpha + \beta) I - \alpha a E_{1,2}^2 - \beta a E_{2,1}^2] E_{1,2} + \omega_0 \xi_{1,2}; \quad (4,12)$$

здесь

$$I = \frac{1}{\alpha + \beta} \left( 1 - \frac{1}{dQ} \right).$$

Стационарное решение уравнения Фоккера — Планка, соответствующего уравнениям Ланжеvена (4,12), имеет вид

$$W(E_1^2, E_2^2) = CE_1 E_2 \exp \left\{ -\frac{\alpha}{N^2} \left[ (aE_1^2 - I)^2 + (aE_2^2 - I)^2 + 2 \frac{\beta}{\alpha} (aE_1^2 - I)(aE_2^2 - I) \right] \right\}. \quad (4,13)$$

Постоянная  $C$  определяется из условия нормировки.

Рассмотрим два наиболее интересных случая.

1) При флуктуациях на пороге генерации ( $I/N = 0$ ) при произвольных  $\alpha, \beta$

$$C = 8 \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{N^2} \left( \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{\beta} \right)^{-1} a^2. \quad (4,14)$$

Соответствующие выражения для моментов имеют вид

$$\langle E_{1,2}^n \rangle = Cn \frac{\Gamma(n/4)}{16(n+2)} \left( \frac{N}{a\sqrt{\alpha}} \right)^{\frac{n+4}{2}} F \left( \frac{n+2}{4}; \frac{1}{2}; \frac{n}{4} + \frac{3}{2}; \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2} \right), \quad (4,15)$$

$$\begin{aligned} \langle E_1^n E_2^m \rangle = C \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{nm}{(n+m+2)} \left( \frac{4\alpha a^2}{N^2} \right)^{-\frac{n+m+4}{4}} \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+m+2}{4}\right)} \times \\ \times F \left( \frac{m+2}{4}; \frac{n+2}{4}; \frac{n+m}{4} + \frac{3}{2}; \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2} \right). \end{aligned} \quad (4,16)$$

На границе устойчивости, когда  $\alpha - \beta = 0$ , из формул (4.15), (4.16) находим

$$\langle E_{1,2}^2 \rangle = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{N}{2a}, \quad \langle E_1^2 E_2^2 \rangle = \frac{1}{3} \frac{N^2}{a^2}, \quad \langle (E_{1,2}^2)^2 \rangle = \frac{2}{3} \frac{N^2}{a^2}. \quad (4.17)$$

Приведем выражения для относительной дисперсии интенсивностей встречных волн и коэффициента корреляции вблизи порога генерации:

$$\sigma^2 = \frac{\langle (E_{1,2}^2)^2 \rangle - \langle E_{1,2}^2 \rangle^2}{\langle E_{1,2}^2 \rangle^2} = \frac{128\alpha^2(\alpha + \beta)a^4}{\pi C^2 N^4 (\alpha - \beta)} \left( 1 - \frac{N^2 \beta}{8\alpha^2 a^2} C \right) - 1. \quad (4.18)$$

$$\rho = \frac{\langle E_1^2 E_2^2 \rangle - \langle E_{1,2}^2 \rangle^2}{\langle E_{1,2}^4 \rangle - \langle E_{1,2}^2 \rangle^2} = \frac{N^2 C - 8\beta a^2 - \frac{\pi}{16\alpha a^2} C^2 \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} N^4}{8\alpha a^2 - \frac{\beta}{\alpha} C N^2 - \frac{\pi}{16\alpha a^2} C^2 \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} N^4}. \quad (4.19)$$

Отсюда

$$\sigma^2 = 0,64, \quad \rho = -0,19 \text{ при } \mu = \gamma_{ab};$$

$$\sigma^2 = 0,70, \quad \rho = -0,22 \text{ при } \mu = 0 \quad (\alpha = \beta = 1/2).$$

Таким образом, вблизи порога дисперсия интенсивностей встречных волн и коэффициент корреляции слабо зависят от расстройки. Антикорреляция между встречными волнами вблизи порога невелика.

2) На границе устойчивости ( $\alpha = \beta$ )

$$C = \frac{4a^2}{N^2} \left\{ e^{-\frac{2I^2}{N^2}} + \sqrt{2\pi} \frac{I}{N} \left[ 1 + \Phi \left( \frac{2I}{N} \right) \right] \right\}^{-1}. \quad (4.20)$$

Соответствующие выражения для моментов:

$$\left. \begin{aligned} \langle E_{1,2}^2 \rangle &= \frac{I}{a} + \frac{C}{8} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{N^3}{a^3} \left[ 1 + \Phi \left( \frac{2I}{N} \right) \right], \\ \langle E_{1,2}^4 \rangle &= \frac{N^2}{a^2} \left( 1 + \frac{4}{3} \frac{I^2}{N^2} \right) - \frac{1}{12} \frac{N^4}{a^4} C e^{-2I^2/N^2}, \\ \langle E_1^2 E_2^2 \rangle &= \langle E_{1,2}^4 \rangle / 2. \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

При  $I = 0$  эти выражения совпадают с (4.17). Вдали от порога генерации ( $I/N \gg 1$ ) выражения (4.21) принимают вид

$$\langle E_{1,2}^2 \rangle = \frac{I}{a}, \quad \langle (E_{1,2}^2)^2 \rangle = \frac{4}{3a^2} I^2, \quad \langle E_1^2 E_2^2 \rangle = \frac{2}{3a^2} I^2. \quad (4.22)$$

Отсюда

$$\sigma^2 = 1/3, \quad \rho = -1,$$

т. е. встречные волны полностью антикоррелированы. Эти результаты совпадают с приведенным в работе Смирнова и Желлова <sup>40</sup>.

Аналогичным образом рассчитываются флуктуации амплитуды и интенсивности в режиме одной бегущей волны. В слабом поле зависимость флуктуаций амплитуды и интенсивности от поля совпадает со случаем двух встречных волн. В сильном поле относительные дисперсии амплитуды и интенсивности убывают обратно пропорционально квадрату поля, тогда как для режима двух встречных волн эти величины стремятся к константе. Это связано с различной зависимостью источников амплитудного шума от поля.

Для ширины спектра амплитудных флуктуаций в режиме одной бегущей волны получается выражение

$$\Delta\omega_a = \frac{1}{2} \Delta\omega_p \frac{I}{1+I}.$$

Вблизи порога результаты совпадают с приведенными выше результатами для режима стоячей волны в линейном лазере, с той разницей, что в формулах (3,14), (3,15)  $N_c$  заменяется на  $N$ .

Учет вращения кольцевого лазера и связи встречных волн за счет рассеяния на зеркалах приводит к появлению дополнительных членов в уравнениях для амплитуд и фаз встречных волн (2,10), (2,11):

$$\frac{dE_{1,2}}{dt} = -\frac{\omega_0}{2} \left( 4\pi x'_{1,2} + \frac{1}{Q} \right) E_{1,2} \mp \frac{\omega_0 d}{2} |m_{1,2}| E_{2,1} \sin(\Phi + \vartheta_{1,2}) + \omega_0 \xi_{\alpha_{1,2}},$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \pm \frac{\Omega}{2} - \frac{\omega_0}{2} 4\pi x'_{1,2} - \frac{\omega_0 d}{2} |m_{1,2}| \frac{E_{2,1}}{E_{1,2}} \cos(\Phi + \vartheta_{1,2}) \mp \frac{\omega_0}{E_{1,2}} \xi_{\Phi_{1,2}}.$$

Расчет флуктуаций с учетом связи проводился в работах <sup>40, 27</sup>. В работе <sup>27</sup> показано, что в области синхронизации учет связи не приводит к заметному изменению спектра амплитудных флуктуаций при  $\omega > \sqrt{\Omega_0^2 - \Omega^2}$ . Расчет формы спектра амплитудных флуктуаций при  $\omega < \sqrt{\Omega_0^2 - \Omega^2}$  не представляет интереса, так как в этой области частот весьма существенными являются технические флуктуации.

В работе <sup>40</sup> для неподвижного лазера произведен расчет переходов между различными режимами работы кольцевого лазера под влиянием флуктуаций.

## 5. ФЛУКТУАЦИИ ЧАСТОТЫ И ФАЗЫ В КОЛЬЦЕВОМ ЛАЗЕРЕ

Приведем результаты расчета флуктуаций для области вдали от порога генерации, когда можно использовать корреляционное приближение. Из уравнений (2,11) следуют уравнения для флуктуаций фаз встречных волн:

$$\frac{d\delta\varphi_{1,2}}{dt} = \frac{\omega_0}{E_0} (C\delta E_{1,2} + D\delta E_{2,1} + \xi_{\Phi_{1,2}}); \quad (5.1)$$

здесь

$$C = -4\pi \frac{\partial x'_{1,2}}{\partial E_{1,2}^2} E_0^2 = \frac{1}{2} \frac{\mu}{\gamma_{ab}} df [gF^3 - f^2 (3 - 2F(1 - 2g) - F^2)] aE_0^2.$$

$$D = -4\pi \frac{\partial x'_{1,2}}{\partial E_{2,1}^2} E_0^2 = \frac{1}{2} \frac{\mu}{\gamma_{ab}} df \{gF^3 + f^2 [1 - 2F(1 - 2g) + F^2]\} aE_0^2. \quad (5.2)$$

Отсюда получаем выражения <sup>27</sup> для ширины линии каждой из встречных волн и ширины линии сигнала  $E_0 \cos\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} + \varphi_0\right)$ :

$$\Delta\omega_{1,2} = (\dot{\delta\varphi}_{1,2}^2)_{\omega=0} = \frac{\omega_0^2}{E_0^2} [(C^2 + D^2)(\delta E_{1,2}^2)_0 + 2CD(\delta E_1 \delta E_2)_0 + (\xi_{\Phi_{1,2}}^2)_0], \quad (5.3)$$

$$\Delta\omega_\Phi = \frac{(\dot{\delta\Phi}^2)_0}{4} = \frac{\omega_0^2}{2E^2} [(C - D)^2 [(\delta E_{1,2}^2)_0 - (\delta E_1 \delta E_2)_0] + (\xi_{\Phi_{1,2}}^2)_0 - (\xi_{\Phi_1} \xi_{\Phi_2})_0]. \quad (5.4)$$

Для слабого поля ( $aE_0^2 \ll 1$ ) из формул (5,3), (5,4) находим

$$\Delta\omega_{1,2} = \frac{\Delta\omega_p N^2}{4aE_0^2} \left[ 1 + \frac{b^2(\alpha^2 + \beta^2)}{(\alpha^2 - \beta^2)^2} \right], \quad (5.5)$$

$$\Delta\omega_\Phi = \frac{\Delta\omega_p N^2}{8aE_0^2} \left[ 1 + \frac{b^2}{(\alpha - \beta)^2} \right]. \quad (5.6)$$

Вторые члены в квадратных скобках определяют вклад амплитудных флуктуаций. Мы видим, что при приближении к границе области устойчивости, когда  $\alpha \rightarrow \beta$ , роль амплитудных флуктуаций (по формулам корреляционного приближения) возрастает. Однако на границе области

неустойчивости вклад амплитудных флюктуаций порядка  $b^2$  и, следовательно, мал, так как  $b^2 \ll 1$ . Учет влияния амплитудных флюктуаций проводился в работе<sup>41</sup>. Результаты этой работы совпадают с формулой (5,6), если в ней опустить первый член.

Для режима одной бегущей волны

$$\Delta\omega = (\omega_0^2/E_0^2) (\xi_\Phi^2)_0. \quad (5,7)$$

В слабом поле отсюда следует:

$$\Delta\omega = \Delta\omega_p N^2 / 4aE_0^2. \quad (5,8)$$

Соответствующее выражение для линейного лазера отличается от (5,8) лишь зависимостью от расстройки.

При учете связи в уравнении (5,1) появляется дополнительный член  $M_{1,2}\delta\Phi$ ; здесь

$$M_{1,2} = \frac{\omega_0 d}{2} \left\{ -|m_{1,2}| \sin(\Phi + \vartheta_{1,2}) \pm \frac{\omega_0}{A^2 - B^2} [(CA - DB) \times |m_{1,2}| \cos(\Phi + \vartheta_{1,2}) + (CB - DA) |m_{2,1}| \cos(\Phi - \vartheta_{1,2})] \right\}. \quad (5,9)$$

Соответственно в уравнение для флюктуаций разности фаз входит член  $M\delta\Phi$ , где

$$M = M_1 - M_2 = \sqrt{\Omega_0^2 - \Omega^2}. \quad (5,10)$$

Соответствующие выражения для спектральных плотностей флюктуаций частот встречных волн и частоты биений имеют вид<sup>27</sup>

$$\begin{aligned} (\dot{\delta\Phi}_{1,2})_\omega &= (\dot{\delta\Phi}_{1,2})_\omega^{(0)} + \frac{M_1 M_2}{M^2 + \omega^2} (\dot{\delta\Phi}^2)_\omega^{(0)}, \\ (\dot{\delta\Phi}^2)_\omega &= \frac{\omega^2}{M^2 - \omega^2} (\dot{\delta\Phi}^2)_\omega^{(0)}. \end{aligned} \quad (5,11)$$

Индексом (0) отмечены выражения без учета связи.

Из формул (5,11) следует, что спектральные плотности флюктуаций частот встречных волн и частоты биений существенно зависят от величин и фаз коэффициентов связи, а также через  $M$  от положения внутри полосы области синхронизации (см. (5,10)), т. е. от скорости вращения лазера. На границе полосы синхронизации, когда  $M = 0$ , спектральная плотность флюктуаций частоты биений не зависит от связи. Используя тождество

$$M_1 M_2 = \frac{(M_1 + M_2)^2}{4} - \frac{M^2}{4},$$

видим, что при  $M = 0$   $M_1 M_2 > 0$ . Вследствие этого спектральная плотность флюктуаций частоты каждой из встречных волн из-за связи возвращается и при  $\omega \rightarrow 0$  стремится к бесконечности.

Внутри полосы синхронизации, когда  $M \neq 0$ , спектральная плотность флюктуаций частоты биений стремится к нулю при  $\omega \rightarrow 0$ .

В центре полосы синхронизации при равных модулях коэффициентов связи  $M_1 M_2 = -M^2/4$ . Вследствие этого второй член в первой формуле (5,11) оказывается отрицательным. При  $\omega = 0$  из (5,11) следует:

$$(\dot{\delta\Phi}_{1,2})_0 = (\dot{\delta\Phi}_{1,2})_0^{(0)} - \frac{1}{4} (\dot{\delta\Phi}^2)_0^{(0)}.$$

Зависимости спектральных плотностей флюктуаций частот встречных волн и частоты биений, вычисленные по формулам (5,11), приведены на рис. 7.

При наличии связи средний квадратичный набег фаз встречных волн и разности фаз меняются не по диффузионному закону. Расчет дает

$$\langle \delta\dot{\Phi}_t^2 \rangle = \frac{(\delta\dot{\Phi}^2)_0^{(0)}}{M} (1 - e^{-M|\tau|}),$$

$$\langle \delta\dot{\Phi}_{1,2\tau}^2 \rangle = (\delta\dot{\Phi}_{1,2}^2)_0^{(0)} |\tau| + \frac{M_1 M_2}{M_3} (\delta\dot{\Phi}^2)_0^{(0)} (M |\tau| - 1 + e^{-M|\tau|}).$$

В соответствии с этим спектр сигнала не является лоренцевским, а определяется более сложным выражением. Без учета амплитудных флуктуаций для спектральной плотности сигнала биений получаем

$$(S^2)_\omega = E_0^2 e^{-(\delta\dot{\Phi}^2)_0^{(0)}/8M} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\alpha - i\omega} {}_1F_1 \left( \frac{\alpha - i\omega}{M}; \frac{\alpha - i\omega}{M} + 1; \frac{(\delta\dot{\Phi}^2)_0^{(0)}}{8M} \right) \right]. \quad (5,12)$$

Спектральная плотность излучения каждой из встречных волн имеет вид

$$(E_{1,2}^2)_\omega = E_0^2 \exp \left[ \frac{M_1 M_2 (\delta\dot{\Phi}^2)_0^{(0)}}{2M^3} \right] \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{(D_\phi/2) - i(\omega - \omega_0)} \times \right. \\ \left. {}_1F_1 \left( \frac{(D_\phi/2) - i(\omega - \omega_0)}{M}; \frac{(D_\phi/2) - i(\omega - \omega_0)}{M} + 1; -\frac{M_1 M_2 (\delta\dot{\Phi}^2)_0^{(0)}}{2M^3} \right) \right]. \quad (5,13)$$

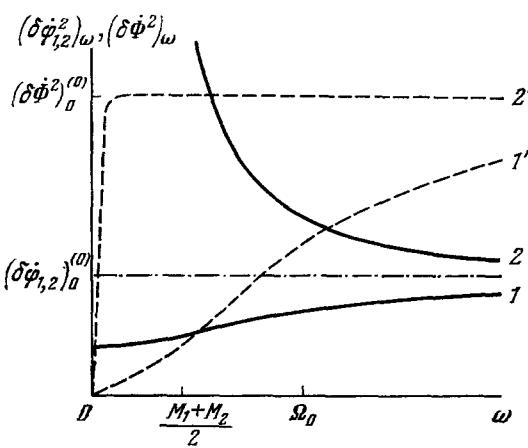


Рис. 7. Зависимость спектральной плотности флукутаций частоты с учетом связи через обратное рассеяние.

Вблизи границы полосы синхронизации  $M \ll (\delta\dot{\Phi}^2)_0^{(0)}$  и форма линии получается такой же, как и при отсутствии связи.

Вблизи центра полосы синхронизации  $M \approx \Omega_0$  и обычно отношение  $(\delta\dot{\Phi}^2)_0^{(0)}/M \ll 1$ . В этом случае из формулы (5,12) следует:

$$(S^2)_\omega = \frac{E_0^2}{2} e^{-(\delta\dot{\Phi}^2)_0^{(0)}/8M} \times \\ \times \left[ \delta(\omega) + \frac{1}{4} \frac{(\delta\dot{\Phi}^2)_0^{(0)}}{\omega^2 - M^2} \right]. \quad (5,14)$$

Сигнал биений представляет собой, таким образом, наложение постоянной составляющей

и шумового фона, интенсивность которого в  $(\delta\dot{\Phi}^2)_0/M$  раз меньше, чем интенсивность постоянной составляющей.

Из формулы (5,13) получаем приближенное выражение для формы спектра излучения каждой из встречных волн:

$$(E_{1,2}^2)_\omega = \frac{E_0^2}{2} e^{M_1 M_2 (\delta\dot{\Phi}^2)_0^{(0)}/2M^3} \left\{ \frac{(\delta\dot{\Phi}^2)_0}{(\omega - \omega_0)^2 + [(\delta\dot{\Phi}^2)_0^{(0)/2}]^2} - \right. \\ \left. - \frac{M_1 M_2 (\delta\dot{\Phi}^2)_0^{(0)} [(\delta\dot{\Phi}^2)_0 - 2M]}{2M^3 [(\omega - \omega_0)^2 + [(\delta\dot{\Phi}^2)_0/2] + M^2]} \right\}.$$

Отсюда следует, что форма спектра каждой из встречных волн вблизи центра полосы синхронизации без учета амплитудных флуктуаций пред-

ставляет собой сумму лоренцевских линий: узкой и интенсивной с шириной  $\Delta\omega_{1,2} = (\delta\dot{\Phi}_{1,2})_0$ , и широкой с шириной  $(\delta\dot{\Phi}_{1,2})_0 + 2M$ .

Из изложенного следует, что для измерения ширины линии вблизи границы области синхронизации достаточно измерить спектральную плотность флюктуаций частоты на частотах, значительно превышающих  $\Omega_0$  (порядка  $10^3$  сек $^{-1}$ ), и, следовательно, выйти за пределы области технических флюктуаций (порядка  $10^4$ — $10^5$  сек $^{-1}$ ). Для определения ширины линии вблизи центра полосы синхронизации необходимо измерить спектральную плотность флюктуаций частоты при частотах, значительно меньших  $\Omega_0$ . Такие измерения не могут быть проведены непосредственно из-за технических флюктуаций.

Точный расчет спектра излучения в случае, когда частота биений превышает ширину полосы синхронизации, связан с большими математическими трудностями и в настоящее время еще не проведен. Следует, однако, ожидать, что при удалении от области синхронизации роль связи встречных волн будет ослабевать и результаты будут совпадать с полученными без учета связи.

## 6. О ПРЕДЕЛЬНОЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ЛАЗЕРНОГО ГИРОСКОПА

Вопрос о предельной чувствительности идеального (без учета связи между встречными волнами за счет рассеяния) лазерного гироскопа, обусловленной естественными флюктуациями излучения, впервые, по-видимому, рассматривался Брюннэ<sup>54</sup>. В этой работе утверждалось, что минимальная разность частот встречных волн, которая может быть измерена, определяется без учета синхронизации естественной шириной линии. По оценкам Брюннэ, эта минимальная разность частот соответствует скорости вращения лазера порядка 0,1 град/час. Однако, как справедливо отмечено в работе Розанова<sup>58</sup>, предельная чувствительность лазерного гироскопа определяется не только естественной шириной линии, но и временем измерения.

В работе<sup>59</sup> показано, что средний разброс частоты биений вдали от области синхронизации определяется формулой

$$\delta\Omega = \frac{\langle(\overline{\dot{\Phi}} - \langle\overline{\dot{\Phi}\rangle)^2\rangle^{1/2}}{2} = \sqrt{\frac{\Delta\omega_\Phi}{T}}.$$

Черта означает усреднение за время наблюдения  $T$ ,  $\Delta\omega_\Phi$  — ширина линии сигнала биений. Вдали от порога она определяется формулами (5,4), (5,6). При  $\Delta\omega_\Phi/2\pi = 10^{-2}$  гц (что при  $\Delta\omega_p/2\pi = 10^6$  гц,  $1 + (R^0/D^0) = 5$ ,  $\mu = \gamma_{ab}$  отвечает мощности  $P = 0,25$  мвт) и  $T = 10^2$  сек имеем

$$\delta\Omega/2\pi = 10^{-2}/\sqrt{2\pi} \text{ гц.}$$

Соответствующая минимальная скорость вращения лазера определяется выражением

$$\dot{\delta\theta} = \delta\Omega cL/2\omega_0 S,$$

где  $L$  — периметр лазера,  $S$  — площадь контура,  $\omega_0$  — частота колебаний. Полагая  $L = 40$  см,  $S = 100$  см $^2$ ,  $\omega_0 = 3 \cdot 10^{15}$  рад/сек, находим  $\dot{\delta\theta} = 10^{-2}$  град/час.

В работах<sup>58, 59</sup> исследовалась также предельная чувствительность лазерного гироскопа при измерении скорости вращения внутри области

синхронизации фазовым методом. Для погрешности фазового метода, характеризуемой дисперсией разности фаз, получено следующее выражение:

$$M \langle \delta\Phi^2 \rangle^{1/2} = \sqrt{\frac{\Delta\omega_p}{2T} \left[ 1 - \frac{1}{MT} (1 - e^{-MT}) \right]}.$$

При  $T \gg 1/M$  предельная чувствительность фазового метода по порядку величины совпадает с предельной чувствительностью частотного метода.

Если же  $T \ll 1/M$ , то

$$M \langle \delta\Phi^2 \rangle^{1/2} = \sqrt{D_\Phi M}$$

и, следовательно, при малых временах измерения предельная чувствительность фазового метода оказывается выше частотного. Этот результат физически очевиден, так как при малых временах измерения в случае фазового метода усреднение производится самой системой за время порядка  $1/M$ , тогда как при измерении частотным методом такого усреднения нет.

## 7. ФЛУКТУАЦИИ АМПЛИТУДЫ И ФАЗЫ В ТВЕРДОТЕЛЬНОМ ЛАЗЕРЕ

В гл. 2 было уже отмечено, что в твердотельном лазере соотношение между диссипативными параметрами  $\gamma_a$ ,  $\gamma_b$ ,  $\gamma_{ab}$ ,  $\Delta\omega_p$  иное, чем в газовом лазере. Величины  $\gamma_a$ ,  $\gamma_b \ll \Delta\omega_p$ , поэтому нельзя считать, что населенности уровней «следят» за полем, как в газовом лазере. Вследствие этого при расчете флуктуаций населенностей, а значит, и флуктуаций поляризации поле нельзя считать детерминированным и в формуле (2,8) нельзя опустить член  $\delta P^{(\text{инд})}$ . Таким образом, индуцированная часть поляризации представляется в виде

$$P^{(\text{инд})} = \langle P \rangle + \delta P^{(\text{инд})}. \quad (7,1)$$

Здесь будут приведены результаты для двух режимов: стоячей волны и бегущей волны. С учетом соотношения (7,1) уравнения (2,10), (2,11) теперь принимают вид

$$\frac{dE_{1,2}}{dt} = -\frac{\Delta\omega_p}{2} E_{1,2} - 2\pi\omega_0 \kappa'' (\langle E_1 \rangle, \langle E_2 \rangle) \langle E_{1,2} \rangle + \omega_0 \zeta_{a1,2}, \quad (7,2)$$

$$\frac{d\phi_{1,2}}{dt} = -\frac{2\pi\omega_0}{E_{1,2}} \kappa' (\langle E_1 \rangle, \langle E_2 \rangle) \langle E_{1,2} \rangle + \frac{\omega_0}{E_{1,2}} \zeta_{\phi1,2}. \quad (7,3)$$

Источники шума отличаются от  $\xi_a$ ,  $\xi_\phi$  в уравнениях (2,10), (2,11) дополнительными членами

$$\zeta_{a1,2} = \xi_{a1,2} + \xi_{a1,2}^{(\text{инд})}, \quad (7,4)$$

$$\zeta_{\phi1,2} = \xi_{\phi1,2} + \xi_{\phi1,2}^{(\text{инд})}. \quad (7,5)$$

Интенсивности источников шумов  $\xi_{\phi1,2}$ ,  $\xi_{a1,2}$  для режимов бегущей и стоячей волн были нами вычислены ранее (см. (2,28), (2,30), (2,15)).

Поэтому здесь нам необходимо рассмотреть лишь индуцированные флуктуации. Для индуцированных частей флуктуаций элементов матрицы плотности при задании поля в виде (2,9) получим линеаризованную систему уравнений, в которых нельзя теперь пренебречь флуктуациями поля<sup>29</sup>.

Учитывая, что в твердотельном лазере выполняется соотношение  $\gamma_{ab} \gg \Delta\omega_p$ ,  $\gamma_a$ ,  $\gamma_b$ , и полагая для простоты  $\gamma_a = \gamma_b$ , получим в двух частных случаях следующие выражения для Fourier-компонент источников индуцированных флуктуаций:

1) Режим бегущей волны:

$$\omega_0 (\xi_a^{(инд)})_\omega = \frac{\Delta\omega_p}{2} \frac{i\omega - \gamma_a (1 + gaE_0^2)}{i\omega - \gamma_a (1 + gaE_0^2)} (\delta E)_\omega, \quad (7,6)$$

$$(\xi_\Phi^{(инд)})_\omega = \frac{\mu}{\gamma_{ab}} (\xi_a^{(инд)})_\omega. \quad (7,7)$$

2) Режим стоячей волны:

$$\begin{aligned} \omega_0 (\xi_a^{(инд)})_\omega &= \frac{\Delta\omega_p}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{1 - (1/\sqrt{1 + 4gaE_0^2})} \times \right. \\ &\times \left. \left[ 1 - \frac{1}{i\omega} \frac{i\omega + \gamma_a}{\sqrt{1 + \{4\gamma_a gaE_0^2/(i\omega + \gamma_a)\}}} - \frac{\gamma_a}{\sqrt{1 + 4gaE_0^2}} \right] \right\} (\delta E)_\omega, \end{aligned} \quad (7,8)$$

$$(\xi_\Phi^{(инд)})_\omega = \frac{\mu}{\gamma_{ab}} (\xi_a^{(инд)})_\omega. \quad (7,9)$$

Флуктуации амплитуды и фазы твердотельного лазера рассмотрим также для двух режимов.

7.1. Режим бегущей волны. Подставив источники шума в уравнение (7,2) и учитывая (2,28), получим выражение для спектральной плотности флуктуаций амплитуды поля<sup>29</sup>:

$$(\delta E^2)_\omega = \frac{\omega^2 + \gamma_a^2 (1 + gaE_0^2)^2}{(\omega^2 - \Delta\omega_p \gamma_a gaE_0^2)^2 + \omega^2 \gamma_a^2 (1 + gaE_0^2)^2} \omega_0^2 (\xi_a^2)_0. \quad (7,10)$$

Приближенно кривую спектральной плотности флуктуаций амплитуды поля можно рассматривать как сумму двух линий: широкой линии

$$(\delta E^2)_\omega = \frac{\omega_0^2 (\xi_a^2)_0}{\omega^2 + [\Delta\omega_p \gamma_a gaE_0^2 / (1 + gaE_0^2)]^2} \quad (7,11)$$

и узкого пика на частоте

$$\omega_{\max} = \sqrt{\Delta\omega_p \gamma_a gaE_0^2 - \gamma_a^2 (1 + gaE_0^2)^2} \quad (7,12)$$

(при  $\Delta\omega_p \gg \gamma_a$ ,  $\omega_{\max} \approx \sqrt{\Delta\omega_p \gamma_a gaE_0^2}$ ). Ширина пика на полувысоте составляет  $\Delta\omega = \gamma_a (1 + gaE_0^2)$ , а спектральная плотность флуктуаций поля в максимуме равна

$$(\delta E^2)_{\omega=\omega_{\max}} = \omega_0 (\xi_a^2)_0 / \gamma_a^2 (1 + gaE_0^2). \quad (7,13)$$

Из формулы (7,12) видно, что для существования пика на кривой спектральной плотности амплитудных флуктуаций необходимо выполнение следующего условия:

$$\gamma_a / \Delta\omega_p < gaE_0^2 < \Delta\omega_p / \gamma_a. \quad (7,14)$$

Это условие практически всегда выполняется в твердотельном лазере. Появление пика в спектре амплитудных флуктуаций твердотельных лазеров связано с большой инерционностью населеностей рабочих уровней. В газовых лазерах  $\gamma_a \sim \gamma_{ab} \gg \Delta\omega_p$  и амплитуда поля излучения при небольших отклонениях от стационарного состояния приближается к нему апериодически. В твердотельных лазерах в силу того, что  $\gamma_a \ll \ll \Delta\omega_p \ll \gamma_{ab}$ , приближение к стационарному состоянию носит осциллирующий характер с частотой  $\omega_{\max}$ . Аналогичные явления наблюдаются и в ламповых генераторах с инерционной нелинейностью<sup>61</sup>.

На существование подобного пика в излучении лазеров было указано в работах<sup>20, 29, 51, 62</sup>. Экспериментально он был обнаружен в работе<sup>52</sup>.

Интегрируя  $(\delta E^2)_\omega$  по частотам, получим выражение для дисперсии амплитуды поля:

$$\langle \delta E^2 \rangle = \frac{2\pi\hbar\omega_0}{V} \left( \frac{1+gaE_0^2}{gaE_0^2} + \frac{\Delta\omega_p}{\gamma_a} \frac{1}{1-gaE_0^2} \right) \left( \bar{n} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{R^0}{D^0} \right). \quad (7.15)$$

Для дисперсии числа фотонов соответственно имеем

$$\langle \delta n^2 \rangle = \langle n \rangle \left( \frac{1+\alpha \langle n \rangle}{\alpha \langle n \rangle} + \frac{\Delta\omega_p}{\gamma_a} \frac{1}{1+\alpha \langle n \rangle} \right) \left( \bar{n} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{R^0}{D^0} \right), \quad (7.16)$$

где

$$\alpha = \frac{8\pi\hbar\omega_0}{V} a.$$

Этот результат совпадает с приведенным в работе Лэкса<sup>20</sup>.

Рассмотрим теперь флуктуации фазы в твердотельном лазере. Из (7.3) для флуктуации фазы получим уравнение

$$\frac{d\delta\Phi}{dt} = - \frac{\omega_0}{E_0} [\xi_\Phi^{(\text{инд})} + \xi_\Phi^{(\text{сп})} - \kappa' \delta E]. \quad (7.17)$$

Воспользовавшись выражениями (7.9), (2.28), (7.12), для спектральной плотности флуктуаций частоты получим выражение

$$\dot{(\delta\Phi^2)}_\omega = \frac{\omega_0^2}{E_0^2} \left[ (\xi_\Phi^2)_0 + \frac{\mu^2}{\gamma_{ab}^2} \frac{(\Delta\omega_p \gamma_a g a E_0^2)^2}{(\omega^2 - \Delta\omega_p \gamma_a g a E_0^2)^2 + \omega^2 \gamma_a^2 (1 + g a E_0^2)^2} (\xi_a^2)_0 \right]. \quad (7.18)$$

Отсюда для ширины линии излучения получаем

$$\Delta\omega = (\dot{(\delta\Phi^2)})_0 = \frac{\omega_0^2}{E_0^2} \left[ (\xi_\Phi^2)_0 + \frac{\mu^2}{\gamma_{ab}^2} (\xi_a^2)_0 \right].$$

Это выражение совпадает с полученным в работах<sup>20, 37</sup>. Спектральная плотность частоты (7.18) найдена в работе<sup>53</sup>. Из этой формулы следует, что при  $\mu \neq 0$  из-за влияния амплитудных флуктуаций на кривой спектральной плотности флуктуаций частоты появляется пик на частоте  $\omega_{\max}$ .

На основании (7.18) можно найти форму спектральной линии излучения аналогично тому, как это было сделано для газового лазера. Отличие состоит в том, что на широкой линии, обусловленной амплитудными флуктуациями, имеются два симметрично расположенных пика ширины  $\gamma_a$ .

**7.2. Режим стоячей волны.** В этом случае расчет флуктуаций следует проводить с учетом пространственной модуляции населенности. Результат в общем случае довольно сложен<sup>47</sup>, поэтому приведен здесь лишь результат для случая слабого поля, по которому можно судить о роли модуляции разностей населенностей.

В слабом поле для спектральной плотности флуктуаций амплитуды имеем

$$(\delta E^2)_\omega = \frac{(\omega^2 + \gamma_a^2) \omega_0^2 (\xi_a^2)_0}{(\omega^2 - 3\Delta\omega_p \gamma_a g a E_0^2) + \omega^2 \gamma_a^2}.$$

Без учета модуляции в знаменателе З заменяется на 2. Это приводит к соответствующему изменению значения спектральной плотности при  $\omega = 0$  и величины и положения максимума. Это происходит вследствие несколько иной зависимости интенсивности излучения от превышения уровня накачки над пороговым для лазера с учетом пространственной модуляции населенностей по сравнению с лазером без учета этой модуляции<sup>47</sup>. Зависимость спектра амплитудных флуктуаций от превышения накачки над пороговой одинакова для обоих случаев.

## 8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как уже указывалось во введении, естественные флуктуации излучения лазеров могут быть выделены спектральными методами на фоне более медленных технических флуктуаций. В обзоре приведены результаты расчета естественных флуктуаций для различных режимов излучения газовых и твердотельных лазеров при практически произвольных превышениях накачки над порогом генерации. Основные результаты состоят в следующем. Получены спектральные характеристики излучения лазеров. В частности, определена форма спектра и ширина линии излучения. В простейшем случае, как и в ламповом генераторе, спектр излучения представляет собой наложение двух линий. Одна из них, узкая и интенсивная, обусловлена флуктуациями частоты излучения. Ее ширина в зависимости от мощности излучения порядка  $10^{-1}$ – $10^{-3}$  Гц. Вторая линия, широкая и слабая, обусловлена флуктуациями амплитуды излучения. Ее ширина порядка  $10^5$ – $10^7$  Гц. Ширина узкой линии (при заданном времени наблюдения) определяет предельную чувствительность лазерных гироскопов. Подробно рассмотрены флуктуации амплитуд и частот встречных волн в кольцевом лазере. Расчеты флуктуаций в газовом и твердотельном лазерах проводятся различными способами.

Для газового Не — Ne-лазера поляризация успевает следить за полем (выполняются неравенства  $\gamma_a \sim \gamma_b \sim \gamma_{ab} \gg \Delta\omega_p$ ), поэтому задачу расчета естественных флуктуаций лазерного излучения удается свести к решению системы уравнений для амплитуд и фаз поля со случайными источниками. Основная задача сводится при этом к определению статистических характеристик случайных источников. Спектральные плотности источников флуктуаций можно представить в виде суммы двух частей. Одна из них обусловлена равновесными флуктуациями поля в резонаторе, а вторая — флуктуациями поляризации среды, связанными со спонтанным излучением. Равновесные флуктуации поля определяются на основе формулы Каллена — Вельтона. Флуктуации поляризации неравновесные. Определение их спектральных плотностей и представляет одну из основных задач при расчете естественных флуктуаций в лазере. Поскольку число фотонов в резонаторе в генерируемой моде даже у самого порога генерации велико ( $\sim 10^3$ ), можно использовать классические уравнения поля. Квантовый характер излучения атомов рабочей среды учитывается через спектральные плотности источников флуктуаций и через поляризуемость среды. Таким образом, рассматриваемая теория является полуфеноменологической.

Однако проведение расчетов на основе полуклассических уравнений проще и поэтому дает возможность рассматривать более сложные случаи. Заметим также, что в квантовой теории, как правило, вычисляются лишь моменты числа фотонов. Расчет спектральных характеристик флуктуаций в рамках квантовой теории сложен. Решение этой задачи на основе полуклассической теории не представляет трудностей. Применение полуклассической теории позволяет провести расчет флуктуаций в лазерах методами статистической радиофизики, используемыми в теории радиогенераторов.

При не очень малом превышении над порогом для нахождения спектральных плотностей флуктуаций амплитуды и фазы используется корреляционная теория, а вблизи порога генерации — метод уравнения Фоккера — Планка. В случае кольцевого газового лазера существуют две области, где необходимо применять метод уравнения Фоккера — Планка при исследовании флуктуаций амплитуд и интенсивностей встречных волн. Это область вблизи порога генерации, а также область малых

расстроек частоты генерации относительно центра допплеровской линии, где двухволновой режим становится неустойчивым.

При рассмотрении флюктуаций частоты и фазы в кольцевом лазере необходимо учитывать связь между встречными волнами. Эта связь определяет область синхронизации, в которой происходит захват частот встречных волн.

В случае твердотельного лазера ввиду того, что поляризация среды устанавливается медленнее, чем амплитуда поля, приходится учитывать также индуцированные флюктуации — флюктуации поляризации, вызванные флюктуациями поля. При этом статистические характеристики излучения становятся существенно иными.

Изложенный выше метод расчета естественных флюктуаций в лазерах является достаточно общим и может быть с успехом использован для расчета неравновесных флюктуаций в других системах.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Обозначим через  $q$  совокупность переменных атома (квантовых чисел  $n$  и координат  $r, p$ ), а через  $\rho(q, q', t) = \psi^+(q, t)\psi(q', t)$  — операторную матрицу плотности. Здесь  $\psi^+(q', t)$ ,  $\psi(q, t)$  — квантовые волновые функции, удовлетворяющие известным перестановочным соотношениям. Используя эти перестановочные соотношения, можем записать<sup>56</sup>

$$\begin{aligned} N^2 \langle \rho(q_1, q'_1, t) \rho(q_2, q'_2, t) \rangle &= N^2 \langle \psi^+(q'_1, t) \psi(q_1, t) \psi^+(q'_2, t) \psi(q_2, t) \rangle = \\ &= N(N-1) F_2(q_1, q'_1, q_2, q'_2, t) + N\delta(q_1 - q'_2) \langle \rho(q_2, q'_1, t) \rangle; \end{aligned} \quad (1)$$

здесь введено обозначение второй функции распределения

$$F_2 = \langle \psi^+(q'_1, t) \psi^+(q'_2, t) \psi(q_1, t) \psi(q_2, t) \rangle. \quad (2)$$

Функция  $F_2$  связана с корреляционной функцией  $G$  соотношением

$$F_2 = \langle \rho(q_1, q'_1, t) \rangle \langle \rho(q_2, q'_2, t) \rangle + G(q_1, q'_1, q_2, q'_2, t). \quad (3)$$

Спонтанные флюктуации вычисляются в приближении, при котором пренебрегается корреляционной функцией.

Из (1) и (2) при  $G=0$  после симметризации по частицам получаем для отклонений  $\delta\rho = \rho - \langle \rho \rangle$  выражение

$$\begin{aligned} \langle \delta\rho(q_1, q'_1, t) \delta\rho(q_2, q'_2, t) \rangle &= \frac{1}{2N} [\delta(q_1 - q'_2) \langle \rho(q_2, q'_1, t) \rangle + \\ &+ \delta(q_2 - q'_1) \langle \rho(q_1, q'_2, t) \rangle - 2 \langle \rho(q_1, q'_1, t) \rangle \langle \rho(q_2, q'_2, t) \rangle]. \end{aligned} \quad (4)$$

Если движение центров масс атомов описывать классически, то от функций  $\langle \rho(q', q, t) \rangle$  можно перейти к функциям  $\rho_{nm}(r, p, t)$ , где  $r$  и  $p$  — координаты и импульс центра масс. В результате выражение (4) принимает вид

$$\begin{aligned} \langle \delta\rho_{nm}(r, p, t) \delta\rho_{n'm'}(r', p', t) \rangle &= \\ &= \frac{1}{2N} \{ \delta(r - r') \delta(p - p') [\delta_{mn} \rho_{nm}(r, p, t) + \delta_{nm} \rho_{n'm}(r, p, t)] - \\ &- 2 \rho_{nm}(r, p, t) \rho_{n'm'}(r', p', t) \}. \end{aligned} \quad (5)$$

Таким образом, выражение (5), которое используется в тексте при вычислении спектральных плотностей источников амплитудных и фазовых флюктуаций, имеет место при  $G=0$ . Тем самым источники флюктуаций определяются движением отдельных атомов. Сами же корреляции выражаются через поля, создаваемые этими источниками. Более подробно этот вопрос освещен в работе<sup>28</sup>. Последний член в правой части (5) существует лишь при  $\rho_a + \rho_b \approx 1$ <sup>30</sup>. Учет этого члена в двухуровневой схеме лазера приводит к поправке в формуле для дисперсии числа фотонов, полученной Казанцевым и Сурдутовичем<sup>37</sup>.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Приведем выражение для спектральных плотностей поляризационного шума на нулевой частоте для случая, когда амплитуды встречных волн отличаются мало, т. е. когда  $(E_1 - E_2)/(E_1 + E_2) \ll 1$ . При  $E_1 = E_2 = E$  в работе<sup>266</sup> получены следующие выражения:

$$\begin{aligned} (\xi_{a1,2}^{(n)})_0 &= \frac{2\pi\hbar\Delta\omega_p}{V\omega_0} \left\{ \frac{R^0}{D^0} \left( 1 + \frac{gFaE_0^2}{1+F} \right) - \frac{\gamma_-}{\gamma_+} \frac{gFaE_0^2}{1+F} \right\}, \\ (\xi_{\phi 1,2}^{(n)})_0 &= \frac{2\pi\hbar\Delta\omega_p}{V\omega_0} \left\{ \frac{R^0}{D^0} \left( 1 + aE_0^2 + \frac{gFaE_0^2}{1+F} \right) - \frac{\gamma_-}{\gamma_+} \frac{gFaE_0^2}{1+F} \left( 1 + \frac{\mu^2}{\gamma_{ab}^2} f_1 \right) \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Функции  $f_1, f_2$  определяются выражениями

$$\begin{aligned} f_1 &= f^2 \left\{ 2 \left( \frac{\mu^2}{\gamma_{ab}^2} - 1 \right) (F^2 - 1) - \frac{3}{gF} (F^2 - 1) - 2F^2 aE_0^2 \right\}, \\ f_2 &= \frac{1}{1+F} - (1-g) \frac{F}{1+F} + \frac{2f^2 g^2 F^3 aE_0^2}{1+F} \left[ \left( \frac{\mu^2}{\gamma_{ab}^2} - 1 \right) (1 + 2aE_0^2) - \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{u^4}{\gamma_{ab}^4} + \frac{(2\mu^2/\gamma_{ab}^2) - (1 + 2aE_0^2)}{gF} \right]. \end{aligned}$$

В сильном поле отличны от нуля также спектральные плотности корреляций амплитуд и фаз встречных волн. Они определяются выражениями

$$\begin{aligned} (\xi_{a1}^{(n)}\xi_{a2}^{(n)})_0 &= -\frac{2\pi\hbar\Delta\omega_p}{V\omega_0} \frac{gFaE_0^2}{1+F} \left( \frac{R^0}{D^0} - \frac{\gamma_-}{\gamma_+} \right), \\ (\xi_{\phi 1}^{(n)}\xi_{\phi 2}^{(n)})_0 &= -\frac{2\pi\hbar\Delta\omega_p}{V\omega_0} aE_0^2 \left\{ \frac{R^0}{D^0} \frac{1}{1+F} [1 + (g-1)F] + \frac{\gamma_-}{\gamma_+} f_2 \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Московский государственный университет  
им. М. В. Ломоносова

## СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

- $\omega_0$  — частота генерации,
- $Q$  — добротность резонатора,
- $\Delta\omega_p = \omega_0/Q$  — ширина полосы резонатора,
- $V$  — объем резонатора,
- $L$  — длина резонатора,
- $\Delta\omega = 2\pi\Delta\nu$  — ширина линии излучения лазера,
- $a, b$  — индексы рабочих уровней ( $a$  — верхний уровень),
- $\rho_a(v), \rho_b(v), \rho_{ab}(v), \rho_{ba}(v)$  — элементы матрицы плотности для рабочих уровней атома, обладающего скоростью  $v$ ,
- $\rho_a^{(0)}(v), \rho_b^{(0)}(v)$  — населенности уровней в отсутствие поля,
- $\rho_a^0 = \int \rho_a^{(0)}(v) \frac{e^{-mv^2/2kT}}{\sqrt{2\pi kT/m}} dv, \rho_b^0 = \int \rho_b^{(0)}(v) \frac{e^{-mv^2/2kT}}{\sqrt{2\pi kT/m}} dv$  — усредненные по скоростям населенности рабочих уровней,
- $D(v) = \rho_a(v) - \rho_b(v)$  — разность населенностей рабочих уровней ( $D^0 = \rho_a^0 - \rho_b^0$ ),
- $R(v) = \rho_a(v) + \rho_b(v)$  — сумма населенностей рабочих уровней,
- $\gamma_a, \gamma_b, \gamma_{ab}$  — постоянные релаксации соответствующих элементов матрицы плотности,
- $\gamma^2 = \frac{\gamma_a\gamma_b\gamma_{ab}}{\gamma_a + \gamma_b}, \quad \gamma_+ = \frac{\gamma_a + \gamma_b}{2}, \quad \gamma_- = \frac{\gamma_b - \gamma_a}{2}$ ,
- $\mu = \omega_0 - \omega_{ab}$  — расстройка частоты генерации относительно центра линии усиления,
- $g = \frac{\gamma_{ab}^2}{\mu^2 + \gamma_{ab}^2}$ ,  $\chi'_1, 2, \chi''_1, 2$  — действительная и мнимая части поляризуемости,
- $a = \frac{e^2 |r_{ab}|^2}{6\hbar^2\gamma^2}$  — параметр насыщения,
- $d = \frac{4\pi^2 e^2 n |r_{ab}|^2 D^0}{3\hbar \sqrt{2\pi} k_0 u}$  — параметр накачки,
- $\Phi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x e^{-x^2/2} dx$  — интеграл вероятности,
- $D_v(z)$  — функция параболического цилиндра.

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. A. Javan, E. Ballik, W. Bond, J. Opt. Soc. Amer. **52**, 96 (1962).
2. T. S. Jaseja, A. Javan, C. Townes, Phys. Rev. Lett. **10**, 165 (1963).
3. А. Я. Лейкин, В. С. Соловьев, Г. П. Зимоносов, Тр. метрол. ин-тоў СССР, вып. 90 (150), 43 (1967).
4. Ю. И. Зайцев, Д. П. Степанов, Письма ЖЭТФ 6, 733 (1967); 55, 1645 (1968).
5. A. E. Siegman, R. Aggarathgon, Phys. Rev. Lett. **20**, 901 (1968); J. Appl. Phys. **40**, 910 (1969).
6. F. T. Agresti, G. Rodari, A. Sona, Phys. Lett. **A25**, 59 (1967).
7. Ю. П. Егоров, Письма ЖЭТФ 8, 525 (1968).
8. C. Freed, H. Haus, Phys. Rev. **141**, 287 (1966); Appl. Phys. Lett. **6**, 85 (1965); IEEE J. Quantum Electron. QE-2, 190 (1966).
9. Ю. И. Зайцев, ЖЭТФ 50, 525 (1966); Изв. вузов (Радиофизика) **12**, 60 (1969); **13**, 898 (1970).
10. И. А. Андronova, Ю. И. Зайцев, Изв. вузов (Радиофизика) **11**, 149 (1968).
11. И. А. Андронова, ЖЭТФ **56**, 417 (1969).
12. A. W. Smith, J. A. Armstrong, Phys. Rev. Lett. **16**, 1169 (1966).
13. F. T. Agresti, M. Giglio, A. Sona, Phys. Lett. **A25**, 341 (1967).
14. F. T. Agresti, Phys. Rev. **159**, 1168 (1967).
15. А. В. Бакланов, С. Г. Раутиан, Б. И. Трошин, В. П. Чеботаев, ЖЭТФ **56**, 1120 (1969).
16. A. L. Shawlow, C. H. Townes, Phys. Rev. **112**, 1940 (1958).
17. W. E. Lamb, Phys. Rev. **134**, 1429 (1964) (см. перевод в сборнике «Квантовая оптика и квантовая радиофизика», М., «Мир», 1966, стр. 281).
18. Н. Haken, Zs. Phys. **190**, 327 (1966).
19. V. Argot, H. Haken, H. Risken, Zs. Phys. **197**, 207 (1966).
20. M. Lax, Phys. Rev. **145**, 110 (1966); сборник Physics of Quantum Electronics, McGraw-Hill, New York, 1966, р. 735; IEEE J. Quantum Electron. QE-3, 37, 47 (1967); Phys. Rev. **157**, 213 (1967).
21. H. Sauermann, Zs. Phys. **189**, 312 (1966).
22. H. A. Haus, IEEE J. Quantum Electron. QE-1, 179 (1965).
23. J. A. Fleck, J. Appl. Phys. **37**, 188 (1966).
24. И. Л. Бернштейн, И. А. Андронова, Ю. И. Зайцев, Изв. вузов (Радиофизика) **10**, 59 (1967).
25. H. Risken, Zs. Phys. **186**, 85 (1965); **191**, 302 (1966).
26. Ю. Л. Климонтович, П. С. Ланда, ЖЭТФ: а) **56**, 275 (1969); б) **58**, 1367 (1970).
27. П. С. Ланда, ЖЭТФ **58**, 1651 (1970).
28. Ю. Л. Климонтович, УФН **101**, 577 (1970).
29. Ю. Л. Климонтович, А. С. Ковалев, ЖЭТФ **59**, 464 (1970).
30. А. С. Ковалев, Изв. вузов (Радиофизика) **14**, 823 (1971).
31. R. J. Glauber, Phys. Rev. **130**, 2529 (1963) (см. перевод в сборнике «Квантовая оптика и квантовая радиофизика», М., «Мир», 1966, стр. 91).
32. V. Kogelman, Phys. Rev. Lett. **14**, 293 (1965).
33. M. Scullly, W. E. Lamb, a) сборник Physics of Quantum Electronics, McGraw-Hill, New York, 1966, р. 759; б) Phys. Rev. **159**, 208 (1967); **166**, 246 (1968); **179**, 368 (1969).
34. J. A. Fleck, Phys. Rev. **149**, 309, 322 (1966).
35. Ch. R. Willis, Phys. Rev. **147**, 406 (1966); **156**, 320 (1967); **165**, 420 (1968).
36. W. Brügel, Ann. Phys. **22**, 67 (1968).
37. А. П. Казанцев, Г. И. Сурдуков, ЖЭТФ **56**, 200 (1969); **58**, 245 (1970).
38. W. Weidlich, Nuovo Cimento, Suppl. **6**, 939 (1968).
39. R. D. Hempstead, M. Lax, Phys. Rev. **161**, 350 (1967).
40. В. С. Смирнов, Б. Л. Желюб, ЖЭТФ **57**, 2043 (1969).
41. Э. М. Беленов, ЖЭТФ **39**, 133 (1969).
42. R. Fork, M. Pollak, Phys. Rev. **A139**, 1408 (1965).
43. М. Л. Евиль, С. М. Рытов, Теория равновесных тепловых флуктуаций в электродинамике, М., «Наука», 1967.
44. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, М., Физматгиз, 1959, гл. XIII.
45. S. Stenholm, W. Lamb, Phys. Rev. **181**, 618 (1969).
46. П. С. Ланда, Вестн. МГУ (Физика и астрономия), № 6, 689 (1970).
47. П. С. Ланда, А. С. Ковалев, сборник «Квантовая электроника», № 4, М., «Сов. радио», 1971, стр. 67.
48. С. М. Рытов, Введение в статистическую радиофизику, М., «Наука», 1967.

49. Р. Л. Стратонович, Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике, М., «Сов. радио», 1961.
50. А. Н. Малахов, Флуктуации в автоколебательных системах, М., «Наука», 1968.
51. D. E. Messing, Phys. Rev. **141**, 306 (1966).
52. J. E. Geusic, см.<sup>33а</sup>, р. 725.
53. Я. З. Вирник, Е. Г. Ларionцев, Изв. вузов (Радиофизика) **14**, 162 (1971).
54. Н. Виппет, Mem. artill. franc. **39**, 437 (1965).
55. С. Г. Раутян, Тр. ФИАН **43**, 3 (1968).
56. Н. Н. Богоявлен, Лекции по квантовой статистике, Собр. соч., т. 2, Киев, «Наукова думка», 1969, стр. 287.
57. F. T. Agesson, сборник Photocount Distributions and Field Statistics, Varenna, Italy, 1967.
58. Н. Н. Розанов, Оптика и спектроскопия **28**, 740 (1970).
59. П. С. Ланда, Оптика и спектроскопия **30** (5), 976 (1971).
60. H. Risken, Progr. Optics **7**, 241 (1969).
61. А. Н. Малахов, Изв. вузов (Радиофизика) **12**, 72 (1969).
62. А. Н. Малахов, М. С. Сандлер, Изв. вузов (Радиофизика) **14**, 845 (1971).
63. А. Н. Малахов, Изв. вузов (Радиофизика) **10**, 885 (1967).
64. Ю. Л. Климонтович, П. С. Ланда, Е. Г. Ларionцев, ЖЭТФ **52**, 1616 (1967).
65. B. L. Goryffy, M. Borenstein, W. E. Lamb, Phys. Rev. **169**, 340 (1968).
66. S. Stenholm, Phys. Rev. **B1**, 15 (1970).
-