019.941:517.5

ОТЫСКАНИЕ ПРОИЗВОДЯЩИХ ФУНКЦИЙ

Elna B. McBride. Obtaining Generating Functions (Springer Tracts in Natural Philosophy, vol. 21). Springer-Verlag, Berlin — Heidelberg — New York, 1971, VIII + 100 pp.

Функцию двух переменных $G(x, t)$ автор называет производящей функцией для семейства $\{f_n(x)\}$, если справедливо (быть может, формальное) разложение

$$G(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n f_n(x) t^n, \tag{1}$$

где коэффициенты c_n не зависят от x и t. Производящие функции известны для большинства специальных функций, встречающихся в математической физике, и они служат мощным орудием для получения различных тождеств, рекуррентных соотношений, вычисления интегралов и т. д. Одно и то же семейство функций $\{f_n(x)\}$ может иметь, вообще говоря, несколько производящих функций (за счет выбора коэффициентов c_n), и важно уметь найти функцию $G(x, t)$, если каким-либо образом задано семейство $\{f_n(x)\}$. Этой задаче и посвящена рецензируемая книга. Вот ее краткое содержание:

Глава I. Методы вычислений с рядами. Первая часть: Основные идеи. 1. Введение. 2. Функция факториал и обобщенная гипергеометрическая функция. 3. Отыскание производящих функций из разложений в ряд по степеням x. Вторая часть: Методы Рейнвилла. 4. Использование вспомогательной переменной. 5. Билинейная производящая функция. 6. Двойная производящая функция. 7. Сводка результатов.

Глава II. Метод Вейснера. 1. Введение. 2. Дифференциальное уравнение. 3. Линейные дифференциальные операторы. 4. Группа операторов. 5. Расширенная форма группы, порожденной B и C. 6. Производящие функции. 7. Заключение.

Глава III. Дальнейшие результаты, получаемые методом Вейснера. 1. Введение. 2. Модифицированные полиномы Лагерра. 3. Простые полиномы Бесселя. 4. Полиномы Гегенбауэра.

Глава IV. Метод Трусделла. 1. Введение. 2. Восходящее уравнение. 3. Полиномы Эрмита $\{H_{\alpha+n}(x)\}$. 4. Нисходящее уравнение. 5. Полиномы Эрмита $\{H_{\alpha-n}(x)\}$. 6. Полиномы Шарлье.

Глава V. Различные методы. 1. Введение. 2. Классы производящих функций. 3. Естественные пары производящих функций. 4. Производящие функции в дифференциальной или интегральной форме. 5. Производящие функции, связанные с преобразованием Лапласа. 6. Метод контурного интеграла. 7. Последние результаты.

Как видно из оглавления, автор не стремится к полноте и основное внимание уделил методам Рейнвилла, Вейснера и Трусделла. Специфика этих методов отыскания сумм бесконечных рядов вида (1) состоит в том, что они наиболее эффективны тогда, когда за отправную точку при определении семейства $\{f_n(x)\}$ берется дифференциальное уравнение с параметром n, обобщенная формула Родрига либо рекуррентное соотношение. Сущность указанных выше методов нахождения сумм бесконечных рядов изложена автором просто и ясно. Много внимания уделено вопросу о том, как из одной производящей функции для данного семейства $\{f_n(x)\}$ получить серию других производящих функций для того же семейства. Большим методическим достоинством книги является то обстоятельство, что примеры не заслоняют в ней идейной стороны вопроса и часто интересны сами по себе.

А. А. Арсеньев