

ИЗ ИСТОРИИ ФИЗИКИ

530

ЖИЗНЬ И ТВОРЧЕСТВО ЛЕОНА БРИЛЛЮЭНА *)

A. Кастлер

Многие из нас, конечно, помнят блестящую лекцию, прочитанную Леоном Бриллюэном восемь лет назад по просьбе вашего Общества и Французского физического общества.

Леон Бриллюэн, остававшийся творцом до самой смерти, скончался в Нью-Йорке в начале октября 1969 г. в возрасте 80 лет. О его жизни и деятельности я и хочу вам здесь рассказать¹.

Перед тем, как начать мой доклад, позвольте мне приветствовать находящуюся среди нас его сестру Мадлен, брата Жака и дочь, мадам Изабеллу Бори, которые любезно согласились присутствовать здесь в этот вечер.

То, что Леон Бриллюэн стал одним из выдающихся физиков нашего времени, оставил глубокий след во многих областях физики, является не только его личной заслугой, но и результатом семейных традиций, поскольку его прадед по материнской линии, Шарль Брио, был профессором механики в Сорбонне, дед, Элётэр Маскар, будучи преподавателем экспериментальной физики в Коллеж де Франс, добился международной известности своими работами по оптике и земному магнетизму, и, наконец, его отец, Марсель Бриллюэн, руководил кафедрой теоретической физики в Коллеж де Франс в течение 32 лет и вошел в число теоретиков своего времени, которые вместе с Анри Планкаре и Г. А. Лоренцом завершили разработку того, что мы теперь называем «классической физикой».

На первой фотографии вы видите Леона Бриллюэна в кругу своей семьи в 1907 г., когда ему было 18 лет. В следующем, 1908 г. он должен был поступить в Высшую Нормальную школу, где когда-то учился его отец.

Разрешите мне здесь обратиться к моим собственным воспоминаниям.

Мне выпало счастье учиться у его отца Марселя Бриллюэна в Высшей Нормальной школе в 1925 г. Ученикам 3-го года обучения, которые заканчивали лицей и работали над своими дипломами, он поручал делать теоретические доклады о великих физиках. Так как я хорошо читал по-немецки, он поручил мне доклады о Гельмгольце и о Генрихе Герце, благодаря работе над которыми я узнал много нового. Нашему же товарищу

*) A. Kastler, *La vie et l'oeuvre de Léon Brillouin, L'onde Électrique* 50 (4), 1 (1970). Лекция, прочитанная 28 января 1970 г. на заключительном заседании Французского общества инженеров-электриков и радиоэлектроников. Перевод Л. М. Коврижных.

Лазержу, который был силен в английском, мы обязаны блестящими докладами о Фарадее, Максвелле и лорде Кельвине. В своих воспоминаниях Леон Бриллюэн рассказывает, что он встретил лорда Кельвина и Гельмгольца у своего деда Маскара, который работал вместе с ними до 1900 г. над определением основных электромагнитных единиц, и что он благоговейно хранил пачку писем, которые лорд Кельвин адресовал его деду.

Ученик Высшей Нормальной школы Леон Бриллюэн со своими товарищами был вынужден, как, впрочем, и в наши дни, следовать сорбонскому курсу физики, но он ему не нравился; я его цитирую: «Пагубный,



Рис. 1. Леон Бриллюэн со своими родителями и сестрой Мадлен (1907 г.).

неинтересный и плохо преподаваемый,— писал он затем одному из своих друзей,— студенты должны были бы взбунтоваться».

Леон Бриллюэн не взбунтовался, но старался отыгрываться от занятий; делая вид, что направляется в Сорбонну, он спускался немного ниже на улицу Святого Жака, чтобы пойти послушать лекции Поля Ланжевена в Коллеж де Франс. Там он открыл для себя относительность и кванты.

«Как превосходно!»— воскрикал он. И он не упустил возможности погрузиться в мир атомов курса Жана Перрена и радиоактивности курса мадам Кюри. «Все это,— говорил он,— вселило в меня энтузиазм и ослепило возможностью поиска».

Он закончил Нормальную школу в 1912 г. со степенью «агреже» *). Ему представилась исключительная возможность провести год в Мюнхене вместе с Арнольдом Зоммерфельдом, которому суждено было стать одним из основоположников атомной физики.

Институтом экспериментальной физики при Университете в Мюнхене руководил в то время, начиная с 1900 г., Рентген, отец X-лучей **).

*) Примерно соответствует степени кандидата наук. (Прим. перев.)

**) Обычно в русской литературе их называют рентгеновскими лучами, но во времена, о которых идет речь, они назывались еще X-лучами. (Прим. перев.)

Зоммерфельд, возглавлявший Институт теоретической физики и живо интересовавшийся природой этих лучей, опираясь на опыты по дифракции, сделал вывод, что если природа X-лучей электромагнитная, то их длина волны должна быть порядка 10^{-9} см.

Молодой Макс фон Лауэ, который работал тогда вместе с Зоммерфельдом, выдвинул гениальную идею. Дифракционные решетки, созданные рукой человека, слишком велики, чтобы привести к заметной дифракции таких лучей. Но ведь уже со временем Брава физики предполагали, что распределение атомов в кристаллах является регулярным и периодическим, и, таким образом, сама природа предлагала физике инструмент для обнаружения дифракции этих неуловимых лучей, в котором она так нуждалась.

Взяв источник X-лучей Рентгена и кристаллические образцы фон Гrotца, два молодых исследователя, Фридрих и Книппинг, поставили эксперимент в институте Зоммерфельда, и это был, без сомнения, один из редких физических экспериментов, проведенный в Институте теоретической физики. Результат его известен: первые кристаллограммы X-лучей были получены и отныне стали доступными и спектроскопия X-лучей, и изучение структуры кристаллических решеток.

Как раз в этот момент Леон Бриллюэн приехал к Зоммерфельду и именно там нашел вдохновение для своих лучших работ по физике твердого тела. В этот мюнхенский период у Зоммерфельда и с Зоммерфельдом он сделал свою первую крупную научную работу, опубликованную на немецком языке в «Annalen der Physik»: «Распространение света в рассеивающих средах»², — работу, в которой он показал, что в зонах аномального рассеяния нужно различать помимо фазовой и групповой скоростей две другие характерные скорости, которые он назвал «скоростью распространения сигнала» и «скоростью распространения энергии». Уже в этой юношеской работе проявляются его способности в области математической физики.

Мюнхен явился знаменательным для Бриллюэна не только открытием для него квантовой теории света Макса Планка и Эйнштейна ($E = h\nu$), но и теории квантования степеней свободы твердых тел и, в частности, квантовой теории удельной теплоемкости, развитой Эйнштейном, затем Дебаем и, наконец, Борном и фон Карманом³.

С момента своего возвращения в Париж, в июне 1913 г., он принял за диссертационную работу, которая должна была называться «Теория твердых тел и квантов», работу, которой суждено было быть прерванной из-за войны, разразившейся в 1914 г. Он был призван в армию, затем стал лейтенантом армейской радиослужбы и работал с Анри

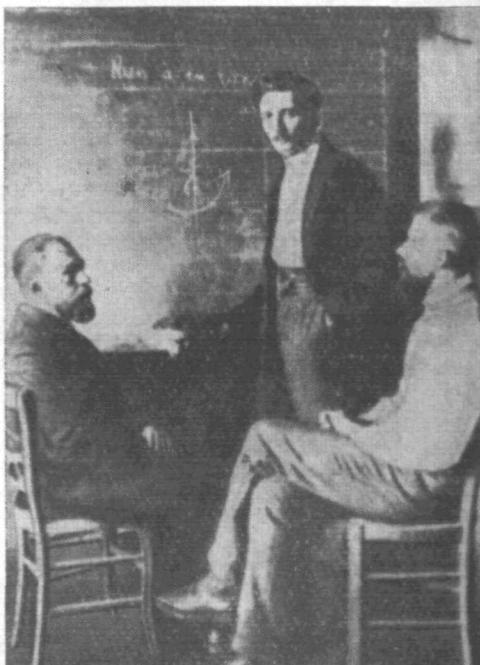


Рис. 2. Леон Бриллюэн со своими товарищами в Высшей Нормальной школе (1912 г.).

Абрагамом, Морисом и Луи де Бройлями в лаборатории генерала Ферье над улучшением телеграфной связи и изобретением усилителей на сопротивлении⁴. Этот переход в лабораторию прикладной физики оставил в нем глубокий след. Его дальнейшая деятельность привела его к все более и более сложным и абстрактным проблемам в области теоретической физики, однако он всегда заботился о практическом применении своих теоретических выводов. Много позже, после своих фундаментальных работ по квантовой механике, он вместе со своим братом Жаком занялся изучением распространения не только электромагнитных, но также и акустических волн в волноводах и во время Второй мировой войны в Соединенных Штатах усовершенствовал теорию магнетрона⁵, внеся этим существенный вклад в дальнейшую разработку радиолокации и, таким образом, в победу союзников в этой войне.

Вся его продолжительная деятельность является замечательным примером сочетания гения физика с изобретательностью инженера.

Но прежде чем говорить о его научной работе, остановимся на основных этапах его карьеры.

После защиты диссертации в 1920 г. на протяжении десяти лет, с 1921 по 1931 г., Леон Бриллюэн читает лекции по радиофизике в Высшей электротехнической школе. После своей первой поездки в Канаду и Соединенные Штаты в 1924 г. и второй — в 1928 г. Леон Бриллюэн преподает теоретическую физику в Сорбонне в 1928 г., а затем в течение четырех лет

в Институте Анри Пуанкара, после чего с 1932 г. возглавляет кафедру теоретической физики в Коллеж де Франс, кафедру, прославленную до Бриллюэна его отцом и только что оставленную им. Этот пост Бриллюэн занимал до 1948 г.

Но война вновь изменяет его судьбу. Находясь в Соединенных Штатах в 1939 г., он с сожалением отмечает недостатки французского радио: радиопередачи из Франции на коротких волнах едва улавливались, тогда как другие европейские станции звучали ясно и мощно, а радиостанции фашистской Германии имели возможность распространять свою коварную пропаганду.

По возвращении во Францию он обратился к министру почты и телеграфа. Бриллюэн не рассчитывал на ответ и был удивлен вызовом через некоторое время к премьер-министру, которым был тогда Даладье. Ему предложили должность директора французского радио вещания. Бриллюэн долго колебался и согласился только потому, что его друг, инженер



Рис. 3. Леон Бриллюэн в возрасте 46 лет, преподаватель Коллеж де Франс (1935 г.).

Лё-Корбелье, пообещал сотрудничать с ним. Таким образом, он стал генеральным директором организации, в которой он предполагал реорганизовать технические службы и модернизировать оборудование, в то время как Жан Жироду, его товарищ по Нормальной школе, взялся за переустройство служб информации и пропаганды.

Но события развивались с неожиданной быстротой: месяц спустя началась «эта странная война», и весной 1940 г. Франция была оккупирована. Леону Бриллюэну была поручена грустная задача: уничтожить все радиооборудование до прихода врага. Заметим, что это был единственный участок, где уничтожение оборудования было проведено достаточно эффективно, тогда как мосты, железнодорожные пути и дороги, о разрушении которых также был отдан приказ, попали в руки завоевателей почти невредимыми. Естественно, что эта акция вызвала к нему ярость со стороны оккупантов, и даже в Виши, куда Бриллюэн эвакуировался вместе со всеми сотрудниками центральной администрации, он не был в безопасности. Тогда он решил (и это ему удалось не без труда) уехать через Португалию в Соединенные Штаты, чтобы там, как мы уже об этом упоминали, оказывать посильную помощь союзникам в войне. Там он также преподавал в высшей школе, вначале в Висконсинском университете, затем в университете Брауна и в Гарвардском университете, где он возглавлял кафедру с 1946 по 1949 г., и, наконец, с 1954 г. до своего ухода на пенсию — в Колумбийском университете в Нью-Йорке.

Ему было поручено также реорганизовать службу управления обучением в отделении электроники компаний IBM *). Благодаря своей репутации он был в 1953 г. избран членом национальной Академии наук, а в 1961 г. — членом международной Академии философских наук.

После того как мы напомнили этапы его карьеры, обратимся к научной деятельности Леона Бриллюэна.

Я не буду пытаться дать подробное описание его творчества; оно настолько широко, что времени, отведенного мне здесь, было бы для этого недостаточно. Я предпочту ограничиться работами, которые приобрели известность, и среди них особо остановлюсь на тех, которые тесно связаны с экспериментальной физикой и для изложения которых я чувствую себя в известной мере компетентным.

Я не буду вам говорить ни о *формуле Бриллюэна — Вигнера* в квантовой механике ⁶, ни о *теореме Бриллюэна*, связанной с методом самосогласованных полей Хартри — Фока ⁷, несмотря на их большое значение в физике. Я упомяну только о методе БВК (BWK) (Бриллюэн — Венцель — Крамерс) **), разработка которого была начата в 1926 г. в первых работах Шредингера и который был предложен Бриллюэном ⁸ и одновременно и независимо Венцелем ⁹ и завершен несколько позже Крамерсом ¹⁰. Этот метод играет значительную роль при решении практических задач, особенно в квантовой химии.



Рис. 4. Леон Бриллюэн в Соединенных Штатах (1955 г.).

⁶) International Business Machine. (Ред.)

⁷) В русской литературе этот метод носит название ВКБ-метода. (Прим. перев.)

Я хочу ограничиться изложением эффекта, который в настоящее время известен всему миру под названием «эффект Бриллюэна», и частично коснуться «функции Бриллюэна» в теории парамагнетизма. Затем кратко упомяну о роли, которую играют зоны Бриллюэна в физике твердого тела, и рассчитываю закончить, обратясь к работам Бриллюэна в области кибернетики, выполненным им в течение последних 20 лет.

1. ЭФФЕКТ БРИЛЛЮЭНА *)¹¹

Я уже говорил вам о диссертационной работе Леона Бриллюэна, начатой им в Мюнхене, прерванной войной 1914—1918 гг., возобновленной в 1919 г. и защищенной в 1920 г.¹², а затем дополненной статьей, опубликованной в 1922 г. в «Annales de physiques»¹³. Эта работа дебютанта была уже под стать зрелому ученому. В ней Бриллюэн, вдохновленный открытием Макса фон Лауэ, рассмотрел взаимодействие электромагнитной волны с твердым прозрачным телом, или, иначе говоря, с кристаллической решеткой.

Рентгеновские лучи рассеиваются кристаллами, и эта дифракция описывается формулой Брэгга $2d \sin \alpha = K\lambda$. Дифракция возможна только в том случае, если длина волны λ меньше $2d$, где d — постоянная решетки, т. е. расстояние между кристаллическими плоскостями. Лучи с длиной волны, превышающей $2d$, не дифрагируют на кристаллической решетке. Следовательно, в то время как рентгеновские лучи с достаточно малой длиной волны могут рассеиваться на решетке, видимое излучение с длиной волны, в 1000 раз большей, не рассеивается кристаллом. В этом случае кристалл является, как говорят, «оптически пустым», т. е. пропускающим свет без дифракции. Такой вывод предполагает идеальный кристалл. Это означает, что атомные центры находятся точно в геометрических вершинах трехмерной кристаллической решетки. Известно, однако, что любой кристалл не идеален. В нем существуют отклонения двух видов: статические и динамические.

Статические отклонения — это погрешности межатомных расстояний, расположения и т. д. Эти погрешности приводят к рассеянию света в стороны от падающего пучка, причем рассеянный свет имеет ту же частоту, что и падающий. Но есть и другая причина отклонений кристаллической решетки от идеальной, которая вызывает отклонение атомов от узлов геометрической решетки: это — тепловое движение. Оно заставляет колебаться атомы около их положения равновесия и вызывает флуктуации плотности внутри кристалла. Эти флуктуации также приводят к рассеянию света. Дебай показал, что тепловое движение твердого тела можно разложить в «частотный спектр», т. е. представить в виде суперпозиции плоских упругих волн, распространяющихся в кристалле, каждая из которых имеет вполне определенную частоту и направление. Каждая из них создает зоны сгущения и разрежения. И эти зоны играют роль кристаллических плоскостей с попрежнему сильным и слабым показателем преломления, которые преломляют свет. К такому распространению света можно применить формулу Брэгга, если положить в ней $K = 1$ (в силу синусоидального характера изменения плотности и слабой амплитуды

*) Примерно в то же самое время, что и Бриллюэн, и независимо от него Л. И. Мандельштам высказал те же самые идеи о тонкой структуре линии рассеяния (1918—1926 гг.). По предложению Мандельштама и Ландсберга в 1930 г. Е. Ф. Гросс в Ленинграде, а также и сами Мандельштам и Ландсберг в Москве в 1930 г. наблюдали само явление в кристалле кварца. Поэтому в СССР принято называть эффект, о котором идет речь, рассеянием Мандельштама — Бриллюэна.

и учитывая только дифракцию первого порядка) и отождествить расстояние d с длиной волны Λ введенных выше упругих волн. В этом случае формула Брэгга $2d \sin \alpha = K\lambda$ принимает следующий вид: $2\Lambda \sin \alpha = \lambda$. Если вместо угла α (где α — угол между падающим лучом и так называемой кристаллической плоскостью) мы введем угол рассеяния θ (т. е. угол между падающим лучом и лучом рассеяния), то, как следует из рис. 5, $\alpha = \theta/2$.

Если выразить длины волн Λ и λ через частоту и скорость распространения волн в кристаллической среде, т. е. учесть, что $\Lambda = V/N$ и $\lambda = c/v$, то приведенная выше формула примет следующий вид:

$$\frac{N}{v} = 2 \frac{V}{c} \sin \frac{\theta}{2},$$

где v — частота световых колебаний, c — скорость света в кристалле, N — частота термоупругой волны, а V — скорость ее распространения.

Когда расеивающие поверхности движутся, эффект Допплера влияет на изменение частоты отраженного света *). Вдоль направления распространения волн это изменение частоты либо положительно, либо отрицательно, и, таким образом, мы получаем следующую формулу Бриллюэна:

$$\frac{\Delta v}{v} = \pm 2 \frac{V}{c} \sin \frac{\theta}{2}.$$

Рассеянный свет представляет собой *дублет Бриллюэна*, т. е. две монохроматические линии, которые располагаются симметрично по обе стороны от частоты падающего луча.

Мы только что рассмотрели эффект Бриллюэна в волновой интерпретации, рассматривая его как результат взаимодействия между электромагнитной волной, распространяющейся в среде, и внутренними термоупругими волнами, которые отражают тепловое движение среды.

Но этот эффект является также одним из лучших примеров, позволяющих нам проиллюстрировать двойственную природу света: волновую и корпускулярную **). Световая энергия может быть количественно выражена в виде энергии *фотонов* $E = \hbar v$, количество движения которых есть $G = \hbar v/c$. Термоупругие волны могут быть в свою очередь охарактеризованы энергией *фононов* $E' = \hbar N$ и соответственно их количеством движения $G = \hbar N/V$.

Взаимодействие между фотоном падающего излучения и решеткой приводит к аннигиляции или к созданию фотона. Применяя к этому процессу законы сохранения энергии и количества движения, мы находим формулу Бриллюэна (рис. 6).

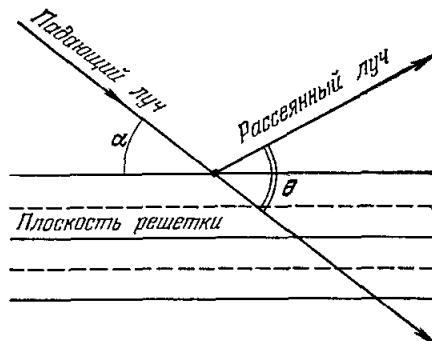


Рис. 5. Связь между углом Брэгга α и углом рассеяния θ .

*) Можно считать также, что рассеяние света происходит на стоячей термоупругой волне, а изменение частоты происходит вследствие модуляции света с частотой N , вызывающей явление «сателлитов» с частотами, равными $v + N$ и $v - N$.

**) Впервые квантовую теорию этого явления дал И. Е. Тамм. (Zs. Phys. 60, 345 (1930)). (Прим. ред.)

Существенным следствием формулы Бриллюэна является то, что изменение частоты при рассеянии оказывается возрастающей функцией угла рассеяния θ : для каждого угла рассеяния θ световая волна взаимодействует с термоупругой волной определенной частоты N , и, таким образом, изменяя угол θ , можно исследовать спектр частот термоупругих волн вплоть до верхнего предела

$$N = 2 \frac{V}{c} v, \text{ соответствующего углу } \theta = 180^\circ. \text{ Отношение } V/c \text{ — величина порядка } 10^{-5}, \text{ и для } v \approx 10^{15} (\lambda = 0,3 \text{ мкм}) \text{ частота } N \text{ будет порядка } 2 \cdot 10^{10}, \text{ т. е. } 20 \text{ Гц.}$$

Первые экспериментальные подтверждения рассеяния Бриллюэна относятся к 1930 г. и принадлежат советскому физику Е. Ф. Гроссу ¹⁴ из Ленинграда *).

На рис. 7 изображены дублеты Бриллюэна для кварца, полученные индийскими физиками Кришнаном и Чандрасекхараном ¹⁵, при различных

Рис. 6. Векторная диаграмма, иллюстрирующая сохранение количества движения в процессе рассеяния с образованием фона.

Отсюда в силу равнобедренности треугольника следует $hN/V = (2hv/c)\sin(\theta/2)$. Сохранение энергии дает $hv = hv' \pm hN$. Комбинация этих двух равенств дает формулу Бриллюэна.

ориентациях кристалла. Использовалась линия возбуждения с длиной волны $\lambda = 2537 \text{ \AA}$ от ртутной лампы. Соответствующая экспериментальная техника позволяет избавиться от центральной составляющей, вызванной статическими погрешностями, которая в силу своей высокой интенсивности может замаскировать рассеяние Бриллюэна. Избавляются от нее с помощью фильтра из паров ртути, расположенного между рассеивающим кристаллом и регистрирующим прибором, который в данном случае представляет собой решетчатый спектрограф с высокой разрешающей способностью.

Рис. 8 воспроизводит две микрофотограммы спектра рассеяния кварца, полученные при двух различных температурах 60° С и 375° С . Когда температура растет, интенсивность центральной линии, связанная со статическими отклонениями решетки от идеальной, остается неизменной (линия 2534 \AA служит контрольной линией), в то время как интенсивность дублета Бриллюэна, связанная с интенсивностью тепловых возбуждений, увеличивается прямо пропорционально абсолютной температуре.

Рис. 9 показывает интерферограмму дублета Бриллюэна для кристалла хлората натрия, полученную Секки ¹⁶ на интерферометре Фабри-Перо.

Появление в 1960 г. источников света с высокой степенью монохроматичности, которыми являются газовые лазеры, существенно облегчило изучение эффекта Бриллюэна и вновь придало ему актуальность.

*) См. примечание на стр. 106.

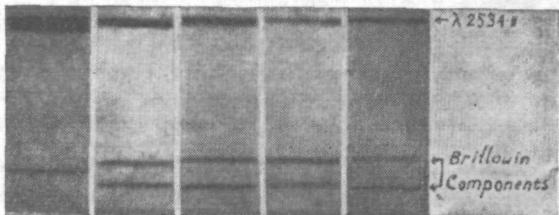


Рис. 7. Дублет Бриллюэна в кристалле кварца при различных ориентациях кристалла (часть спектра).

Крайняя левая часть спектра соответствует основной линии с длиной волны 2537 \AA (по Кришнану и Чандрасекхарану ¹⁵).

Эта новая техника позволяет, в частности, приступить к изучению эффекта Бриллюэна в сжатых газах. Рис. 10 показывает триплет Бриллюэна *) в метане под давлением 9 атм. Этот результат был получен недавно Лаллемандом в физической лаборатории Высшей Нормальной школы ¹⁷.

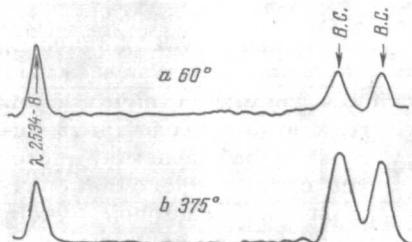


Рис. 8. Микрофотограммы спектра рассеяния для кристалла кварца, находящегося при температуре 60° С и соответственно 375° С.

Интенсивность дублета Бриллюэна увеличивается с возрастанием температуры. Интенсивность рассеяния из-за наличия статических погрешностей (контрольная линия 2535 Å) не зависит от температуры.

В заключение укажем, что использование мощных лазеров позволяет получить индуцированный эффект Бриллюэна, который приводит к генерации сверхзвуковых волн ¹⁸. Таким образом, перед эффектом Бриллюэна открываются новые перспективы.

Явление рассеяния света, предсказанное Леоном Бриллюэном в 1922 г., должно было привести еще к одному явлению: дифракции света на ультразвуке. В самом деле, если термоупругие естественные волны в конденсированной среде (твердой или жидкой), связанные с тепловым движением, вызывают рассеяние света с изменением длины волны, то этот же эффект, но гораздо более сильный, можно получить, если искусственно возбудить в среде с помощью внешнего источника (например, пьезоэлектрического) ультразвуковую волну.

Идея такого эксперимента появилась одновременно и независимо, как это часто бывает в физике, у Дебая и Сирса в Соединенных Штатах ¹⁹ и у Люка и Бикара во Франции ²⁰. Первые экспериментальные результаты были получены ими в 1932 г.

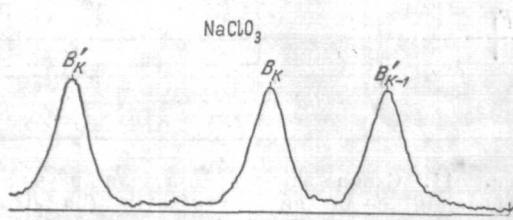


Рис. 9. Интерферограмма Фабри — Перо дублета Бриллюэна B_K и B'_K кристалла NaClO_3 (по Секки ¹⁶). Линия B'_{K-1} соответствует дифракционному максимуму следующего порядка.

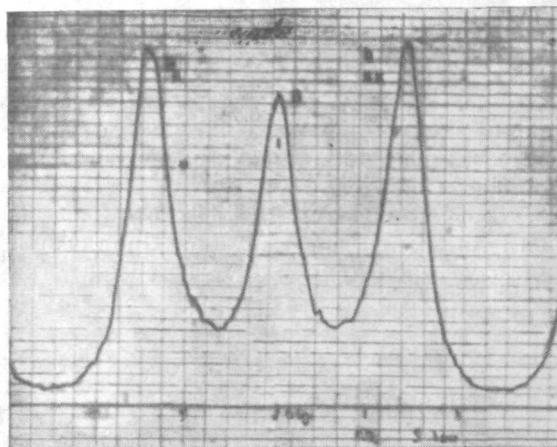


Рис. 10. Триплет Бриллюэна для газа CH_4 при давлении 9 атм при рассеянии под углом $\theta = 170^\circ$ (по Лаллеманду ¹⁷).

*) В жидкостях и сжатых газах соотношение между интенсивностями боковых компонент (дублет Бриллюэна) и центральной составляющей — рассеянной без изменения частоты — может быть рассчитано теоретически.

На рис. 11 изображена схема эксперимента, использованного двумя французскими физиками: дно кюветы C , наполненной жидкостью, выполнено из кварцевой пластинки, которая генерирует ультразвуковые волны данной частоты N . Отражаясь от верхней поверхности жидкости, эти волны образуют в ее глубине систему стоячих волн. Эта система играет роль динамической решетки, которая сильно преломляет параллельный световой пучок, выходящий из щели, который проходит через жидкость и

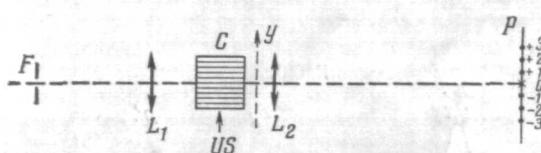


Рис. 11. Схема эксперимента для изучения дифракции света на ультразвуке (по Люка и Бикару²⁰).

затем образует в фокальной плоскости линзы L_2 дифракционный спектр. При слабой интенсивности ультразвуковых колебаний по одну и другую стороны от центрального изображения O щели F (рис. 12, а) наблюдаются



Рис. 12. Спектры дифракции на ультразвуковой волне в жидкости.
а) Низкая интенсивность ультразвука; б) высокая интенсивность ультразвука²⁰.

только спектры первого порядка; с увеличением же интенсивности ультразвука нелинейное взаимодействие вызывает появление спектров K -го порядка (рис. 12, б).

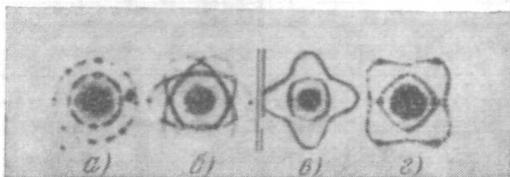
Дифракционные углы в этом случае по-прежнему определяются формулой Бриллюэна, и Леон Бриллюэн посвятил одну из своих работ анализу этого явления²¹. Интересный вариант этого эксперимента был

осуществлен в Германии Шефером и Бергманом²². Если эксперимент ставят таким образом, что ультразвук не образует внутри используемого тела систему одномерных стоячих волн, а преломляется внутри этого тела во всем направлении (для этого достаточно учесть шероховатость поверхности, противоположной источнику ультразвука), и вместо щели используют точечный монохроматический источник света, то на экране получают характерное дифракционное изображение, отражающее свойства симметрии рассеивающей среды, позволяющее судить об оптической и упругой анизотропии рассеивающего тела. На рис. 13 приведены нескольких примеров таких дифракционных картин.

Рис. 13. Дифракционные картины, возникающие при рассеянии на ультразвуке в различных кристаллах и в куске стекла²².

а) Кусок стекла; б) кристалл кварца, световой пучок параллелен оптической оси; в) кристалл KCl, световой пучок параллелен оси кристалла; г) кристалл LiF, световой пучок параллелен оси кристалла.

ционное изображение, отражающее свойства симметрии рассеивающей среды, позволяющее судить об оптической и упругой анизотропии рассеивающего тела. На рис. 13 приведены нескольких примеров таких дифракционных картин.



2. ТЕОРИЯ ПАРАМАГНЕТИЗМА

После экспериментального изучения магнитных свойств тел Пьером Кюри в его диссертации, установившего основные законы парамагнетизма²³, Полль Ланжевен дал в 1905 г.²⁴ первое теоретическое обоснование этих законов, уже тогда предсказывая наличие магнитного насыщения при очень низких температурах. Основная идея, лежащая в основе теории Ланжевена, заключается в следующем: каждый атом или ион является носителем постоянного магнитного момента μ . Под влиянием внешнего магнитного поля H этот момент стремится ориентироваться в направлении этого поля. В отсутствие противодействующих сил (что соответствует температуре абсолютного нуля) измерение магнитного момента образца, обладающего N носителями, дает следующее значение для момента насыщения:

$$\mu_s = N\mu.$$

Если мы предположим, что образец содержит один моль вещества, то μ_s будет молярным моментом насыщения.

Но при отличной от нуля температуре T (в градусах Кельвина) тепловое движение стремится противодействовать ориентирующему действию

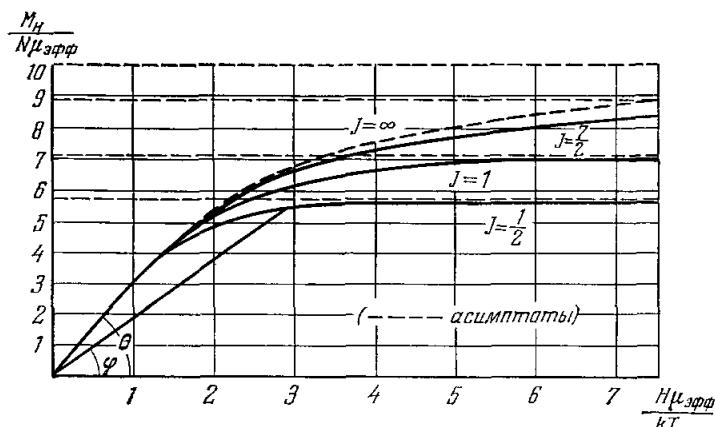


Рис. 14. Кривая Ланжевена и кривые Бриллюэна.
Экспериментальные результаты для иона гадолиния ($J = 7/2$) (27, стр. 258).

поля, и между двумя противодействующими силами устанавливается динамическое равновесие, определяемое законом Больцмана, согласно которому для действительного молярного момента $\bar{\mu}$ получаем следующее выражение:

$$\bar{\mu} = \mu_s \mathcal{L}(z),$$

где \mathcal{L} — функция Ланжевена:

$$\mathcal{L}(z) = \coth z - \frac{1}{z},$$

а параметр z равен $z = \mu_s H / RT$, причем R — постоянная Ридберга для идеального газа.

На рис. 14 изображен график функции Ланжевена (кривая $J = \infty$) в зависимости от переменной z , пропорциональной $1/T$. При относительно высоких температурах (что для полей, с которыми мы обычно встречаемся в лабораторных условиях, соответствует практически обычной температуре)

кривая совпадает с касательной к ней в начале координат и

$$\bar{\mu} = \frac{1}{3} \mu_s z = \frac{1}{3} \frac{\mu_s^2}{RT} H = CHT^{-1}.$$

Это соотношение является законом Кюри, а постоянная C , равная $\mu_s^2/3R$, называется постоянной Кюри. Момент молярного насыщения, который наступает при низкой температуре T (порядка температуры жидкого гелия, $\sim 1^\circ \text{K}$), может быть выражен как функция постоянной Кюри: $\mu_s = \sqrt{3RC}$. Он соответствует на рис. 14 ординате 1, горизонталь к которой является асимптотой кривой Ланжевена.

Прогресс в криогенной технике позволил вести измерения при низких температурах, получаемых в основном в лаборатории Каммерлинг-Оннеса в Лейдене. Эти измерения показали, что экспериментальное значение момента насыщения, измеряемое при низкой температуре, не соответствует значению, получаемому из закона Ланжевена; оказалось, что он меньше и что его величина зависит от специфики изучаемого тела.

Между тем квантовая теория продолжала развиваться, и в 1922 г. знаменитый эксперимент Штерна и Герлаха²⁵ установил существование пространственного квантования: носитель магнитного момента, помещенный в магнитное поле H , может принимать только дискретные значения, определяемые соотношением $\cos \theta = m/\sqrt{j(j+1)}$, где квантовое число j может принимать только целые либо полуцелые значения и характеризует момент атома, а магнитное квантовое число m также принимает лишь дискретные значения, меньшие либо равные j .

В 1927 г. Леон Бриллюэн возобновил работу над теорией парамагнетизма Ланжевена, введя туда пространственное квантование, и получил следующую формулу²⁶:

$$\bar{\mu} = \mu_s B_j(z),$$

где «функция Бриллюэна» $B_j(z)$ зависит от квантового числа j и выражается следующим образом:

$$B_j(z) = \frac{j+1/2}{j} \operatorname{cth} \frac{j+1/2}{j} z - \frac{1}{2j} \operatorname{cth} \frac{z}{2j}.$$

При высоких температурах мы вновь получаем закон Кюри

$$\bar{\mu} = \frac{1}{3} \frac{j+1}{j} \frac{\mu_s^2 H}{RT}$$

постоянной C , равной

$$C = \frac{1}{3} \frac{j+1}{j} \frac{\mu_s^2}{R},$$

которая отличается от прежней константы множителем $(j+1)/j$ (который в крайнем случае, при $j = 1/2$, равен 3). Момент насыщения при низкой температуре выразится теперь следующим образом:

$$\mu_s = \sqrt{\frac{j}{j+1} 3RC}.$$

Таким образом, сопоставление измерений при высокой температуре (которые позволяют определить постоянную C) и при низкой (определяющей μ_s) позволяет найти квантовое число j . На рис. 14 нанесены кривые Бриллюэна для значений $j = 1/2, 1$ и $7/2$; экспериментальные измерения, проводившиеся с ионами гадолиния Gd^{3+} , дали для них значение $j = 7/2$ ²⁷).

²⁷) См. ²⁷, стр. 258.

Функция Бриллюэна обсуждалась Ван-Флеком в его фундаментальной книге «Electric and Magnetic Susceptibilities», появившейся в 1931 г.²⁷. Справедливости ради надо отметить, что такая же формула была установлена независимо от Бриллюэна Дебаем²⁸ и Паули²⁹.

3. ЗОНЫ БРИЛЛЮЭНА

В двух работах³⁰, опубликованных в 1930 г. в «Comptes Rendus», Леон Бриллюэн ввел в физику кристалла понятие «зоны». Дадим сначала геометрическое определение этих зон. Рассмотрим симметричную систему материальных точек, одно-, дву-, или трехмерную. Такая система характеризуется расстоянием d , являющимся характеристикой системы *).

Можно говорить о так называемой «взаимной решетке», в которой расстояние между точками равно $1/d$. Рассмотрим в такой взаимной решетке прямой отрезок, который соединяет два каких-нибудь узла решетки, и проведем через середину этого отрезка медиану (для двумерной решетки это прямая, а для трехмерной — плоскость). Начиная с какого-то узла решетки (который мы назовем исходным), проделаем ту же операцию для первых соседних узлов, затем вторых и т. д.

Таким образом, из близлежащих узлов первого порядка мы получим многоугольник для двумерной решетки и многогранник — для трехмерной.

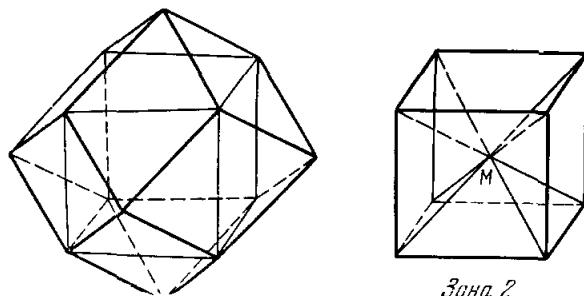


Рис. 16. Зона 2, заключенная между центральным кубом и прилегающей к нему поверхностью (правильный двенадцатигранник).

Эти части, складываясь одна с другой словно элементы игры-головоломки, образуют в соединении многоугольник (или многогранник), идентичный многоугольнику (многограннику) первой зоны. Каждая из последующих зон имеет ту же поверхность (объем), что и первая зона.

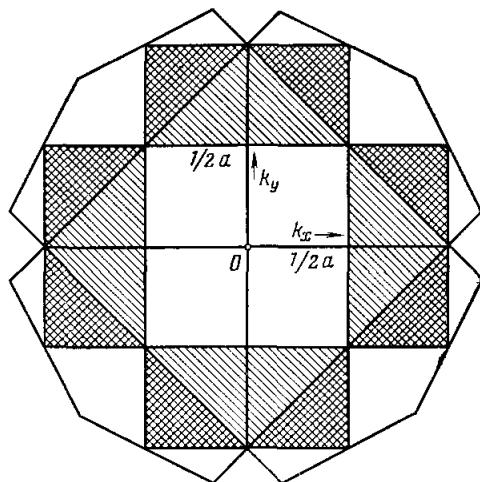


Рис. 15. Четыре первые зоны Бриллюэна квадратной двумерной решетки.

Участки, одинаково защищенные, могут быть перемещены в первую зону и полностью ее перекрывают. Точки указывают главные векторы в k -пространстве.

Площадь (объем) между двумя последовательными многоугольниками (многогранниками) называется «зоной Бриллюэна».

Последовательные зоны Бриллюэна, определенные таким образом, обладают замечательным геометрическим свойством: за исключением первой зоны, которая образует замкнутую поверхность (объем), последующие зоны состоят из отдельных частей. Но

*) Или несколькими различными расстояниями в случаях дву- и трехмерной решетки. Мы здесь ограничимся рассмотрением простейших случаев, когда система характеризуется только одним расстоянием d . Это, в частности, случаи квадратной двумерной решетки и трехмерной кубической.

Рис. 15—17 представляют несколько примеров зон Бриллюэна. На рис. 15 изображены четыре первые зоны квадратной двумерной решетки. На нем участки, принадлежащие к последовательным зонам, обозначены различной штриховкой. На рис. 16 изображена первая зона (куб) и вторая зона, расположенная между этим кубом и правильным двенадцатигранником для простейшей кубической решетки. Сложение частей второй зоны (справа на рисунке) позволяет получить куб, эквивалентный кубу первой зоны. На рис. 17 изображены первые зоны кубической решетки, центрированной по внешним граням, и просто центрированной кубической решетки.

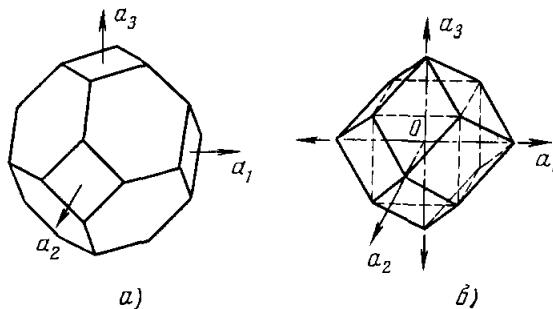


Рис. 17. а) Зона 1 в кубической решетке с центрированными внешними гранями; б) зона 2 в центрированной кубической решетке.

волну, распространяющуюся в кристалле и направлением, определяемым единичным вектором \mathbf{u} . В пространстве взаимной решетки эту волну можно охарактеризовать волновым вектором $\mathbf{k} = \mathbf{u}/\lambda$, который можно перемещать параллельно самому себе из исходной точки O взаимной решетки (рис. 18). Если точка A является узлом взаимной решетки, то плоскость PP' , перпендикулярная прямой OA и делящая отрезок OA пополам, служит границей зоны (эта плоскость также параллельна плоскости кристаллической решетки). Предположим, что конец вектора \mathbf{k} располагается в плоскости PP' . Тогда мы имеем

$$OA = \frac{1}{d},$$

если A — узел решетки, смежный с исходным узлом, а в общем виде

$$OA = \frac{K}{d} \quad (K \text{ — целое число}).$$

В случае, когда узел A является каким-то K -м, считая от исходного узла O , из чертежа следует, что

$$k \sin \alpha = OH = \frac{K}{2d}, \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{1}{\lambda} \sin \alpha = \frac{K}{2d}, \\ 2d \sin \alpha = K\lambda. \end{cases}$$

Это — соотношение Брэгга. Следовательно, можно сделать следующий вывод: «когда во взаимном пространстве конец волнового вектора расположен на поверхности, разделяющей две зоны Бриллюэна, соответствующая волна удовлетворяет соотношению Брэгга».

Наиболее интересно применение этих результатов к поведению электронов в металлах. Внутри кристаллической решетки электроны прово-

дят сложение частей второй зоны (справа на рисунке) позволяет получить куб, эквивалентный кубу первой зоны. На рис. 17 изображены первые зоны кубической решетки, центрированной по внешним граням, и просто центрированной кубической решетки.

Построение зоны Бриллюэна для кристаллических решеток напоминают скорее геометрическую игру. Чем интересны эти зоны для физики? Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим плоскую

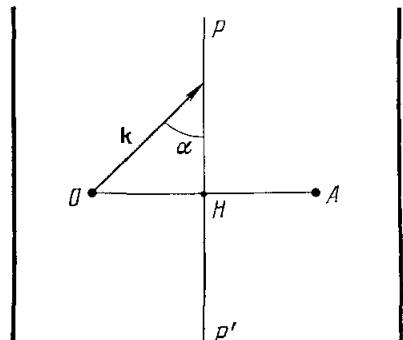


Рис. 18. Вектор \mathbf{k} , удовлетворяющий условию Брэгга.

димости располагаются свободно. Каждому электрону с количеством движения mv соответствует длина волны де Броиля $\lambda = h/mv$ и волновой вектор $\mathbf{k} = \frac{mv}{h}$. Тогда кинетическая энергия будет равна

$$E = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}.$$

Когда вектор \mathbf{k} такого электрона достигает границы зоны Бриллюэна, электрон интенсивно отклоняется. Средняя длина его свободного пробега значительно уменьшается. Электрон уже не может свободно перемещаться, его энергия принимает дискретные значения.

Электроны в металлах подчиняются статистике Ферми³¹. Во взаимном пространстве их волновой вектор \mathbf{k} находится внутри так называемой поверхности Ферми, и свойства электронов зависят в основном от того, как поверхность Ферми расположена по отношению к зонам Бриллюэна. На рис. 19 изображено взаимное расположение поверхности Ферми и первой зоны решетки с центрированными гранями для меди.

4. ЛЕОН БРИЛЛЮЭН И КИБЕРНЕТИКА

В последние годы своей жизни Леон Бриллюэн все больше и больше интересовался наукой об информации и философскими проблемами. Результатами его размышлений стали две фундаментальные работы «Наука и теория информации»^{32*}, книга, изданная на английском, польском и японском языках, и «Жизнь, материя и наблюдения»³³.

После появления понятия «негаэнтропии» (это энтропия с противоположным знаком: вся необратимая эволюция соответствует потере негаэнтропии) Бриллюэн показал эквивалентность между мерой негаэнтропии и мерой «количества информации».

На конференции, которая происходила здесь же восемь лет назад, он проиллюстрировал эту эквивалентность прекрасным примером — анализом задачи максвелловского демона. Вспомним эту задачу. Представьте себе два отделения, разделенные стенкой, одно из которых содержит один моль водорода, а другое — один моль брома.

Если мы проделаем отверстие в разделительной стенке, два газа начнут проникать один в другой и необратимо перемешиваться. Мы знаем, что это явление сопровождается увеличением энтропии, равным **)

$$\Delta S = 2R \ln 2,$$

или потерей такого же количества негаэнтропии. Разделение двух газов требует расхода негаэнтропии, по крайней мере равного ΔS .

Максвелл изобразил демона, расположившегося около отверстия и передвигающего заслонку, настолько легкую, что ее перемещение не

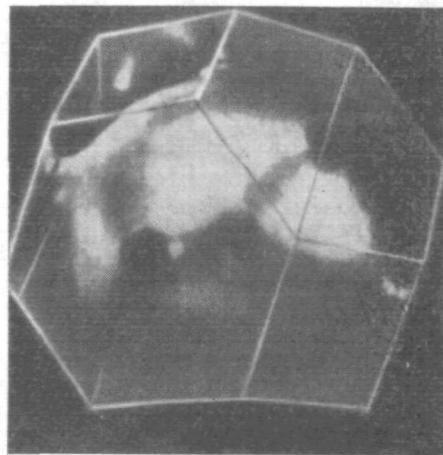


Рис. 19. Модель поверхности Ферми для кристалла меди в первой зоне Бриллюэна (по Пиппарду³¹).

*) См. перевод: Наука и теория информации, М., Физматгиз, 1960. (Прим. ред.)

**) См. 3, § 75 и 152.

требует совершения работы. Он пропускает только молекулы H_2 , двигающиеся слева направо, и молекулы Br_2 , перемещающиеся справа налево. Таким образом, он разделяет два газа без каких-либо затрат энергии. Так демон может опровергнуть принцип Карно.

Рассмотрим, следуя Бриллюэну³⁴, эти явления более подробно. Для того чтобы рассортировать молекулы, демон должен их уметь различать, определять их природу, и эта информация, как мы увидим, не обходится без затрат энергии.

Демон вместе с молекулами заключен в ограниченное однородное пространство с постоянной температурой T . Это пространство содержит количество излучения, равное и идентичное излучению абсолютно черного тела с температурой T . В этих условиях энергия световых квантов в среднем равна $\hbar\nu \approx kT$. Окружающее кажется демону «однородно серым». Он не может что-либо различать и не видит молекул, движущихся ему навстречу. Чтобы их увидеть, нужно осветить их источником света, который излучал бы кванты большей энергии $\hbar\nu' > kT$, чем те, что содержатся в этом замкнутом пространстве. Значит, необходим источник с температурой T' , превышающей T (принцип Карно таким образом исключен!). Этот источник будет излучать, например, голубой свет, поглощаемый молекулами брома, но не молекулами водорода, что позволит различать два вида молекул. Демон должен затратить по крайней мере один квант $\hbar\nu'$ на приходящую молекулу. Значит, если он захочет разместить в соответствующих отделениях $2N$ молекул (N — число Авогадро), ему необходимо затратить количество световой энергии, равное $E = 2N\hbar\nu' > 2NkT$; в результате происходит увеличение энтропии

$$\Delta S' = \frac{Q}{T} = \frac{E}{T} = 2Nk = 2R \ln 2.$$

В конечном счете демон ничего не выигрывает. Информация, которая ему необходима для сортировки молекул, является «двоичной информацией», так как в каждом случае будут две противоположные возможности: H_2 или Br_2 . Для получения такой информации демон должен затратить количество негаэнтропии, равное

$$\frac{\hbar\nu'}{T} \sim \frac{kT}{T} = k,$$

где k — постоянная Больцмана.

Более точными количественными определениями Бриллюэн показал, что минимальная затрата негаэнтропии для получения двоичной информации равна $k \ln 2 = 0,69 k$. Единица двоичной информации (1 бит) эквивалентна, таким образом, количеству негаэнтропии, равному $s = 0,69 k$.

В конце своего выступления Бриллюэн шутливо заметил, что «демон Максвелла оказался староват и ему самое время уходить на пенсию».

5. УЧЕБНЫЕ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РАБОТЫ ЛЕОНА БРИЛЛЮЭНА

Леон Бриллюэн оставил нам богатое наследство, которое надолго переживет его самого. Книги, которые он написал один, или в соавторстве с другими, стали классическими в современной физике. Такова, например, его работа «Распространение волн в периодических средах», которая написана вместе с Морисом Пароди и опубликована издательством Массон³⁵ *), или отчет, сделанный на конференции по поручению французского физического общества, вышедший в трех частях: «Теория квантов»,

*) См.: Л. Бриллюэн, М. Пароди, Распространение волн в периодических средах, М., ИЛ, 1959. (Прим. ред.)

«Атом Бора» и «Квантовая статистика»^{36 *}). Последний отчет, кстати, является единственной французской научной книгой, которая, будучи дополненной и переведенной на немецкий язык, вошла в известную серию Юлиуса Шпрингера «Структура материи»³⁷. Такова также его книга «Тензоры в механике и электричестве»— результат курса лекций, прочитанных им в Коллеж де Франс, выпущенная издательством Массон в 1937 г.³⁸.

Бриллюэн написал также маленькую книгу на элементарном уровне для юных дебютантов, названную «Элементарные математические понятия для экспериментальных наук»³⁹. Эта маленькая книга остается для учащихся образцом индуктивного метода, ценным противоядием против тенденций к абстракции и презрению к физической реальности, которая встречается, увы, еще и в наши дни у многих математиков.

Тот, кто был близко знаком с Леоном Бриллюэном, может оценить его человеческие достоинства. Глупости и непониманию он умел противопоставить иронию, по отношению к робким и застенчивым был добрым и снисходительным. Он помогал молодежи, подбадривал ее; был верным и надежным другом. Когда немногим более года тому назад я обратился к нему с просьбой о его содействии в подготовке празднования столетия нашего учителя Анри Абрагама, он мне ответил волнующим заверением в его уважении к тому, кто оказал столь глубокое влияние на формирование его научного мировоззрения⁴⁰.

Леон Бриллюэн остается для нас и для будущих поколений выдающимся физиком, инженером, преподавателем и обаятельный человеком, прославившим нашу науку во всем мире, имя которого навсегда будет связано с фундаментальными вопросами физики.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. L. Brillouin, *Revue d'une carrière scientifique, préparée pour American Institute of Physics, Contrat Nr. 266 (56)*, Edition française, 1966, 1964.
2. L. Brillouin, *Über die Fortpflanzung des Lichts in dispergierenden Medien*, Ann. d. Phys. 44, 203 (1914); *Sur la propagation de la lumière dans un milieu dispersif*, Compt. Rend. Ac. Sci. 173, 1921 (1914); L. Brillouin, A. Sommerfeld, *Wave Propagation and Group Velocity*, Academic Press, New York, 1960.
3. G. Bruhat, A. Castler, *Thermodynamique*, Masson, Paris, 1968, pp. 167—168.
4. L. Brillouin, *Les amplificateurs à résistance*, L'Onde Électrique 1, 7, 101; 2, 267 (1922).
5. L. Brillouin, *Theory of the Magnetron*, Phys. Rev. 60, 385 (1941); 62, 166 (1942); 63, 127 (1943).
6. L. Brillouin, *Notions de mécanique ondulatoire. Les méthodes d'approximation*, Actualités scientifiques et industrielles, n° 39. Herman, Paris, 1932.
7. L. Brillouin, *Le modèle d'atome de Fock—Dirac. Le champ self-consistant de Fock*, J. de phys. 5, 185, 413 (1934).
8. L. Brillouin, *La mécanique ondulatoire de Schrödinger. Une méthode générale de résolution par approximations successives*, Compt. Rend. Ac. Sci. 183, 24, 270 (1926); J. de phys. 7, 353 (1926).
9. G. Wentzel, Zs. Phys. 38, 518 (1926).
10. H. A. Kramers, Zs. Phys. 39, 828 (1926).
11. G. Bruhat, A. Castler, *Optique*, Masson, Paris, 1954, § 167.
12. L. Brillouin, *La théorie des solides et les quanta*. Thèse (Paris), Ann. scientifiques de l'ENS 37, 357 (1920).
13. L. Brillouin, *Diffusion de la lumière et des rayons X par un corps transparent homogène. Influence de l'agitation thermique*, Ann. de phys. 17, 88 (1922); см. также Compt. Rend. Ac. Sci. 158, 1331 (1914).

*) См. переводы книг Л. Бриллюэна: Атом Бора, Л.—М., ОНТИ, 1935; Квантовая статистика, Харьков — Киев, ГОНТИ Украины, 1934; Научная неопределенность и информация, М., «Мир», 1966; в издательстве «Мир» в 1972 г. выходит перевод книги «Новый взгляд на теорию относительности». (Прим. ред.)

14. E. Gross, Zs. Phys. 63, 685 (1930); Naturwiss. 18, 718 (1930); Nature 126, 201, 400, 603 (1930).
15. R. S. Krishnam, V. Chandrasekharan, Proc. Indian Academy Sci. A31, 427; A32, 379 (1950); A33, 183 (1951); A41, 91 (1955).
16. L. Cecchetti, Ch. Bouhet, Compt. Rend. Ac. Sci. 260, 6852; 261, 3578 (1965); B262, 1298 (1966); B264, 891 (1967).
17. P. Lallemand, A. M. Longeq, Compt. Rend. Ac. Sci. 269, 1101, 1173 (1969).
18. R. Y. Chiao, E. Garimire, C. H. Townes, в сборнике «Quantum Electronics and Coherent Light», Academic Press, New York, 1964, стр. 326; A. Kastler, Compt. Rend. Ac. Sci. 259, 4233, 4535 (1964); 260, 77 (1965).
19. P. Debeye, F. W. Sears, Proc. Nat. Acad. Sci. (Washington) 18, 409 (1932); Phys. Zs. 33 (1932).
20. R. Lucas, P. Biquard, Compt. Rend. Ac. Sci. 194, 2132, 195, 121 (1932); J. de phys. 3, 464 (1932).
21. L. Brillouin, La diffraction de la Lumière par les ultrasons, Actualités scientifiques et industrielles, № 59, Hermann, Paris, 1932; см. также 11, § 168.
22. Cl. Schäffer, L. Bergmann, Naturwiss. 22, 685 (1934); 23, 799 (1935); L. Bergmann, Der Ultraschall, VDI Verlag, Berlin, 1937; Ultrasonics, John Wiley, New York, 1938.
23. P. Curie, Ann. de chim. et phys. 5, 289, (1895).
24. P. Langevin, J. de phys. 4, 678 (1905).
25. O. Stern, W. Gerlach, Zs. Phys. 9, 349 (1922).
26. L. Brillouin, J. de phys. 8, 74 (1927).
27. J. H. Van Vleck, Electric and Magnetic Susceptibilities, Oxford University Press, 1932, chap. IX, § 61.
28. P. Debeye, в издании MARX, Handb. der Radiologie, Bd. 6, 1925, S. 713.
29. W. Pauli, Phys. Zs. 21, 615 (1920).
30. L. Brillouin, Les électrons libres dans les métaux et le rôle des réflexions de Bragg, Compt. Rend. Ac. Sci. 191, 198, 292 (1930); J. de phys. 1, 377 (1930); см. также 35.
31. The Fermi Surface, Proc. Internat. Conf., New York, John Wiley, 1960.
32. L. Brillouin, La Science et la théorie de l'information, Masson, Paris, 1959.
33. L. Brillouin, Vie, matière et observation, Albin Michel, Paris, 1959.
34. L. Brillouin, Maxwell's Demon Cannot Operate. Information and Entropy, J. Appl. Phys. 22, 334 (1951).
35. L. Brillouin, M. Parodi, Propagation des ondes dans les milieux périodiques, Masson, Paris, 1956.
36. L. Brillouin, La théorie des quanta et l'atome de Bohr, Presses Universitaires, Paris, 1923; Les statistiques quantiques et leurs applications, en 2 volumes, Presses Universitaires, Paris, 1930.
37. L. Brillouin, Quantenstatistik, Serie «Struktur der Materie», Julius Springer, Berlin, 1934.
38. L. Brillouin, Cours de physique théorique. Les tenseurs en mécanique et en électricité, 1937.
39. L. Brillouin, Notions élémentaires de mathématiques pour les sciences expérimentales, Masson, Paris, 1935, 1938, 1945.
40. Commémoration du centenaire de la naissance de Henri Abraham à l'ENS, 7. 12 1968, édition ENS.