

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

512.8+53

КОЭФФИЦИЕНТЫ КЛЕБША—ГОРДАНА С РАЗНЫХ СТОРОН

Я. А. Смородинский, Л. А. Шелепин

СОДЕРЖАНИЕ

I. Коэффициенты КГ и их связь с дискретной и непрерывной математикой	5
II. Симметрии коэффициентов КГ и их соединений	14
III. Связь коэффициентов КГ с геометрией и топологией	31
Дополнение. Коэффициенты Клебша — Гордана компактных групп	40
Цитированная литература	42

1. Введение

Коэффициенты Клебша — Гордана (коэффициенты КГ) давно вошли в привычный математический аппарат теоретической физики. Эти коэффициенты используются при расчетах спектров — атомных и ядерных, ими пользуются в разных разделах теории рассеяния. Формулы и таблицы различных типов входят во многие учебники и монографии. Однако в подавляющем большинстве случаев представление о коэффициентах КГ связывается с формулами сложения угловых моментов, и их теория представляется для многих физиков вполне завершенной.

На самом деле в определенном смысле законченной можно считать только, так сказать, классическую теорию коэффициентов КГ, связанную с разложением произведения представлений группы вращений трехмерного вещественного пространства на неприводимые компоненты. Исследования ряда последних лет вывели теорию коэффициентов КГ из узкого круга ее классических задач. Новое развитие теории все больше переплетается с разными отделами алгебры, многомерной геометрии, топологии, проективной геометрии, теории аналитических функций, специальных функций, дифференциальных уравнений, комбинаторного анализа, конечными разностями. Можно сказать, что теория коэффициентов КГ принимает характер некоторого нового исчисления, далеко выходящего за рамки классической теории.

Однако многие из новых аспектов теории коэффициентов КГ отражены лишь в журнальных статьях; большинство из них к тому же слабо разработаны и плохо известны. В то же время этот раздел математической физики имеет большие шансы на развитие, и кажется полезным привлечь к нему внимание. Это важно и с точки зрения физических приложений коэффициентов КГ, которые расширились за последнее время в связи с открытием новых симметрий элементарных частиц, а также с необходимостью анализа взаимосвязи симметрий и нахождения скрытых симметрий в сложных физических системах — атомах, ядрах, адронах, молекулах.

Теория коэффициентов КГ является адекватным аппаратом для изучения таких систем, отображающим сложный характер взаимодействий многих частиц. Следует также подчеркнуть, что теория коэффициентов КГ, в отличие от теории характеров представлений, дает возможность использовать всю информацию, вытекающую из факта наличия симметрии в физической системе.

Таким образом, цель настоящего обзора — привлечь внимание к новым аспектам теории коэффициентов КГ, рассказать о богатстве взаимосвязей в этой теории и указать на ряд новых возможностей для приложений.

Ниже мы ограничимся теорией коэффициентов КГ компактной группы $SU(2)$ (которую также называют теорией угловых моментов) и некоторыми ее обобщениями, а также приведем сводку результатов по коэффициентам КГ других компактных групп. Свойства коэффициентов КГ для некомпактных групп, в частности группы $O(2, 1)$, требуют отдельного обзора. Основы теории угловых моментов были заложены фундаментальными работами Вигнера¹ и Рака²⁻⁴, позволившими проводить практические расчеты в атомной и ядерной спектроскопии. В 40—50-е годы были детально изучены и протабулированы коэффициенты КГ и Рака; исследованы их соединения: обобщенные коэффициенты КГ, трансформационные матрицы, j -символы; разработаны графические методы. К концу 50-х годов все понятия теории угловых моментов были объединены единым формализмом и казались устоявшимися. Сложившаяся к тому времени теория угловых моментов, которую ниже мы будем называть классической, изложена в целом ряде монографий^{1, 5-11}.

Поэтому весьма неожиданным оказалось открытие Редже новых свойств симметрии коэффициентов КГ¹², пропущенных во всех ранних исследованиях. Это открытие явилось исходным пунктом нового развития теории *). За последнее десятилетие теория угловых моментов претерпевает качественные изменения. Из новых проблем, возникших в последние годы, можно указать на обобщение коэффициентов КГ на произвольный комплексный аргумент, существенное в связи с траекториями Редже¹⁵; на обобщения коэффициентов КГ, связанные с анализом сложных физических систем; на тесное переплетение теории угловых моментов с теорией коэффициентов КГ компактных групп. Такое положение теории делает полезным обзор ее состояния, хотя многие из затронутых в обзоре вопросов в силу неразработанности изложены только схематично.

Мы, однако, считали весьма существенным указать на почти неразработанные направления и подчеркиваем, что наш перечень этих направлений, наверное, окажется неполным и не все из них окажутся впоследствии одинаково плодотворными. Новые связи, несомненно, откроются в дальнейших работах.

Обзор состоит из трех разделов. В первом разделе дана краткая сводка результатов по классической теории угловых моментов и обсуждаются взаимосвязи с дискретной и непрерывной математикой, во втором — строится обобщенная теория угловых моментов на основе новых симметрий (Редже и высших) и рассматриваются ее физические аспекты, в третьем — исследуется связь теории коэффициентов КГ с геометрическими и топологическими понятиями. В дополнении приведена краткая сводка результатов по теории коэффициентов КГ компактных групп.

*) Характерно, что фактически эти симметрии уже содержались в работах по теории гипергеометрических функций^{13, 14}. Однако никто не попытался извлечь их оттуда.

1. КОЭФФИЦИЕНТЫ КГ И ИХ СВЯЗЬ С ДИСКРЕТНОЙ И НЕПРЕРЫВНОЙ МАТЕМАТИКОЙ

2. Классическая теория угловых моментов

В первом разделе обзора изложены вопросы, непосредственно примыкающие к классической теории угловых моментов. К ним относятся: взаимосвязь теории коэффициентов КГ с комбинаторным анализом, исчислением конечных разностей, специальными функциями, интегральные представления и также построение коэффициентов КГ с комплексным моментом. Однако прежде всего необходимо кратко остановиться на классической теории угловых моментов ¹⁻¹¹. В основе этой теории лежит понятие коэффициентов КГ $(j_1 j_2 m_1 m_2 | jm)$, задающих преобразование от базиса $\psi_{m_1}^{j_1} \times \psi_{m_2}^{j_2}$ к базису ψ_m^j , где j_1, j_2, j — моменты, m_1, m_2, m — их проекции. Преобразования КГ являются унитарными, для них справедливы формулы

$$\sum_{m_1 m_2} (j_1 j_2 m_1 m_2 | jm) (j_1 j_2 m_1' m_2' | j' m') = \delta_{jj'} \delta_{mm'}, \quad (2,1)$$

$$\sum_{jm} (j_1 j_2 m_1 m_2 | jm) (j_1 j_2 m_1' m_2' | jm) = \delta_{m_1 m_1'} \delta_{m_2 m_2'}. \quad (2,2)$$

Условия унитарности (2,1), (2,2) и рекуррентные соотношения, получаемые с помощью инфинитезимальных операторов группы $SU(2)$, позволяют вычислять все коэффициенты КГ. Производ в выборе фазы устраняется с помощью дополнительного условия ¹⁶

$$(j_1 j_2 j_1 m_2 | jm) \geq 0. \quad (2,3)$$

При этом коэффициенты КГ всегда вещественны. Свойства симметрии коэффициента Вигнера ($3j$ -символа), проектирующего произведение трех неприводимых представлений на инвариантное подпространство и связанного с коэффициентом КГ соотношением

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1 - j_2 + m_3} (2j_3 + 1)^{-1/2} (j_1 j_2 m_1 m_2 | j_3 - m_3), \quad (2,4)$$

задаются равенствами

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} j_i & j_k & j_l \\ m_i & m_k & m_l \end{pmatrix}, \quad m_1 + m_2 + m_3 = 0, \quad (2,5)$$

где $\varepsilon = 1$, если перестановка столбцов четная, и равно $(-1)^{j_1 + j_2 + j_3}$, если перестановка нечетная или знак проекций моментов меняется на обратный; всего 12 операций симметрии. (Дополнительные свойства симметрии, полученные Редже ¹², рассмотрены в гл. II.) Обычно индекс j предполагается положительным, целым или полуцелым (m пробегает значения от $-j$ до $+j$). Однако при подстановке

$$j \rightarrow J = -j - 1 \quad (2,6)$$

матричные элементы оператора квадрата момента количества движения не меняются, так же как и уравнения для собственных значений, и во всех формулах для коэффициентов КГ могут рассматриваться отрицательные значения моментов ^{9,17}. Волновые функции, соответствующие j и J , описывают одно состояние и отличаются фазовым множителем

$$|jm\rangle = (-1)^{j-m} |Jm\rangle. \quad (2,7)$$

Таким образом, подстановка (2,6) означает определенную симметрию коэффициентов КГ.

С коэффициентами КГ тесно связаны матричные элементы неприводимых представлений группы $SU(2)$, т. е. матрицы конечных вращений $D(\omega)$. При параметризации аргументов ω углами Эйлера α, β, γ можно записать матричные элементы $D_{mm'}^j(\alpha, \beta, \gamma)$ в виде

$$D_{mm'}^j(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-im\alpha} D_{mm'}^j(\beta) e^{-im'\gamma}. \quad (2,8)$$

Величина

$$D_{mm'}^j(\beta) = \frac{(-1)^{j-m} i^{m'-m}}{2^j} \sqrt{\frac{(j+m')!}{(j-m)! (j+m)! (j-m')!}} \times \\ \times (1-\mu)^{-\frac{m'-m}{2}} (1+\mu)^{-\frac{m'+m}{2}} \times \\ \times \frac{d^{j-m'}}{d\mu^{j-m'}} [(1-\mu)^{j-m} (1+\mu)^{j+m}] \quad (\mu = \cos \beta) \quad (2,9)$$

с точностью до множителя является полиномом Якоби¹⁸. Фаза здесь выбрана в соответствии с⁵; при этом выборе

$$D_{mm'}^j = (-1)^{m-m'} D_{mm'}^j. \quad (2,10)$$

Другой выбор фаз приведен в работе¹⁹.

В частных случаях матрица конечных вращений выражается через сферические функции и полиномы Лежандра:

$$D_{m0}^l(\alpha, \beta, \gamma) = \left(\frac{4\pi}{2l+1} \right)^{1/2} Y_{lm}^*(\beta, \alpha), \quad (2,11)$$

$$D_{00}^l(\alpha, \beta, \gamma) = P_l(\cos \beta).$$

Связь между $D_{mm'}^j$ и коэффициентами КГ задается соотношениями⁶

$$D_{m_1 m_1'}^{j_1}(\omega) D_{m_2 m_2'}^{j_2}(\omega) = \sum_{jm} (j_1 j_2 m_1 m_2 | jm) D_{mm'}^j(\omega) (j_1 j_2 m_1' m_2' | jm'), \quad (2,12)$$

$$\frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi D_{m_1 m_1'}^{j_1}(\alpha, \beta, \gamma) D_{m_2 m_2'}^{j_2}(\alpha, \beta, \gamma) D_{m_3 m_3'}^{j_3}(\alpha, \beta, \gamma) \sin \beta d\beta d\alpha d\gamma = \\ = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1' & m_2' & m_3' \end{pmatrix}. \quad (2,13)$$

Важную роль в теории и приложениях играют различные соединения коэффициентов КГ (или коэффициентов Вигнера), представляющие собой ковариантные суммы произведений этих величин, например выражение, возникающее при составлении скаляра из четырех и более моментов (сложении более двух моментов):

$$(j_1 j_2 m_1 m_2 | j_{12} m_{12}) (j_{12} j_3 m_{12} m_3 | j_{123} m_{123}) (j_{123} j_4 m_{123} m_4 | j m) \quad (2,14)$$

(выражения типа (2,14) называют обобщенными коэффициентами КГ). Особое значение среди соединений имеют трансформационные матрицы (и их симметричные формы — j -символы), задающие переход от одной схемы связи моментов (например, (2,14) $((j_1 j_2) j_{12} j_3) j_{123} j_4 j$) к другой, отличающейся порядком сложения моментов. Любые трансформационные матрицы могут быть выражены через сумму произведений простейших матриц — коэффициентов Рака. Связь между трансформационной матрицей и соответствующими ей коэффициентом Рака и $6j$ -символом задается формулой

$$((j_1 j_2) j_{12} j_3 j | j_1 (j_2 j_3) j_{23} j) = \sqrt{(2j_{12}+1)(2j_{23}+1)} W(j_1 j_2 j j_3; j_{12} j_{23}) = \\ = \sqrt{(2j_{12}+1)(2j_{23}+1)} (-1)^{j_1+j_2+j_3+1} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j & j_{23} \end{Bmatrix}. \quad (2,15)$$

Согласно классической теории $6j$ -символ инвариантен по отношению к перестановке столбцов, а также одновременной перестановке любых двух пар моментов, находящихся в одном столбце (24 правила симметрии).

При переходе между схемами связи четырех моментов возникают $9j$ -символы, связанные с соответствующей трансформационной матрицей соотношением

$$\begin{aligned} ((j_1 j_2) j_{12} (j_3 j_4) j_{34} | (j_1 j_3) j_{13} (j_2 j_4) j_{24}) = \\ = \sqrt{(2j_{12}+1)(2j_{34}+1)(2j_{13}+1)(2j_{24}+1)} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j_4 & j_{34} \\ j_{13} & j_{24} & j \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2,16)$$

и удовлетворяющие 72 правилам симметрии.

Для трансформационных матриц, возникающих при сложении большого числа моментов, теория, естественно, усложняется. В этом направлении сделано еще мало: для j -символов нет даже установившихся обозначений, не решена задача перечисления и т. д. Общая структура трансформационных матриц видна из следующего примера. Согласно определению

$$\begin{aligned} \sum_{m_{12} m_{123}} (j_1 j_2 m_1 m_2 | j_{12} m_{12}) (j_{12} j_3 m_{12} m_3 | j_{123} m_{123}) (j_{123} j_4 m_{123} m_4 | jm) = \\ = \sum_{j_{14} j_{23}} (((j_1 j_2) j_{12} j_3) j_{123} j_4 | (j_1 j_4) j_{14} (j_2 j_3) j_{23}) \times \\ \times \sum_{m_{14} m_{23}} (j_1 j_4 m_1 m_4 | j_{14} m_{14}) (j_2 j_3 m_2 m_3 | j_{23} m_{23}) (j_{14} j_{23} m_{14} m_{23} | jm). \end{aligned} \quad (2,17)$$

В (2,17) трансформационная матрица задает преобразование между двумя схемами связи с полным моментом j и значениями промежуточных моментов j_{12} , j_{123} и j_{14} , j_{23} . Умножая обе части равенства (2,17) на соответствующие коэффициенты КГ и проводя необходимое суммирование, имеем

$$\begin{aligned} (((j_1 j_2) j_{12} j_3) j_{123} j_4 | (j_1 j_4) j_{14} (j_2 j_3) j_{23}) = \\ = \frac{1}{2j+1} \sum (j_1 j_2 m_1 m_2 | j_{12} m_{12}) (j_{12} j_3 m_{12} m_3 | j_{12} m_{123}) (j_{123} j_4 m_{123} m_4 | jm) \times \\ \times (j_1 j_4 m_1 m_4 | j_{14} m_{14}) (j_2 j_3 m_2 m_3 | j_{23} m_{23}) (j_{14} j_{23} m_{14} m_{23} | jm). \end{aligned} \quad (2,18)$$

Суммирование проводится здесь по всем проекциям моментов. Формулами типа (2,18) дается общее выражение для трансформационных матриц. Для конкретных расчетов имеется целый ряд таблиц коэффициентов КГ и их соединений. Общее выражение для коэффициента КГ может быть записано в форме конечной суммы

$$\begin{aligned} (j_1 j_2 m_1 m_2 | jm) = \left[\frac{2j+1}{j_1+j_2+j+1} (j_2+j-j_1)! (j+j_1-j_2)! \times \right. \\ \times (j_1+j_2-j)! (j_1+m_1)! (j_1-m_1)! (j_2+m_2)! (j_2-m_2)! (j+m)! (j-m)! \left. \right]^{1/2} \times \\ \times \sum_z \frac{(-1)^z}{z! (j_1+j_2-j-z)! (z+j-j_1-m_2)! (j_2+m_2-z)! (z+j-j_2+m_1)! (j_1-m_1-z)!}. \end{aligned} \quad (2,19)$$

Имеются и другие эквивалентные формы записи, подробный анализ которых проведен в п. 5.

С другой стороны, коэффициенты КГ и их соединения могут быть выражены через частные значения обобщенных гипергеометрических функций²⁰ (см. п. 5):

$$(j_1 j_2 m_1 m_2 | j m) = (-1)^{j_2 + m_2} \left[\frac{(j + j_1 - j_2)! (j_1 + j_2 - j)! (j - m)! (j_1 - m_1)! (2j + 1)}{(j - j_1 + j_2)! (j_1 + j_2 + j + 1)! (j + m)! (j_1 + m_1)! (j_2 - m_2)! (j_2 + m_2)!} \right]^{1/2} \times \\ \times \frac{(j + j_2 + m_1)!}{(j_1 - j_2 - m)!} {}_3F_2(-j + j_1 - j_2, j_1 - m_1 + 1, -j - m; j_1 - j_2 - m + 1, -j - j_2 - m_1; 1). \quad (2,20)$$

Из формул типа (2,19), выражающих коэффициенты КГ и их соединения через громоздкие суммы факториалов, может быть усмотрена связь коэффициентов КГ с дискретной математикой, а формулы типа (2,20) указывают на связь с теорией специальных функций и дифференциальных уравнений.

3. Связь коэффициентов КГ с комбинаторикой и исчислением конечных разностей

По своей природе коэффициенты КГ принадлежат к дискретной математике: аргументы пробегает дискретный ряд значений, численное значение выражается через суммы произведений факториалов. Поэтому естественно, что при анализе коэффициентов КГ и их соединений может быть применен комбинаторный анализ. Соответствующие формулы использовались, например, в работах^{9,21} при переходе между выражениями коэффициентов КГ, полученных разными авторами. Однако связь между комбинаторикой и теорией угловых моментов более глубокая, чем может показаться на первый взгляд. В комбинаторном анализе²²⁻²⁴ изучаются различные сложные суммы факториалов, биномиальных коэффициентов. Прикладной смысл имеют в основном суммы, ковариантные по отношению к какой-либо группе, а такие суммы тесно связаны с коэффициентами КГ. Поэтому целый ряд формул комбинаторного анализа может быть переведен на язык коэффициентов КГ. Приведем в качестве примера известные соотношения

$$\sum_s \frac{1}{s! (b-s)! (c-s)! (a-b-c+s)!} = \frac{a!}{b! c! (a-b)! (a-c)!}, \quad (3,1)$$

$$\sum_s \frac{(a-s)! (b+s)!}{s! (c-s)!} = \frac{(a-c)! b! (a+b+1)!}{c! (a+b-c+1)!}. \quad (3,2)$$

Формулу Вандермонда (3,1) записывают также через биномиальные коэффициенты в виде

$$\binom{x+y}{n} = \sum_{\alpha} \binom{x}{n-\alpha} \binom{y}{\alpha}. \quad (3,3)$$

Эти соотношения в записи через коэффициенты КГ имеют вид

$$\sum_{m_1 + m_2 = m} (j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 + j_2 m) = 1, \quad (3,4)$$

$$\sum_{m_2 = m - m_1} (j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 + j_2 m) = \frac{2j+1}{2j_2+1}. \quad (3,5)$$

Переход от формулы (3,4) к (3,5) есть просто симметрия коэффициентов КГ.

Вторая формула Вандермонда, возникающая при замене $j \rightarrow J$,

$$(-1)^n \binom{y-x+n-1}{n} = \sum_{\alpha} (-1)^{\alpha} \binom{y+\alpha-1}{\alpha} \binom{x}{n-\alpha} \quad (3,6)$$

соответствует коэффициенту КГ, аналогичному (3,4), но с отрицательным моментом.

Другим примером может служить произведение двух чисел Фибоначчи ²⁵, определяемых равенствами

$$u_{2n} = \sum_{i=1}^n \binom{2n-i}{i}, \quad u_{2n+1} = \sum_{i=1}^n \binom{2n+1-i}{i},$$

которое задается формулой

$$u_{2j_1} u_{2j_2} = \sum_{m_1 m_2} \left(\frac{1}{3} (j_1 + m_1) \frac{1}{3} (j_2 + m_2) m_1 m_2 \right) \left| \frac{1}{3} (j_1 + j_2 + m_1 + m_2) m_1 + m_2 \right\rangle \times \\ \times \left(\frac{j_1 + j_2}{j_1 + j_2 - m_1 - m_2} \right). \quad (3,7)$$

Произведение трех чисел Фибоначчи записывается через соединение двух таких коэффициентов КГ и т. д. Отметим, что здесь в аргумент момента входит проекция m .

Формулы (3,4), (3,5), (3,7) являются иллюстрацией взаимосвязи комбинаторики и теории угловых моментов. Вероятно, что и многие другие формулы комбинаторного анализа могут быть выражены через коэффициенты КГ.

Что касается комбинаторных свойств аргументов коэффициентов КГ, то в настоящее время вырисовывается их тесная связь с теорией магических квадратов, блок-схем и конечных геометрий. Однако эти вопросы удобнее обсуждать в рамках обобщенной теории угловых моментов, которая рассматривается в гл. II.

Другим разделом дискретной математики, с которым коэффициенты КГ имеют непосредственную связь, является исчисление конечных разностей. Напомним основные определения^{26, 27}:

1. Обобщенная степень (аналог обычной степени):

$$x^{(n)} = \begin{cases} \frac{x!}{(x-n)!}, & x \geq n; \\ 0, & x < n. \end{cases} \quad (3,8)$$

Ее свойства:

$$\left. \begin{aligned} x^{(n)} &= x^{(m)} (x-m)^{(n-m)}, \\ (x+1)^{(n)} &= (x+1) x^{(n-1)}. \end{aligned} \right\} \quad (3,9)$$

2. Конечные разности (аналог производных):

$$\left. \begin{aligned} \Delta_h f(x) &= f(x+h) - f(x), \\ \Delta_h^{(2)} f(x) &= \Delta_h f(x+h) - \Delta_h f(x), \\ &\dots\dots\dots \\ \Delta_h^{(n)} f(x) &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x+kh). \end{aligned} \right\} \quad (3,10)$$

3. Действия с обобщенными степенями (аналоги дифференцирования и интегрирования):

$$\Delta x^{(k)} = kx^{(k-1)},$$

$$\sum_{x=0}^n x^{(k)} = \frac{(n+1)^{(k+1)}}{k+1}. \quad (3,11)$$

В теории конечных разностей сохраняются основные свойства рассматриваемых аналогов.

Ансари в цикле работ ^{21, 28, 29} показал, что численное значение коэффициентов КГ определяется разложением квазибинома

$$((ax - by))^{(n)} = \sum_{\alpha} (-1)^{\alpha} \binom{n}{\alpha} a^{(n-\alpha)} x^{(n-\alpha)} b^{(\alpha)} y^{(\alpha)} \quad (3,12)$$

согласно равенству

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{bmatrix} = N' \frac{(\alpha')^{1/2}}{\alpha!} \left[\frac{\alpha''(\alpha'' - \gamma')}{\beta'(\alpha'' - \gamma')} \beta^{(\alpha'' - \beta')} \gamma^{(\alpha'' - \gamma')} \right]^{1/2} ((\beta' \gamma'' - \beta'' \gamma'))^{(\alpha)}, \quad (3,13)$$

где квадратная матрица имеет смысл коэффициента Вигнера. (Ее аргументы и симметрии, с точностью до фазы, аналогичны ¹².) N' — нормировочный множитель.

Однако для применения конечно-разностных методов в теории коэффициентов КГ более удобным, чем (3,13), являются соотношения, полученные в работе ¹⁰. Величина

$$\tilde{T}_s^{\alpha\beta}(\mu, k) = (-1)^s \frac{\Delta^s}{(\Delta\mu)^s} [(k - \mu)_{\mu}^{(s+\alpha)} (k + \mu)_{\mu}^{(s+\beta)}] \quad (3,14)$$

является разностным аналогом полиномов Якоби. Коэффициенты КГ выражаются через нее по формуле

$$(j_1 j_2 m_1 m_2 | jm) =$$

$$= \delta_{m, m_1 + m_2} \sqrt{\frac{(j_1 + j - j_2)! (j_2 + j - j_1)! (j_1 + j_2 - j)! (2j + 1)! (j + m)! (j - m)!}{(j_1 + j_2 + 1)! (j_1 - m_1)! (j_1 + m)! (j_2 - m_2)! (j_2 + m_2)!}} \times$$

$$\times \tilde{T}_s^{\alpha\beta}(\mu, k), \quad (3,15)$$

где

$$k = \frac{j_1 + j_2 + j}{2}, \quad \mu = \frac{j_1 + j_2 - j}{2} + m_1,$$

$$s = j - j_1 + j_2, \quad \alpha = (j_1 - m_1) - (j + m), \quad \beta = (j_1 + m_1) - (j + m).$$

Формулы, аналогичные (3,14) и (3,15), могут быть построены и для некоторых соединений коэффициентов КГ. С другой стороны, поскольку через коэффициенты КГ можно выразить отдельные соотношения теории конечных разностей, не исключено, что ряд проблем этой теории: уравнивания в конечных разностях, приближенные вычисления, аппроксимации — также могут рассматриваться на языке коэффициентов КГ. Весь этот круг вопросов требует дальнейшего тщательного исследования.

4. Коэффициенты КГ и непрерывные преобразования

Коэффициенты КГ тесно связаны с непрерывными преобразованиями. Здесь можно выделить три основные линии. Первая линия — очевидная связь с группами Ли, инфинитезимальными преобразованиями, соответствующими дифференциальными уравнениями и их решениями — специальными функциями; вторая — интегральные представления коэффициентов КГ; третья — обобщение коэффициентов КГ на непрерывные, в общем случае комплексные, аргументы. Вопросы связи со специальными функциями (особенно гипергеометрическими) рассмотрены ниже в гл. II (п. 6) на основе симметрий коэффициентов КГ, полученных Редже; в этом разделе кратко остановимся на втором и третьем пунктах.

Интегральное представление коэффициентов КГ основано на соотношении (2,13). Поскольку коэффициенты КГ согласно (2,13) определяются как интеграл от произведения трех D -функций, то, используя дифференциальное представление для одной из D -функций и подставляя для первого вырожденного КГ *) и для двух функций их значения, придем к интегральному представлению (см. ¹⁹, стр. 187)

$$\begin{aligned} (j_1 j_2 m_1 m_2 | jm) = \\ = \frac{(-1)^{-j+j_1+m_2}}{2^{j_1+j_2+j+1}} \left[\frac{(2j+1)(j+m)!(j_1-j_2-j)!(j_1+j_2+j+1)!}{(j_1-m_1)!(j_1+m_1)!(j_2-m_2)!(j_2+m_2)!(j-m)!(j+j_1-j_2)!(j-j_1+j_2)!} \right]^{1/2} \times \\ \times \int_{-1}^{+1} (1-x)^{j_1-m_1} (1+x)^{j_2-m_2} \frac{d^{j-m}}{dx^{j-m}} [(1-x)^{j-j_1+j_2} (1+x)^{j+j_1-j_2}] dx. \quad (4,1) \end{aligned}$$

Из этих представлений получаются обычные ряды для коэффициентов КГ. Пользуясь симметриями коэффициентов КГ, можно получить и другие интегральные формулы.

Третий пункт взаимосвязи коэффициентов КГ с непрерывными преобразованиями относится к комплексификации аргументов. Проводимое ниже обобщение коэффициентов КГ группы $SU(2)$ основывается на свойствах представлений группы $O(4)$ и группы Лоренца $SL(2)$. Как известно, 6 генераторов группы $O(4)$ удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$\left. \begin{aligned} [M, M] &= i\epsilon M, \\ [M, N] &= i\epsilon N, \\ [N, N] &= i\epsilon M. \end{aligned} \right\} \quad (4,2)$$

Квантовые числа обозначим через M, N, m, n (целые). Если ввести линейные комбинации

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{2}(M+N), \\ B &= \frac{1}{2}(M-N), \end{aligned} \right\} \quad (4,3)$$

то каждые 3 новых генератора удовлетворяют соотношениям группы $SU(2)$

$$\left. \begin{aligned} [A, A] &= i\epsilon A, \\ [B, B] &= i\epsilon B, \\ [AB] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4,4)$$

*) $\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ j_1 - j_2 & -j_1 + j_2 & j \end{pmatrix} = \left[\frac{(2j+1)(2j_1)!(2j_2)!}{(j_1+j_2-j)!(j_1+j_2+j+1)!} \right]^{1/2}.$

Квантовые числа обозначим через l_A, m_A, l_B, m_B ; отсюда вычисляется матричный элемент оператора N из известных матричных элементов операторов A и B . Так как

$$M = A + B, \quad N = A - B,$$

то матричный элемент будет зависеть от двух коэффициентов КГ вида

$$\left(\frac{n+M}{2} \frac{n-M}{2} \frac{m+\mu}{2} \frac{m-\mu}{2} \middle| Jm \right), \quad (4,5)$$

где Jm — квантовые числа операторов M и M , а $\frac{n \pm M}{2}$ и $\frac{m \pm \mu}{2}$ — квантовые числа операторов A, A_3 и B, B_3 соответственно, и может быть записан в форме

$$\delta_{JmJ'}^{nM}(\delta) = \left[\frac{(n-J')!(n+J'+1)!}{(n-J)!(n+J+1)!} \right]^{1/2} \sum_{\mu} \left(\frac{n+M}{2} \frac{n-M}{2} \frac{m+\mu}{2} \frac{m-\mu}{2} \middle| Jm \right) \times \\ \times e^{i\delta\mu} \left(\frac{n+M}{2} \frac{n-M}{2} \frac{m+\mu}{2} \frac{m-\mu}{2} \middle| Jm \right) \quad (m \leq M). \quad (4,6)$$

Эту формулу можно обобщить на группу Лоренца. 6 генераторов группы Лоренца удовлетворяют соотношениям

$$\left. \begin{aligned} [M, M] &= i\epsilon M, \\ [M, N] &= i\epsilon N, \\ [N, N] &= -i\epsilon M. \end{aligned} \right\} \quad (4,7)$$

Собственные значения имеют вид $\sigma = -1 + ip$, ν, J, m (p вещественно, остальные целые или полуцелые). Вводя генераторы (не эрмитовские!)

$$F = M + iN, \quad K = M - iN, \quad (4,8)$$

получаем комплексные собственные значения и приходим к перестановочным соотношениям группы $SU(2, C)$, т. е. комплексной группы вращений

$$\left. \begin{aligned} [F, F] &= i\epsilon F, \\ [K, K] &= i\epsilon K, \\ [F, K] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4,9)$$

В результате для матричного элемента N_3 (буста*) на угол θ получаем³⁰⁻³³ формулу, аналогичную $O(4)$:

$$d_{JmmJ'}^{\nu\sigma}(\theta) = N \int_{-k-i\infty}^{-k+i\infty} dt \frac{e^{\pm i\pi t}}{\sin \pi t} \left(\frac{\sigma+\nu}{2}, \frac{\sigma-\nu}{2}, t - \frac{\sigma-\nu}{2} + m, -t + \frac{\sigma-\nu}{2} \middle| Jm \right) \times \\ \times \left(\frac{\sigma+\nu}{2}, \frac{\sigma-\nu}{2}, t - \frac{\sigma-\nu}{2} + m, -t + \frac{\sigma-\nu}{2} \middle| J'm \right) \times \\ \times \exp[-\theta(2t - \sigma + \nu + m)] \quad (\pm \text{ при } \text{Im } t \geq 0), \quad (4,10)$$

или проще

$$d_{JmmJ'}^{\nu\sigma}(\theta) = N \int_{-k-i\infty}^{-k+i\infty} dt \frac{e^{\pm i\pi t}}{\sin \pi t} \left(\frac{\sigma+\nu}{2}, \frac{\sigma-\nu}{2}, t + \frac{m}{2}, -t + \frac{m}{2} \middle| Jm \right) \times \\ \times \left(\frac{\sigma+\nu}{2}, \frac{\sigma-\nu}{2}, t + \frac{m}{2}, -t + \frac{m}{2} \middle| J'm \right) e^{-2\theta t}, \quad (4,11)$$

*) Бустом называется чистое преобразование Лоренца без вращения.

где нормировочный множитель

$$N = \frac{i}{2} \frac{\Gamma(\sigma - J' + 1) \Gamma(\sigma + J' + 2)}{\Gamma(\sigma - J + 1) \Gamma(\sigma + J + 2)}.$$

В эти формулы входят величины, родственные коэффициентам КГ, но для двух комплексно-сопряженных значений угловых моментов

$$j_1 = \frac{1}{2}(-1 + ip + \nu), \quad j_2 = \frac{1}{2}(-1 + ip - \nu) \quad (j = J). \quad (4,12)$$

«Проекции» этих моментов становятся непрерывными.

Более общие коэффициенты КГ появляются для неунитарных представлений. Однако их теория пока еще не разработана.

Если вместо генераторов **F** и **K** взять генераторы

$$\begin{aligned} f_{x,y} &= -iM_{x,y} + N_{x,y}, & k_{x,y} &= iM_{x,y} + N_{x,y}, \\ f_z &= M_z + iN_z, & k_z &= M_z - iN_z, \end{aligned} \quad (4,13)$$

то эти генераторы образуют две алгебры $O(2,1)$ трехмерной группы Лоренца

$$\left. \begin{aligned} [f_x, f_y] &= if_z, & [k_x, k_y] &= ik_z, \\ [f_y, f_z] &= -if_x, & [k_y, k_z] &= -ik_x, & [f, k] &= 0, \\ [f_z, f_x] &= -if_y, & [k_z, k_x] &= -ik_y, \end{aligned} \right\} \quad (4,14)$$

Вычисление матричных элементов в этом случае приводит к теории коэффициентов КГ для группы $O(2,1)^{30, 34}$; их свойства выходят уже за рамки данного обзора.

Напишем в заключение выражение для коэффициентов КГ с правильными фазовыми и нормировочными множителями

$$\begin{aligned} (j_1 j_2 m_1 m_2 | jm) &= e^{\mp i\pi(j_2 + m_2)} [\Gamma(j_1 - j_2 - m_3 + 1, 2j_1 + 2)]^{-1} \times \\ &\times \left[\Gamma \left(\begin{matrix} j_1 + m_1 + 1, j_1 - m_1 + 1, j_3 - m_3 + 1, j_1 + j_2 - j_3 + 1, j_1 + j_2 + j_3 + 2 \\ j_2 + m_2 + 1, j_2 - m_2 + 1, j_3 + m_3 + 1, -j_1 + j_2 + j_3 + 1 \end{matrix} \right) \right]^{1/2} \times \\ &\times {}_3F_2(j_1 - j_2 - j_3, j_1 - j_2 + j_3 + 1, j_1 - m_1 + 1; j_1 - j_2 - m_3 + 1, 2j_1 + 2; 1); \end{aligned} \quad (4,15)$$

здесь

$$\begin{aligned} \Gamma \left(\begin{matrix} a, b, \dots \\ l, f, \dots \end{matrix} \right) &= \frac{\Gamma(a) \Gamma(b) \dots}{\Gamma(l) \Gamma(f) \dots}, \quad j_1 = \frac{\sigma + \nu}{2}, \quad m_1 = t' + m, \\ j_2 &= \frac{\sigma - \nu}{2}, \quad m_2 = -t', \quad j_3 = J \text{ или } J', \quad \sigma = -1 + ip; \end{aligned}$$

p и m — произвольные вещественные числа.

Гипергеометрическая функция (и соответственно коэффициенты КГ) остаются и при комплексификации конечными рядами. В выписанной форме ряд обрывается, когда $j_1 - j_2 - j_3 + z - 1 = -J + z - 1$ обращается в нуль.

Необрывающиеся ряды характерны для некомпактной группы $O(2,1)$.

Рассмотренный пример указывает на возможность полной комплексификации коэффициентов КГ и использования их в теории комплексных моментов.

В заключение раздела необходимо подчеркнуть, что как исследование взаимосвязи коэффициентов КГ с дифференциальными и интегральными представлениями, так и обобщение их на комплексную область, вообще говоря, требуют привлечения симметрий, более высоких, чем $SU(2)$, т. е. теории групп Ли, как компактных, так и некомпактных.

II. СИММЕТРИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ КГ И ИХ СОЕДИНЕНИЙ

5. Симметрия Редже.

Взаимосвязь коэффициентов КГ
со специальными

Во второй части обзора рассматривается обобщенная теория угловых моментов. Она строится на основе новых величин — $n \times n$ -символов³⁵, тесно связанных с симметриями коэффициентов КГ и их соединений. Исходным пунктом этого направления явилось открытие Редже новых свойств симметрии коэффициентов КГ, не содержащихся в классической теории угловых моментов. Ниже рассматриваются непосредственные следствия симметрий Редже, включающие формулировку теории угловых моментов в так называемом R -представлении, и исследование ее связи с обобщенными гипергеометрическими функциями. Согласно Редже¹² символ Вигнера может быть представлен в виде

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -j_1 + j_2 + j_3 & j_1 - j_2 + j_3 & j_1 + j_2 - j_3 \\ j_1 - m_1 & j_2 - m_2 & j_3 - m_3 \\ j_1 + m_1 & j_2 + m_2 & j_3 + m_3 \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix} = \|R_{ik}\|, \quad (5,1)$$

где 3×3 -квадратный символ $\|R_{ik}\|$ является коэффициентом в разложении J -й степени детерминанта^{*)}:

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}^J = V(J!)^3 (J+1) \sum_{\sum_k R_{ik}=J} \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix} \times \\ \times \frac{u_1^{R_{11}} u_2^{R_{12}} u_3^{R_{13}} v_1^{R_{21}} v_2^{R_{22}} v_3^{R_{23}} w_1^{R_{31}} w_2^{R_{32}} w_3^{R_{33}}}{(R_{11}! R_{12}! R_{13}! R_{21}! R_{22}! R_{23}! R_{31}! R_{32}! R_{33}!)^{1/2}}. \quad (5,2)$$

Элементы символа $\|R_{ik}\|$ являются целыми неотрицательными числами. Сумма элементов во всех строках и столбцах одинакова и равна $j_1 + j_2 + j_3 = J$. Численное значение символа инвариантно по отношению к перестановкам строк и столбцов и транспонированию и умножается на $(-1)^J$ при нечетных перестановках.

В отличие от 12 симметрий классической теории угловых моментов, которые отвечают лишь перестановкам столбцов и нижних двух строк в таблице, символ (5,1) обладает 72 свойствами симметрии. (Транспонирование относительно второй диагонали не дает нового преобразования симметрии.) Эти свойства трудно понять, оставаясь в рамках трехмерного пространства. Вычисляя коэффициенты КГ, мы фактически изучаем способы выделения из прямого произведения двух групп $SU(2) \times SU(2)$ (сложение двух угловых моментов) одной группы $SU(2)$. Это можно сделать двумя существенно разными способами. Переход от одного способа к другому перепутывает моменты и их проекции. Можно еще заметить, что в группе $O(4) = SU(2) \times SU(2)$ j и m выступают более или менее на равных правах и при разных редукциях перепутываются.

*) Нормировка в формуле (5,2) отлична от работы Редже¹².

В работах ^{36,37} было указано на определенные функциональные соотношения между различными коэффициентами Рака. Эти соотношения соответствуют новой симметрии коэффициентов Рака ($6j$ -символов). Подставив в выражение $6j$ -символа

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j & j_{23} \end{matrix} \right\} = \sum \left(\begin{matrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ m_1 & m_2 & -m_{12} \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} j_{12} & j_3 & j \\ m_{12} & m_3 & -m \end{matrix} \right) \times \\ \times \left(\begin{matrix} j_3 & j_2 & j_{23} \\ -m_3 & -m_2 & m_{23} \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} j_1 & j & j_{23} \\ -m_1 & m & -m_{23} \end{matrix} \right) (-1)^\alpha, \\ \alpha = j_1 + j_2 + j_{12} + j_3 + j_{23} + j + m + m_{23} + m_3, \quad (5,3)$$

символы Редже согласно (5,1), получаем новые симметрии $6j$ -символа, который удобно рассматривать в виде ³⁸

$$\left\| \begin{matrix} R_{11} & R_{21} & R_{31} & R_{41} \\ R_{12} & R_{22} & R_{32} & R_{42} \\ R_{13} & R_{23} & R_{33} & R_{43} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} j_1 + j - j_{23} & j + j_3 - j_{12} & j_2 + j_3 - j_{23} & j_1 + j_2 - j_{12} \\ j_1 + j_{12} - j_2 & j_3 + j_{23} - j_2 & j_3 + j_{12} - j & j_1 + j_{23} - j \\ j + j_{12} - j_3 & j + j_{23} - j_1 & j_2 + j_{12} - j_1 & j_2 - j_{23} - j_3 \end{matrix} \right\| = \\ = \left\| \begin{matrix} x_1 + y_1 & x_2 + y_1 & x_3 + y_1 & x_4 + y_1 \\ x_1 + y_2 & x_2 + y_2 & x_3 + y_2 & x_4 + y_2 \\ x_1 + y_3 & x_2 + y_3 & x_3 + y_3 & x_4 + y_3 \end{matrix} \right\|. \quad (5,4)$$

Здесь все 12 элементов — целые неотрицательные числа. Разности между соответствующими элементами строк и столбцов оказываются постоянными. Всего имеется $3! \times 4! = 144$ правила симметрии, которые являются следствием (5,4) и (5,3). Назовем величины (5,4) и (5,4) R -символами. Поскольку любые величины теории угловых моментов выражаются через соединения коэффициентов Клебша — Гордана и Рака, они могут быть записаны в виде соединения R -символов. Существенно новым элементом в R -записи является то, что мы уже не различаем здесь моментов и проекций. Линейные комбинации j могут играть роль проекций m и наоборот. R -запись, очевидно, содержит большую информацию, чем jm -запись. Из нее можно получить ряд новых соотношений между коэффициентами КГ, Рака и трансформационными матрицами ³⁸. Например, первое и второе рекуррентные соотношения в R -символах имеют вид

$$\left\| \begin{matrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} + 1 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} - 1 \end{matrix} \right\| \sqrt{R_{23}(R_{33} + 1)} + \left\| \begin{matrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} + 1 & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} - 1 & R_{32} & R_{33} \end{matrix} \right\| \sqrt{R_{21}(R_{31} + 1)} + \\ + \left\| \begin{matrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} + 1 & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} - 1 & R_{33} \end{matrix} \right\| \sqrt{R_{22}(R_{32} + 1)} = 0. \quad (5,5)$$

Отсюда следуют рекуррентные формулы, не содержащиеся в обычной теории. Например,

$$(j_1 j_2 m_1 m_2 | j_3 m_3) = \sqrt{\frac{(2j_3 + 1)(j_1 + m_1 + 1)(j_1 - m_1)}{2(j_3 + 1)(j_3 + m_3 + 1)(j_3 - m_3)}} \times \\ \times (j_1 - 1/2 j_2 m_1 - 1/2 m_2 | j_3 + 1/2 m_3 - 1/2) + \\ + \sqrt{\frac{(2j_3 + 1)(j_2 + m_2 + 1)(j_2 - m_2)}{2(j_3 + 1)(j_3 + m_3 + 1)(j_3 - m_3)}} (j_1 j_2 - 1/2 m_1 m_2 - 1/2 | j_3 + 1/2 m_3 - 1/2). \quad (5,6)$$

Приведем еще два примера полученных таким путем новых формул в jm -записи. Формула ортогональности:

$$\sum_r (j_1 + r + \gamma \quad j_2 + r - \gamma \quad m_1 + r + \gamma \quad m_2 + r - \gamma | j_3 \quad m_3 + 2r) \times \\ \times (j_1 + r + \gamma' \quad j_2 + r - \gamma' \quad m_1 + r + \gamma' \quad m_2 + r - \gamma' | j_3 \quad m_3 + 2r) \times \\ \times \frac{j_1 + j_2 - m_1 - m_2 + 4r + 1}{2j_3 + 1} = \delta_{\gamma\gamma'}. \quad (5,7)$$

Соотношения между $6j$ - и $3jm$ -символами:

$$(-1)^{j_{12}+j_2-j_1} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ m_1 & m_2 & m_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{12} & j_3 & j \\ -m'_{12} & m_3 & m \end{pmatrix} = \\ = (-1)^{2j} \sum_c (-1)^{c+\beta} (2c+1) \left\{ \begin{matrix} 1/2 & (j_1+j_2-m_{12}) & 1/2 & (j_1+j_2+m_{12}) & j_{12} \\ & j_3 & & j & c \end{matrix} \right\} \times \\ \times \begin{pmatrix} j_3 & 1/2 & (j_1+j_2+m_{12}) & c \\ m_3 & 1/2 & (j_1-j_2-m_1+m_2) & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & (j_1+j_2-m_{12}) & j & c \\ 1/2 & (j_1-j_2+m_1-m_2) & m & -\beta \end{pmatrix}, \quad (5,8)$$

где $m'_{12} = j_2 - j_1$. Коэффициент Рака зависит здесь уже не только от моментов j , но и от их проекций m . В этом смысле пропадает грань между j - и jm -символами. Из соотношений для детерминантов третьего ранга и их разложений согласно (5,1), (5,2) вытекает целый ряд новых свойств для соединений коэффициентов КГ и их соединений. Приведем примеры ³⁸.

Если детерминант в левой части равенства (5,1) имеет две одинаковые строки $v_i = u_i$, то, поскольку равенство должно быть справедливым при произвольных величинах u_i, w_i , мы получаем соотношение

$$\sum_{R_{1k}+R_{2k}=J-R_{3k}} \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix} (R_{11}! R_{12}! R_{13}! R_{21}! R_{22}! R_{23}!)^{-1/2} = 0. \quad (5,9)$$

В jm -записи для четного J имеем

$$\sum_{m_i} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \left[\prod_i (j_i - m_i)! (j_i + m_i)! \right]^{-1/2} = 0. \quad (5,10)$$

Разбивая детерминант в степени J на произведение детерминантов в степенях $J_1, J_2, \dots, J_n$ ($J_1 + J_2 + \dots + J_n = J$), разлагая детерминанты по формуле (2,2) и приравнявая множители при одинаковых степенях, получим

$$\|R_{ik}\| = \left[\frac{(J_1!)^3 \dots (J_n!)^3 (J_1+1) \dots (J_n+1)}{(J!)^3 (J+1)} \right] \sum_{A'_{ik} + \dots + A^{(n)}_{ik} = R_{ik}} \|A'_{ik}\| \dots \\ \dots \|A^{(n)}_{ik}\| \left[\frac{\prod_{ik} R_{ik}!}{\prod_i A'_{ik}! \dots A^{(n)}_{ik}!} \right]^{1/2}, \quad (5,11)$$

где $\|R_{ik}\|$ и $\|A^{(r)}_{ik}\|$ ($r = 1, \dots, n$) — символы Редже, соответствующие указанным детерминантам.

При $J_1 = J_2 = \dots = J_n = 1$ символы $\|A^{(r)}_{ik}\|$ сводятся к символам 1-го порядка, равным $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, причем знак определяется в зависимости

от расстановки единиц в символе. Подставляя их в формулу (5,11), получаем числовое выражение для символа Редже

$$\|R_{ik}\| = \left[\frac{\prod_{ik} R_{ik}}{(J+1)!} \right] \frac{1}{J!} \Phi, \quad \Phi = \sum (-1)^{q_1+q_2+q_3} \frac{J!}{p_1! p_2! p_3! q_1! q_2! q_3!}. \quad (5,12)$$

Суммирование проводится здесь по всем допустимым значениям согласно схеме

$$\begin{vmatrix} p_1+q_1 & p_3+q_3 & p_2+q_2 \\ p_2+q_3 & p_1+q_2 & p_3+q_1 \\ p_3+q_2 & p_2+q_1 & p_1+q_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}. \quad (5,13)$$

Численное значение 6j-символа, представленного в виде (5,4), дается формулой

$$\left[\frac{\prod_{ik} R_{ik}!}{\prod_i \left(\sum_{k=1}^3 R_{ik} + 1 \right)!} \right]^{1/2} \sum \frac{(-1)^z (z+1)}{\prod_{ik} x_i! y_k!}, \quad (5,14)$$

где $z = \sum_i x_i + \sum_k y_k$. Суммирование проводится по всем допустимым значениям x_i, y_k ($x_i + y_k = R_{ik}$) аналогично формуле (5,13).

Симметрии, полученные Редже, не только позволяют сформулировать R -представление теории угловых моментов, содержащее большое количество новых формул, но и оказываются существенными для анализа связи коэффициентов КГ с гипергеометрическими функциями. Для этого нужно расширить определение Редже, сняв требование неотрицательности всех элементов таблицы. Именно будем считать, что таблица обозначает один и тот же коэффициент КГ, если в нем произвести одну из двух независимых подстановок (сравни (2,6))

$$j_1 \rightarrow -j_1 - 1 \quad (5,15)$$

или

$$j_2 \rightarrow -j_2 - 1, \quad j_3 \rightarrow -j_3 - 1. \quad (5,16)$$

Третья подстановка (три отрицательных момента)

$$j_1 \rightarrow -j_1 - 1, \quad j_2 \rightarrow -j_2 - 1, \quad j_3 \rightarrow -j_3 - 1, \quad (5,17)$$

очевидно, есть произведение первых двух. Комбинируя их с перестановками, можно получить, конечно, и другие подстановки. После такого дополнения можно считать, что существует $72 \times 4 = 288$ одинаковых коэффициентов КГ с положительными и отрицательными значениями j . Если считать перестановки моментов (123) и замены $j \rightarrow -j - 1$ тривиальными операциями, то нетривиальными будут перестановка P первой строки таблицы Редже со второй или третьей и транспонирование T . Это дает три нетривиальные операции (например, P_{12} , T , $P_{12}T$). Вместе с исходной они дают четыре нетривиальные формы коэффициентов КГ. В качестве их можно выбрать формулы Вигнера (см. ³⁴), Ван-дер-Вардена ⁴⁰, Ракá (см. ¹) и Маджумдара ⁴¹.

Если посмотреть на любую из формул, выражающую коэффициенты КГ в виде конечной суммы (например, (2,19)), то можно видеть, что во всех из них переменная суммирования z входит в 5 факториалов. Это сразу позволяет заподозрить связь с обобщенной гипергеометрической функцией типа ${}_pF_q$ с $p = q = 5$.

Напомним ⁴², что обобщенной гипергеометрической функцией называется ряд (вообще говоря, бесконечный)

$${}_pF_q(p_1 p_2 \dots p_p; q_1 q_2 \dots q_q; x) = \sum_z \frac{(p_1)_z (p_2)_z \dots (p_p)_z}{(q_1)_z (q_2)_z \dots (q_q)_z} \frac{x^z}{z!}, \quad (5,18)$$

где, например,

$$(p_1)_z = \frac{\Gamma(p_1 + z)}{\Gamma(p_1)} = \frac{(p_1 + z - 1)!}{(p_1 - 1)!}.$$

С помощью тождества

$$\frac{(a - z)!}{a!} = \frac{(-a - 1)!}{(-a + z - 1)!} (-1)^z \quad (5,19)$$

можно изменять знак у переменной суммирования z , перенося соответствующий факториал из числителя в знаменатель или наоборот.

Таким способом можно привести все суммы к стандартному виду (со знаком плюс у z)*, и мы увидим, что все четыре формы представляют собой (с точностью до множителя) значения функции ${}_3F_2$ при аргументе $x = 1$. Не занимаясь здесь вычислением этого множителя (один пример имеется в формуле (2,20)), приведем только значения аргументов в функции ${}_3F_2$ для всех четырех основных форм коэффициента Вигнера $\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$ (для большей наглядности мы будем писать аргументы в виде столбцов и опускаем, как это принято, аргумент $x = 1$): форма Вигнера

$${}_3F_2 \left(\begin{matrix} j_1 - m_1 + 1 & -j - j_2 - m_1 \\ -j - m & j_1 - j_2 - m + 1 \\ -j + j_1 - j_2 \end{matrix} \right), \quad (5,20)$$

форма Ван-дер-Вардена

$${}_3F_2 \left(\begin{matrix} -j_1 - j_2 + j & j - j_2 + m_1 + 1 \\ -j_1 + m_1 & j - j_1 - m_2 + 1 \\ -j_2 - m_2 \end{matrix} \right). \quad (5,21)$$

форма Рака

$${}_3F_2 \left(\begin{matrix} j_1 + m_1 + 1 & -j - j_2 + m_1 \\ -j + m & j_2 - j + m_1 + 1 \\ -j_1 + m_1 \end{matrix} \right), \quad (5,22)$$

форма Маджумдара

$${}_3F_2 \left(\begin{matrix} j_1 + j_2 - j + 1 & -2j \\ -j - m & j_1 - j - m_2 + 1 \\ j_1 - j_2 - j \end{matrix} \right). \quad (5,23)$$

Функции ${}_3F_2$, возникающие в связи с классическими коэффициентами КГ, не являются произвольными функциями (даже отвлекаясь от того, что мы положили $x = 1$). Эти функции выделяются тем, что они вырождаются в конечные суммы. В монографиях по теории обобщенных гипергеометрических функций (см. ¹⁴) показывается, что всего существует 18 таких функций. При этом, однако, предполагается, что ряды ${}_3F_2$ обрываются при одном верхнем коэффициенте, равном отрицательному целому числу.

*) Изменение знака у всех z есть не что иное, как обращение конечного ряда: последний член считать первым и т. д.

и произвольных остальных числах. Если два коэффициента целые отрицательные, то, как можно показать, число обрывающихся рядов больше и равно 24. Если учесть, что перестановки аргументов одного типа (стоящих в одном столбце в формулах, приведенных выше) приводят к разным по виду формулам для коэффициентов КГ, то всего получаем $24 \times 3! \times 2! = 288$ разных форм для коэффициентов КГ — результат, который был получен и выше при анализе симметрий.

Таким образом, все функции ${}_3F_2$, вырождающиеся в конечные суммы, являются коэффициентами КГ. Этот результат позволяет подозревать, что и другие функции ${}_3F_2$ (при $x = 1$) как-то связаны с обобщениями КГ. С примером такого обобщения на случай комплексного аргумента мы уже сталкивались в п. 4. Связь коэффициентов КГ с обобщенной гипергеометрической функцией ${}_3F_2$ не является чем-то изолированным. Различные соединения коэффициентов КГ также могут быть выражены через обобщенные гипергеометрические функции. Так, Минтон⁴³ показал, что для коэффициента Рака справедлива формула

$$W(abcd; ef) = \Delta(abc) \Delta(cde) \Delta(acf) \Delta(bdf) [\Gamma(e+f+1-f-c)]^{-1} \times \\ \times \Gamma \left[\begin{matrix} a+b+c+d+2 \\ a+b+1-e, c+d+1-e, a+c+1-f, b+d+1-f, e+f+1-a-d \end{matrix} \right] \times \\ \times {}_4F_3(e-a-b, e-c-d, f-c-a, f-b-d; -a-b-c-d-1, \\ e+f+1-a-d, e+f+1-b-c; 1), \quad (5,24)$$

где использованы обозначения

$$\Delta(xyz) = \left\{ \Gamma \left[\begin{matrix} x+y+1-z, x+z+1-y, y+z+1-x \\ x+y+z+2 \end{matrix} \right] \right\}^{1/2}, \\ \Gamma \left(\begin{matrix} a, b \dots \\ p, q \dots \end{matrix} \right) = \frac{\Gamma(a) \Gamma(b) \dots}{\Gamma(p) \Gamma(q) \dots}.$$

Все свойства коэффициентов КГ и Рака вытекают из свойств функций ${}_3F_2$ и ${}_4F_3$. Результаты для более высших символов аналогичны, и можно формулировать теорию угловых моментов на языке обобщенных гипергеометрических функций ${}_mF_n$ с аргументом $x = 1$.

Из такой формулировки вытекает ряд направлений для дальнейших исследований. Например, поскольку коэффициент КГ оказывается решением дифференциального уравнения для ${}_3F_2$ при $x = 1$, а с другой стороны — решением разностного уравнения, возникает задача исследования связи между этими уравнениями. Представляет интерес и изучение роли гипергеометрических функций при значениях $x \neq 1$ в общей теории коэффициентов КГ. Таким образом, обобщенные гипергеометрические функции и их частные и вырожденные случаи (функции Бесселя, Лежандра, полиномы Якоби, Чебышёва, Эрмита и т. д.) имеют тесную связь с теорией коэффициентов КГ. Ее исследование существенно как для самой теории специальных функций, так и для физических приложений.

6. Высшие симметрии

Симметрия Редке, рассмотренная в предыдущем разделе, по существу, означает наличие $SU(3)$ -симметрии в теории коэффициентов КГ группы $SU(2)$. Детерминант в степени J , стоящий в левой части равенства (5,2), является инвариантом группы $SU(3)$, а символ $\|R_{ik}\|$ — коэффициентом Вигнера группы $SU(3)$ частного вида (и одновременно

общим коэффициентом Вигнера группы $SU(2)$). Наряду с $SU(3)$ -симметрией существенную роль в теории угловых моментов могут играть и другие симметрии, более высокие, чем $SU(3)$ (высшие симметрии). Так, аналогично 3×3 -квадратному символу $\|R_{ik}\|$ могут быть построены $n \times n$ -символы, соответствующие произвольной группе $SU(n)$ и возникающие при разложении детерминанта n -го ранга, возведенного в степень J ³⁵. Для группы $SU(4)$ разложение типа (5,1) принимает вид

$$\left\| \begin{matrix} u_1 & v_1 & w_1 & t_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 & t_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 & t_3 \\ u_4 & v_4 & w_4 & t_4 \end{matrix} \right\|^J = V(J!)^3(J+1) \sum_{R_{ik}} \left\| \begin{matrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} \end{matrix} \right\| \frac{\prod_i u_i^{R_{1i}v_i R_{2i}w_i R_{3i}t_i}}{(\prod_{ik} R_{ik}!)^{1/2}}. \quad (6,1)$$

Здесь 4×4 -символ $\|R_{ik}\|$ имеет уже $4! \times 4! \times 2 = 1152$ правила симметрии (перестановка строк и столбцов и транспонирование). Для группы $SU(n)$ $n \times n$ -символ $\|R_{ik}\|$, соответствующий разложению

$$|u_{ik}|^J = V(J!)^3(J+1) \sum \|R_{ik}\| \frac{\prod_{ik} u_{ik}^{R_{ik}}}{(\prod_{ik} R_{ik}!)^{1/2}}, \quad (6,2)$$

насчитывает уже $n! \times n! \times 2$ симметрий.

При рассмотрении $n \times n$ -символов возникают принципиально новые соединения коэффициентов КГ. В качестве примера рассмотрим группу $SU(4)$. Разлагая детерминант по столбцу, имеем

$$\left\| \begin{matrix} u_1 & v_1 & w_1 & t_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 & t_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 & t_3 \\ u_4 & v_4 & w_4 & t_4 \end{matrix} \right\|^J = \sum_{R_{ik}=J} \frac{J!}{R_{11}! R_{12}! R_{13}! R_{14}!} t_1^{R_{11}} t_2^{R_{12}} t_3^{R_{13}} t_4^{R_{14}} \times \\ \times \left\| \begin{matrix} w_2 & w_3 & w_4 \\ v_2 & v_3 & v_4 \\ u_2 & u_3 & u_4 \end{matrix} \right\|^{R_{11}} \left\| \begin{matrix} w_1 & w_3 & w_4 \\ v_1 & v_3 & v_4 \\ u_1 & u_3 & u_4 \end{matrix} \right\|^{R_{12}} \left\| \begin{matrix} w_1 & w_2 & w_4 \\ v_1 & v_2 & v_4 \\ u_1 & u_2 & u_4 \end{matrix} \right\|^{R_{13}} \left\| \begin{matrix} w_1 & w_3 & w_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{matrix} \right\|^{R_{14}}. \quad (6,3)$$

Используя соотношения (5,1) и (6,3), получаем³⁵

$$V(J+1)! \left\| \begin{matrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} \end{matrix} \right\| = \\ = V \prod_i (R_{1i}+1)! \sum_{\substack{\beta \neq \alpha \\ B_{i\alpha}^\beta = R_{i\alpha}}} \frac{(\prod_{ik} R_{ik}!)^{1/2}}{(\prod_{\substack{\beta=1,2,3,4 \\ \alpha \neq \beta}} B_{2\alpha}^\beta! B_{3\alpha}^\beta! B_{4\alpha}^\beta!)^{1/2}} \times \\ \times \left\| \begin{matrix} B'_{22} & B'_{23} & B'_{24} \\ B'_{32} & B'_{33} & B'_{34} \\ B'_{42} & B'_{43} & B'_{44} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} B^2_{21} & B^2_{23} & B^2_{21} \\ B^2_{31} & B^2_{33} & B^2_{34} \\ B^2_{41} & B^2_{43} & B^2_{44} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} B^3_{21} & B^3_{22} & B^3_{24} \\ B^3_{31} & B^3_{32} & B^3_{34} \\ B^3_{41} & B^3_{42} & B^3_{44} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} B^4_{21} & B^4_{22} & B^4_{23} \\ B^4_{31} & B^4_{32} & B^4_{33} \\ B^4_{41} & B^4_{42} & B^4_{43} \end{matrix} \right\|. \quad (6,4)$$

В этой формуле, в отличие от обычного в теории коэффициентов КГ суммирования по комбинациям из двух символов, проводится суммирование по комбинациям из трех символов. Аналогичное разложение может быть записано для 5×5 -символа; при этом в одном суммировании участвуют

4 символа и т. д. Подчеркнем, что каждый символ — сомножитель в (6.4) или в подобных формулах — есть коэффициент Вигнера. Способ их соединения, как видим, резко отличается от обычного.

Непосредственный физический смысл введения $n \times n$ -символов состоит в обобщении понятия способа связи. В классической теории обобщенные коэффициенты КГ, возникающие при сложении нескольких моментов, определяются заданием промежуточных моментов. Например, инвариант, построенный из четырех спиноров $x_i y_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$), имеет вид

$$\sum_{m_i} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ m_1 & m_2 & m_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{12} & j_3 & j_4 \\ -m_{12} & m_3 & m_4 \end{pmatrix} \left[\frac{\prod_i (2j_i)!}{\prod_i (j_i - m_i)! (j_i + m_i)!} \right]^{1/2} \prod_i x_i^{j_i - m_i} y_i^{j_i + m_i}. \quad (6,5)$$

Это последовательный способ связи. В случае (6,5) он определен заданием одного промежуточного момента. С помощью $n \times n$ -символов понятие способа связи обобщается; возникающие при этом новые способы связи являются суперпозицией способов связи типа (6,5), представляющих собой полную систему

$$\sum_{m_i} \left\| \begin{array}{cccc} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} \\ j_1 - m_1 & j_2 - m_2 & j_3 - m_3 & j_4 - m_4 \\ j_1 + m_1 & j_2 + m_2 & j_3 + m_3 & j_4 + m_4 \end{array} \right\| \left[\frac{\prod_i (2j_i)!}{\prod_i (j_i - m_i)! (j_i + m_i)!} \right]^{1/2} \times \\ \times \prod_i x_i^{j_i - m_i} y_i^{j_i + m_i}. \quad (6,6)$$

Поскольку все моменты, входящие в (6,7), равноправны, этот способ связи можно назвать симметричным. Переход между различными способами связи задается матрицей преобразования

$$\sum_{m_i} \left\| \begin{array}{cccc} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} \\ j_1 - m_1 & j_2 - m_2 & j_3 - m_3 & j_4 - m_4 \\ j_1 + m_1 & j_2 + m_2 & j_3 + m_3 & j_4 + m_4 \end{array} \right\| \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ m_1 & m_2 & m_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{12} & j_3 & j_4 \\ -m_{12} & m_3 & m_4 \end{pmatrix}, \quad (6,7)$$

расширяющей обычную теорию трансформационных матриц.

Исследование свойств $n \times n$ -символов во многом аналогично п. 5. Приведем явное выражение $n \times n$ -символов, полученное тем же методом, что и формула (5,12) ^{44,45}:

$$\left\| \begin{array}{c} R_{11} \dots R_{1n} \\ \dots \dots \dots \\ R_{n1} \dots R_{nn} \end{array} \right\| = \left[\frac{\prod_{i,k=1}^n R_{ik}!}{(J+1)!} \right]^{1/2} \frac{\sum (-1)^{[l]} p_{l_1} \dots l_n}{\prod_{l_1 \dots l_n} p_{l_1} \dots l_n!}. \quad (6,8)$$

Через $[l]$ обозначен набор $(l_1 \dots l_n)$, определяемый нечетными перестановками, через $(l_1 \dots l_n)$ — все перестановки индексов. Суммирование проводится по всем целым неотрицательным числам, удовлетворяющим системе n^2 уравнений типа

$$R_{ik} = \sum_{l_1 \dots l_n} R_{l_1 \dots l_{i-1} k l_{i+1} \dots l_n}, \quad (6,9)$$

аналогично формуле (5,13) для 3×3 -символа.

Большой интерес представляют вопросы алгебраической структуры обобщенной теории. Джованнини и Смит⁴⁶ рассматривали $n \times n$ -символы как магические квадраты (магические квадраты обладают тем свойством, что сумма элементов всех строк и столбцов одинакова, элементы являются целыми неотрицательными числами). Они указали на особое значение $n \times n$ -символов, являющихся коэффициентами при разложении детерминанта с $J = 1$, из которых может быть построен символ произвольного ранга. Эти символы образуют группу $n \times n$ -матриц, изоморфную группе перестановок S_n . Отметим, что коэффициент Рака ($6j$ -символ) также может быть представлен в виде магического квадрата³⁵. В записи (5,4) он был приведен в виде таблицы 3×4 . Последняя является частью более общей таблицы 4×4 , соответствующей магическому квадрату (справа для наглядности приведен символ с другим размещением аргументов)

$$\left\| \begin{array}{cccc} x_1 + y_1 & x_4 + y_2 & x_2 + y_3 & x_3 + y_4 \\ x_2 + y_2 & x_3 + y_1 & x_1 + y_4 & x_4 + y_3 \\ x_3 + y_3 & x_2 + y_4 & x_4 + y_1 & x_1 + y_2 \\ x_4 + y_4 & x_1 + y_3 & x_3 + y_2 & x_2 + y_1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cccc} x_1 + y_1 & x_2 + y_1 & x_3 + y_1 & x_4 + y_1 \\ x_1 + y_2 & x_2 + y_2 & x_3 + y_2 & x_4 + y_2 \\ x_1 + y_3 & x_2 + y_3 & x_3 + y_3 & x_4 + y_3 \\ x_1 + y_4 & x_2 + y_4 & x_3 + y_4 & x_4 + y_4 \end{array} \right\|. \quad (6,10)$$

В j -записи символ $\left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j_4 \\ j_3 & j_0 & j_5 \end{array} \right\}$ может быть представлен в виде (здесь приведена форма, отличная от³⁵)

$$\left\| \begin{array}{cccc} j_1 + j_5 - j_0 & j_0 + j_5 - j_1 & j_1 + j_0 - j_5 & j_2 + j_3 + j_4 \\ j_2 + j_4 - j_1 & j_1 + j_4 - j_2 & j_0 + j_3 + j_5 & j_1 + j_2 - j_4 \\ j_0 + j_3 - j_4 & j_1 + j_2 + j_5 & j_3 + j_4 - j_0 & j_0 + j_4 - j_3 \\ j_1 + j_4 + j_0 & j_2 + j_3 - j_5 & j_2 + j_5 - j_3 & j_3 + j_5 - j_2 \end{array} \right\|. \quad (6,11)$$

Рассмотрение $3j$ -, $6j$ -, $n \times n$ -символов как магических квадратов существенно не только с точки зрения симметрии, но имеет глубокий комбинаторный смысл. Так, например, частным случаем магических квадратов являются латинские квадраты, в которых целочисленные элементы $a_1 \dots a_n$ расположены таким образом, что каждый элемент появляется точно один раз в каждой строке и в каждом столбце. Их теория тесно связана с общей теорией блок-схем^{22,24,27}, а тем самым — с вопросами систем управления, планирования экспериментов, кодирования. В этой связи интересно отметить определенное различие между 3×3 -символами и символами более высокого ранга. 3×3 -символы (рассматриваемые как магические квадраты) определяются заданием всех своих 9 элементов. Условие магичности при фиксированной сумме J дает пять независимых соотношений. Записывая элементы в виде таблицы Редже, мы можем определить четыре из них, например $j_1 j_2 m_1 m_2$. Так как $m_3 = -m_1 - m_2$ и сумма $j_1 + j_2 + j_3 = J$ была фиксирована, задание магического квадрата 3×3 полностью определяет коэффициент КГ. Другими словами, коэффициент КГ задается 9 целыми положительными числами и условием магичности.

Для квадратов 4×4 такого положения нет. Список элементов не определяет однозначно (т. е. с точностью до перестановок) магического квадрата. В указанной связи отметим, что коэффициенты Рака также не определяются просто списком элементов таблицы, а необходимо еще указать и их расположение в таблице.

Для комбинаторных приложений могут представить определенное удобство преобразованные $n \times n$ -символы $\langle | R_{ik} | \rangle$, которые являются

коэффициентами в разложении произвольного детерминанта

$$|u_{ik}|^J = \sum_{R_{ik}} \langle |R_{ik}| \rangle \prod_{ik} u_{ik}^{R_{ik}}. \quad (6.12)$$

Они являются прямым обобщением биномиальных коэффициентов

$$\left\langle \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix} \right\rangle,$$

возникающих в случае $n = 2$:

$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{vmatrix}^J = \sum_{R_{ik}} \left\langle \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix} \right\rangle u_{11}^{R_{11}} u_{12}^{R_{12}} u_{21}^{R_{21}} u_{22}^{R_{22}}. \quad (6.13)$$

Свойства символов $\langle |R_{ik}| \rangle$ получаются из свойств детерминантов согласно методике п. 5. Формула Вандермонда (3,1) записывается в этих обозначениях как

$$\begin{aligned} \sum_{m_1+m_2=m} \left\langle \begin{vmatrix} j_2+m_2 & j_2-m_2 \\ j_2-m_2 & j_2+m_2 \end{vmatrix} \right\rangle \left\langle \begin{vmatrix} j_1+m_1 & j_1-m_1 \\ j_1-m_1 & j_1+m_1 \end{vmatrix} \right\rangle = \\ = \left\langle \begin{vmatrix} j_1+j_2+m & j_1+j_2-m \\ j_1+j_2-m & j_1+j_2+m \end{vmatrix} \right\rangle. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Несмотря на важность новых симметрий коэффициентов КГ и их соединений, общее число работ, посвященных им, сравнительно невелико. Кроме отмеченных выше, особо следует указать на работы ^{9,48}, где было показано, что использование симметрии Редже дает определенные преимущества при расчетах на ЭВМ; работу ⁴⁹, где симметрия Редже рассматривалась на основе теории целых аналитических функций; работы ^{21,26,27}, где симметрия Редже обсуждалась на основе квазибиноминальных представлений коэффициентов КГ и показана связь симметрий квадратов в формулах (3,14), (3,15) и символов Редже. На основе техники бозонных операторов Швингера ⁵⁰ в работе Гинсера ⁵¹ предложена интерпретация симметрии Редже и высших симметрий как симметрии редукции. Симметрия Редже связана с разными способами редукции кронекеровского произведения, записанного с помощью бозонных операторов. Показано, что в классическом пределе симметрия Редже эквивалентна симметрии $m \leftrightarrow \mu$ в матрице конечных вращений $D_{m\mu}^j$. Ряд других аспектов, связанных с новыми симметриями, обсуждается в работах ^{52,53,54}.

7. Обобщенная теория угловых моментов

Новые симметрии, соединения и способы связи коэффициентов КГ приводят к обобщению теории угловых моментов. Объектом обобщенной теории являются $n \times n$ -символы различного ранга и их всевозможные соединения, а также соответствующие им производящие инварианты ^{44,45,55}. Классическая теория является ее частным случаем, включающим ограниченный класс соединений 3×3 -символов. Обобщенная теория угловых моментов порождает большое многообразие новых форм, представляющих интерес как с математической, так и с прикладной точек зрения. Уже при рассмотрении соединений 3×3 -символов, соответствующих коэффициентам Вигнера, возникает много нового. При обычном конструировании соединений коэффициентов КГ (m - и j -символов) имеются два типа инвариантного суммирования — диадный и триадный ⁵⁷. Диадный соответ

ствует суммированию по проекциям момента — по двум элементам символа Редже, триадный соответствует соединению трансформационных матриц и включает в себя суммирование по триаде моментов — по верхней строке $(R_{11}R_{12}R_{13})$ символа Редже (5,1). Однако с точки зрения обобщенной теории согласно (5,2) все R_{ik} , входящие в 3×3 -символы, равноправны. Поэтому для инвариантного суммирования произведений символов Редже (построения соединений) можно выбрать любые элементы R_{ik} (при триадном суммировании 3 элемента, а при диадном любые 2 элемента, лежащие в произвольной строке или столбце). Так, наряду с обычным суммированием символов Редже, производившимся по $R_{21}R_{31}$, $R_{22}R_{32}$, $R_{23}R_{33}$, $R_{11}R_{12}R_{13}$, можно рассматривать инвариантные формулы, полученные суммированием по $R_{11}R_{12}R_{13}$, $R_{21}R_{22}R_{23}$ или по $R_{21}R_{31}$, $R_{22}R_{32}$, $R_{32}R_{33}$ и т. п. При этом возникает обширный класс «нестандартных» соединений. Однако в настоящее время исследовано или применяется лишь незначительное число таких соединений. Соединения вида

$$(j_1 j_2 \nu_1 \nu_2 | j \nu) (T_1 T_2 t_1 t_2 | T t), \quad (7,1)$$

где $j_1 + \nu_1 = -T_1 + T_2 + T$, $j_2 + \nu_2 = T_1 - T_2 + T$, и

$$(j'_1 j'_2 \nu'_1 \nu'_2 | j' \nu') (j_1 j_2 \nu_1 \nu_2 | j \nu) (T_1 T_2 t_1 t_2 | T t), \quad (7,2)$$

где $j'_1 + \nu'_1 = -j_1 + j_2 + j$, $j'_2 + \nu'_2 = j_1 - j_2 + j$, $j_1 + \nu_1 = -T_1 + T_2 + T$, $j_2 + \nu_2 = T_1 - T_2 + T$, получаемые из обычных обобщенных коэффициентов КГ⁸ с помощью симметрии Редже, имеют важное значение в теории коэффициентов КГ групп $SU(n)$. Другим частным видом «нестандартных» соединений, включающим одновременно диадные и триадные суммирования, являются формулы, полученные Ванагасом и Батарунасом⁵⁸ с помощью характеров группы перестановок. Представляет интерес и формула, полученная с помощью диадных суммирований по элементам, лежащим в разных строках и столбцах:

$$\sum_{\kappa} (-1)^{R_{12}} \left\langle \begin{vmatrix} R_{11} + \kappa & R_{12} - \kappa & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} + \kappa & R_{23} - \kappa \\ R_{31} - \kappa & R_{32} & R_{33} + \kappa \end{vmatrix} \right\rangle =$$

$$= (-1)^{R_{21}} \frac{J!}{R_{13}! R_{32}! (J - R_{13})! (J - R_{23})!}. \quad (7,3)$$

Хотя в настоящее время и нельзя говорить о физических приложениях «нестандартных» соединений, можно ожидать, что в дальнейшем положение изменится. Весьма многообещающими представляются и принципиально новые способы связи типа (6,4), а также использование различных соединений $n \times n$ -символов более высокого ранга, чем символы Редже. В этой связи интересно отметить, что согласно^{44,45,55} коэффициенты КГ группы $SU(n)$ могут быть построены в виде соединений $n \times n$ -символов, т. е. теория коэффициентов КГ высших групп является составной частью обобщенной теории угловых моментов. Однако исследование этого круга вопросов находится еще в начальной стадии.

Наряду с рассмотрением $n \times n$ -символов и их соединений важным разделом обобщенной теории являются производящие инварианты^{44,45,55,56}. Поскольку в обобщенной теории появляются высшие симметрии, соответствующие, в частности, группам $SU(n)$ (а также другим полупростым группам Ли), возникает необходимость использования в полном объеме инвариантов классических групп. Их теория детально рассмотрена в книге Вейля⁶⁰.

Аналогично тому, как коэффициент Вигнера связывает три неприводимых представления в инвариант (обобщенный коэффициент Вигнера — несколько), соединениям $n \times n$ -символов различного ранга можно поставить в соответствие определенные производящие инварианты. Для $n \times n$ -символов согласно (6,4) роль производящего инварианта играет детерминант n -го ранга в степени J , в частности для коэффициента Вигнера (3×3 -символа) — $(\varepsilon_{ikh} u_{1i} u_{2h} u_{3l})^J$, для метрического тензора $\left(2 \times 2\text{-символа} \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix}\right)^J = (\varepsilon_{\lambda\mu} u_{1\lambda} u_{2\mu})^{J'}$. Производящие инварианты любых стандартных соединений коэффициентов КГ для $SU(2)$ могут быть построены с помощью тензоров ε_{ikh} и $\varepsilon_{\lambda\mu}$. Так, например, производящий инвариант для произведения двух коэффициентов КГ, просуммированных по проекциям m_1, m_2 , имеет вид

$$(\varepsilon_{lmn} u_{1l} u_{2m} u_{3n})^J (\varepsilon_{l'm'n'} u_{1l'} u_{2m'} u_{3n'})^{J'} (\varepsilon_{\lambda\lambda'})^{B_1} (\varepsilon_{\mu\mu'})^{B_2}. \quad (7,4)$$

Здесь латинские индексы l, m, n принимают всю совокупность возможных значений 1, 2, 3; подчеркнутые латинские индексы $\underline{l}, \underline{m}, \underline{n}$ принимают только одно значение 1; соответствующие $\underline{l}, \underline{m}, \underline{n}$ греческие индексы λ, μ, ν принимают оставшиеся значения 2, 3. В этих обозначениях производящий инвариант для коэффициента Ракá ($6j$ -символа) может быть записан в виде

$$(\varepsilon_{l_1 m_1 n_1} u'_{1l_1} u'_{2m_1} u'_{3n_1})^{J_1} (\varepsilon_{l_2 m_2 n_2} u^2_{1l_2} u^2_{2m_2} u^2_{3n_2})^{J_2} \times \\ \times (\varepsilon_{l_3 m_3 n_3} u^3_{1l_3} u^3_{2m_3} u^3_{3n_3})^{J_3} (\varepsilon_{l_4 m_4 n_4} u^4_{1l_4} u^4_{2m_4} u^4_{3n_4})^{J_4} \times \\ \times (\varepsilon_{\lambda_1 \lambda_2})^{B_{12}} (\varepsilon_{\mu_1 \mu_2})^{B_{13}} (\varepsilon_{\nu_1 \nu_2})^{B_{14}} (\varepsilon_{\lambda_3 \lambda_4})^{B_{34}} (\varepsilon_{\mu_2 \mu_4})^{B_{24}} (\varepsilon_{\nu_2 \nu_3})^{B_{23}}. \quad (7,5)$$

Аналогично записываются производящие инварианты для любого соединения коэффициентов Вигнера, любой трансформационной матрицы. Коэффициенты же разложения производящих инвариантов по степеням u_{ik} являются соединениями коэффициентов Вигнера. Так, произведение коэффициентов Вигнера, соответствующее производящему инварианту (7, 4), равно

$$\sum \left\| \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix} \right\| \left\| \begin{vmatrix} R'_{11} & R'_{12} & R'_{13} \\ R'_{21} & R'_{22} & R'_{23} \\ R'_{31} & R'_{32} & R'_{33} \end{vmatrix} \right\| \left\| \begin{vmatrix} R_{21} & R'_{21} \\ R_{31} & R'_{31} \end{vmatrix} \right\| \left\| \begin{vmatrix} R_{22} & R'_{22} \\ R_{32} & R'_{32} \end{vmatrix} \right\|. \quad (7,6)$$

Суммирование проводится по повторяющимся R_{ik} ; $6j$ -символ, соответствующий производящему инварианту (7,5), равен

$$\sum \left\| \begin{vmatrix} R'_{11} & R'_{12} & R'_{13} \\ R'_{21} & R'_{22} & R'_{23} \\ R'_{31} & R'_{32} & R'_{33} \end{vmatrix} \right\| \left\| \begin{vmatrix} R^2_{11} & R^2_{12} & R^2_{13} \\ R^2_{21} & R^2_{22} & R^2_{23} \\ R^2_{31} & R^2_{32} & R^2_{33} \end{vmatrix} \right\| \left\| \begin{vmatrix} R^3_{11} & R^3_{12} & R^3_{13} \\ R^3_{21} & R^3_{22} & R^3_{23} \\ R^3_{31} & R^3_{32} & R^3_{33} \end{vmatrix} \right\| \left\| \begin{vmatrix} R^4_{11} & R^4_{12} & R^4_{13} \\ R^4_{21} & R^4_{22} & R^4_{23} \\ R^4_{31} & R^4_{32} & R^4_{33} \end{vmatrix} \right\| \times \\ \times \left\| \begin{vmatrix} R'_{21} & R^2_{21} \\ R'_{31} & R^2_{31} \end{vmatrix} \right\| \left\| \begin{vmatrix} R'_{22} & R^2_{22} \\ R'_{32} & R^2_{32} \end{vmatrix} \right\| \left\| \begin{vmatrix} R'_{23} & R^2_{23} \\ R'_{33} & R^2_{33} \end{vmatrix} \right\| \left\| \begin{vmatrix} R^3_{21} & R^4_{21} \\ R^3_{31} & R^4_{31} \end{vmatrix} \right\| \left\| \begin{vmatrix} R^2_{22} & R^4_{22} \\ R^2_{32} & R^4_{32} \end{vmatrix} \right\| \left\| \begin{vmatrix} R^2_{23} & R^3_{23} \\ R^2_{33} & R^3_{33} \end{vmatrix} \right\|. \quad (7,7)$$

Все соединения классической теории угловых моментов могут быть записаны через сумму произведений 2×2 -символов и 3×3 -символов. Примером производящего инварианта для соединения $n \times n$ -символов более высокого ранга может служить выражение

$$\sum_k \left| \begin{vmatrix} u_0 & v_0 & w_0 & t_0 \\ u_1 & v_1 & w_1 & \delta_{1k1} \\ u_2 & v_2 & w_2 & \delta_{2k2} \\ u_3 & v_3 & w_3 & \delta_{3k3} \end{vmatrix} \right|^{J_1} \left| \begin{vmatrix} \delta_{1k1} & x_1 & y_1 \\ \delta_{2k2} & x_2 & y_2 \\ \delta_{3k3} & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \right|^{J_2} \left(\prod_i \delta_{h_i h'_i} \right)^I. \quad (7,8)$$

Коэффициентами в разложении (7,8) служат соединения

$$\sum_{R_{24}R_{34}R_{44}} \left\| \begin{matrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} R_{24} & R_{25} & R_{26} \\ R_{34} & R_{35} & R_{36} \\ R_{44} & R_{45} & R_{46} \end{matrix} \right\|. \quad (7,9)$$

Возможность формулировки обобщенной теории угловых моментов на языке производящих инвариантов делает роль последних весьма значительной, позволяя решать прикладные задачи непосредственно через инварианты. Теория инвариантов⁶⁰, усиленно разрабатывавшаяся в конце прошлого века, обретает новые приложения. Рассмотрим в качестве примера вопросы способа связи моментов. Из k спиноров u_i ($i = 1, \dots, k$) группы $SU(2)$ можно составить производящие инварианты для коэффициентов Вигнера k -го ранга. (Ранг здесь соответствует числу слагаемых моментов; обозначение $[u_i u_k]$ соответствует детерминанту.) Инварианты

$$[u_1 u_2]^{R_{13}} [u_1 u_3]^{R_{12}} [u_2 u_3]^{R_{11}} \quad (7,10)$$

соответствуют обычному коэффициенту Вигнера группы $SU(2)$. Инварианты

$$[u_1 u_2]^{A_{12}} [u_1 u_3]^{A_{13}} [u_1 u_4]^{A_{14}} [u_2 u_3]^{A_{23}} [u_2 u_4]^{A_{24}} [u_3 u_4]^{A_{34}} \quad (7,11)$$

соответствуют коэффициентам Вигнера 4-го ранга. При операциях с производящими инвариантами следует иметь в виду, что не все они линейно-независимы. Так, например, из тождества

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix} = 0 \quad (7,12)$$

следует соотношение между детерминантами 2-го порядка

$$[u_1 u_2] [u_3 u_4] + [u_3 u_1] [u_2 u_4] + [u_1 u_4] [u_2 u_3] = 0, \quad u_i = \{x_i y_i\}. \quad (7,13)$$

Поэтому, в отличие от коэффициентов Вигнера 3-го ранга, коэффициенты Вигнера 4-го ранга неоднозначны и зависят от выбора независимых инвариантов (другими словами, — способа связи угловых моментов). Именно в силу зависимостей типа (7,13) (сизигий) возникает богатство форм в теории инвариантов и возможностей выбора независимых инвариантов*). Групповой смысл этих зависимостей заключается в том, что кронекеровское произведение неприводимых представлений может содержать несколько одинаковых представлений D_j . Оператор, различающий базисные функции кратных представлений, не содержится в группе и должен быть задан дополнительно, например указанием способа связи угловых моментов. Формулы (6,5) и (6,6) иллюстрируют два способа построения производящих инвариантов. Из свойства полноты для симметрического способа связи (6,6) следует возможность представления j -символов через

*) В качестве независимых инвариантов могут быть выбраны трех- и более мерные детерминанты⁶¹. Хотя применение таких пространственных детерминантов ($3 \times 3 \times 3$ и т. п.) в обобщенной теории и представляется перспективным, эти вопросы не исследованы.

линейные комбинации величин τ_n :

$$\tau_n = \sum_{m_i} \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{n-21} & R_{n-22} & \dots & R_{n-2n} \\ j_1 - m_1 & j_2 - m_2 & \dots & j_n - m_n \\ j_1 + m_2 & j_2 + m_2 & \dots & j_n + m_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} R'_{11} & R'_{12} & \dots & R'_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R'_{n-21} & R'_{n-22} & \dots & R'_{n-2n} \\ j_1 + m_1 & j_2 + m_2 & \dots & j_n + m_n \\ j_1 - m_1 & j_2 - m_2 & \dots & j_n - m_n \end{vmatrix}. \quad (7,14)$$

С другой стороны, производящий инвариант для любого способа связи всегда может быть записан в виде линейной комбинации величин типа (7,11), например коэффициенту Вигнера 5-го ранга для $((j_1 j_2) j_{12} j_3) j_{123} j_4 j$ -связи

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ m_1 & m_2 & m_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{12} & j_3 & j_{123} \\ m'_{12} & m_3 & m_{123} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{123} & j_4 & j \\ m'_{123} & m_4 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{12} \\ m_{12} & m'_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{123} \\ m_{123} & m'_{123} \end{pmatrix} \quad (7,15)$$

соответствует производящий инвариант (с точностью до нормировки)

$$\begin{aligned} & \sum [uv]^{A_1} [u\varepsilon_{hl}]^{A_2} [v\varepsilon_{hl}]^{A_3} [w\varepsilon_{hl}]^{A'_1} [w\varepsilon_{hl'}]^{A'_2} [\varepsilon_{hl}\varepsilon_{hl'}]^{A'_3} [ts]^{A''_1} [t\varepsilon_{hl'}]^{A''_2} [s\varepsilon_{hl'}]^{A''_3} = \\ & = \sum \frac{[uv]^{\beta_{12}} [uw]^{\beta_{13}} [vw]^{\beta_{23}} [ut]^{\beta_{14}} [vt]^{\beta_{24}} [us]^{\beta_{15}} [wt]^{\beta_{34}} [ws]^{\beta_{35}} [st]^{\beta_{45}} [vs]^{\beta_{25}}}{\prod_{ik} \beta_{ik}!}, \quad (7,16) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} [uv] &= (\varepsilon^{ik} u_i v_k), \quad [u\varepsilon_{hl}] = (\varepsilon^{ik} u_i \varepsilon_{kl}) = u_l \text{ и т. д.,} \\ \beta_{12} &= A_1 = j_1 + j_2 - j_{12}, \quad \beta_{13} + \beta_{23} = A'_1, \quad \beta_{15} = A''_1, \\ \beta_{13} + \beta_{14} + \beta_{15} &= A_2, \quad \beta_{34} + \beta_{35} = A'_2, \quad \beta_{11} + \beta_{24} + \beta_{34} = A''_2, \\ \beta_{23} + \beta_{24} + \beta_{25} &= A_3, \quad \beta_{14} + \beta_{24} + \beta_{15} + \beta_{25} = A'_3, \quad \beta_{15} + \beta_{25} + \beta_{35} = A''_3. \end{aligned}$$

Разлагая инвариант I_A , соответствующий способу связи A , по инвариантам I_B , соответствующим способу связи B , имеем

$$I_A = \sum_B c_{A, B} I_B. \quad (7,17)$$

Используя разложение инвариантов по степеням компонент составляющих их спиноров, получаем взаимосвязь величин с трансформационными матрицами. Производящие инварианты позволяют осветить по-новому и ряд других вопросов, из которых особое внимание привлекает проблема взаимосвязи симметрий.

8. Взаимосвязь симметрий

Обобщенная теория угловых моментов, содержащая, в отличие от классической, формулы, относящиеся к высшим симметриям, позволяет анализировать взаимосвязь симметрий в реальной системе. Существенную роль в такой теории играют производящие инварианты. Это связано с тем, что одна и та же величина может быть производящим инвариантом для коэффициентов КГ разных групп. Методика получения и характер взаимосвязи коэффициентов КГ рассмотрен в работе ⁵⁶ на примере выражения

$$\psi_{p_{ik}}(x_i y_i) = \left[\frac{P!}{\prod_{i < k} p_{ik}!} \right]^{1/2} \prod_{i < k \leq 4} \begin{vmatrix} x_i & x_k \\ y_i & y_k \end{vmatrix}^{p_{ik}}, \quad (8,1)$$

представляющего собой нормированное произведение шести детерминантов 2-го ранга в степенях p_{ik} . Подобно тому как детерминант 3-го ранга в степени J представляет собою производящий инвариант для коэффициентов КГ группы $SU(2)$ и для коэффициентов КГ группы $SU(3)$ частного вида, выражение (8,1) является исходным для получения коэффициентов КГ разных групп. Это выражение можно трактовать как базис представления $D(0P0)$ группы $SU(4)$ ⁵⁹, придавая величинам x_i, y_i трансформационный смысл базисных векторов фундаментального представления $D(100)$. С другой стороны, придавая парам x_i, y_i трансформационный смысл спиноров, можно рассматривать их как базис производящих инвариантов для коэффициентов Вигнера группы $SU(2)$ 4-го ранга, типа (7,11). Можно придать (8,1) смысл базиса и для группы $SU(3)$. Отсюда и возникает связь между коэффициентами КГ групп $SU(2)$, $SU(3)$, $SU(4)$, основой которой является выражение (8,1). Такой подход может быть использован в каждом конкретном случае. В работе⁶² на основе свойств симметрии коэффициентов КГ был дан однозначный способ классификации инвариантов группы $SU(2)$ по представлениям группы $SU(3)$ и инвариантов группы $SL(2C)$ по представлениям $SL(3C)$ или ее подгруппы $SU(3)$. Полученные при этом трансформационные свойства лагранжианов были сопоставлены со свойствами симметрии элементарных частиц. Придавая величинам u_i, v_i, w_i в равенстве (5,2) трансформационный смысл базисных векторов представления $D(10)$ группы $SU(3)$, можно записать соотношение, определяющее контравариантное представление $SU(3)$:

$$\frac{U_1^{R_{11}} U_2^{R_{12}} U_3^{R_{13}}}{(R_{11}! R_{12}! R_{13}!)^{1/2}} = \sqrt{(J+1)!} \sum_{\sum_i R_{2i}=J} \left\| \begin{matrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{matrix} \right\| \frac{\prod_i v_i^{R_{2i}} w_i^{R_{3i}}}{(\prod_i R_{2i}! R_{3i}!)^{1/2}}. \quad (8,2)$$

С другой стороны, если величины $v_1, w_1, v_2, w_2, v_3, w_3$ в правой части (8,2) формально рассматривать как спиноры $SU(2)$, то правая часть представляет нормированное произведение степеней миноров детерминанта (5,2) и в соответствии с работой⁷ является инвариантом группы $SU(2)$

$$\begin{aligned} \frac{U_1^{R_{11}} U_2^{R_{12}} U_3^{R_{13}}}{(R_{11}! R_{12}! R_{13}!)^{1/2}} &= \frac{1}{(R_{11}! R_{12}! R_{13}!)^{1/2}} \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}^{R_{11}} \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix}^{R_{12}} \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}^{R_{13}} = \\ &= \sum_{m_1+m_2+m_3=0} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \psi_{m_1}^{j_1} \psi_{m_2}^{j_2} \psi_{m_3}^{j_3}; \end{aligned}$$

здесь

$$\psi_{m_i}^{j_i} = \left[\frac{(2j_i)!}{(j_i+m_i)!(j_i-m_i)!} \right]^{1/2} v_i^{j_i+m_i} w_i^{j_i-m_i}. \quad (8,3)$$

Таким образом, любые инварианты группы $SU(2)$ могут рассматриваться как базисные векторы в пространстве представления $SU(3)$. Справедливо и обратное.

Аналогично $SU(2)$ инварианты собственной группы Лоренца $SL(2C)$ образуют базис представления группы $SL(3C)$. Векторы e_{pq}^{PQ} канонического базиса, соответствующего представлению $\tau(PQ)$ группы $SL(2C)$, выражаются через векторы $e_{p_1 q_1}^{P_1 Q_1}$ и $e_{p_2 q_2}^{P_2 Q_2}$, соответствующие представлениям $\tau(P_1 Q_1)$ и $\tau(P_2 Q_2)$, следующим образом:

$$e_{pq}^{PQ} = \sum_{\substack{p_1 p_2 \\ q_1 q_2}} (P_1 P_2 p_1 p_2 | P) (Q_1 Q_2 q_1 q_2 | Q) e_{p_1 q_1}^{P_1 Q_1} e_{p_2 q_2}^{P_2 Q_2}. \quad (8,4)$$

В правой части (8,4) находятся обычные коэффициенты Клебша — Гордана, которые можно записать в виде 3×3 -символов. Соответственно любой инвариант группы Лоренца может быть представлен в виде

$$\sum_{\substack{p_1 p_2 p_3 \\ q_1 q_2 q_3}} \left\| \begin{array}{ccc} -P_1 + P_2 + P_3 & P_1 - P_2 + P_3 & P_1 + P_2 - P_3 \\ P_1 - p_1 & P_2 - p_2 & P_3 - p_3 \\ P_1 + p_1 & P_2 + p_2 & P_3 + p_3 \end{array} \right\| \times \\ \times \left\| \begin{array}{ccc} -Q_1 + Q_2 + Q_3 & Q_1 - Q_2 + Q_3 & Q_1 + Q_2 - Q_3 \\ Q_1 - q_1 & Q_2 - q_2 & Q_3 - q_3 \\ Q_1 + q_1 & Q_2 + q_2 & Q_3 + q_3 \end{array} \right\| \psi_{p_1 q_1}^{P_1 Q_1} \psi_{p_2 q_2}^{P_2 Q_2} \psi_{p_3 q_3}^{P_3 Q_3}. \quad (8.5)$$

Инвариант (8,5) определяется 6 индексами

$$\begin{aligned} \pi_1 &= -P_1 + P_2 + P_3, \quad \pi_2 = P_1 - P_2 + P_3, \quad \pi_3 = P_1 + P_2 - P_3, \\ \kappa_1 &= -Q_1 + Q_2 + Q_3, \quad \kappa_2 = Q_1 - Q_2 + Q_3, \quad \kappa_3 = Q_1 + Q_2 - Q_3; \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 &= P_1 + P_2 + P_3 = \pi, \quad \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 = Q_1 + Q_2 + Q_3 = \kappa. \end{aligned}$$

Поскольку $SU(3)$ — подгруппа $SL(3C)$, каждый релятивистский инвариант является базисным вектором некоторого приводимого представления $SU(3)$. Инварианты, отличающиеся порядком ψ_1, ψ_2, ψ_3 , могут образовывать шесть компонент представления $SU(3)$. Для построения полного базиса необходимо, вообще говоря, использовать инварианты с другими ψ_1, ψ_2, ψ_3 . Индексы $[\pi_1 \pi_2 \pi_3][\kappa_1 \kappa_2 \kappa_3]$ в ряде простых случаев непосредственно характеризуют базисные векторы $M \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \\ \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 \end{pmatrix}$ представления $D(\pi\kappa)$ группы $SU(3)$ в симметрическом базисе⁴⁴. Примером соответствия между представлениями группы Лоренца, по которым преобразуются базисные векторы ψ, ψ_2, ψ_3 , и указанными индексами могут служить:

$$\left. \begin{aligned} \text{а) } [\tau(1/2, 0) \tau(1/2, 0) \tau(00)] &\rightarrow [100][000], \\ \text{б) } [\tau(1/2, 0) \tau(00) \tau(1/2, 0)] &\rightarrow [010][000], \\ \text{в) } [\tau(1/2, 0) \tau(0, 1/2) \tau(1/2, 1/2)] &\rightarrow [010][100], \\ \text{г) } [\tau(1/2, 1/2) \tau(1/2, 1/2) \tau(00)] &\rightarrow [001][001]. \end{aligned} \right\} \quad (8.6)$$

Случаи а) и б) отличаются перестановкой векторов ψ_i . Случаи в) и г) соответствуют приводимому представлению $SU(3)$ $D(11) + D(00)$ — всего 9 векторов. Наряду с индексами π_i, κ_i можно формально использовать другие индексы: π, κ , гиперзаряд $Y = \kappa_1 - \pi_1 + 1/2(\pi - \kappa)$, изоспин T и проекцию изоспина $t_3 = 1/2(\pi_2 - \pi_3 + \kappa_3 - \kappa_2)$. Например, инварианту $[\tau(1/2, 0) \tau(1/2, 0) \tau(00)]$ соответствуют 3 состояния (кварка), преобразующихся по представлению $D(10)$:

$$\left. \begin{aligned} \langle \lambda \rangle: & [100][000], \quad Y = -\frac{2}{3}, \quad t_3 = 0, \\ \langle p \rangle: & [010][000], \quad Y = \frac{1}{3}, \quad t_3 = \frac{1}{2}, \\ \langle n \rangle: & [001][000], \quad Y = \frac{1}{3}, \quad t_3 = -\frac{1}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (8.7)$$

Такая классификация применима и к токам, поскольку существенным моментом является наличие коэффициента КГ.

Теория коэффициентов КГ дает рецепт для классификации релятивистских инвариантов по представлениям группы $SU(3)$. При этом каждый из тензоров, образующих инвариант, в отличие от него, не является базисным вектором какого-либо представления $SU(3)$, т. е. появляется новая

симметрия, характеризующая взаимодействия и соответствующие лагранжианы. Проведем классификацию взаимодействий элементарных частиц по представлениям группы $SU(3)$. Рассмотрим лагранжиан слабого взаимодействия

$$\bar{\psi}_a \gamma_\lambda (1 + \gamma_5) \psi_b \bar{\psi}_c \gamma_\lambda (1 + \gamma_5) \psi_d. \quad (8,8)$$

Записав это выражение через 3×3 -символы, получаем, что по своим трансформационным свойствам слабый ток принадлежит к октетному представлению группы $SU(3)$ и согласно изложенному соответствует следующим шести базисным векторам D (11):

$$[010][001], [001][010], [100][001], [100][010], [010][100], [001][100]. \quad (8,9)$$

Первые два вектора соответствуют $Y = 0$, $t_3 = 1$, т. е. относятся к токам, сохраняющим странность. Остальные векторы соответствуют $Y = +1$, $t = 1/2$, т. е. токам, несохраняющим странность. Лагранжиан слабого взаимодействия, как видно из (8,9), также является членом октета $SU(3)$. Такие же трансформационные свойства были приписаны лагранжиану и току Кабиббо⁶³ из экспериментальных правил отбора в слабых взаимодействиях с участием адронов. Лагранжиан электромагнитного взаимодействия $(\bar{\psi}_\mu \psi) A_\mu$ является суммой двух инвариантов, построенных из трех представлений группы Лоренца [$\tau(0^{1/2})$ и $\tau(1/2^{1/2})$ и $\tau(1/2^0)$], и, следовательно, представляет собой неполный набор базисных векторов октета группы $SU(3)$. Для электромагнитного взаимодействия также нет противоречия между трансформационными свойствами лагранжиана, вытекающими из теории коэффициентов КГ, и свойствами, полученными из правил отбора.

Факт получения правильных трансформационных свойств является также указанием на то, что при рассмотрении адронов как сложной системы, в отличие от модели кварков, в принципе не обязательно приписывать субчастицам квантовые числа $SU(3)$, т. е. дробный заряд. Эти числа могут относиться лишь к их взаимодействию и адронным состояниям в целом, подобно тому как группа $O(4)$ ($O(5)$) описывает атом водорода, т. е. не отдельно протон и электрон, а всю систему в целом. Можно надеяться, что дальнейшее развитие вопросов взаимосвязи коэффициентов КГ поможет вести целенаправленный поиск симметрий элементарных частиц, находить скрытые симметрии в теории ядра и молекулярной спектроскопии. В свете разобранных примера $SU(3)$ -симметрии элементарных частиц проясняется концепция неинвариантных групп, введенная Эддингтоном⁶⁴. Согласно этой концепции физические системы могут характеризоваться симметриями, не являющимися группами симметрии лагранжиана или гамильтониана. Например, в молекулярной спектроскопии используются неинвариантные группы $R(5)$ и $O(4,1)$ для классификации состояний электрона в поле многих кулоновских центров^{65,67}. Из других результатов по неинвариантным группам следует отметить работы⁶⁸⁻⁷². В известном смысле, к этому кругу вопросов примыкает и задача трех тел^{73,74}, где обобщенная теория угловых моментов может оказаться весьма существенной. В заключение подчеркнем, что аппарат коэффициентов КГ особо важен для сложных физических систем, обладающих целой совокупностью взаимосвязанных симметрий. Именно такими системами являются атомы, ядра, адроны. В дальнейшем можно ожидать расширения сферы применений теории коэффициентов КГ, в частности в вопросах симметрий лептонов, в теории когерентных состояний и т. д.

III. СВЯЗЬ КОЭФФИЦИЕНТОВ КГ С ГЕОМЕТРИЕЙ И ТОПОЛОГИЕЙ

9. Геометрическая интерпретация

Третий раздел посвящен наименее разработанному кругу вопросов — геометрической и топологической интерпретации коэффициентов КГ. С общей точки зрения взаимосвязь с геометрическими понятиями представляется естественной. Еще в 1872 г. в своей знаменитой Эрлангенской программе Ф. Клейн (см. ^{60,75}) развил групповую точку зрения на геометрию. Типичным примером последовательного изложения геометрии на основе понятия симметрии служит монография Бахмана ⁷⁶, где приведена также обширная библиография. Обсуждавшаяся выше комбинаторная сторона теории коэффициентов КГ непосредственно влечет за собой связь с конечными геометриями ²⁴.

Надо думать, что исследование связи с геометрическими характеристиками может быть полезным и с точки зрения возможной geometrization физических понятий, тесно связанных с коэффициентами КГ.

Прежде чем переходить к изложению чисто геометрических вопросов, кратко остановимся на графических методах.

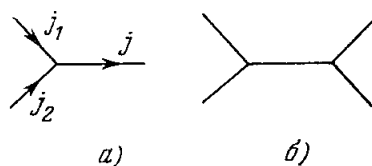


Рис. 1. Графики классической теории.

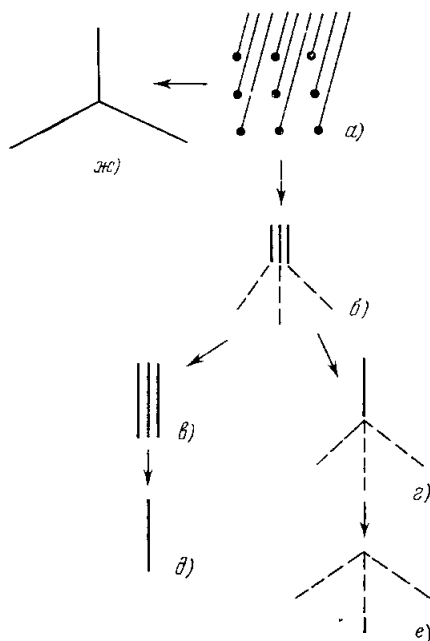


Рис. 2. Редукция графических методов.

В классической теории угловых моментов графические методы были детально разработаны Юдисом, Левинсоном и Ванагасом ⁸ (см. также ⁹). Коэффициенты КГ изображались в виде треххвостки (рис. 1, а), а суммирование по проекциям — соединением линий (рис. 1, б). Из симметрии Редже вытекает естественное обобщение этого подхода, в котором коэффициенту Вигнера сопоставляются 9 свободных концов (рис. 2, а), а остальные известные графические методы получаются как частные случаи ⁷⁷. Редукция графических методов представлена на рис. 2. Рис. 2, б соответствует jm -формулировке теории, когда суммирование проводится по верхней строке и по столбцам двух нижних строк, рис. 2, в — суммированию по триадам (j -символы) (рис. 2, г и д — упрощенные графики; см. также ⁸), рис. 2, е — обычному суммированию по проекциям ⁹, рис. 2, ж — графику R -символа как матрицы метрики в пространстве представлений группы $SU(3)$. Указанные методы могут оказаться полезными при рассмотрении нестандартных соединений коэффициентов КГ.

Геометрическая интерпретация коэффициента Вигнера также тесно связана с симметрией Редже ¹². Воспользуемся треугольными (барицен-

трическими) координатами на плоскости. Рассмотрим равносторонний треугольник, стороны которого являются координатными осями. Перпендикулярно осям откладываются значения координат. Положительным считается направление внутрь треугольника. Для любой точки сумма ее треугольных координат является постоянной и равна J . Будем считать значения трех строк символа Редже координатами трех точек. Точки вследствие неотрицательности и целочисленности R_{ik} лежат на пересечениях координатной сетки (рис. 3). Задание двух точек в этой системе автоматически определяет третью. 72 правила симметрии позволяют переставлять оси и точки и в определенном смысле менять их местами. Таким образом, симметрия Редже состоит из перестановочной симметрии (при которой можно любые две из трех

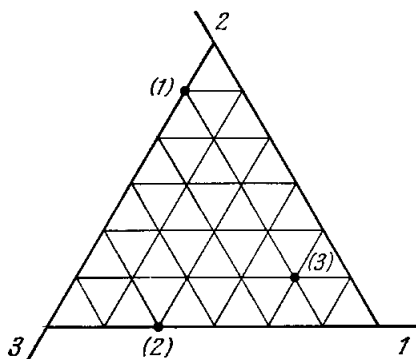
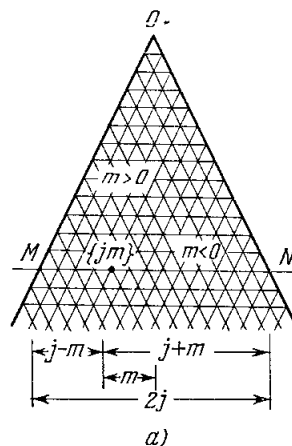


Рис. 3. Геометрическая интерпретация символа Редже.

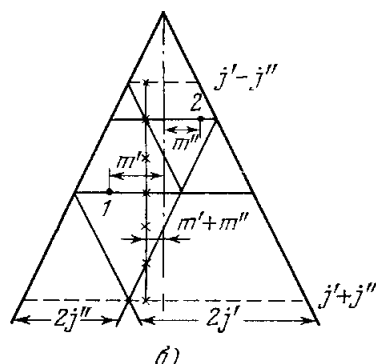


Рис. 4. Сложение моментов.

точек менять местами), симметрии системы координат и замены осей на точки и обратно. В качестве примера на рис. 3 приведено графическое изображение символа

$$\left\| \begin{array}{ccc} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{array} \right\| = \begin{pmatrix} 1/2 & 5/2 & 3 \\ 1/2 & -3/2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

При рассмотрении сложения фиксированных моментов j' и j'' также может быть использована координатная сетка, состоящая из равносторонних треугольников⁷⁷ (рис. 4, а). Координаты определяются как расстояния до осей OM и ON . Моменту j с проекцией m соответствует точка с координатами $(j - m, j + m)$, проекция m равна расстоянию от точки до биссектрисы координатного угла. При сложении моментов $\{j'm'\}$ и $\{j''m''\}$ точки, соответствующие результирующему моменту $\{jm\}$, лежат на вертикали, отстоящей от биссектрисы на расстоянии $m' + m''$ между горизонтальными прямыми, соответствующими $j' + j''$ и $|j' - j''|$ (рис. 4, б).

Для произвольных $n \times n$ -символов обобщение данной геометрической интерпретации очевидно. Если для 3×3 -символа значения R_{ik}

являются барицентрическими координатами трех точек на плоскости. то для 4×4 -символа значения R_{ik} являются барицентрическими координатами четырех точек в пространстве. Система координат задается правильным тетраэдром. Расстояния точек от сторон тетраэдра являются ее координатами. Сумма координат каждой точки, как и сумма расстояний всех четырех точек от данной координатной плоскости, постоянна и равна J . Для произвольного $n \times n$ -символа значения R_{ik} являются барицентрическими координатами n точек в $(n - 1)$ -мерном пространстве. Эти точки образуют правильный $(n - 1)$ -мерный симплекс. Система координат задается правильным $(n - 1)$ -мерным симплексом. Положение точек n -мерного симплекса внутри правильного координатного симплекса определяет численное значение $n \times n$ -символа. Нахождение численных значений $n \times n$ -символов геометрическим путем было рассмотрено в работе ⁷⁷ на примере коэффициента Вигнера. Соединения $n \times n$ -символов различного ранга, включая численные значения, так же как и сами символы, могут быть рассмотрены на языке многомерной геометрии, через которую таким образом выражается обобщенная теория угловых моментов.

Поряду с многомерной геометрией интересна связь с проективной геометрией ^{78,79}. Джованнини и Смит ⁴⁶, рассматривая $n \times n$ -символы как магические квадраты, провели их обобщение. В отличие от $n \times n$ -символов, элементами которых являются целые неотрицательные числа, в Q_n -символах, введенных в работе ⁴⁶, элементами R_{ik} могут быть любые рациональные числа. При этом по-прежнему $\sum_i R_{ik} = \sum_k R_{ik} = J$. Алгебра Q_n является векторным пространством над рациональным полем. Совокупность подпространств этого пространства образует проективную геометрию, удовлетворяющую соответствующим аксиомам ^{78,79}. Симметрия строк и столбцов Q_n -символов соответствует двойственности между точками и прямыми в проективной геометрии. На основе представления $6j$ -символа в форме магического квадрата (6.11) в работе ⁴⁶ дана интерпретация известного соотношения ⁸⁰

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 + p & j + p & j_{23} + p \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j - j_3 & j_{23} - j_3 & j_3 - j \end{pmatrix} \quad (9.1)$$

как проектирования векторного пространства Q_4 в определенное подпространство. В целом связь коэффициентов КГ с проективной геометрией разработана еще недостаточно. Возможно, что к этому же примыкают вопросы, связанные с матрицей конечных вращений ⁵¹ и с векторной параметризацией группы вращений и группы Лоренца ^{81,82}. Однако в этом направлении необходимо дальнейшее изучение. Что же касается многомерной геометрии, то здесь особо следует выделить аспект связи коэффициентов КГ с алгебраической топологией.

10. Теория угловых моментов и топология

В теории угловых моментов могут быть эффективно использованы методы алгебраической топологии ^{83,84}. Различные соединения коэффициентов КГ и Рака характеризуются при этом топологическими инвариантами — группами Бетти.

В настоящее время сфера приложения топологических методов в физике неуклонно расширяется — общая теория относительности ⁸⁵⁻⁸⁷, физика твердого тела ^{88,89}, квантовая теория поля ⁹⁰⁻⁹².

Топология, как отрасль математики, сложилась в начале XX века во многом благодаря работам Пуанкаре, изучавшего структуру сложных

геометрических многомерных образований. В отличие от аналитической геометрии, где структура сложного тела задается системой неравенств или уравнениями границ, при топологическом подходе многомерные геометрические образования разбиваются на простейшие элементы — симплексы.

Симплексы — это элементарные кирпичи, из которых по определенным законам строятся сложные геометрические фигуры — полиэдры. Схема разбиения полиэдров на симплексы называется комплексом. Отрезок, треугольник, тетраэдр являются соответственно симплексами одно-, дву- и трехмерного пространств. В общем случае r -мерный симплекс $[a_0 a_1 \dots a_r]$ определяется как множество точек

$$z = \sum_{i=0}^r \lambda^i a_i, \quad (10,1)$$

где $a_0, a_1, \dots, a_r$ — система независимых точек пространства R_n ($r \leq n$), $\lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^r$ — действительные числа, удовлетворяющие условиям

$$\sum_{i=0}^r \lambda^i = 1 \quad (\lambda^i \geq 0; i = 0, 1, \dots, r). \quad (10,2)$$

Величина $[a_0 a_1 \dots a_{i-1} a_{i+1} \dots a_r]$ называются $(r-1)$ -гранями симплекса A^r . Конечная совокупность симплексов образует комплекс K , если наряду с каждым симплексом в K входит его грань и каждые два симплекса совокупности K расположены правильно (не пересекаются вовсе или пересечение является гранью каждого из симплексов). Этим задается закон построения полиэдра, являющегося множеством всех точек комплекса.

Важным прикладным аспектом топологии является возможность (при очевидном отсутствии геометрической интуиции в анализе многомерных многообразий) характеризовать структуру сложных полиэдров топологическими инвариантами — группами гомологий (группы Бетти). Группы гомологий определяются следующим образом⁹³⁻⁹⁵. Вводится понятие цепи

$$x = \sum_i \tau^i A_i^s, \quad (10,3)$$

где τ^i — целые числа, A_i^s — совокупность всех s -мерных симплексов комплекса K . Соответствующая совокупность всех $r-1$ -мерных граней симплексов A называется границей цепи Δx :

$$\Delta x = \sum_{i=0}^n \tau_i \Delta A_i^r. \quad (10,4)$$

Граница симплекса ΔA^r находится согласно символической формуле

$$\Delta A^r = \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{\partial A^r}{\partial a^i}. \quad (10,5)$$

r -мерная цепь называется циклом, если ее граница равна нулю. Множество циклов составляет группу Z^r . Цикл гомологичен нулю, если он является границей $(r+1)$ -цепи из K . Эти циклы образуют группу H^r . Группы гомологий определяются фактор-группами $B^r = Z^r/H^r$. Они коммутативны и могут быть заданы своими инвариантами — числами Бетти p^r и коэффициентами кручения t_q .

Указанные понятия наглядно иллюстрируются на простых примерах двумерных комплексов: а) Плоскость с n отверстиями. Здесь любая линия — цепь; замкнутая линия — цикл; если внутри замкнутой линии нет отверстия — цикл, гомологичный нулю; одномерное число Бетти p^1 равно числу отверстий n . б) Сфера, $p^2 = 1$, $p^1 = 0$, $p^0 = 1$. Нульмерное

число Бетти p^0 всегда равно числу несвязных кусков полиэдра. Топологические понятия, тривиальные в простых случаях, являются важными характеристиками структуры сложных многомерных многообразий.

Отметим, что классификация полиэдров является узким разделом комбинаторной топологии, практически не использующим современного топологического аппарата, в основе которого лежит одновременное применение гомологии и когомологии, тесно связанной с классификацией дифференциальных операторов⁶⁰. (В отличие от формулы (10,3), коцепь u_s задается на симплексах A_i^s функционалом $(u_s A_i^s) = \tau_i$.) Современный топологический аппарат дает возможность анализировать аналитическую структуру интегралов, исследовать их особенности⁹⁰⁻⁹²; при этом дифференциальные и интегральные соотношения сводятся к чисто алгебраическим. Чтобы применить топологические понятия к теории угловых моментов, необходимо сопоставить величинам этой теории (моментам, коэффициентам КГ, Рака и т. д.) геометрические объекты в многомерных пространствах — полиэдры. Будем считать треугольник со сторонами, соответствующими моментам j_1, j_2, j_3 , геометрическим образом коэффициента Вигнера (ср. три точки на сетке треугольных координат — рис. 3, а также геометрическую интерпретацию¹). Тогда $6j$ -символ (с четырьмя гранями — коэффициентами КГ) соответствует тетраэдру. Любому соединению коэффициентов КГ, j -символам, можно поставить в соответствие определенный полиэдр, построенный из указанных симплексов. При этом согласно структуре классической теории угловых моментов условия правильного соединения симплексов выполнены автоматически. (Разумеется, графикам обычного типа⁸ (см. рис. 1) также могут быть приписаны топологические характеристики. Однако здесь условия построения комплекса не совпадают с правилами соединения коэффициентов КГ.) Группы Бетти (группы гомологий) комплекса K являются инвариантами полиэдра и тем самым характеристиками соединений коэффициентов КГ. Здесь следует подчеркнуть, что топологические характеристики отображают не все свойства геометрических понятий, некоторые существенные геометрические свойства при этом всегда теряются. Определение чисел Бетти для соединений коэффициентов КГ сводится либо к непосредственному нахождению всех циклов данной размерности, циклов, гомологичных нулю и друг другу, либо к использованию формулы Майера — Вьеториса⁹⁶, связывающей числа Бетти комплексов K_1, K_A, K_B, K_0 , где $K_A \subset K_1, K_B \subset K_1, K_0 \subset K_1$, причем $K_A \cup K_B = K_1, K_A \cap K_B = K_0$ (эта формула — своеобразный аналог ряда Клебша — Гордана в топологии). Для описания конкретных полиэдров удобно использовать набор комплексов K_s ($s = 0, 1, 2, \dots$ — размерность комплекса). Тогда полиэдр в трехмерном случае описывается следующей совокупностью чисел Бетти p_s^r :

$$\begin{array}{cccc} p_0^0 & p_1^1 & p_2^2 & p_3^3 \\ p_0^1 & p_1^2 & p_2^3 & \\ p_0^2 & p_1^3 & & \\ p_0^3 & & & \end{array} \quad (10,6)$$

В качестве примеров укажем совокупности (10,6) для коэффициента Рака и соединения $\sum_{m_{12}} (j_1 j_2 m_1 m_2 | j_{12} m_{12}) (j_{12} j_3 m_{12} m_3 | j m)$ соответственно

$$\begin{array}{cc} 4310 & 420 \\ 100 & 10 \\ 10 & 1. \\ 1, & \end{array} \quad (10,7)$$

В работе ⁸³, где приведены конкретные примеры топологической характеристики соединений коэффициентов КГ, применялся набор чисел Бетти $p_3^1, p_2^2, p_1^1, p_0^0 = 1$. Топологический подход представляется эффективным для ряда проблем теории угловых моментов, включая перечисление и классификацию j -символов, получение соотношений между j -символами, анализ структуры различных соединений. Уже просто топологически ковариантная трактовка теории угловых моментов ⁸⁴ приводит к интересным результатам. Обозначим матрицу метрики $\begin{Bmatrix} j \\ mm' \end{Bmatrix}$, соответствующую одномерному симплексу $[a_1 a_2]$, через X_{12} ; коэффициент Вигнера $\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{Bmatrix}$, соответствующий двумерному симплексу $[a_1 a_2 a_3]$, — через X_{123} ; $6j$ -символ $\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j & j_{23} \end{Bmatrix}$, соответствующий трехмерному симплексу $[a_1 a_2 a_3 a_4]$, — через X_{1234} . Посредством $X_{ik} \dots$ можно записать любые соотношения, не зависящие от конкретных значений моментов. Суммирование, как уже отмечалось, проводится по общим симплексам и будет обозначаться заключением суммируемых симплексов в квадратные скобки. Например, $6j$ -символ и свертка двух $6j$ -символов записываются соответственно в виде (справа обычные обозначения)

$$X_{1234} = [X_{123} X_{234} X_{134} X_{124}] = \begin{Bmatrix} X_{12} & X_{23} & X_{13} \\ X_{34} & X_{14} & X_{24} \end{Bmatrix}, \quad (10,8)$$

$$[X_{1234} X_{2345}] = \begin{Bmatrix} X_{12} & X_{23} & X_{13} \\ X_{34} & X_{14} & X_{24} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} X_{23} & X_{24} & X_{34} \\ X_{45} & X_{35} & X_{25} \end{Bmatrix}. \quad (10,9)$$

j -символы тесно связаны с трансформационными матрицами, задающими переход между различными схемами связи моментов. Обычное обозначение (через X_{ik}) трансформационных матриц имеет вид

$$(((X_{36} X_{46}) X_{34} X_{24}) X_{23} X_{13}) X_{12} X_{15} X_{25} | (((X_{36} X_{13}) X_{16} X_{15}) X_{56} X_{46}) X_{45} X_{24} X_{25}). \quad (10,10)$$

Однако для приложений более удобно обозначение

$$(X_{346} X_{234} X_{123} X_{125} | X_{136} X_{156} X_{456} X_{246}). \quad (10,11)$$

Это выражение может быть записано в виде свертки $6j$ -символов

$$[X_{1346} X_{1234} X_{1245} X_{1456}]. \quad (10,12)$$

Правила действий с трансформационными матрицами в форме (10,11) сводятся к сокращению повторяющихся X_{ikl} , например

$$(X_{123} X_{345} X_{134} X_{146} | X_{126} X_{235} X_{256} X_{456}) (X_{123} X_{134} X_{347} X_{148} | X_{128} X_{237} X_{278} X_{478}) = \\ = (X_{346} X_{146} X_{128} X_{237} X_{278} X_{478} | X_{126} X_{235} X_{256} X_{456} X_{347} X_{148}). \quad (10,13)$$

Не всякая трансформационная матрица может быть представлена в форме типа (4,11) или (4,12), например $9j$ -символ. Однако $9j$ -символ может рассматриваться как $12j$ -символ второго рода с одним из коэффициентов Ракá частного вида

$$\begin{Bmatrix} j' j'' j \\ j' j'' j \end{Bmatrix}.$$

Символически $9j$ -символ может быть представлен в виде

$$[X_{1234} X_{2345} X_{1246} Y_{(24)(56)}]. \quad (10,14)$$

$Y_{(ih)(lm)}$ — частное значение коэффициента Рака, когда $X_{ih} = X_{lm}$, $X_{il} = X_{im}$, $X_{hl} = X_{im}$. Аналогично обозначение и для других подобных j -символов. Таким образом, любой j -символ может быть представлен в топологической форме как соединение коэффициентов Рака. Структура таких соединений значительно сложнее структуры соединений коэффициентов КГ. Однако различные соединения коэффициентов Рака могут быть приведены к стандартному виду с помощью соотношений

$$[X_{1345} X_{2345} X_{1245}] = [X_{1234} X_{1235}], \quad (10,15)$$

$$[X_{1267} X_{1247} X_{2347} X_{2357} X_{2567}] = \begin{bmatrix} X_{1234} & X_{1235} & X_{1256} \\ X_{1347} & X_{1357} & X_{1567} \end{bmatrix}, \quad (10,16)$$

$$[X_{1234} X_{1235} X_{1256} X_{1267} X_{1278} X_{1248}] = \begin{bmatrix} X_{1345} & X_{1456} & X_{1467} & X_{1478} \\ X_{2345} & X_{2456} & X_{2467} & X_{2478} \end{bmatrix}, \quad (10,17)$$

$$\begin{bmatrix} X_{1234} & X_{2345} & X_{2357} \\ X_{1246} & X_{2456} & X_{2567} \\ X_{1468} & X_{4568} & X_{5678} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{1267} & X_{1678} \\ X_{1237} & X_{1378} & X_{3578} \\ & X_{1348} & X_{3458} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{2349} & X_{1234} & X_{1347} \\ X_{2359} & X_{1235} & X_{1357} \\ & X_{1256} & X_{1567} \end{bmatrix}. \quad (10,18)$$

Для соединений коэффициентов Рака весьма наглядным является графический метод. На рис. 5, а представлен $6j$ -символ. Из одной вершины здесь выходят 4 линии, соответствующие коэффициенту КГ X_{ihl} . На рис. 5, б представлен $12j$ -символ. На рис. 6 представлены графические формулы (10,15) — (10,18), с помощью которых различные графики сводятся к древовидным графам с двойной линией типа, представленного на рис. 7.

Наряду с указанными выше задачами на основе топологического подхода могут быть рассмотрены симплексы высших порядков, соответствующие некоторым суперсимволам, задающим переход между различными схемами связи коэффициентов Рака, подобно тому, как коэффициент Рака задает переход между различными схемами связи коэффициентов КГ. При этом, в отличие от (10,14), $9j$ -символ играет

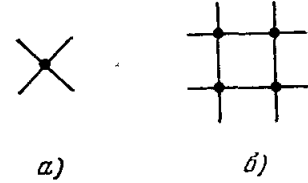


Рис. 5. $6j$ -символ и $12j$ -символ.

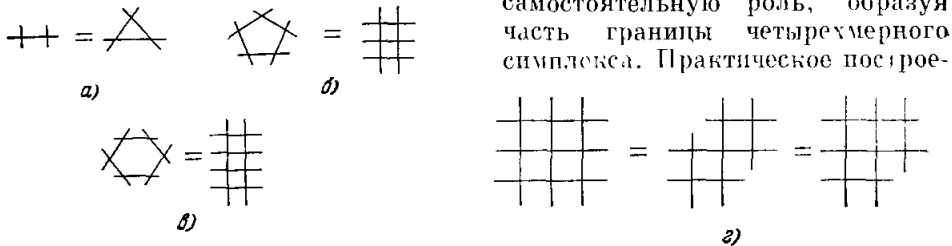


Рис. 6. Графическая интерпретация соотношений между j -символами.

ние четырехмерных симплексов (и соответствующих полиэдров) основано на использовании формы (6,11) для $6j$ -символа.

Из взаимосвязи теории коэффициентов КГ и топологии вытекает возможность использования групп гомологий для характеристики физических состояний и процессов в сложных атомных системах. Волновую функцию сложной системы (например, атома с определенным способом связи нескольких моментов) можно характеризовать группами Бетти.

То же относится и к матричным элементам для такой системы. Возникающая таким образом топологизация теории включает использование новых квантовых чисел p_i^z и соответствующих правил отбора.

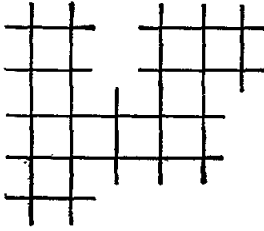


Рис. 7. Древоидный граф с двойной линией.

Возможности топологического подхода не ограничиваются сказанным. Как уже указывалось, обобщенная теория угловых моментов включает высшие симметрии. В то же время дифференциальные операторы, характеризующие определенные группы Ли, описываются группами когомологий и могут быть классифицированы по соответствующим числам Бетти ^{70, 97}. Одновременное наличие групп гомологий и когомологий определяет в теории коэффициентов КГ структуры, связанные с

использованием современного топологического аппарата, аналогичного применяемому в теории поля для исследования аналитических свойств фейнмановских интегралов ⁹⁰⁻⁹². Эти вопросы, однако, практически совсем не разработаны, и пока ничего нельзя сказать об их практической ценности.

11. СВЯЗЬ КОЭФФИЦИЕНТОВ КГ

с многомерными комплексными интегралами

Среди различных геометрических связей коэффициентов КГ привлекают внимание гильбертовы пространства F_n , элементами которых являются целые аналитические функции. Применение функциональных пространств F_n к изучению группы вращений основано на том, что ее неприводимые представления могут быть получены рассмотрением однородных полиномов двух комплексных переменных (для группы $SU(n)$ — n комплексных переменных). Все эти полиномы являются элементами F_2 и могут рассматриваться одновременно. Последовательное рассмотрение связи коэффициентов КГ с многомерными комплексными интегралами на основе пространств F_n было проведено Баргманом ⁴⁹. Элементами F_n являются согласно ⁴⁹ целые аналитические функции $f(z)$, где $z = (z_1 z_2 \dots z_n)$ — точка n -мерного комплексного евклидова пространства. Любая функция $f(z)$ может быть всюду разложена в степенной ряд

$$f(z) = \sum_{h_1 h_2 \dots h_n} \alpha_{h_1 h_2 \dots h_n} z_1^{h_1} z_2^{h_2} \dots z_n^{h_n}. \quad (11,1)$$

Скалярное произведение двух элементов $f_1 f' \in F$ определяется формулой

$$(ff') = \int \overline{f(z)} f'(z) d\mu_n(z), \quad (11,2)$$

где

$$d\mu_n(z) = \pi^{-n} \exp(-\bar{z}z) \prod_k dx_k dy_k \quad (z = x + iy).$$

При рассмотрении произведения представлений группы $SU(2) D_{j_1} \times D_{j_2}$ Баргман ⁴⁹ использует пространство F_6 и показывает, что производящая функция символов Вигнера может быть записана в виде

$$\Phi(\tau \xi \eta) = \exp(D(\tau, \xi, \eta)), \quad (11,3)$$

где

$$D(\tau, \xi, \eta) = \begin{vmatrix} \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \end{vmatrix}, \quad (11,4)$$

а $\tau = (\tau_1 \tau_2 \tau_3)$, $\xi = (\xi_1 \xi_2 \xi_3)$, $\eta = (\eta_1 \eta_2 \eta_3)$ — тройки комплексных переменных. Коэффициент Вигнера определяется разложением производящей

функции по степеням τ_i^p , ξ_h^q , η_l^r . Для фиксированного τ производящая функция $\Phi_\tau = \Phi(\tau, \xi, \eta)$ является элементом F_6 :

$$(\Phi_\tau, \Phi_{\tau'}) = \int \left[\int \overline{\exp(D(\tau, \xi, \eta))} \exp D(\tau', \xi, \eta) d\mu_3(\eta) \right] d\mu_3(\xi). \quad (11,5)$$

Из формул (11,3), (11,4) видно, что производящая функция удовлетворяет симметрии Редже. Производящая функция для коэффициента Ракá может быть выражена в виде интеграла от произведения четырех производящих функций Φ и является элементом F_{12} . Существенные преимущества методики Баргмана заключаются в том, что формулы записываются сразу для всех коэффициентов КГ независимо от конкретных значений моментов. Эта методика может быть легко обобщена на случай произвольных соединений коэффициентов КГ. Производящие функции таких соединений, аналогично (11,5), записываются через многомерные комплексные интегралы. В этих формулах охватываются все частные значения соединений, которые получаются при разложениях типа (11,1). Таким образом, топологическое исследование соединений коэффициентов КГ, проведенное в п. 11, тесно связано с топологическими характеристиками многомерных комплексных интегралов. С другой стороны, в работе Фотиади, Фруассара, Ласку и Фама⁹⁰ было предложено привлечь к исследованию аналитической структуры многомерных фейнмановских интегралов, возникающих в теории поля, гомологический метод. Таким образом возникают разные (и, вероятно, плодотворные) связи теории коэффициентов КГ с геометрическими топологическими понятиями, с одной стороны, и комплексными интегралами, с другой.

12. Выводы

В этом по необходимости весьма сжатом обзоре мы старались показать, насколько формулы теории коэффициентов КГ связаны с разными разделами современной математики. Большинство этих связей раскрылось лишь в последние годы, и, несомненно, в дальнейшем их круг значительно расширится. Из наиболее близких направлений развития теории нужно, во-первых, отметить обобщение на компактные группы Ли, отличные от $SU(2)$. Складывающаяся в настоящее время обобщенная теория угловых моментов включает в себя коэффициенты КГ полупростых групп Ли, причем коэффициенты КГ группы $SU(2)$ являются основой всей теории (ср. ^{44,45,55,58,98-100}). Второе перспективное направление — изучение свойств коэффициентов КГ для значений аргументов, отличных от целых и полуцелых. Оно тесно связано с теорией специальных функций. Несомненно, будет расширяться исследование групповой, комбинаторной и геометрической сторон коэффициентов КГ. Для авторов теория коэффициентов КГ в современном ее состоянии представляется как набор разрозненных фрагментов, дающих лишь весьма смутное представление о всей картине. Этот обзор и был написан для того, чтобы обратить внимание читателей на большое разнообразие нерешенных (и даже несформулированных) задач.

Насколько велика роль коэффициентов КГ для физики, покажет будущее. Однако стройность и красота рождающейся теории, с одной стороны, и неуклонное расширение физических приложений, с другой, заставляют думать, что физическая сторона теории коэффициентов КГ весьма существенна. Использование в физике коэффициентов КГ, несмотря на их разнообразные применения, пока еще очень узко. Это связано как с их недостаточной разработанностью, как и с еще имеющей место недооценкой их роли и эффективности.

ДОПОЛНЕНИЕ

КОЭФФИЦИЕНТЫ КЛЕБША — ГОРДАНА КОМПАКТНЫХ ГРУПП

Теория коэффициентов КГ высших компактных групп, содержащих группу $SU(2)$ ($O(3)$) в качестве подгруппы, имеет много общего с классической теорией угловых моментов и, как отмечалось в п. 12, в дальнейшем должна стать ветвью обобщенной теории. Однако в настоящее время проблему создания теории коэффициентов КГ, удобной для физических приложений, нельзя признать решенной. С этой точки зрения детальный обзор результатов для высших групп является еще преждевременным. Ниже дается краткая сводка особенностей, принципиальных методов расчета, вопросов табулирования коэффициентов КГ высших компактных групп.

Общая теория коэффициентов КГ компактных групп по сравнению с классической теорией угловых моментов имеет свои особенности. Во-первых, в ряду Клебша — Гордана появляются кратные представления (в группе $SU(2)$ кратные представления возникают при сложении нескольких моментов). Для различения кратных представлений должен быть использован внешний фактор, не содержащийся в группе (в группе $SU(2)$ таким фактором является способ сложения моментов). Второй важной особенностью является неоднозначное определение канонического базиса, зависимость его от выбора цепочки подгрупп. Та или иная схема редукции по подгруппам может быть существенной в различных конкретных физических задачах, где наблюдается иерархия физических симметрий. Отметим, что при наличии цепочки подгрупп коэффициенты КГ могут быть факторизованы по подгруппам. Например, коэффициенты КГ группы $SU(3)$ в цепочке $SU(3) \supset SU(2)$ состоят из коэффициента КГ группы $SU(2)$ и изоскалярного фактора. Для более сложных цепочек возникает система факторов. Отмеченные особенности необходимо иметь в виду как при расчетах коэффициентов КГ, так и при использовании литературных данных, в частности таблиц. При наличии кратных представлений различающий их дополнительный фактор, не содержащийся в группе, зависит от конкретной задачи и подчас носит условный характер. Поэтому прежде всего нужно строить коэффициенты КГ, соответствующие ряду Клебша — Гордана, не содержащему кратных представлений. Такие коэффициенты определяются однозначно, и их табулирование имеет смысл. Табулирование общего коэффициента КГ для высших групп в большинстве случаев так же неоправданно, как табулирование обобщенных коэффициентов КГ в теории угловых моментов⁶⁵.

Необходимо также указать, что переход между коэффициентами КГ одной группы при различных схемах редукции значительно более сложен, чем непосредственное их вычисление. Результаты, полученные для одной схемы редукции, бесполезны для другой. Поэтому при пользовании формулами и таблицами коэффициентов КГ нужно понимать их ограниченный характер и знать условия получения. Для коэффициентов КГ высших групп меняются и некоторые другие понятия, привычные для $SU(2)$. Например, для коэффициента Вигнера в общем случае нет симметрии относительно перестановки представлений¹⁰¹.

В основе общей теории коэффициентов КГ компактных групп лежит теория алгебр Ли, изложенная в ряде обзоров и монографий^{60, 102–108}. Все простые алгебры Ли классифицированы и изучены; им соответствуют четыре бесконечные серии групп: унитарные, унимодулярные группы $SU(n)$, ортогональные $SO(2n+1)$ и $SO(2n)$, симплектические $Sp(2n)$, и пять особых групп: G_2 , F_4 , E_6 , E_7 , E_8 . С помощью алгебр Ли в принципе можно получить любые величины, характеризующие соответствующие группы. Однако здесь существует большой разрыв между общей постановкой вопроса и реальными расчетными схемами для физических задач. При рассмотрении конкретных методов построения коэффициентов КГ можно условно выделить три подхода:

1. В инфинитезимальном подходе исходным пунктом являются перестановочные соотношения между операторами алгебр Ли. При этом преимущественно используется базис Картана — Вейля, включающий l взаимно коммутирующих операторов H_i ($[H_i, H_j] = 0$, $i, j = 1, 2, \dots, l$ (l — ранг группы)) и $r-l$ некоммутирующих операторов E_α (r — размерность алгебры). С помощью этих операторов определяются корневые векторы $r_i(\alpha)$ ($[H_i, E_\alpha] = r_i(\alpha) E_\alpha$), веса представлений $m = (m_1, \dots, m_l)$ ($H_i \psi = m_i \psi$) и матричные элементы представлений группы^{103, 107}. В работе¹⁰⁷ были также рассмотрены пути построения коэффициентов КГ. Важную роль при таком построении играет базис. Вопрос об определении канонического базиса и нумерации его компонент рассмотрен в работах^{108–110}. Базисные векторы неприводимых представлений нумеруются собственными значениями аддитивных операторов $[H_i] = m_i$, а также собственными значениями неаддитивных операторов, в качестве которых можно взять операторы Казимира^{103, 109, 111}. Например, для представлений группы $SU(n)$ $D(P_1 \dots P_{n-1})$ сигнатура может быть связана с операторами Казимира этой группы. В качестве неаддитивных операторов можно взять операторы Казимира K_α^λ групп $SU(n-1), \dots, SU(2)$ ($\lambda = 2, \dots, n$, $\alpha = 2, \dots, \lambda$), т. е. нумерация канонических базисов состоит из трех блоков чисел $\{P_1, \dots, P_{n-1}; [K_\alpha^\lambda]; [H_i]\}$.

Расчеты матричных элементов представлений и коэффициентов КГ при инфинитезимальном подходе являются достаточно громоздкими и сложными. При этом каждая группа (и схема редукции) требует специального исследования. Следует указать на ряд работ по конкретным расчетам матричных элементов ($SU(3)$ ^{112, 113}, $SU(4)$ ¹¹⁴, $SU(6)$ ^{115, 116}, $Sp(6)$ ^{117, 118}, G_2 ¹¹⁹, F_4 ¹²⁰, $SO(5)$ ^{121, 122}) и вычислению коэффициентов КГ инфинитезимальным методом ($SU(3)$ ^{112, 123–126}, $SU(6)$ ^{116, 127–130}, $SU(n)$ ¹³¹, $SO(5)$ ^{132–134}). Дальнейшая разработка этого подхода представляет большой интерес с методической точки зрения.

2. Второе направление, связанное с использованием алгебраических методов, наиболее близко примыкает по своей идеологии к классической теории угловых моментов. Существенным элементом в этом подходе является определение полиномиального базиса. Вопросы построения полиномиального базиса рассматривались в ряде работ ($SU(3)$ ^{135–138}, $SU(4)$ ¹³⁹, $SO(5)$ ^{140–142}, $SO(n)$ ^{143–145}). Важным частным случаем полиномиального базиса является введенный для групп $SU(n)$ симметрический базис ^{44, 45, 55}. Характерными его свойствами являются:

- а) Избыточность (не все компоненты линейно-независимы, хотя разложение по этому базису — однозначно).
- б) Симметрия (при свертке произвольного базисного вектора представления $D(P_1, \dots, P_{n-1})$ группы $SU(n)$ с сопряженным вектором возникает произведение детерминантов $(n-1)$ -го порядка в степенях $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$, т. е. имеется тесная связь с $n \times n$ -символами).
- в) Факторизация (симметрический базис состоит из отдельных множителей, являющихся базисами представлений $D(POO \dots)$, $D(OQO \dots)$, $D(OOR \dots)$). Эти свойства оказываются удобными для построения переходов между различными схемами редукции.

Полиномиальный базис позволяет широко использовать метод производящих инвариантов, на основе которого можно изучать структуру и взаимосвязь коэффициентов КГ разных групп ^{55, 56}. Важным этапом в развитии алгебраической расчетной схемы явились работы ^{137–138}, где для вычисленных частных коэффициентов КГ находились правила их соединений для конструирования более общих коэффициентов. Из других работ по алгебраическому методу следует отметить ^{146–151}. Несмотря на известные трудности (нахождение правил конструирования, вычисление нормировки), алгебраический подход позволяет получать результаты, имеющие общее значение для данной группы. Разумеется, простое противопоставление его инфинитезимальному подходу неверно, так как при алгебраических расчетах существенно используется знание общих свойств представлений, полученное с помощью алгебр Ли.

3. Третье направление в теории коэффициентов КГ основано на тесной взаимосвязи представлений полупростых групп Ли с представлениями группы перестановок π_f ⁶⁰. В течение длительного времени это направление играло главную роль в прикладных вопросах и было связано с вычислением генеалогических коэффициентов. Генеалогические коэффициенты являются факторами в коэффициентах КГ высших групп. Они представляют большое удобство при построении волновых функций многочастичных систем, обладающих заданной перестановочной симметрией. Результаты систематизированы в ряде монографий ^{152–156}. Вычислительный аппарат группы перестановок оказывается эффективным инструментом в теории представлений компактных групп Ли. Характерным примером является методика плетизма ^{156–159}. Взаимосвязь матричных элементов и коэффициентов КГ группы π_f с коэффициентами КГ компактных групп исследованы в ряде работ ^{160, 161}. В работе ¹⁰⁰ определены коэффициенты редукции (S -коэффициенты), с помощью которых осуществляется редукция пространства $R^f = R \times R \times \dots \times R$ на пространство, неприводимое относительно $\pi_f \times G$ (R — объект представления группы G , соответствующей симметрии рассматриваемой физической системы). S -коэффициенты формально описывают взаимосвязь расчетных аппаратов группы перестановок и компактных групп.

В настоящее время, несмотря на достижения по всем направлениям теории коэффициентов КГ высших групп, еще не преодолена известная фрагментарность результатов. В ряде работ с прикладной целью вычислены таблицы коэффициентов КГ (факторов) для различных групп. Отметим таблицы изофакторов группы $SU(3)$ ^{112, 162, 163}, численные таблицы ¹⁶⁴, полученные на ЭВМ для коэффициентов КГ при редукции $SU(3) \supset SU(2)$, таблицы изофакторов $SU(4)$ ¹¹⁴, $SU(6)$ ¹¹⁶, таблицы коэффициентов редукции $D(11) \times D(11) \times D(11)$ группы $SU(3)$ ¹⁶⁵, таблицы коэффициентов КГ группы $SO(5)$ ^{132, 138}.

Признавая определенную ценность таблиц (с учетом сформулированных выше ограничений), следует заметить, что сведение факторов коэффициентов КГ высших групп к коэффициентам КГ $SU(2)$ (и их соединениям) делает соответствующие таблицы практически ненужными. Так, сведение ряда изофакторов для группы $SU(3)$ к коэффициентам КГ $SU(2)$ ^{55, 98} делает бесполезной значительную часть таблиц ^{112, 162}. Весьма важным и интересным является аналогичный результат для $SO(5)$ ⁹⁹. Дальнейшая разработка вопросов сведения коэффициентов КГ компактных групп к коэффициентам КГ группы $SU(2)$ позволила бы вместо новых использовать готовые

универсальные таблицы коэффициентов КГ группы $SU(2)$. Методическая важность такого сведения уже отмечалась в п. 12 с точки зрения создания единой теории коэффициентов КГ.

Последняя немаловажна и для теории коэффициентов КГ некомпактных групп. Что же касается физической стороны высших симметрий, то, с одной стороны, претерпевает значительную эволюцию этот круг вопросов (ср. п. 8), с другой — происходит расширение круга физических объектов, к которому применяется теория коэффициентов КГ компактных групп (ср., например, вопросы когерентности¹⁶⁶⁻¹⁶⁸).

Объединенный институт ядерных исследований,
Дубна

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Е. В и г н е р, Теория групп, М., ИЛ, 1961.
2. G. R a s a h, Phys. Rev. 62, 438 (1942).
3. G. R a s a h, Phys. Rev. 63, 367 (1943).
4. G. R a s a h, Phys. Rev. 76, 1352 (1949).
5. A. R. E d m o n d s, Angular Momentum in Quantum Mechanics, Princeton Univ. Press, Princeton, 1957 (см. также: А. Э д м о н д с, в сборнике «Деформации атомных ядер», М., ИЛ, 1958, стр. 305).
6. V. F a n o, G. R a s a h, Irreducible Tensorial Sets, Acad. Press, N.Y., 1959.
7. Г. Я. Л ю б а р с к и й, Теория групп и ее применение в физике, М., Гостехиздат, 1957.
8. А. П. Ю ц и с, И. Б. Л е в и н с о н, В. В. В а н а г а с, Математический аппарат теории момента количества движения, Вильнюс, ГИПНЛ ЛитССР, 1960.
9. А. П. Ю ц и с, А. А. Б а н д з а й т и с, Теория момента количества движения в квантовой механике, Вильнюс, «Минтис», 1965.
10. И. М. Г е л ь ф а н д, Р. А. М и н л о с, З. Я. Ш а п и р о, Представления группы вращений и группы Лоренца, М., Физматгиз, 1958.
11. М. Х а м е р м е ш, Теория групп и ее применение к физическим проблемам, М., «Мир», 1966.
12. T. R e g g e, Nuovo Cimento 10, 544 (1958).
13. J. L. S l a t e r, Generalized Hypergeometric Functions, Cambridge Univ. Press, 1966.
14. W. N. B a i l e y, Generalized Hypergeometric Series, Cambridge Univ. Press, 1935.
15. T. R e g g e, Nuovo Cimento 14, 951 (1959); 18, 947 (1960).
16. Е. К о н д о н, Г. Ш о р т л и, Теория атомных спектров, М., ИЛ, 1949.
17. А. А. Б а н д з а й т и с, А. В. К а р о с е н е, А. Ю. С а в у к и н а с, А. П. Ю ц и с, ДАН СССР 154, 812 (1964).
18. Г. С е г е, Ортогональные многочлены, М., Физматгиз, 1962.
19. Н. Я. В и л е к и н, Специальные функции и теория представлений групп, М., «Наука», 1965.
20. М. Р о у з, Поля мультиполей, М., ИЛ, 1957.
21. S. M. R. A n s a r y, J. Math. Phys. 9, 1295, 1299 (1968).
22. Дж. Р и о р д а н, Введение в комбинаторный анализ, М., ИЛ, 1963.
23. Г. Дж. Р а й з е р, Комбинаторная математика, М., «Мир», 1965.
24. М. Х о л л, Комбинаторный анализ, М., ИЛ, 1963.
25. Н. Н. В о р о б ь е в, Числа Фибоначчи, М., «Наука», 1969.
26. А. О. Г е л ь ф о н д, Исчисление конечных разностей, изд. 3-е, исправл. и дополн., М., «Наука», 1967.
27. C. J o r d a n, Calculus of Finite Differences, Chelsea Publishing Co., N.Y., 1950.
28. S. M. R. A n s a r y, Fortschr. Phys. 15, 707, 729 (1967).
29. S. M. R. A n s a r y, Nuovo Cimento 38, 1883 (1965).
30. Я. А. С м о р о д и н с к и й, Г. И. Ш е л е п е в, ЯФ 13, 441 (1971).
31. M. H u s z a r, Angular Momentum and Unitary Spinor Bases of the Lorentz Group. Preprint JINR No. E2-5429, Dubna, 1970.
32. Я. А. С м о р о д и н с к и й, Доклад на XV Международной конференции по физике высоких энергий Киев, 1970; M. H u s z a r, J. S m o r o d i n s k y, Representations of the Lorentz Group on the Two-Dimensional Complex Sphere and Two-Particle States. Preprint JINR No. E2-5020, Dubna, 1970.
33. Я. А. С м о р о д и н с к и й, М. Х у с а р, ЖТМФ 4, 328 (1970).
34. К. -Н. W a n g, J. Math. Phys. 11, 2077 (1970).

35. Л. А. Шелепин, ЖЭТФ 48, 360 (1965).
36. T. Regge, Nuovo Cimento 11, 116 (1959).
37. H. A. John, K. M. Hawell, Proc. Cambridge Phil. Soc. 55, 338 (1959).
38. Л. А. Шелепин, ЖЭТФ 46, 1033 (1964).
39. E. P. Wigner, Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atomspektren, Friedr. Vieweg, Braunschweig, 1931.
40. Б. Л. Ван-дер-Верден, Метод теории групп в квантовой механике. Харьков, ГНТИ Украины, 1938.
41. S. D. Majumdar, Progr. Theor. Phys. 14, 589 (1955).
42. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра, М., «Наука», 1965.
43. B. M. Minton, J. Math. Phys. 11, 3061 (1978).
44. Л. А. Шелепин, В. П. Карасев, ЯФ 5, 221 (1967).
45. Л. А. Шелепин ЖЭТФ 50, 1666 (1966).
46. A. Giovannini, D. A. Smith, в сборнике «Spectroscopic and Group-theoretical Methods in Physics. Racah Memorial Volume», North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1968.
47. М. Холл, в сборнике «Прикладная комбинаторная математика», М., «Мир», 1968, стр. 203.
48. T. Shimraku, Nuovo Cimento 27, 874 (1963).
49. V. Bargmann, Rev. Mod. Phys. 34, 829 (1962).
50. J. Schwinger, в сборнике «Quantum Theory of Angular Momentum», Acad. Press, N.Y., 1965.
51. A. Bincer, J. Math. Phys. 10, 1835 (1970).
52. G. Flammand, Ann. Inst. H. Poincaré A7, 353 (1967).
53. P. Kramer, T. H. Seligman, Zs. Phys. 219, 105 (1969).
54. T. Shimraku, Progr. Theor. Phys., Suppl. 13, 1 (1960).
55. В. П. Карасев, Л. А. Шелепин, ЯФ 7, 1131 (1968).
56. В. П. Карасев, Л. А. Шелепин, ЯФ 8, 615 (1968).
57. Л. А. Шелепин, ЯФ 4, 1091 (1966).
58. В. В. Ваннагас, И. В. Батарунас, Лит. физ. сб. 2, 75 (1962).
59. Ф. Клейн, Лекции о развитии математики в XIX столетии, М.—Л, ОНТИ, 1937.
60. Г. Вейль, Классические группы, их инварианты и представления, М., ИЛ, 1961.
61. Н. П. Соколов, Пространственные матрицы и их приложения, М., Физматгиз, 1960.
62. Л. А. Шелепин, Nucl. Phys. B2, 608 (1967).
63. N. Cabibbo, Phys. Rev. Lett. 12, 62 (1964).
64. A. S. Eddington, Relativity Theory of Photons and Electrons, Cambridge Univ. Press, 1936; The Philosophy of Physical Science, Cambridge Univ. Press, 1939.
65. С. П. Аллилуев, А. В. Матвеев, в сборнике «Физика высоких энергий и теория элементарных частиц», Киев, «Наукова думка», 1967, стр. 695.
66. C. E. Wulfsman, M. Takahata, J. Chem. Phys. 47, 488 (1967).
67. T. I. Shibuya, C. E. Wulfsman, Amer. J. Phys. 33, 570 (1965).
68. W. Fock, Zs. Phys. 98, 145 (1935).
69. M. Mukunda, L. O'Rai feartaigh, E. C. G. Sudarshan, Phys. Rev. Lett. 15, 1041 (1965).
70. E. C. G. Sudarshan, M. Mukunda, L. O'Rai feartaigh, Phys. Rev. Lett. 19, 322 (1965).
71. В. С. Попов, в сборнике «Физика высоких энергий и теория элементарных частиц», Киев, «Наукова думка», 1967, стр. 702.
72. П. А. Малкин, В. И. Манько, ЯФ 3, 372 (1966).
73. Ю. Нири, Я. А. Смородинский, ЯФ 12, 202 (1970).
74. А. М. Бадалян, Ю. А. Симонов, ЯФ 3, 6 (1966).
75. Ф. Клейн, в сборнике «Об основаниях геометрии», М., Гостехиздат, 1956, стр. 359.
76. Ф. Бахман, Построение геометрии на основе понятия симметрии, М., «Наука», 1969.
77. О. Г. Лисин, Л. А. Шелепин, Графические методы, использующие симметрию Редже. Препринт ФИАН № 125, 1967.
78. Н. А. Глаголев, Пространственная геометрия, М., «Высшая школа», 1963.
79. Р. Хартсхорн, Основы проективной геометрии, М., «Мир», 1970.
80. G. Ronzani, T. Regge, в сборнике «Spectroscopic and Group-theoretical Methods in Physics. Racah Memorial Volume», North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1968.
81. Ф. И. Федоров, ДАН БССР 2, 408 (1958).
82. Ф. И. Федоров, ДАН СССР 193, 56 (1962); ЖМТФ 2, 343 (1970).

83. Л. А. Шелепин, ЯФ 8, 827 (1968).
84. Л. А. Шелепин, ЯФ 11, 912 (1970).
85. Сборник «Гравитация и топология», М., «Мир», 1966.
86. Дж. Вебер, Общая теория относительности и гравитационные волны, М., ИЛ, 1963.
87. Дж. А. Уилер, Гравитация. Нейтрино. Вселенная, М, ИЛ, 1962.
88. L. Van Hove, Phys. Rev. 89, 1189 (1953).
89. J. C. Phillips, Phys. Rev. 104, 1263 (1956).
90. D. Fotiadis, M. Froissart, J. Lascoux, F. Pham, Topology 4, 159 (1965).
91. Р. Хуа, В. Теплиц, Гомология и фейнмановские интегралы, М., «Мир», 1969.
92. Ф. Фам, Введение в топологическое исследование особенности Ландау, М., «Мир», 1970.
93. Л. С. Понтрягин, Основы комбинаторной топологии, М., Гостехиздат, 1947.
94. П. С. Александров, Комбинаторная топология, М., Гостехиздат, 1947.
95. П. Хилтон, С. Уайли, Теория гомологий. Введение в алгебраическую топологию, М., «Мир», 1966.
96. Н. Стиррод, С. Эйленбергер, Основания алгебраической топологии, М., Физматгиз, 1958.
97. Н. Джекобсон, Алгебры Ли, М., «Мир», 1964.
98. А. П. Юцис, С. И. Алишаускас, ДАН СССР 177, 61 (1967).
99. С. И. Алишаускас, А. П. Юцис, J. Math. Phys. 10, 2227 (1969).
100. В. П. Карасев, Л. А. Шелепин, О высших симметриях сложных физических систем, Препринт ФИАН № 33, 1969.
101. J. R. Deroome, G. Jakimov, Canad. J. Phys. 48, 2169 (1970).
102. G. Racah, Group Theory and Spectroscopy, Princeton, N. J., 1951 (см. переиздание: Preprint JINR No. P-1864, Dubna, 1964).
103. Н. Джекобсон, Алгебры Ли, М., «Мир», 1964.
104. Е. Б. Дынкин, А. Л. Онищук, УМН 10 (4), 3 (1955).
105. Д. П. Желобенко, Компактные группы Ли и их представления, М., «Наука», 1970.
106. Сборник «Теория групп и элементарные частицы», М., «Мир», 1967.
107. R. E. Behrends, J. Dreitlein, C. Fronsdal, W. Lee, Rev. Mod. Phys. 34, 1 (1962).
108. L. C. Biedenharn, J. Math. Phys. 4, 436 (1963).
109. G. E. Baird, L. C. Biedenharn, J. Math. Phys. 4, 1449 (1963); 5, 1723, 1730 (1964).
110. И. М. Гельфанд, М. Л. Цейтлин, ДАН СССР 71, 825, 1017 (1950).
111. А. М. Переломов, В. С. Попов, ЯФ 3, 924, 1127 (1966).
112. J. J. de Swart, Rev. Mod. Phys. 35, 916 (1963) (см. перевод: УФН 84, 651 (1964)).
113. D. L. Pursey, Proc. Roy. Soc. A275, 284 (1963).
114. K. T. Hecht, Sing Chin Pang, J. Math. Phys. 10, 1571 (1969).
115. R. H. Capps, Phys. Rev. Lett. 14, 31 (1965).
116. C. L. Cook, G. Murtaza, Nuovo Cimento 39, 531 (1965).
117. H. Bacry, J. Nuyts, L. Van Hove, Nuovo Cimento 35, 510 (1965).
118. Б. Ф. Струминский, ЯФ 1, 701 (1965).
119. J. Patera, J. Math. Phys. 11, 3027 (1970).
120. H. T. Wadziński, Nuovo Cimento B65, 247 (1969).
121. N. Kemmer, D. L. Pursey, S. A. Williams, J. Math. Phys. 9, 1224 (1968).
122. S. A. Williams, D. L. Pursey, J. Math. Phys. 9, 1230 (1968).
123. M. Moshinsky, Rev. Mod. Phys. 34, 813 (1962).
124. K. T. Hecht, Nucl. Phys. 62, 1 (1965).
125. J. K. Kuriyan, D. Lurie, A. J. Macfarlane, J. Math. Phys. 6, 722 (1965).
126. N. Mukunda, L. K. Pandit, J. Math. Phys. 6, 746 (1965).
127. J. C. Carter, J. J. Coyne, J. Math. Phys. 10, 1024 (1969).
128. J. C. Carter, J. J. Coyne, S. Meshkov, Phys. Rev. Lett. 14, 523 (1965).
129. L. Schulze, Zs. Phys. 183, 424 (1965).
130. G. E. Baird, L. C. Biedenharn, J. Math. Phys. 5, 1730 (1964).
131. L. C. Biedenharn, A. Giovannini, J. D. Louck, J. Math. Phys. 8, 691 (1967).
132. K. T. Hecht, Nucl. Phys. 63, 177 (1965).
133. И. М. Лизин, Л. А. Шелепин, Полные группы $O(5)$, $O(4,1)$ и $O(3,2)$. Общая методика вычисления коэффициентов Клебша — Гордана конечномерных представлений, Препринт ФИАН № 76, 1970.
134. W. J. Holman III, J. Math. Phys. 10, 1710 (1969); Nuovo Cimento A66, 619 (1970).

135. Hou Pei Yu, *Scientia Sinica* **14**, 367 (1965).
136. D. Klei ma, *Nucl. Phys.* **70**, 577 (1965).
137. G. Ponzano, *Nuovo Cimento* **A41**, 142 (1966).
138. R. T. Sharp, H. von Bayer, *J. Math. Phys.* **7**, 1105 (1966).
139. G. Jakimov, R. T. Sharp, *Canad. J. Phys.* **47**, 2137 (1969).
140. J. C. Parikh, *Nucl. Phys.* **63**, 214 (1965).
141. R. T. Sharp, S. C. Pierer, *J. Math. Phys.* **9**, 663 (1968).
142. K. Ahmed, R. T. Sharp, *J. Math. Phys.* **11**, 1112 (1970).
143. M. K. E. Wong, *J. Math. Phys.* **8**, 1899 (1967); **10**, 1065 (1969).
144. S. C. Pang, K. T. Hecht, *J. Math. Phys.* **8**, 1233 (1967).
145. J. A. C. Alkara, P. L. Ferreira, *J. Math. Phys.* **6**, 578 (1965).
146. R. T. Sharp, *Nucl. Phys.* **A95**, 222 (1967); *Nuovo Cimento* **A47**, 860 (1967).
147. C. K. Chew, R. T. Sharp, *Nucl. Phys.* **B2**, 697 (1967).
148. R. M. Asherova, Yu. F. Smirnov, *Nucl. Phys.* **B4**, 399 (1968).
149. S. D. Majumdar, *Progr. Theor. Phys.* **38**, 1176 (1967); **41**, 1386; **42**, 1475 (1969).
150. H. C. von Baeyer, R. T. Sharp, *Nucl. Phys.* **A140**, 118 (1970).
151. J.-R. Dego me, *J. Math. Phys.* **7**, 612 (1966); **8**, 714 (1967).
152. В. Г. Неудачин, Ю. Ф. Смирнов, *Нуклонные ассоциации в легких ядрах*, М., «Наука», 1969.
153. И. Г. Каплан, *Симметрия многоэлектронных систем*, М., «Наука», 1969.
154. Б. Ф. Бейман, *Лекции по применению теории групп в ядерной спектроскопии*, М., Физматгиз, 1961.
155. И. И. Соболевман, *Введение в теорию атомных спектров*, М., Физматгиз, 1963.
156. В. В. Ванагас, *Алгебраические методы в теории ядра*, Вильнюс, «Минтис», 1971.
157. D. L. Littlewood, *Phil. Trans. Roy. Soc.* **A239**, 305 (1944); *The Theory of Group Characters and Matrix Representation of Groups*, Clarendon Press, Oxford, 1950.
158. P. R. Smith, B. G. Wubourne, *J. Math. Phys.* **8**, 2434 (1967); **9**, 1040 (1968).
159. Б. Джадд, *Вторичное квантование и атомная спектроскопия*, М., «Мир», 1970.
160. В. В. Ванагас, *Лит. физ. сб.* **10**, 311 (1970).
161. А. А. Юцис, *Лит. физ. сб.* **8**, 597 (1968); **9**, 629 (1969); **10**, 5 (1970).
162. P. McNamara, S. J. Chilton, F. Chilton, *Rev. Mod. Phys.* **36**, 1005 (1964).
163. L. K. Pandit, N. Mukunda, *Algebraic Tabulation of the Clebsch—Gordan Coefficients for Reduction of the Product $(\lambda\mu) \otimes (30)$ of Irreducible Representation of $SU(3)$* . Preprint, Rochester, January 1965.
164. C. K. Chew, H. C. von Baeyer, *Nuovo Cimento* **A56**, 53 (1968).
165. Y. Dathan, H. Nagari, *Suppl. Nuovo Cimento* **3**, 118 (1965).
166. Л. А. Шелепин, *ЖЭТФ* **54**, 1463 (1968).
167. Э. Ш. Теплицкий, *ЖТМФ* **2**, 399 (1970).
168. Т. М. Махвиладзе, Л. А. Шелепин, *Когерентные состояния систем с фиксированным числом частиц*. Препринт ФИАН № 55, 1971.