

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

537.311.33

ГОРЯЧИЕ ЭЛЕКТРОНЫ ПОЛУПРОВОДНИКОВ В КВАНТУЮЩЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

А. М. Злобин, П. С. Зырянов

I. Введение		353
II. Разогрев электронов в скрещенных электрическом и квантующем магнитном полях		355
III. Разогрев электронов в параллельных сильном электрическом и квантующем магнитном полях		373
Приложение		375
Цитированная литература		376

I. ВВЕДЕНИЕ

Сильные электрические поля обуславливают самые разнообразные явления в полупроводниках. Они вызывают качественные изменения квантовых состояний носителей тока и их энергетического спектра. Это приводит к зависимости макроскопических свойств полупроводников от приложенного поля E . Примерами таких явлений могут служить: зависимость комплексной диэлектрической проницаемости от E , возникающая из-за возможности собственного поглощения фотонов с энергией, меньшей ширины запрещенной зоны (эффект Франца — Келдыша), туннельный ток в вырожденном p — n -переходе (эффект Есаки) и др.

С помощью сильных электрических полей можно приводить полупроводники в состояния, далекие от термодинамического равновесия. Такие состояния возникают при усилении и генерации звука дрейфом носителей тока как в пьезо-, так и в непьезоэлектронных полупроводниках. Обзору работ по этим вопросам посвящены статьи Гуревича ¹ и Пустовойта ².

Другим примером неравновесных состояний являются «горячие» электроны в полупроводниках. Так по предложению Шокли ³ называют неравновесное состояние носителей тока в полупроводнике, средняя кинетическая энергия которых увеличена внешним электрическим полем и характеризуется эффективной температурой $T_e(E)$, превосходящей температуру кристаллической решетки T . Такой разогрев носителей тока электрическим полем приводит к существенному изменению многих физических свойств полупроводников и возникновению новых, в частности, к зависимости электропроводности от электрического поля, нелинейным гальваномагнитным явлениям, к «S»-образным и «N»-образным вольт-амперным характеристикам и связанным с ними различным неустойчивостям. Обзор экспериментальных и теоретических работ по горячим электронам можно найти в монографии Конуэлл ⁴, дополненной редакторами русского перевода многочисленными примечаниями и ссылками на новые результаты. Физические явления, возникающие в полупроводниках

с «S»-образными и «N»-образными вольт-амперными характеристиками, подробно рассмотрены в обзорной статье Волкова и Когана⁵.

Успехи, достигнутые в создании сильных магнитных полей, позволили приступить к экспериментальному исследованию горячих электронов в условиях квантования их орбитального движения. Магнитные поля, в которых квантуется орбитальное движение носителей, обычно называют квантующими. Такие поля существенно изменяют энергетический спектр носителей тока, создают дискретные энергетические уровни (уровни Ландау). Это в свою очередь приводит к зависимости от магнитного поля скорости релаксационных процессов в электронной и фононной подсистемах полупроводника. Таким образом, в распоряжении экспериментаторов наряду с температурой появляется новый макроскопический параметр (квантующее магнитное поле), с помощью которого можно «управлять» характерными частотами релаксации в системе, изменяя соотношение между ними.

Прежде всего необходимо отметить, что квантующее магнитное поле резко уменьшает отношение частоты межэлектронных столкновений ν_{ee} к частоте электрон-фононных столкновений ν_{ep} . Это происходит потому, что при невырожденной статистике электронов они заполняют преимущественно наинизший уровень Ландау, тогда как все прочие уровни содержат экспоненциально малое число электронов (предполагается, что энергия циклотронного кванта носителя $\hbar\Omega \gg T_e$).

В такой ситуации частота столкновений между электронами, квантовые состояния которых принадлежат различным уровням Ландау, становится экспоненциально малой. Столкновения между электронами основной группы, находящимися на наинизшем уровне Ландау, вследствие одномерности движения становятся упругими, не изменяющими состояние системы, и, конечно, не могут вносить вклад в межэлектронную релаксацию.

С другой стороны, частота релаксации электронов на фононах, будучи пропорциональной произведению объема фазового пространства импульсов фононов, взаимодействующих с электронами, и плотности электронных состояний, возрастает как квадрат напряженности магнитного поля (если отвлечься от квантовых осцилляций). Поэтому, в отличие от классического случая, в квантующем магнитном поле отношение

$$\frac{\nu_{ee}}{\nu_{ep}} \sim \left(\frac{T_e}{\hbar\Omega} \right)^2 \exp \left(- \frac{\hbar\Omega}{T_e} \right).$$

Подавление межэлектронного рассеяния квантующим магнитным полем сильно снижает эффективность перераспределения электронов по квантовым состояниям, что приводит к существенному изменению самого вида функции распределения носителей.

Квантующее магнитное поле оказывает немалое влияние и на частоту релаксации длинноволновых фононов (τ_{pe}^{-1}) с импульсами $\hbar q \lesssim \hbar\lambda^{-1} = \hbar q_B < \frac{T}{s} = \hbar q_T$ ($\lambda = \left(\frac{ch}{e|B} \right)^{1/2}$ — магнитная длина или квантовый радиус Лармора, s — скорость звука) на электронах. Только такие фононы и могут согласно закону сохранения импульса взаимодействовать с электронами. Длинноволновые фононы могут релаксировать с характерной частотой τ_{pp}^{-1} также и на коротковолновых тепловых фононах с импульсом $\frac{T}{s}$. С помощью квантующего магнитного поля можно изменять соотношение между τ_{pe}^{-1} и τ_{pp}^{-1} , что позволяет исследовать частоту фонон-фононной релаксации τ_{pp}^{-1} . Действительно, при $\tau_{pe}^{-1} \gg \tau_{pp}^{-1}$ в релаксации энергии горячих электронов «узким каналом» (с сечением, пропорциональным τ_{pp}^{-1})

будет передача энергии от длинноволновых фононов к коротковолновым фононам (термостату). Наконец, в случае сверхсильных магнитных полей $q_B > q_T$ энергия горячих электронов может передаваться сначала неравновесным фононам, а от них при столкновениях с границами образца — окружающей среде (термостату, в котором находится весь образец). С помощью таких магнитных полей можно исследовать частоту релаксации энергии фононов на границах образца.

Таким образом, воздействуя на релаксационные процессы, квантующее магнитное поле существенно изменяет условия разогрева электронов и возникновения перегревных неустойчивостей.

В настоящем обзоре рассматриваются работы, относящиеся к этому кругу вопросов *).

II. РАЗОГРЕВ ЭЛЕКТРОНОВ В СКРЕЩЕННЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ И КВАНТУЮЩЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЯХ

1. Качественные оценки разогрева электронов

Основные приближения теории горячих электронов можно выяснить с помощью качественных оценок, опирающихся на законы сохранения энергии и импульса.

Будем считать выполненным неравенство $\Omega\tau_p \gg 1$ (Ω — циклотронная частота, τ_p — время релаксации импульса). Внешнее электрическое поле E , приложенное перпендикулярно к магнитному полю B , в единицу времени совершает над электронами работу $\frac{e^2 n_e}{m(\Omega\tau_p)^2} \tau_p E^2$ (n_e — концентрация электронов, m — эффективная масса электрона). Холловское поле пока предполагаем равным нулю.

Баланс энергии имеет вид

$$\frac{e^2 n_e}{m(\Omega\tau_p)^2} \tau_p E^2 = \frac{(\varepsilon^* - \bar{\varepsilon}) n_e}{\tau_e}, \quad (1,1)$$

где $\bar{\varepsilon}$ и ε^* — равновесная и неравновесная средние энергии электрона, τ_e — время релаксации энергии.

Из (1,1) следует, что

$$\varepsilon^* = \bar{\varepsilon} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{eER_L}{\bar{\varepsilon}} \right)^2 \delta^{-1} \right], \quad \delta = \frac{\tau_p}{\tau_e}. \quad (1,2)$$

В отсутствие магнитного поля выражение для энергии горячих электронов имеет такой же вид, но вместо радиуса Лармора R_L выступает длина свободного пробега.

В квантующем магнитном поле при $\bar{\varepsilon} \ll \hbar\Omega$ (квантовый предел) вместо R_L следует использовать магнитную длину $\lambda = \left(\frac{c\hbar}{|e|B} \right)^{1/2}$ (или квантовый радиус Лармора) и необходимо учесть зависимость параметра неупругости δ от B . Если рассеяние электронов квазиупруго, т. е. $\delta^{-1}(B)$ велико, разогрев может быть сильным даже при малом параметре $\frac{eE\lambda}{\bar{\varepsilon}}$. Оценим $\delta(B)$ пока в предположении, что как энергия, так и импульс релаксируют при электрон-фононных столкновениях. По порядку величины $\delta(B)$ равно отношению энергии, передаваемой электроном решетке при одном

*) Мы не останавливаемся на обзоре первых теоретических исследований⁶⁻⁹, в которых было предсказано уменьшение длины свободного пробега носителей при их разогреве. Это предсказание было подтверждено экспериментально в более поздних работах¹⁰⁻¹². Роль межэлектронного рассеяния исследовалась в работах¹³⁻¹⁵.

столкновении, к характерной энергии электрона. Вероятность излучения фонона с импульсом $\hbar q$ и частотой ω_q в единицу времени пропорциональна $(1 + N_q)$, а поглощения — N_q . Полное число столкновений электрона с фононами $\sim 1 + 2N_q$. Энергия, передаваемая решетке за одно столкновение, $\Delta \varepsilon \sim [(1 + N_q) - N_q] \hbar \omega_q (1 + 2N_q)^{-1}$. Электроны взаимодействуют с фононами, импульсы которых $\hbar q \sim \hbar \lambda^{-1}$. При не слишком низких температурах $N_q \approx \frac{T}{\hbar s \lambda^{-1}} (s — \text{скорость звука, } T — \text{температура решетки})$. Учитывая эти оценки, для коэффициента неупругости находим

$$\delta \sim \frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon} = \frac{\hbar s \lambda^{-1}}{T} \frac{\hbar s \lambda^{-1}}{\varepsilon} = \frac{(\hbar s)^2}{(T \lambda)^2} = \left(\frac{\hbar \omega_q}{T} \right)^2 \ll 1. \quad (1,3)$$

Из этой формулы следует, что в широком интервале температур и напряженностей магнитного поля рассеяние электронов на фононах является квазиупругим. Подставляя (1,3) в (1,2), получаем оценку для температуры горячих электронов

$$T_e = T \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{cE}{sB} \right)^2 \right]. \quad (1,4)$$

Если существенно также и упругое электрон-примесное рассеяние, то

$$\delta \sim \left(\frac{\hbar \omega_q}{T} \right)^2 \left(\frac{v_{ep}}{v_{ep} + v_{ei}} \right), \quad (1,5)$$

где v_{ep} и v_{ei} — частоты релаксации импульса на фононах и примесях соответственно, а формула (1,4) заменится следующей:

$$T_e = T \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{cE}{sB} \right)^2 [1 + (v_{ei}/v_{ep})] \right\}. \quad (1,6)$$

Выражения для электронной температуры такого типа были впервые получены Казариновым и Скобовым¹⁶.

В экспериментах по горячим электронам часто используются условия, в которых отсутствует ток в холловском направлении ($I_y = 0$), но холловское поле $E_y \neq 0$. Все изложенные выше рассуждения нетрудно обобщить и на этот случай. Для этой цели джоулеву мощность горячих электронов $I_x E_x$, используя условие $I_y = \sigma_{xx} E_y + \sigma_{yx} E_x = 0$, представим в виде

$$I_x E_x = \left[1 + \left(\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}(T_e)} \right)^2 \right] \sigma_{xx}(T_e) E_x^2. \quad (1,7)$$

Из этой формулы следует, что учет холловского поля в (1,6) можно осуществить простой заменой E^2 на $\left[1 + \left(\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}(T_e)} \right)^2 \right] E_x^2$. Тогда получим следующее соотношение:

$$T_e = T \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{cE_x}{sB} \right)^2 \left[1 + \left(\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}(T_e)} \right)^2 \right] \left(1 + \frac{v_{ei}}{v_{ep}} \right) \right\}. \quad (1,8)$$

Это уравнение, определяющее T_e через T , B и E , не всегда может иметь вещественные положительные решения для T_e . Это прежде всего зависит от механизмов релаксации носителей тока, определяющих зависимость σ_{xx} от T_e . Так, например, если в σ_{xx} основной вклад вносят упругие процессы рассеяния на нейтральной примеси, то $\sigma_{xx} \sim T_e^{-3/2}$. Поэтому джоулева мощность при разогреве согласно (1,7) растет пропорционально $T_e^{3/2}$, тогда как мощность P , передаваемая электронами фононам, убывает

с ростом T_e . Поэтому в полях E_x , превосходящих некоторое критическое значение $E_{кр}$, баланс энергии невозможен. Система теряет устойчивость при разогреве, который снимает орбитальное квантование электронов магнитным полем и переводит электроны в классическую область ($\hbar\Omega < T_e$), где уже другие зависимости $I_x E_x$ и P от T_e обеспечивают устойчивое стационарное состояние. Вольт-амперная характеристика в этой ситуации имеет так называемый «S»-образный характер.

Если же холловское поле $E_y = 0$, эффективная электронная температура выражается формулой (1,6) сразу через T , B и E_x . Подставляя это выражение в $\sigma_{xx} \sim (T/T_e)^{3/2}$, нетрудно убедиться в том, что вольт-амперная характеристика сначала (в омической области) линейная, затем достигает максимума и начинает падать. Однако в сильных электрических полях, когда уже разогрев снимает квантование ($\hbar\Omega < T_e$), падение вольт-амперной характеристики сменяется ее подъемом. Таким образом, вольт-амперная характеристика является «N»-образной^{16, 17}.

В квантовой области, используя малость параметров $\left(\frac{eE\lambda}{\varepsilon}\right)$ и $(\Omega\tau_p)^{-1}$, можно установить соотношение между диагональными \bar{f} и недиагональными \tilde{f} в представлении Ландау элементами матрицы плотности:

$$\tilde{f} \sim \left(\frac{eE\lambda}{\varepsilon}\right) \left\{1 + \left(\frac{1}{\Omega\tau}\right) + \dots\right\} \bar{f}.$$

Диагональный элемент матрицы плотности \bar{f} , так же как симметричная часть функции распределения в классическом случае, вкладывает в потоки заряда и энергии не вносит. Эти потоки полностью определяются недиагональным элементом \tilde{f} , квантовым аналогом несимметричной части классической функции распределения. Поскольку $\tilde{f} \ll \bar{f}$, связь между \tilde{f} и \bar{f} такая же, как и в линейной квантовой теории переноса. Принципиальное отличие теории, учитывающей разогрев электронов, от линейной теории заключается в зависимости \bar{f} от электрического поля через T_e . Именно поэтому джоулеву мощность можно представить в виде (1,7) с σ_{xx} , зависящей от T_e . В линейной же теории \bar{f} является термодинамически равновесной матрицей плотности.

В основе изложенного анализа разогрева электронов сильным электрическим полем лежит предположение о возможности введения понятия эффективной электронной температуры T_e . В связи с этим важным является исследование эффективности межэлектронного рассеяния. Из общих соображений ясно, что с увеличением концентрации электронов частота межэлектронных столкновений возрастает и может превысить частоту столкновений электронов с фононами. Энергия, получаемая электронами от внешнего электрического поля, благодаря большой частоте межэлектронных столкновений быстро перераспределяется между ними. Из-за медленной передачи энергии от электронов к фононам (решетке) возникает разогрев электронной системы. Поскольку дрейфовый импульс электронов релаксирует обычно значительно быстрее, чем их энергия, частые межэлектронные столкновения в этих условиях обеспечивают максвелловскую форму функции распределения, но с эффективной электронной температурой T_e , вообще говоря, отличающейся от температуры решетки.

Для последовательного изучения случаев высоких и низких концентраций необходимо установить прежде всего количественный критерий, разграничивающий эти два случая. Решение такого рода задачи сводится к оценке эффективных частот электрон-фоонных и электрон-электронных столкновений.

2. Характерные частоты столкновений электронов друг с другом и с фононами

В классической (неквантовой) теории, исходя из анализа интегралов столкновений электронов друг с другом и с фононами, вводится понятие критической концентрации электронов $n_{кр}$ ¹⁸, при которой частоты межэлектронных и электрон-фоонных столкновений одинаковы. Последовательное рассмотрение этого вопроса на основе уравнения Больцмана изложено в работе Дыкмана и Томчука^{15а}. Согласно этой работе

$$n_{кр} = ms^2 T_e^3 \left[4\pi e^4 l_{ep} T \ln \left(\frac{r_D}{b} \right) \right]^{-1}, \quad (2,1)$$

где $l_{ep} = \pi \rho_0 \hbar^4 s^2 (C_0^2 m^2 T)^{-1}$ — длина свободного пробега электрона при рассеянии на фононах в отсутствие магнитного поля, ρ_0 — плотность, C_0 — постоянная деформационного потенциала, $b \sim \frac{e^2}{T_e}$ — минимальный прицельный параметр — расстояние, на котором кинетическая энергия сталкивающихся электронов сравнима с энергией взаимодействия между ними; $r_D = \left(\frac{T_e}{4\pi n_e e^2} \right)^{1/2}$ — дебаевский радиус. При концентрациях $n > n_{кр}$ межэлектронные столкновения доминируют над электрон-фоонными и можно вводить понятие эффективной электронной температуры.

Квантующее магнитное поле подавляет роль межэлектронных столкновений и приводит к резкому смещению $n_{кр}$ в область высоких концентраций электронов¹⁹. Из формулы (П, 1) следует, что столкновения электронов, принадлежащих одному уровню Ландау, не сопровождающиеся переходом на другие уровни, не влияют на функцию распределения, поскольку обращают в нуль интеграл столкновений при любой зависимости $f_{n\nu}$ от p_z^2 . Причина этого заключается в том, что межэлектронное рассеяние на одном уровне Ландау ($n_{\nu'} = n_{\mu'} = n_{\nu} = n_{\mu}$) является одномерным и упругим, поэтому не изменяет микроскопического состояния электронной системы. Отличный от нуля вклад в интеграл межэлектронных столкновений могут дать лишь столкновения электронов, принадлежащих различным уровням Ландау. Если $\hbar \Omega \gg \epsilon$, то существенны лишь низкие уровни Ландау с $n = 0, 1$. Легко непосредственно убедиться в том, что основной вклад в интеграл столкновений $I_{\nu\nu}^{ee}(f)$ дают лишь члены с $n_{\nu} = n_{\nu'} = 0$, $n_{\mu} = n_{\mu'} = 1$. Все остальные слагаемые, кроме указанных, вносят экспоненциально малый вклад либо в силу больших значений n (когда $n_{\nu'} + n_{\mu'} - n_{\nu} - n_{\mu} = 0$, $p_z \sim \sqrt{mT_e}$), либо из-за большой величины k_z , необходимой для переброса частицы на вышележащие уровни Ландау (когда $n_{\nu'} + n_{\mu'} - n_{\nu} - n_{\mu} \neq 0$). Благодаря бесконечному радиусу кулоновских взаимодействий становятся существенными столкновения с малой передачей импульса $\hbar k_z$. Поэтому $I_{\nu\nu}^{ee}(f)$ можно разложить в ряд по $\hbar k_z/p_z$. Старшие члены этого разложения имеют вид¹⁹

$$I_{\nu\nu}^{ee}(f) \simeq \frac{me^4}{\pi \hbar \lambda^2} \ln \left(\frac{r_D^2}{\gamma_0 \lambda^2} \right) \frac{d}{dp_z} \left(f_1 \frac{df_0}{dp_z} - f_0 \frac{df_1}{dp_z} \right) \quad (2,2)$$

($\gamma_0 = 1,781$ — постоянная Эйлера).

При получении формулы (2,2) не учитывались эффекты излучения и поглощения квантов плазменных колебаний — плазмонов. Это приближение соответствует пренебрежению частотной дисперсией продольной диэлектрической проницаемости. Предполагалось также, что $\lambda/r_D \ll 1$.

Перейдем в (2,2) к безразмерным переменным с помощью соотношений

$$x = \frac{p_z}{\sqrt{2mT_e}}, \quad \Psi_n(x) = \frac{2}{(2\pi\lambda)^2 \hbar} \sqrt{2mT_e} f_n(p_z) \frac{1}{n_0(n)}, \quad (2,3)$$

$$n_0(n) = n_0 \exp(-n\hbar\Omega/T_e),$$

где n_0 — плотность электронов на уровне Ландау $n = 0$, равная при достаточно больших значениях $\frac{\hbar\Omega}{T_e}$ практически концентрации электронов n_e ; T_e — формально введенный параметр, который при концентрациях электронов больше $n_{кр}$ переходит в эффективную электронную температуру. Функция $\Psi_n(x)$ подчинена условию нормировки

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \Psi_n(x) = 1. \quad (2,4)$$

В безразмерных переменных формула (2,2) принимает вид

$$I_{vv}^{ee}(f) \simeq \tilde{v}_{ee} \frac{d}{dx} \left\{ \Psi_1(x) \frac{d\Psi_0(x)}{dx} - \Psi_0(x) \frac{d\Psi_1(x)}{dx} \right\}; \quad (2,5)$$

здесь

$$\tilde{v}_{ee} = \frac{2\pi m n_e e^4}{(2mT_e)^{3/2}} \ln\left(\frac{r_D^2}{\gamma_0 \lambda^2}\right) \exp\left(-\frac{\hbar\Omega}{T_e}\right). \quad (2,6)$$

Перейдем к рассмотрению интеграла столкновений электронов с фононами $I_{vv}^{ep}(f)$. При не слишком низких температурах решетки, когда столкновения электронов с фононами являются квазиупругими, выступает малый параметр $\hbar s/\lambda T = (ms^2/T)^{1/2} (\hbar\Omega/T)^{1/2} \ll 1$. Интеграл столкновений (см. П,2) можно разложить в ряд по этому параметру. Если электрическое поле слабое и не сказывается на энергетическом спектре электронов, то такое разложение имеет вид

$$I_{n\nu}^{ep}(f) = \frac{2\pi^2 \hbar^3 s^2}{m l_{ep}} \varepsilon \sum_{n'} g_{n'}(\varepsilon) \left\{ \frac{d^2 f_{n'}(\varepsilon)}{d\varepsilon^2} + \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{\varepsilon - \hbar\Omega \left(n' + \frac{1}{2}\right)} \right) \frac{d f_{n'}(\varepsilon)}{d\varepsilon} - \right. \\ \left. - \frac{f_{n'}(\varepsilon) + f_n(\varepsilon)}{2T \left[\varepsilon - \hbar\Omega \left(n' + \frac{1}{2}\right) \right]} + \frac{f_{n'}(\varepsilon) - f_n(\varepsilon)}{2ms^2\varepsilon} \right\}, \quad (2,7)$$

где $\varepsilon = \varepsilon_{np_z} = \hbar\Omega \left(n + \frac{1}{2}\right) + p_z^2/2m$, $g_n(\varepsilon) = \frac{2\sqrt{2m}}{(2\pi\lambda)^2 \hbar} \left[\varepsilon - \hbar\Omega \left(n + \frac{1}{2}\right) \right]^{-1/2}$ — плотность состояний с энергией ε , соответствующая квантовому числу n .

Переходя здесь, так же как и в (2,2), к безразмерным переменным (2,3), находим для квантового предела следующую формулу:

$$I_{vv}^{ep}(f) = \tilde{v}_{ep} \frac{d}{dx} \left\{ \frac{1}{x^2} \left[1 + \frac{T}{2T_e} \frac{d}{dx} \right] \Psi_0(x) \right\}, \quad (2,8)$$

где

$$\tilde{v}_{ep} = \frac{s^2}{l_{ep} T} (2mT_e)^{1/2} \left(\frac{\hbar\Omega}{2T_e} \right)^2. \quad (2,9)$$

Коэффициенты \tilde{v}_{ee} и \tilde{v}_{ep} в (2,5) и (2,8) являются характерными частотами столкновений электронов с электронами и электронов с фононами. Критическую концентрацию электронов находим из равенства $\tilde{v}_{ee} = \tilde{v}_{ep}$. Результат имеет вид ¹⁹

$$n_{кр} = n_{кр}^{кл} \left(\frac{\hbar\Omega}{T_e} \right)^2 \exp\left(\frac{\hbar\Omega}{T_e}\right) \frac{\ln(r_D^2/b^2)}{\ln(r_D^2/\gamma_0 \lambda^2)}. \quad (2,10)$$

3. Высокая концентрация электронов

Кинетическое уравнение, определяющее диагональный элемент матрицы плотности, имеет (см. приложение) следующий вид:

$$I_{\bar{\kappa}\bar{\kappa}}^{ee}(f) + I_{\bar{\kappa}\bar{\kappa}}^{ep}(f) + I_{\bar{\kappa}\bar{\kappa}}^{ei}(f) = 0 \quad (3,1)$$

($\bar{\kappa} \equiv (n^{\kappa}, p_z^{\kappa})$). В случае высоких концентраций электронов $n_e > n_{кр}$ (2,10) межэлектронные столкновения являются доминирующими, поэтому в (3,1) можно пренебречь слагаемыми ($I_{\bar{\kappa}\bar{\kappa}}^{ep}(f) + I_{\bar{\kappa}\bar{\kappa}}^{ei}(f)$) в сравнении с $I_{\bar{\kappa}\bar{\kappa}}^{ee}(f)$. Асимптотическое решение (3,1), соответствующее пространственно-однородному распределению, можно представить в следующем виде:

$$f_{\bar{\kappa}}(T_e) = \exp \left\{ (\zeta - E(\bar{\kappa})) \frac{1}{T_e} \right\}, \quad (3,2)$$

где T_e — эффективная температура горячих электронов. Подставляя найденное решение (3,2) в отброшенную часть уравнения (3,1), приходим к соотношению

$$I_{\bar{\kappa}\bar{\kappa}}^{ep}[f(T_e)] + I_{\bar{\kappa}\bar{\kappa}}^{ei}[f(T_e)] = 0, \quad (3,3)$$

с помощью которого можно выразить T_e через напряженность электрического поля E . Действительно, умножая (3,3) на $E(\bar{\kappa})$ и суммируя по $\bar{\kappa}$, находим уравнение баланса энергии в следующем виде^{29,21,67}:

$$I_x E_x = P, \quad (3,4)$$

где

$$P = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{(q, \kappa, \nu)} \hbar \omega_q |A(q, \bar{\kappa}, \bar{\nu})|^2 \delta(E(\bar{\nu}) - E(\bar{\kappa}) + \hbar \omega_q + eE\lambda^2 q_y) \{f_{\bar{\kappa}}(T_e) - f_{\bar{\nu}}(T_e)\} \left\{ N_q \left(\frac{\hbar \omega_q + e\lambda^2 E q_y}{T_e} \right) - N_q \left(\frac{\hbar \omega_q}{T} \right) \right\} \quad (3,5)$$

— мощность, передаваемая электронами решетке, а дрейфовая мощность

$$(IE) = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{(q, \kappa, \nu)} -e\lambda^2 E q_y |A(q, \kappa, \nu)|^2 \delta\{E(\bar{\kappa}) - E(\bar{\nu}) - \hbar \omega_q - eE\lambda^2 q_y\} \times \\ \times \{f_{\bar{\kappa}}(T_e) - f_{\bar{\nu}}(T_e)\} \left\{ N_q \left(\frac{\hbar \omega_q + eE\lambda^2 q_y}{T_e} \right) - N_q \left(\frac{\hbar \omega_q}{T} \right) \right\} + \\ + \frac{2\pi}{\hbar} N_i \sum_{(q, \kappa, \nu)} -\frac{1}{2} e\lambda^2 E q_y |V_i(q, \kappa, \nu)|^2 \delta\{E(\bar{\kappa}) - E(\bar{\nu}) - eE\lambda^2 q_y\} \times \\ \times [f_{\bar{\kappa}}(T_e) - f_{\bar{\nu}}(T_e)]; \quad (3,6)$$

$N_q \left(\frac{\hbar \omega_q}{T} \right)$ — функция распределения Планка, N_i — концентрация примесей. Следующее отсюда выражение для электропроводности σ_{xx} было получено Калашниковым и Поморцевым²¹, а позже Калецки²², Елесиным²³, Буддом²⁴. Для примесного рассеяния оно фактически содержится в работе Адамса и Холстейна²⁵. При $eE\lambda/T_e \ll 1$ это выражение переходит в известную формулу Титейки в двух случаях. Первый из них соответствует изотермической системе $T_e = T$, второй — квазиупругому рассеянию ($\hbar s/\lambda T) < 1$ горячих электронов ($T_e \neq T$) на фононах.

Отметим, что уравнения (3,5), (3,6) сохраняют свой вид и в случае вырожденных носителей, только $f_{\bar{\nu}}(T_e)$ надо всюду считать функцией Ферми.

Здесь уместно обсудить вопрос о роли слагаемого $e\lambda^2 E q_y$ в аргументе функции δ . Как известно²⁶ из линейной теории переноса, при упругом

рассеянии электронов на примеси в борновском приближении возникает логарифмическая расходимость в σ_{xx} . Устранение этой расходимости достигается учетом уширения уровней Ландау либо неупругости рассеяния. Параметры обрезания этой расходимости равны соответственно $(\hbar/\tau\epsilon)$ и $(\hbar s/\lambda\epsilon)$ (\hbar/τ — ширина уровня Ландау, а $\hbar s/\lambda$ — характерная энергия акустических фононов, взаимодействующих с электронами). В нелинейной теории гальваномагнитных явлений возникает еще одна возможность устранения этой расходимости²⁶. Действительно, в аргументе функции δ в (3,6) содержится слагаемое $eE\lambda^2 q_y$, играющее роль неупругого параметра при рассеянии на примесях и вносящее дополнительную неупругость в случае рассеяния на акустических фононах. Поэтому логарифмическая расходимость в σ_{xx} будет обрезаться наибольшим из параметров $(e\lambda E/\epsilon)$, $(\hbar/\tau\epsilon)$ и $(\hbar s/\lambda\epsilon)$.

Уравнение баланса энергии (3,4) позволяет выразить эффективную электронную температуру через внешние поля E , B и температуру решетки T . Перейдем к вычислению джоулевой мощности. Она зависит от граничных условий. Можно рассматривать два случая: равного и неравного нулю холловского поля E_y . Равное нулю холловское поле может реализоваться в неограниченных системах с холловским током $I_y = \frac{cen_e}{B} E_x$, либо в проводниках с одинаковой концентрацией дырок и электронов и, наконец, в специальных устройствах типа диска Корбино. Во всех других случаях холловское поле $E_y \neq 0$.

Если $E_y = 0$, то $(IE) = \sigma_{xx} E^2$, а при $E_y \neq 0$ и $|\sigma_{xy}| \gg \sigma_{xx}$

$$(IE) = \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_{xx}} E_x^2.$$

В отсутствие холловского поля решение уравнения баланса энергии (3,4) в квантовом пределе при $Ee\lambda/T_e$ и $\hbar\omega_q \ll T_e$ дает для эффективной электронной температуры выражение (1,6). Оно совпадает с найденным Казариновым и Скобовым¹⁶, но в условиях полного пренебрежения межэлектронным рассеянием. Если $E_y \neq 0$, то уравнение баланса энергии в квантовом пределе имеет вид²⁸

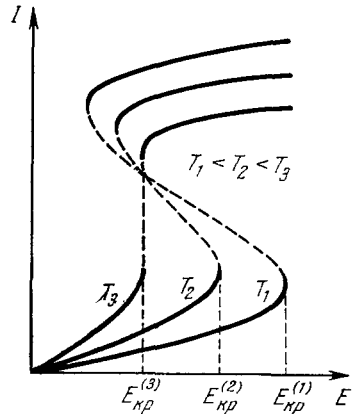
$$\beta_E = x^2 (1 - x), \quad (3,7)$$

где

$$\beta_E = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{cE}{sB} \right)^2 \frac{\omega_{0e}^2}{\sigma_{xx}(T, B) v_{ep}(T, B)},$$

$$\omega_{0e}^2 = \frac{4\pi n_e e^2}{m}, \quad x = \frac{T}{T_e}.$$

Отрицательное решение уравнения (3,7) как нефизическое здесь не рассматривается. При $\beta_E \ll 1$, что соответствует малым E , имеются два положительных решения $x_1 \approx 1 - \beta_E$, $x_2 \approx \sqrt{\beta_E}$. Первое решение описывает разогрев электронов при увеличении E , тогда как второе решение приводит при $E \rightarrow 0$ к $T_e \rightarrow \infty$. Это решение является следствием снижения скорости передачи тепла от электронов к решетке с ростом T_e и указывает на нарушение баланса энергии при сильном разогреве электронов (см. рисунок). С увеличением T_e джоулева мощность растет $\sim T_e^{3/2}$, а мощность,



Вольт-амперные характеристики (ВАХ) при $E \perp B$ с учетом холловского поля для различных температур решетки ($\hbar\Omega \gg T$).

Штриховыми линиями изображены переходные участки ВАХ от квантового предела к снятию квантования.

отдаваемая решетке, возрастает $\sim (T_e - T)$ только при слабом разогреве, $(T_e - T) \ll T$; при переходе к сильному разогреву это неравенство нарушается и P убывает с разогревом электронов как $T_e^{-1/2}$. В этой ситуации существует $E_{кр}$ — наибольшее значение электрического поля, при котором еще возможно стационарное состояние системы ($P = IE_{кр}$), но при $E > E_{кр}$ это равенство уже нарушается и $IE > P$. С увеличением E оба рассматриваемых решения сближаются и при $\beta_E = \beta_E^{кр} = 4/27$ совпадают, причем $x_{кр} = \frac{2}{3}$. Критическое электрическое поле, при котором электронная температура достигает величины $T_e = \frac{3}{2} T$, определяется формулой

$$E_{кр} = \frac{sm}{e} \sqrt{\frac{2}{27} v_e(T, B) v_{ep}(T, B)}. \quad (3,8)$$

В полях $E > E_{кр}$ нарушается баланс энергии и состояние электронной системы становится неустойчивым. Действительно, согласно⁵ область неустойчивости соответствует отрицательной дифференциальной проводимости $\sigma_d = \frac{dI}{dE}$, что приводит к «S»-образному участку на вольт-амперной характеристике. $\sigma_d < 0$, если выполнены условия

$$\frac{\partial \sigma(T_e)}{\partial T_e} > 0, \quad (3,9)$$

$$\frac{\partial \ln \sigma(T_e)}{\partial T_e} > \frac{\partial \ln P(T_e)}{\partial T_e}. \quad (3,10)$$

В рассматриваемом нами случае $\sigma = \rho_{xx}^{-1}$. Условия (3,9) и (3,10) удовлетворяются для $T_e > \frac{3}{2} T$. На возможность появления «S»-образной вольт-амперной характеристики в квантующем магнитном поле впервые указал Коган²⁹. Вид вольт-амперных характеристик, соответствующих уравнению (3,7) для различных температур решетки, изображен на рисунке.

В таблице I приведена зависимость $E_{кр}$ от температуры решетки и магнитного поля B для различных механизмов релаксации импульса электронов при условии, что их энергия передается акустическим фононам. Из этой таблицы видно, что зависимость $E_{кр}$ от B и T может быть весьма разнообразной, но $E_{кр}$ всегда уменьшается с ростом T . Последнее связано с тем, что при всех рассмотренных механизмах релаксации импульса джоулева мощность всегда растет с T быстрее, чем мощность, передаваемая электронами акустическим фононам. При достаточно сильном разогреве электронов, когда нарушается условие квантования $T_e > \hbar\Omega$, система снова может перейти в стационарное состояние (см. рисунок). Если $\tau_i \tau_e \sim (T_e)^\rho$, то при $\rho < 1$ уравнение баланса энергии имеет однозначное решение, а при $\rho \geq 1$ решение неоднозначное, и возможно появление перегретой неустойчивости. Например, при рассеянии импульса и энергии электронов на акустических колебаниях решетки в классической (неквантовой) области сильных магнитных полей система находится в стационарном состоянии, и эффективная температура электронов в случае сильного разогрева определяется выражением

$$T_e = T \frac{eE}{\sqrt{3} m s \langle \tau_{ak}^{-1}(T) \rangle}, \quad (3,11)$$

где

$$\langle \tau^{-1}(T) \rangle = \frac{4}{3 \sqrt{\pi}} \int_0^\infty dx e^{-x} x^{3/2} \tau^{-1}(x);$$

Таблица I

Зависимость $E_{кр}$ от T и B для различных механизмов релаксации импульса электронов (энергия передается акустическим фононам)

Механизм релаксации импульса электронов	$\nu(T, T_e, B)$	$E_{кр}(T, B)$	$\langle \tau^{-1}(T, T_e) \rangle$
Акустические фононы	$B^2 T T_e^{-3/2}$	$B^2 T^{-1/2}$	$T T_e^{1/2}$
Нейтральные примеси	$B^2 T^0 T_e^{-3/2}$	$B^2 T^{-1}$	$T^0 T_e^0$
Ионизированные примеси	$B^0 T^0 T_e^{-3/2}$	$B^1 T^{-1}$	$T^0 T_e^{-3/2}$
Пьезоакустические фононы	$B^1 T T_e^{-3/2}$	$B^{3/2} T^{-1/2}$	$T T_e^{-1/2}$
Оптические фононы ($T \ll \theta_D$)	$B^1 T^0 T_e^{-1} \times$ $\times \exp\left(-\frac{\hbar\omega_0}{T}\right)$	$B^{3/2} T^{-3/4} \times$ $\times \exp\left(-\frac{\hbar\omega_0}{2T}\right)$	$T^0 T_e^0 \times$ $\times \exp\left(-\frac{\hbar\omega_0}{T}\right)$
Оптические фононы ($T \gg \theta_D$)	$B^1 T T_e^{-3/2}$	$B^{3/2} T^{-1/2}$	$T T_e^{-1/2}$

Таблица II

Зависимость T_e и поперечного магнетосопротивления от T и E в классической (неквантовой) области (энергия передается акустическим или пьезоакустическим фононам)

Механизм релаксации импульса	$T_e^{(ак)}(T, E)$	$\rho_{\perp}^{(ак)}(T, E)$	$T_e^{(пак)}(T, E)$	$\rho_{\perp}^{(пак)}(T, E)$
Акустические фононы	$T^{-1/2} E^1$	$T^{3/4} E^{1/2}$	$T^{-1} E^2$	$T^{1/2} E^1$
Нейтральные примеси	$T^0 E^{4/3}$	$T^0 E^0$	$T^0 E^4$	$T^0 E^0$
Пьезоакустические фононы	$T^{-1} E^2$	$T^{3/2} E^{-1}$	—	—

$\tau_{ak}\left(\frac{\epsilon}{T}\right)$ — время релаксации импульса электрона с энергией ϵ на акустических фононах (см., например, ³⁰). Температурная зависимость для различных механизмов рассеяния приведена в табл. I.

В таблице II приведены зависимости T_e и поперечного магнетосопротивления от температуры решетки T и электрического поля E в классической области. Энергия электронов передается акустическим либо пьезоакустическим фононам. Поперечное магнетосопротивление может как возрастать, так и убывать с ростом E и даже не зависеть от E , что определяется механизмом релаксации импульса электронов.

Отметим в заключение, что найденные здесь результаты находятся в пределах применимости теории. В частности, $E_{кр}$, определенное в (3,8), удовлетворяет неравенству $eE\lambda \ll T$. Действительно, в соответствии с (3,8)

$$\left(\frac{cE_{кр}}{B}\right)^2 \frac{\Omega^2}{\nu_e(T, B) \nu_{ep}(T, B)} \sim \frac{1}{10} s^2 < s^2. \quad (3,12)$$

Далее, поскольку энергия фононов, взаимодействующих с электронами, удовлетворяет неравенству $\hbar\tilde{\omega}_q \ll T$ и $\hbar\tilde{\omega}_q \sim \hbar s\lambda^{-1}$, то

$$s^2 \ll \frac{T}{m} \frac{T}{\hbar\Omega}. \quad (3,13)$$

Из (3,12) и (3,13) вытекает, что

$$(eE_{\text{кр}}\lambda)^2 \frac{\Omega^2}{v_e(T, B) v_{ep}(T, B)} \ll T^2.$$

Это неравенство и означает, что работа холловского поля (а следовательно, и внешнего) на магнитной длине λ мала в сравнении с T .

4. Учет разогрева фононов³¹

До сих пор предполагалось, что фононная система находится в состоянии равновесия с термостатом, характеризуемым температурой T . Это предположение, однако, не всегда справедливо. Энергия, получаемая электронами от электрического поля, передается при электрон-фононных столкновениях длинноволновым фононам (ДФ), с которыми только и взаимодействуют электроны. Затем ДФ передают ее коротковолновым, или тепловым фононам (ТФ). Напомним, что ДФ называют фононы с импульсом $\hbar q \leq \hbar\lambda^{-1} \equiv \hbar q_B$. Характерный импульс тепловых фононов имеет порядок $\frac{T}{s} = \hbar q_T$. Поэтому разделение фононов на ДФ и ТФ имеет смысл лишь при $q_B \ll q_T$. Поведение системы ДФ определяется соотношением между характерными временами релаксации ДФ на электронах $\tau_{pe}(q)$ и на ТФ $\tau_{pp}(q)$. Если ДФ чаще сталкиваются с электронами, чем с ТФ, то между временами релаксации имеет место соотношение $\tau_{pe}^{-1}(q) \gg \tau_{pp}^{-1}(q)$. В этом случае состояние ДФ определяется в основном электронной подсистемой, в частности, их температура равна температуре электронов T_e . В случае обратного неравенства $\tau_{pe}^{-1}(q) \ll \tau_{pp}^{-1}(q)$ состояние ДФ определяется ТФ (термостатом) и температура ДФ равна температуре термостата T . Этот последний случай, соответствующий тепловому равновесию всех фононов, и рассматривался до сих пор. При низких температурах $\tau_{pp}^{-1}(q)$ убывает пропорционально T^4 , тогда как $\tau_{pe}^{-1}(q)$ растет с понижением T и с увеличением напряженности магнитного поля B . Поэтому при достаточно низких T и достаточно больших B может реализоваться первое неравенство $\tau_{pe}^{-1}(q) \gg \tau_{pp}^{-1}(q)$. В этом случае разогрев электронов приводит к разогреву ДФ, возникает разность температур тепловых и длинноволновых фононов. Этот эффект обусловлен замедлением передачи энергии, получаемой ДФ от горячих электронов, к ТФ и носит название фононного «узкого горла».

Перейдем к рассмотрению задачи о фононном «узком горле». Введем функции распределения (диагональные элементы матрицы плотности) длинноволновых фононов N_q и коротковолновых N_k (k — волновой вектор коротковолнового фонона). Электроны по-прежнему описываются максвелловской функцией распределения с эффективной электронной температурой T_e . Поскольку ТФ находятся в термодинамическом равновесии с термостатом при температуре T , их функция распределения — функция Планка. Нахождению подлежит функция распределения N_q . Будем предполагать, что N_q является изотропной в фазовом пространстве q . Это возможно при скоростях упорядоченного дрейфа электронов, меньших скорости звука, и в условиях, когда импульс ДФ релаксирует в основном на границах образца, а не при фонон-фононных и фонон-электронных столкновениях, т. е. имеет место неравенство

$$\tau_{\text{ГР}}^{-1} \sim \frac{L}{s} \gg \max(\tau_{pp}^{-1}, \tau_{pe}^{-1}),$$

где L — характерный размер образца, $\tau_{\text{гр}}$ — характерное время релаксации ДФ на границах образца. В этих условиях функция распределения имеет вид ⁶⁷

$$N_q = \frac{N_q(T_e) \tau_{pe}^{-1}(q, T_e) + N_q(T) \tau_{pp}^{-1}(q, T)}{\tau_{pe}^{-1}(q, T_e) + \tau_{pp}^{-1}(q, T)}, \quad (4,1)$$

где в квантовом пределе

$$\tau_{pe}^{-1}(q, T_e) = \frac{\sqrt{2\pi} m_s^2 A^{\text{ак}} n_e q^2}{\hbar (m T_e)^{3/2} |q_z|} \exp \left(-\frac{\lambda^2 q_{\perp}^2}{2} - \frac{\hbar^2 q_z^2}{8m T_e} \right), \quad (4,2)$$

$$A_{\text{ак}} = \frac{C_0^2 \hbar}{2 \rho_0 s V}.$$

Выражение для частоты релаксации продольно поляризованных фононов имеет вид ^{33, 34}

$$\tau_{pp}^{-1}(q, T) \simeq \frac{1}{4\pi \rho_0} \left(\frac{T}{\hbar s} \right)^4 \hbar q. \quad (4,3)$$

При достаточно низкой температуре термостата и не слишком сильном разогреве электронов, когда выполняется неравенство

$$10 \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^4 \ll \left(\frac{n_e}{N_a} \right) \left(\frac{a}{\lambda} \right) \left(\frac{C_0}{T_e} \right)^2 \quad (4,4)$$

(θ_D — температура Дебая, N_a — число атомов решетки в единице объема, a — постоянная решетки), $\tau_{pe}(q, T_e) \ll \tau_{pp}(q, T)$; тогда из (4,1) следует, что ДФ имеют температуру электронов T и описываются планковской функцией распределения.

Мощность, передаваемая длинноволновыми фононами тепловым фононам, определяется формулой

$$P_{pp}(T, T_e) = \sum_q \hbar \omega_q [N_q(T) - N_q(T_e)] \tau_{pp}^{-1}(q, T). \quad (4,5)$$

При $\hbar \omega_q \ll T, T_e$ с помощью (4,3) находим ³¹

$$P_{pp}(T, T_e) \approx \left(1 - \frac{T}{T_e} \right) T_e^{3/2} \frac{\sqrt{2m} \tau_{pp}^{-1}(q_m) q_m^2}{3\pi^2 \hbar}. \quad (4,6)$$

При получении (4,6) учтено, что ДФ, находящиеся в равновесии с электронами, имеют максимальные импульсы $(\hbar q_{\perp})_m \sim \hbar \lambda^{-1}$ и $(\hbar q_z)_m \sim \sqrt{2m T_e}$ в плоскости, ортогональной магнитному полю \mathbf{B} и вдоль \mathbf{B} соответственно, причем $(q_{\perp})_m \sim \lambda^{-1} \gg (q_z)_m$. Поскольку максимальная энергия излучаемых электронами ДФ имеет порядок $\hbar s/\lambda$ и не зависит от электронной температуры, при $\hbar s/\lambda < T$ подсистему ТФ можно всегда рассматривать как тепловой резервуар. Это утверждение утрачивает силу при переходе к классическим (неквантующим) магнитным полям ³².

Учет разогрева ДФ приводит к тому, что джоулева мощность при наличии холловского поля растет с электронной температурой медленнее, чем мощность, отдаваемая решетке (если и импульс, и энергия рассеиваются на акустических фононах):

$$(IE) = 2n_e m \left(\frac{cE}{B} \right)^2 \frac{\Omega^2}{v_{ep}(T, B)} \left(\frac{T_e}{T} \right)^{1/2}. \quad (4,7)$$

Поэтому при любом E стационарное состояние электрон-фононной системы в квантовом пределе не нарушается и, как нетрудно найти,

$$T_e = T [1 + (E/\tilde{E})^2], \quad (4,8)$$

где характерное электрическое поле \tilde{E} равно

$$\tilde{E} = \left[\frac{(mT)^{3/2} \nu_{ep}(T, B) \tau_{rp}^{-1}(q_m, T)}{3 \sqrt{2} \pi \hbar e^2 \lambda^2 n_e} \right]^{1/2}. \quad (4,9)$$

Однако уравнение баланса может нарушаться и до снятия орбитального квантования, если окажется существенным рассеяние электронов на нейтральных или ионизированных примесях. В случае нейтральных и ионизированных примесей в квантовом пределе имеем соответственно

$$\nu_0 \sim B^2 T_e^{-3/2}, \quad \nu_i \sim B^0 T_e^{-3/2}.$$

Джоулева мощность (IE) при этом возрастает с разогревом электронов $\sim T_e^{3/2}$. По такому же закону возрастает и мощность, передаваемая решетке (ТФ), P_{rp} . При $E = E_{кр}$ возникает перегревная неустойчивость. Нетрудно найти, что $E_{кр}$ совпадает с \tilde{E} , определенной формулой (4,9), если заменить $\nu_{ep}(T, B)$ на частоту релаксации импульса на примесях. При $E = E_{кр}$ электроны быстро разогреваются, что может привести к снятию квантования орбитального движения электронов магнитным полем, если в процессе разогрева примесное рассеяние не будет подавлено акустическим, которое уже обеспечивает стационарность электронной системы в условиях квантования. Зависимость $E_{кр}$ от T и B при различных механизмах рассеяния приведена в табл. III. В этой же таблице приведены

Таблица III

Зависимость $E_{кр}$ при фоновом «узком горле» для различных механизмов релаксации импульса. В последнем столбце приведены значения $E_{кр}^{rp}$ для случая, когда энергия передается не тепловым фононам, а непосредственно окружающей среде через границы образца ($\tau_{rp} > \tau_{гр}$) ($\tau_{гр}$ — время релаксации энергии на границе образца)

Механизмы релаксации импульса	$E_{кр} n_e^{1/2}$	$E_{кр}^{rp} n_e^{1/2}$
Акустические фононы	$B^{7/4} T^{5/2}$	$B^{3/2} T^{1/2}$
Нейтральные примеси	$B^{7/4} T^2$	$B^{3/2} T^0$
Ионизированные примеси	$B^{3/2} T^2$	$B^{1/2} T^0$
Пьезоакустические фононы	$B^{5/4} T^{5/2}$	$B^{1/2} T^{1/2}$
Оптические фононы	$B^{5/4} T^{3/4} e^{-\frac{\hbar \omega_0}{2T}}$	$B^{1/2} T^{1/4} e^{-\frac{\hbar \omega_0}{2T}}$

зависимости $E_{кр}$ от T и B для случая, когда энергия, полученная ДФ от электронов, передается не ТФ, а непосредственно границам образца. Это происходит тогда, когда $\tau_{rp} \gg \tau_{гр}$ ($\tau_{гр}$ — время релаксации энергии на границах образца). $(E_{гр})_{кр}$, как нетрудно найти, равно

$$(E_{гр})_{кр} = \left[\frac{(mT)^{3/2} \tau_{гр}^{-1} \nu(T, B)}{2 \sqrt{2} \lambda^2 \hbar e^2 \lambda^2 n_e} \right]^{1/2}. \quad (4,10)$$

Отметим, что при учете разогрева ДФ $E_{кр}$ всегда растет с T из-за быстрого увеличения мощности, передаваемой термостату, и убывает с ростом концентрации электронов. Без учета разогрева ДФ $E_{кр}$ всегда падает с ростом T и не зависит от концентрации электронов. Экспериментальное исследо-

вание таких зависимостей позволяет выявить роль эффекта фононного «узкого горла» в полупроводниках.

Сильный разогрев электронов приводит к снятию квантования циклотронных орбит. При этом в случае эффекта фононного «узкого горла» стационарное состояние электронов устанавливается при любом механизме релаксации импульса, тогда как в отсутствие этого эффекта рассеяние на ионизированных примесях не обеспечивает стационарности электронной системы. В табл. IV приведены зависимости электронной температуры и поперечного электросопротивления ρ_{\perp} от T , E и n_e .

Таблица IV

Зависимость электронной температуры T_e и поперечного сопротивления ρ_{\perp} в классической (неквантовой) области от T , E и концентрации электронов n_e

Механизмы релаксации импульса	$\tau_{pp} \ll \tau_{гр}$		$\tau_{pp} \gg \tau_{гр}$	
	$T_e(T, E, n_e)$	$\rho_{\perp}(T, E, n_e)$	$T_e(T, E, n_e)$	$\rho_{\perp}(T, E, n_e)$
Акустические фононы	$n_e^{2/3} E^{4/3} T^{-8/3}$	$n_e^{-2/3} E^{2/3} T^{-4/3}$	$n_e^{1/4} E^{1/2} T^0$	$n_e^{1/2} E^{3/4} T^0$
Нейтральные примеси	$n_e^{1/3} E^{2/3} T^{-4/3}$	$n_e^{-1} E^0 T^0$	$n_e^{2/5} E^{4/5} T^0$	$n_e^{-1} E^0 T^0$
Ионизированные примеси	$n_e^{2/3} E^{4/3} T^{-8/3}$	$n_e^{-2} E^{-2} T^4$	$n_e^4 E^2 T^0$	$n_e^{-5/2} E^{-3} T^0$
Пьезоакустические фононы	$n_e^{2/5} E^{4/5} T^{-2}$	$n_e^{-6/5} E^{-2/5} T^2$	$n_e^{1/2} E^1 T^{-1/2}$	$n_e^{-5/4} E^{-1/2} T^{-5/4}$
Оптические фононы ($T \ll \theta_D$)	$n_e^{1/3} E^{2/3} T^{-4/3} \times$ $\times e^{\hbar\omega_0/3T}$	$n_e^{-1} E^0 T^0 \times$ $\times e^{-\hbar\omega_0/T}$	$n_e^{2/5} E^{4/5} T^0 \times$ $\times e^{2\hbar\omega_0/5T}$	$n_e^{-1} E^0 T^0 \times$ $\times e^{-\hbar\omega_0/T}$

Эффект фононного «узкого горла» возможен в полупроводниках при достаточно низких температурах. Например, в электронном германии при $T = 15^\circ \text{K}$, $B = 10^5 \text{ э}$ циклотронные орбиты проквантованы, $\lambda \approx 0,8 \cdot 10^{-6} \text{ см}$, $q_T = T/\hbar s \approx 7 \cdot 10^{-6} \text{ см}^{-1}$, и выполнены необходимые для этого эффекта неравенства $q_m < q_T$ и (4,4).

Глузман, Любимов и Цидильковский^{35, 36} измеряли электросопротивление образцов электронного германия с $n_e = 8,6 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$ при $T = 16,6^\circ \text{K}$ в сильных электрических (до 50 в/см) и магнитных (до 140 кэ) полях. Рассеяние импульса и энергии ДФ в условиях этого опыта происходит на границах образца, поэтому критическое поле, при котором возникает неустойчивость, определяется формулой (4,10). На кривых зависимости $\rho_{\perp}(I)$ в магнитных полях $B = 28; 42; 56 \text{ кэ}$ наблюдается уменьшение электросопротивления в области напряженности электрического поля E около 3—4 в/см, обусловленное, по-видимому, снятием квантования циклотронных орбит. Эти значения E близки к вычисленным $(E_{гр})_{кр}$ по формуле (4,10). При дальнейшем увеличении E падение электросопротивления перекрывается в эксперименте сильным ростом его, который авторы связывают с «поперечным пробоем»³⁷. Такой эффект в сильных электрических полях в $n\text{-Ge}$ был отмечен и Судзуки³⁸. Представляет интерес выполнить эксперименты такого рода при различных температурах термостата, что позволило бы изучить разогрев ДФ.

Разогрев ДФ без учета холловского поля в рассматриваемых выше условиях изучался также в работе Гуревича и Гасимова³⁹.

5. Случай сверхсильного магнитного поля

С ростом напряженности магнитного поля B максимальный импульс фононов, взаимодействующих с электронами, увеличивается $\sim \hbar/\lambda$. При $\hbar s/\lambda \gg T$ практически уже все фононы взаимодействуют с электронами, т. е. все фононы становятся как бы длинноволновыми, а число коротковолновых фононов с импульсом, превосходящим \hbar/λ , экспоненциально мало.

Тепловой резервуар, которым служили при $\lambda^{-1} = q_B < q_T = \frac{T}{\hbar s}$ коротковолновые фононы (ТФ), исчезает, когда $q_B > q_T$. Роль теплового резервуара играет теперь среда, окружающая образец. Энергия, получаемая от горячих электронов всей фононной системой, передается далее через границы образца окружающей среде — термостату. Здесь наряду с временами релаксации фононов на электронах τ_{pe} и друг на друге τ_{pp} выступает новая характеристика — время релаксации фононов на границах образца $\tau_{гр}$. Для простоты анализа разогрева электронов можно рассматривать асимптотические решения, соответствующие различным соотношениям между этими тремя временами релаксации.

В случае, когда $\tau_{гр}$ является наименьшим из всех характерных времен релаксации, фононы, получая энергию от горячих электронов, не испытывают столкновений между собой, передают ее сразу же границам образца. При этом можно рассматривать слабый разогрев электронов, соответствующий неравенству $q_{Te} < q_B$, и сильный при обратном неравенстве. В приближении эффективной электронной температуры, как показано в работе ⁴⁰, при $\tau_{pp} \gg \tau_{pe}$

$$T_e \sim B^0(T)^0 E^1, \quad (5,1)$$

если импульс релаксирует на ионизированных примесях, и

$$T_e \sim B^{-1}(T)^0 E^1 \quad (5,2)$$

для нейтральных примесей.

В случае сильного разогрева в полях $E > E_{кр}$ возникает перегревная неустойчивость. Зависимость $E_{кр}$ от параметров системы найдена в работе ⁴⁰ и выражается следующими формулами:

при $\tau_{pp} \gg \tau_{гр} \ll \tau_{pe} (q_B, T_e)$

$$E_{кр} \approx \frac{4 [K_0(1)]^{3/2} [m v_e(T, B) \tau_{pe}^{-1}(q_B, T) \sqrt{2 m s^2 T}]^{1/2}}{3 \pi \Gamma(5) \zeta(5) [\lambda q_T]^4 K_0(q_T/q_B) [3 n_e e^2 \lambda^3]^{1/2}}, \quad (5,3)$$

где $K_0(x)$ — функция Макдональда, $\Gamma(t)$ — гамма-функция, $\zeta(x)$ — дзета-функция Римана и $v_e(T, B)$ — частота релаксации импульса, входящая в электропроводность σ_{xx} ; и при $\tau_{pp} \gg \tau_{гр} \gg \tau_{pe} (q_B, T_e)$

$$E_{кр} = \left[\frac{(2mT)^{3/2} v_{ep}(T, B)}{2 (2\pi)^2 \hbar n_e e^2 \lambda^2} \right]^{1/2}. \quad (5,4)$$

Из последней формулы вытекает, что для ионизированных примесей $E_{кр} \sim B^{1/2}(T)^0$, а для нейтральных $E_{кр} \sim B^{3/2}(T)^0$.

Рассмотрим другой предельный случай, когда $\tau_{гр} \gg \tau_{pp} \gg \tau_{pe}$, т. е. $\tau_{гр}$ — наибольшее из времен релаксации. При слабом разогреве $q_T < q_B$ фононы, излученные электронами, имеют энергию $\hbar s q_B > T$. Но поскольку $\tau_{гр} \gg \tau_{pp}$, эти фононы, прежде чем передать энергию окружающей образец среде, распадаются на два фонона с энергией $\sim T_e$ и через характерное время ³²

$$\tau_{pp} \approx \frac{60 \pi^2 \rho_0}{\gamma^2 \hbar} q^{-5}$$

($\tilde{\gamma}$ — численный множитель, равный ≈ 2 для Si и Ge) приходят в равновесие с фононами и горячими электронами, а затем передают энергию через границы образца окружающей среде. В этом случае энергия, передаваемая границам образца, растет с разогревом электронов пропорционально T^4 , что обеспечивает устойчивость системы. В случае сильного разогрева $q_{T_e} > q_B$ энергия излучаемых электронами фононов $\hbar s q_B < T_e$. Поэтому излученные фононы сначала путем процессов слияния термализуются, поскольку $\tau_{pp} < \tau_{tr}$, т. е. приходят в равновесие с электронами и остальными фононами, имеющими температуру T_e , а затем энергия от фононной системы передается границам образца. Характерное время для процессов слияния двух фононов с импульсом $\hbar\lambda^{-1}$ можно получить с помощью формулы (25) из работы ³⁴, заменив верхний предел интеграла на λ^{-1} . В результате получим

$$\tau_{pp}^{-1}(q_B, T_e) \approx \frac{\hbar}{4\pi\rho_0} q_B^4 q_{T_e}. \quad (5,5)$$

Уравнение баланса энергии обеспечивает стационарные состояния системы. При сильном разогреве $T_e \sim (T)^0 B^0 E^{4/5}$, если импульс электронов рассеивается на ионизированных примесях и $T_e \sim (T)^0 B^{-4/5} E^{4/5}$ в случае рассеяния импульса на нейтральных примесях. Зависимости тока от напряженностей полей и температуры имеют соответственно вид

$$I_x \sim (T)^0 B^0 E^{2,2}, \quad (5,6)$$

$$I_x \sim (T)^0 B^{-3/2} E^{2,2}. \quad (5,7)$$

6. Другие механизмы релаксации энергии горячих электронов

Энергия горячих электронов может передаваться не только акустическим, но также оптическим и пьезоэлектрическим фононам. Если в полупроводнике существует несколько групп носителей тока с сильно отличающимися эффективными массами, то энергия более легких горячих носителей может передаваться при столкновениях более тяжелым, а затем уже решетке.

Диссипация энергии горячих электронов на пьезоакустических фононах в приближении эффективной электронной температуры рассматривалась впервые Коганом ²⁹. Как следует из табл. I, отношение частот релаксации электронов на акустических и пьезоакустических фононах $\frac{\nu_{ep}}{\nu_{ep}^{(пак)}} \sim \sim B$. Поэтому зависимость $E_{кр}^{(пак)}$ от B и T в случае рассеяния горячих электронов на пьезоакустических фононах согласно формуле (3,19) будет иметь вид $E_{кр}^{(пак)} \sim E_{кр}^{(ак)}/B$. Поделив в табл. I $E_{кр}^{(ак)}(T, B)$ на B , получим зависимость $E_{кр}^{(пак)}(T, B)$ при различных механизмах релаксации импульса. Зависимость электронной температуры от электрического поля E будет определяться уравнением, аналогичным (3,7), с заменой ν_{ep} на $\nu_{ep}^{(пак)}$. Коэффициент β_{\perp} , характеризующий квадратичную по электрическому полю добавку к поперечной электропроводности $\sigma_{\perp} = \rho_{xx}^{-1}$, в случае акустических и пьезоэлектрических фононов согласно ²⁹ имеет соответственно следующие зависимости от B и T :

$$\beta_{\perp}^{(ак)} \sim T^2 B^{-2}, \quad \beta_{\perp}^{(пак)} \sim T^2 B^{-1}.$$

Релаксация энергии горячих электронов на оптических фононах в приближении эффективной электронной температуры изучалась в работах Поморцева и Харуса ^{41, 42}. Интересным результатом этих работ является

осциллирующая зависимость от магнитного поля мощности, передаваемой электронами оптическим фононам. Всякий раз, когда магнитное поле обращает в нуль параметр $\Delta = \omega_0 - M\Omega$ (ω_0 — частота оптических фононов, M — целое число), мощность обращается в бесконечность как $\ln \left(\frac{T_e}{\Delta} \right)$. Эти особенности связаны с вкладом электронов с нулевой z -компонентой импульса. Разогрев оптических фононов устраняет расходимость мощности, передаваемой решетке при $\Delta \rightarrow 0$ и, более того, приводит к исчезновению резонанса, если частота релаксации электронов на оптических фононах $\nu_{ep}^{(opt)}$ значительно больше неэлектронной частоты релаксации оптических фононов $\nu_{pp}^{(opt)}$.

Если электроны рассеивают импульс на примесях или акустических колебаниях решетки, то электросопротивление ρ_{\perp} является монотонно убывающей функцией электронной температуры. Поэтому при резонансном излучении оптических фононов ($\Delta = 0$) электронная температура должна иметь минимумы, а ρ_{\perp} — максимумы.

Электросопротивление ρ_{\perp} является осциллирующей функцией B и в отсутствие разогрева электронов⁴³, однако условия непосредственного наблюдения этого эффекта очень жестки. Дело в том, что при низких температурах, обеспечивающих существование уровней Ландау, наряду с резонансным рассеянием электронов на оптических фононах существенными являются и другие нерезонансные механизмы рассеяния (ионизированные и нейтральные примеси, акустические и пьезоакустические фононы), подавляющие эффект резонансного рассеяния. В достаточно сильных электрических полях, обеспечивающих $T_e > T$, потери энергии электронов на излучение оптических фононов становятся существенными⁴⁴. Поэтому в неомической области можно ожидать появления осцилляций магнетосопротивления при изменении B .

Страдлинг и Вуд⁴⁵ наблюдали подобные осцилляции в n -GaAs, причем максимумы ρ_{\perp} были сдвинуты относительно точек магнетофононного резонанса в сторону меньших магнитных полей. Авторы объясняют это наличием электронных переходов не на нулевой уровень Ландау, а на примесные уровни.

7. Низкая концентрация электронов

Впервые задача о разогреве электронов в ортогональных, сильном электрическом и квантующем магнитном, полях в пренебрежении межэлектронным рассеянием решалась Казариновым и Скобовым¹⁶. Они показали, что если электрическое поле достаточно слабое и не сказывается на энергетическом спектре электронов, а рассеяние на фононах носит квазиупругий характер ($eE\lambda/\varepsilon \ll 1$, $\hbar\omega_q/\varepsilon \ll 1$), то в квантовом пределе уравнение баланса энергии электронов группы ε , $\varepsilon + d\varepsilon$ имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} P(\varepsilon) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (I(\varepsilon) E). \quad (7.1)$$

Функция распределения электронов удовлетворяет дифференциальному уравнению первого порядка. Эффективная температура T_e может быть введена, если рассеяние электронов происходит на примесях и акустических фононах и определяется выражением (1.6). Последнее обстоятельство связано с тем, что отношение ν_{ei}/ν_{ep} не зависит от энергии ε . Уменьшение поперечного сопротивления, обусловленное возрастанием температуры электронов, наблюдалось экспериментально^{46, 47}.

Нелинейную электропроводность в отсутствие межэлектронного рассеяния рассматривал также Калецки²². Его подход, по существу,

соответствует «теплым» электронам, т. е. слабым электрическим полям $E \ll \frac{s}{c} B$. Распространение теории Казаринова и Скобова нелинейных гальваномангнитных явлений на случай релаксации энергии горячих электронов на оптических колебаниях было выполнено Злобиным⁴⁸.

В отличие от обсуждавшихся в предыдущем разделе работ Поморцева и Харуса^{41, 42}, в работе⁴⁸ рассматривается случай низких концентраций электронов, когда априори нельзя ввести понятие эффективной электронной температуры.

Столкновения электронов с оптическими фононами являются существенно неупругими, поэтому интегральное уравнение для диагонального элемента электронной матрицы плотности нельзя свести к дифференциальному уравнению типа Фоккера — Планка. Однако в случае низких температур $T < \hbar \omega_q$ ($\omega_q = \omega_0 (1 - \alpha^2 q^2)$) — частота оптического фонона с учетом дисперсии) можно также вводить понятие квазиупругого рассеяния, но только по отношению к двойному процессу «поглощение — излучение» оптического фонона⁹. В квантовом пределе с учетом двух низших уровней Ландау уравнение дифференциального баланса энергии может быть представлено в виде

$$f(\epsilon) + T \frac{\partial f}{\partial \epsilon} + (T \gamma_E) \frac{\partial f}{\partial \epsilon} \left[\frac{\mathcal{N}'_0(\epsilon)}{\sqrt{\epsilon(\epsilon + \hbar \omega_0)}} + \frac{\mathcal{N}'_1(\epsilon)}{\sqrt{\epsilon(\epsilon + \Delta)}} \right] \times \\ \times \left[\frac{\mathcal{N}_0(\epsilon)}{\sqrt{\epsilon(\epsilon + \hbar \omega_0)}} + \frac{\mathcal{N}_1(\epsilon)}{\sqrt{\epsilon(\epsilon + \Delta)}} \right]^{-1} = 0, \quad (7,2)$$

где

$$\gamma_E = \frac{1}{8} \left(\frac{e E \lambda^3}{\alpha^2 \hbar \omega_0} \right)^2, \quad \Delta = \hbar (\omega_0 - \Omega);$$

$\mathcal{N}'_0(\epsilon)$, $\mathcal{N}'_1(\epsilon)$, $\mathcal{N}_0(\epsilon)$, $\mathcal{N}_1(\epsilon)$ — известные функции энергии⁴⁸.

Решение уравнения (7,2) имеет вид

$$f(\epsilon) = \exp \left\{ - \int \frac{d\epsilon'}{T [1 + g(\epsilon')]} \right\}, \quad (7,3)$$

и электронная «температура» зависит от энергии ϵ . Однако существуют предельные случаи, когда можно ввести эффективную электронную температуру, одинаковую для всех электронов независимо от их энергии.

Как показывает анализ⁴⁸, для энергий $\epsilon \ll \hbar \Omega$, $\hbar \omega_0$ понятие электронной температуры имеет смысл как в квантовом пределе ($\Omega > \omega_0 \gg \epsilon$), так и в области магнетофононного резонанса, если $\omega_0 - \Omega \leq T/\hbar$, причем при $\Omega \gg \omega_0$ $T_e \approx T (1 + 2\gamma_E)$. В точке магнетофононного резонанса температура T_e имеет максимум.

При рассеянии как энергии, так и импульса носителей тока на оптических фононах при низких температурах ($T \ll \hbar \Omega$, $\hbar \omega_0$) $\sigma_{xx} \sim T_e^{-1}$, и поэтому разогрев электронов приводит к минимуму σ_{xx} в резонансе при $\omega_0 = M\Omega$ (M — целое число). Но, с другой стороны, в резонансе плотность электронных состояний имеет особенность, что приводит к увеличению σ_{xx} . Этот последний эффект является следствием линейной теории переноса в слабых полях и не связан с разогревом. Поэтому при разогреве носителей возникающее уменьшение электропроводности σ_{xx} в резонансе может оказаться доминирующим и привести к минимуму, как это вытекает из линейной теории переноса. Минимумы электропроводности экспериментально наблюдали Аксельрод, Луговых, Поморцев и Цидильковский⁴⁹ на горячих электронах n -InSb при температурах 16—30° К, в магнитных полях до 100 кэ и электрических — до 12 в/см (см. также⁴⁶).

Ямада и Куросава⁵⁰ теоретически и экспериментально исследовали поведение электронов в скрещенных полях в n -InSb. Решение кинетического уравнения с учетом рассеяния на оптических фононах они заменили более простой задачей решения диффузионного уравнения в энергетическом пространстве. Их результаты также соответствуют минимумам электропроводности при магнетофононном резонансе. Следует, однако, подчеркнуть, что диффузионное уравнение с интегралом столкновений электронов с оптическими фононами в работе⁵⁰, по существу, не выводится и сделанные приближения трудно оценимы.

В конце этого раздела необходимо остановиться на ограниченности методики нахождения диагонального элемента матрицы плотности из уравнения дифференциального баланса энергии $I(\varepsilon)E = P(\varepsilon)$. В основе этого метода лежит предположение о том, что диагональный элемент матрицы плотности зависит от n и p_z только через энергию $E(n, p_z)$. Это действительно так только в квантовом пределе, когда средняя энергия электрона $T_e \ll \hbar\Omega$ и заполнен практически наинизший уровень Ландау с $n = 0$. В этом случае всеми диагональными элементами матрицы плотности с $n \neq 0$ можно пренебречь, поскольку при больших значениях $(\hbar\Omega/T_e)$ они будут экспоненциально малыми. Таким образом, задача свелась к нахождению только одного диагонального элемента матрицы плотности с $n = 0$ и зависящего только от одной переменной p_z .

Если параметр $\frac{T_e}{\hbar\Omega}$ не мал, необходимо учитывать заполнение нескольких уровней Ландау, и для нахождения матрицы плотности приходится решать сложную систему дифференциальных уравнений. Как можно показать, кинетическое уравнение для диагональных элементов матрицы плотности электронов, взаимодействующих с акустическими фононами и короткодействующими примесями, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} & \sum_{n'=0}^{\bar{n}} \left\{ g_{n'}^{-1}(\varepsilon) \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[\varepsilon g_{n'}^2(\varepsilon) \left(\frac{f_{n'}(\varepsilon)}{T} + \frac{\partial f_{n'}(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right) \right] \right\} + \\ & + \sum_{n'=0}^{\bar{n}} g_{n'}(\varepsilon) [f_{n'}(\varepsilon) - f_n(\varepsilon)] \left[\left(1 + \frac{v_{ei}}{v_{ep}} \right) \frac{1}{2ms^2} + \frac{\hbar\Omega \left(n' + \frac{1}{2} \right)}{2T \left(\varepsilon - \hbar\Omega \left(n' + \frac{1}{2} \right) \right)} \right] + \\ & + \left(\frac{eE}{sB} \right)^2 \frac{\hbar\Omega}{4} \left(1 + \frac{v_{ei}}{v_{ep}} \right) \sum_{n'=0}^{\bar{n}} (1 + n + n') \left\{ g_{n'}^{-1}(\varepsilon) \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[g_{n'}^2(\varepsilon) \frac{\partial f_{n'}(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{3}{4} g_{n'}(\varepsilon) \frac{f_{n'}(\varepsilon) - f_n(\varepsilon)}{\left[\varepsilon - \hbar\Omega \left(n' + \frac{1}{2} \right) \right]^2} \right\} = 0, \quad (7,4) \end{aligned}$$

где $g_n(\varepsilon)$ — плотность электронных состояний, соответствующая уровню Ландау с номером n , в интервале энергий ε , $\varepsilon + d\varepsilon$; \bar{n} — наибольший номер уровня, возможный при данной энергии ε . При выводе (7,4) предполагалось, что рассеяние электронов акустическими колебаниями почти упруго, а смещение уровней Ландау электрическим полем пренебрежимо мало. Уравнение такого типа было получено также Иноуэ и Ямашитой⁵¹ (в фононном интеграле столкновений у них отсутствуют два члена по сравнению с приведенным).

В квантовом пределе (7,4) имеет форму уравнения непрерывности в энергетическом пространстве (7,1), и распределение электронов характеризуется эффективной температурой T_e , определяемой (1,6). Важно отме-

тять, что когда $\frac{T_e}{\hbar\Omega}$ не мал, кинетическое уравнение не сводится к дифференциальной форме (7,1), а распределение электронов приобретает, вообще говоря, осциллирующий характер.

Строгий учет рассеяния на оптических фононах еще более усложняет задачу.

III. РАЗОГРЕВ ЭЛЕКТРОНОВ В ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛЬНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ И КВАНТУЮЩЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЯХ

В этом разделе, так же как и в предыдущем, будет предполагаться, что работа внешнего электрического поля над электроном за время между двумя последовательными столкновениями мала в сравнении с его характерной энергией ε . На длине свободного пробега l в случае $\mathbf{E} \parallel \mathbf{B}$ электрическое поле совершает работу eEl вместо $eE\lambda$ при $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$. Поэтому критерий малости электрического поля в рассматриваемом случае $\mathbf{E} \parallel \mathbf{B}$ имеет вид $\frac{eEl}{\varepsilon} \ll 1$. Этот критерий отличается от соответствующего при $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$ множителем $l/\lambda \sim \Omega\tau \sqrt{T/\hbar\Omega}$, который даже в квантовом пределе ($\hbar\Omega \gg T$) должен быть больше единицы. Для эффективной электронной температуры при $\mathbf{E} \parallel \mathbf{B}$ остается в силе оценка

$$T_e \approx T \left[1 + \left(\frac{eEl}{\varepsilon} \right)^2 \delta^{-1}(T, B) \right],$$

вытекающая из уравнений баланса энергии и импульса.

Для более детального выявления зависимости T_e от параметров системы при различных механизмах релаксации энергии и импульса носителей необходимо обратиться к микроскопическому выводу уравнений баланса.

8. С л у ч а й в ы с о к и х к о н ц е н т р а ц и й э л е к т р о н о в

В этом случае можно вводить понятие эффективной электронной температуры T_e . Для нахождения ее составим уравнение баланса энергии, приравняв джоулеву мощность

$$I_z E_z = \sigma_{zz}(T, T_e, B) E_z^2 \sim \tau(T, T_e, B) E_z^2 \quad (8,1)$$

мощности, передаваемой фононам, P , определенной формулой (3,5). Входящее в σ_{zz} время релаксации $\tau(T, T_e, B)$ можно вычислить с помощью кинетического уравнения

$$eE_z v_z \frac{\partial f_v(T_e)}{\partial E_v} = I_{vv}^r(\varphi) + I_{vv}^i(\varphi), \quad (8,2)$$

в котором интегралы столкновений определены формулами приложения (II,2), (II,4) при $E_x = 0$, а функция распределения f_v выбрана в виде

$$f_v = f_v(T_e) + \varphi_v, \quad (8,3)$$

где $f_v(T_e)$ — максвелловская функция распределения с эффективной электронной температурой T_e , которую надо найти как функцию T , E_z и B ,

$$\varphi_v = - \frac{\partial f_v(T_e)}{\partial E(v)} p_z \tilde{\varphi}(E(v)). \quad (8,4)$$

Умножив кинетическое уравнение (1,2) на $p_z \delta(E(v) - \varepsilon)$ и взяв штур по v , найдем в приближении упругого рассеяния

$$\tilde{\varphi}(\varepsilon) = - \frac{eE_z}{m} \tau(\varepsilon), \quad (8,5)$$

где

$$\tau^{-1}(\varepsilon) = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{qv\mu} |I_{v\mu}^q|^2 (\hbar q_z)^2 \delta[E(v) - \varepsilon] \delta[E(\mu) - \varepsilon] \times \\ \times [|C_q|^2 N_q + |G_q|^2 N_i] \left\{ \sum_v (p_z)^2 \delta[E(v) - \varepsilon] \right\}^{-1}. \quad (8,6)$$

Отсюда следует, что

$$\sigma_{zz} = -e^2 \sum_v (v_z)^2 \frac{\partial f_v(T_e)}{\partial E(v)} \tau(E(v)) = \frac{n_e e^2}{m} \tau(T, T_e, B) = \rho_{\parallel}^{-1}. \quad (8,7)$$

В таблице V приведена зависимость $\tau(T, T_e, B)$ от аргументов в квантовом пределе. Из этой таблицы видно, что джоулева мощность растет с разогревом электронов быстрее, чем мощность (3,15), передаваемая решетке, поэтому возможна перегревная неустойчивость. Для случая рассеяния

Таблица V

Зависимость времени релаксации продольного импульса электронов τ от T , T_e и B (в квантовом пределе). Зависимость эффективной электронной температуры T_e и продольного электросопротивления от T и B

Механизмы релаксации	$\tau(T, T_e, B)$	$\tau_{pp} \ll \tau_{gr}$		$\tau_{pp} \gg \tau_{gr}$	
		$T_e(T, B)$	ρ_L	$T_e(T, B)$	ρ_L
Акустические фононы	$T^{-1} T_e^{1/2} B^{-1}$	$T^5 B^{-5/2}$	$T^{3,5} B^{2,25}$	$T^{-1} B^{-2}$	$T^{3/2} B^2$
Нейтральные примеси	$T^0 T_e^{1/2} B^{-1}$	$T^{-4} B^{-5/2}$	$T^2 B^{2,25}$	$T^0 B^{-2}$	$T^0 B^2$
Ионизированные примеси	$T^0 T_e^{3/2} B^0$	—	—	—	—
Пьезоакустические фононы	$T^{-1} T_e^{1/2} B^0$	$T^{-5} B^{-3/2}$	$T^{3,5} B^{3/4}$	$T^{-1} B^{-1}$	$T^{3/2} B^{1/2}$
Оптические фононы	$T^{-1} T_e^{1/2} B^0$	$T^{-5} B^{-3/2}$	$T^{3,5} B^{3/4}$	$T^{-1} B^{-1}$	$T^{3/2} B^{1/2}$
Оптические фононы ($T \ll \theta_D$)	$T^0 T_e^0 B^0 \times \exp\left(\frac{\hbar\omega_0}{T}\right)$	$T^{-8/3} B^{-1} \times \exp\left(\frac{2\hbar\omega_0}{3T}\right)$	$T^0 B^0 \times \exp\left(-\frac{\hbar\omega_0}{T}\right)$	$T^0 B^{-2/3} \times \exp\left(\frac{2\hbar\omega_0}{3T}\right)$	$T^0 B^0 \times \exp\left(-\frac{\hbar\omega_0}{T}\right)$

При $\tau_{pp} \ll \tau_{gr}$ энергия передается тепловым фононам, а при $\tau_{pp} \gg \tau_{gr}$ — непосредственно окружающей среде через границы образца.

импульса на заряженных примесях, а энергии — на акустических и пьезоэлектрических фононах этот результат был найден впервые Коганом²⁹. Все изложенное имеет силу при условии, что фононная система находится в равновесии.

Разогрев фононов является существенным, и его необходимо принять во внимание, если частота столкновений ДФ с электронами превосходит частоту столкновений ДФ с ТФ. В этом случае температура ДФ равна эффективной температуре электронов T_e (эффект фононного «узкого горла») и перегревная неустойчивость не возникает при любых механизмах релаксации импульса, за исключением ионизированных примесей. В табл. V

приведены зависимости T_e и продольной электропроводности $\rho_{||}$ для двух случаев: ДФ передают энергию ТФ, если $\tau_{pp} \ll \tau_{gr}$, и границам образца, если $\tau_{pp} \gg \tau_{gr}$ при различных механизмах релаксации импульса. Все результаты п. 2 предыдущей главы остаются в силе и для случая $E \parallel B$, если заменить всюду ρ_{\perp} на $\rho_{||}$.

9. Случай низких концентраций электронов

Этот случай при наличии квантующего магнитного поля $B \parallel E$ рассматривался впервые Поморцевым⁵² в предположении термодинамического равновесия фононной системы. Полученные им результаты для всех квазиупругих механизмов рассеяния сводятся к тому, что область квадратичного отклонения от закона Ома оказывается аномально малой. Последнее обусловлено тем, что квазиупругие механизмы рассеяния, рассмотренные в⁵², приводят к так называемому эффекту «убегания» электронов в область больших значений энергии, где становятся существенными сильно неупругие столкновения, которые и стабилизируют функцию распределения электронов, разогретых сильным электрическим полем.

В заключение этого обзора следовало бы обсудить роль эффектов увлечения и излучения фононов сверхзвуковым потоком электронов. Последний эффект экспериментально исследовался Есаки⁵³ на очень чистых монокристаллических образцах висмута, помещенных в скрещенные поля: квантующее магнитное B_z и сильное электрическое поле E_x . При скоростях дрейфа носителей тока $v_{0y} = \frac{cE_x}{B_z}$, меньших скорости звука s в Bi, вольт-амперная характеристика линейна и соответствует омической области. В точке $v_{0y}^* = s$ возникает резкий перелом, и при дальнейшем увеличении E_x ток снова растет пропорционально E_x , только быстрее, чем при $E_x < E_x^*$. Таким образом, вольт-амперная характеристика состоит из двух прямолинейных участков с точкой «перелома», определяемой равенством $\frac{cE_x^*}{B_z} = s$. Аналогичные эксперименты⁵⁴ выполнялись также на висмуте в импульсных полях, причем варьировалась крутизна переднего фронта импульса. При большой крутизне переднего фронта импульса в работе⁵⁴ была наблюдаема «S»-образная вольт-амперная характеристика. По мере уменьшения крутизны переднего фронта импульса «S»-образная характеристика переходила в обнаруженную Есаки⁵³.

К сожалению, последовательной микроскопической теории указанных эффектов в настоящее время еще не существует, хотя можно указать на попытки, предпринимавшиеся в этом направлении⁵⁵⁻⁶⁴.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Интеграл столкновений кулоновских частиц в квантующем магнитном поле изучался в работе Елеонского, Зырянова и Силина²⁰, а также Силиным⁶⁵. В случае невырожденных электронов с учетом эффектов поляризации для этого интеграла можно записать следующую формулу²⁰:

$$I_{vv}^{ec}(f) = \frac{m}{\pi (2\pi\hbar)^2} \sum_{n'_\nu n'_\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z dp_z^\mu \Phi(v, v', \mu, \mu', k_z) \times \\ \times \delta[m\hbar\Omega(n'_\nu + n'_\mu - n_\nu - n_\mu) + (\hbar k_z)^2 + \hbar k_z(p_z^\nu - p_z^\mu)] \times \\ \times [f_{n'_\nu}(p_z^\nu + \hbar k_z) f_{n'_\mu}(p_z^\mu - \hbar k_z) - f_{n_\nu}(p_z^\nu) f_{n_\mu}(p_z^\mu)], \quad (\text{П}, 1)$$

где

$$\Phi(v, v', \mu, \mu', k_z) = \int_0^\infty dk_\perp k_\perp \left| 4\pi e^2 \left[k^2 \epsilon \left(\frac{E_{v'} - E_v}{\hbar} k_z, k_\perp \right) \right]^{-1} \right|^2 \times \\ \times \frac{(\bar{n}_v!)^2 (\bar{n}_\mu!)}{n_v! n_v'! n_\mu! n_\mu'!} \left(\lambda^2 \frac{k_\perp^2}{2} \right)^{|n_v' - n_v| + |n_\mu - n_\mu'|} \exp(-\lambda^2 k_\perp^2) \times \\ \times \left[L_{\bar{n}_v}^{|n_v' - n_v|} \left(\frac{\lambda^2 k_\perp^2}{2} \right) L_{\bar{n}_\mu}^{|n_\mu - n_\mu'|} \left(\frac{\lambda^2 k_\perp^2}{2} \right) \right]^2,$$

$\bar{n}_v = \min(n_v, n_v')$, $L_n^m(t)$ — обобщенный полином Лагерра; $k_\perp^2 = k_x^2 + k_y^2$, $\epsilon(\omega, k_\perp, k_z)$ — продольная диэлектрическая проницаемость электронного газа.

2. Интегралы столкновений электронов с фононами и фононов с электронами в скрещенных квантующем магнитном $B = B_z$ и сильном электрическом $E = E_x$ полях в борновском приближении по электрон-фононному взаимодействию можно записать в виде ⁶⁶

$$I_{vv'}^{ep}(f) = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\kappa q} (1 - \hat{P}_{v\kappa}) |A(q, \kappa, v)|^2 \delta[E(v) - E(\kappa) + \hbar\omega_q + \\ + e\lambda^2 q_y E] \{f_\kappa (1 - f_v) (1 + N_q) - f_v (1 - f_\kappa) N_q\}, \quad (\text{П}, 2)$$

$$I^{pe}(N_q) = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\kappa v} |A(q, \kappa, v)|^2 \delta[E(v) - E(\kappa) + \hbar\omega_q + e\lambda^2 q_y E] \times \\ \times \{f_\kappa (1 - f_v) (N_q + 1) - f_v (1 - f_\kappa) N_q\}, \quad (\text{П}, 3)$$

где оператор $\hat{P}_{v\kappa}$ производит замену $v \leftrightarrow \kappa$, $A(q, \kappa, v) = C_q \langle \kappa | e^{iqr} | v \rangle$ — матричный элемент энергии взаимодействия электронов с фононами, вычисленный по волновым функциям представления Ландау ($v = n, p_z, x_0$), E — суммарное поле, действующее на электрон (включая и холловское).

3. Интеграл столкновений электронов с примесями в линейном приближении по концентрации примесей N_i имеет вид ²⁷

$$I_{vv'}^{ei}(f) = N_i \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\kappa, q} |T(\kappa, v, q)|^2 [f_\kappa - f_v] \delta[E(\kappa) - E(v) - eE\lambda^2 q_y].$$

Здесь $T(v, \kappa, q) = t(E_v) \langle v | e^{iqr} | \kappa \rangle$ — амплитуда рассеяния электрона с энергией E_v на уединенном примесном центре. В борновском приближении

$$|T(v, \kappa, q)|^2 = |V_q|^2 |\langle v | e^{iqr} | \kappa \rangle|^2,$$

где V_q — фурье-компонента примесного потенциала.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гуревич, ФТП 2, 1557 (1968).
2. В. И. Пустовойт, УФН 97, 257 (1969).
3. W. Shockley, Bell Syst. Techn. J. 30, 990 (1951).
4. Э. Конуэлл, Кинетические свойства полупроводников в сильных электрических полях, М., «Мир», 1970.
5. А. Ф. Волков, Ш. М. Коган, УФН 96, 633 (1968).
6. Л. Д. Ландау, А. С. Компанеец, ЖЭТФ 5, 296 (1935).
7. Б. И. Давыдов, ЖЭТФ 6, 463 (1936).
8. Б. И. Давыдов, ЖЭТФ 7, 1069 (1937).
9. Б. И. Давыдов, И. М. Шмушкевич, ЖЭТФ 10, 1043 (1940).
10. E. I. Ryder, W. Shockley, Phys. Rev. 81, 139 (1951).
11. J. B. Gann, J. Electr. 2, 87 (1956).
12. K. Seeger, Phys. Rev. 114, 476 (1956).
13. R. Stratton, Proc. Phys. Soc. A242, 355 (1957).
14. E. M. Conwell, J. Phys. Chem. Sol. 8, 234 (1959).

15. И. М. Дыкман, П. М. Томчук, а) ФТТ 2, 2228 (1960); б) 3, 1909 (1961); в) 4, 1082 (1962).
16. Р. Ф. Казарinov, В. Г. Скобов, ЖЭТФ 42, 1047 (1962).
17. В. Н. Богомолов, С. Г. Шультман, А. Г. Аронов, Г. Е. Пикус, Письма ЖЭТФ 5, 212 (1967).
18. H. Föhlisch, B. V. Raganjare, Proc. Phys. Soc. B69, 21 (1962).
19. А. М. Злобин, П. С. Зырянов, ЖЭТФ 58, 952 (1970).
20. В. М. Елеонский, П. С. Зырянов, В. П. Силин, ЖЭТФ 42, 896 (1962).
21. В. П. Калашников, Р. В. Поморцев, ФММ 17, 343 (1964).
22. D. Scaleski, J. Phys. Chem. Sol. 28, 1409 (1967).
23. В. Ф. Елесин, ЖЭТФ 55, 792 (1968).
24. H. F. Budd, Phys. Rev. 175, 241 (1968).
25. E. Adams, T. Holstein, J. Phys. Chem. Sol. 10, 254 (1959) (см. перевод в сб. «Вопросы квантовой теории необратимых процессов», М., ИЛ, 1961).
26. Л. П. Магарилл, С. К. Саввиных, ЖЭТФ 57, 2079 (1969).
27. J. M. Luttinger, W. Kohn, Phys. Rev. 109, 1892 (1958) (перевод в сб. «Вопросы квантовой теории необратимых процессов», М., ИЛ, 1961).
28. А. М. Злобин, П. С. Зырянов, ФММ 26, 595 (1968).
29. Ш. М. Коган, ФТТ 4, 2474 (1962).
30. А. И. Ансельм, Введение в теорию полупроводников, М., Физматгиз, 1962.
31. А. М. Злобин, П. С. Зырянов, ФММ 26, 961 (1968); Письма ЖЭТФ 8, 484 (1968).
32. А. Э. Гуревич, Т. М. Гасымов, ФТТ 9, 107 (1967).
33. S. Simons, Proc. Phys. Soc. 83, 749 (1964).
34. П. С. Зырянов, Г. Г. Талуц, ЖЭТФ 49, 1942 (1965).
35. Н. Г. Глузман, В. Э. Любимов, И. М. Цидильковский, ФТТ 11, 451 (1969).
36. Н. Г. Глузман, В. Э. Любимов, И. М. Цидильковский, ФТТ 12 (1964) (1970).
37. M. Toda, M. Glicksman, Phys. Rev. 140, 1317 (1965).
38. M. Suzuki, J. Phys. Soc. Japan 26, 385 (1969).
39. Л. Э. Гуревич, Т. М. Гасымов, ФТТ 10, 3258 (1968).
40. А. М. Злобин, П. С. Зырянов, ФММ 27, 961 (1969).
41. Р. В. Поморцев, Г. И. Харус, ФТТ 9, 1473 (1967).
42. Р. В. Поморцев, Г. И. Харус, ФТТ 9, 2870 (1967).
43. В. Л. Гуревич, Ю. А. Фирсов, ЖЭТФ 40, 199 (1961).
44. Т. М. Лифшиц, А. Я. Олейник, А. Я. Шультман, Phys. Stat. Sol. 14, 511 (1966).
45. R. A. Stradling, R. A. Wood, Solid St. Comm. 6, 701 (1968); R. A. Stradling, L. Eaves, R. A. Houlst, A. L. Mears, R. A. Wood, Proceedings of the 10th International Conference on the Physics of Semiconductors, Cambridge, Massachusetts, 1970, стр. 369.
46. N. Kotera, K. F. Komatsubara, E. Yamada, Intern. Conf. on Phys. Semicond., Preprint B, Kyoto, 1966.
47. Н. Miyaзawa, Н. Ikoma, J. Phys. Soc. Japan 23, 290 (1967).
48. А. М. Злобин, ФТП 3, 334 (1969).
49. М. М. Аксельрод, В. П. Луговых, Р. В. Поморцев, И. М. Цидильковский, ФТТ 11, 113 (1969).
50. Е. Ямада, Т. Куросава. Труды IX Международной конференции по физике полупроводников (Москва, 1968 г.).
51. S. Itoh, J. Yamashita, Progr. Theor. Phys. 42, 158 (1969).
52. Р. В. Поморцев, ФТП 1, 1288 (1967).
53. L. Esaki, Phys. Rev. Lett. 8, 4 (1962).
54. Б. С. Борисов, Н. В. Волькенштейн, П. С. Зырянов, Г. Г. Талуц, ФММ 16, 624 (1963).
55. В. П. Калашников, ФТТ 6, 2435 (1964).
56. А. А. Веденов, Е. П. Велихов, ЖЭТФ 43, 1110 (1962).
57. K. Nakamiga, Progr. Theor. Phys. 30, 919 (1963).
58. В. П. Калашников, ФММ 16, 447 (1963).
59. И. А. Чабан, А. А. Чабан, ФТТ 6, 2411 (1964).
60. E. M. Conwell, Phys. Rev. 135, 814 (1964).
61. M. Suffczynski, Physica 31, 1700 (1965).
62. R. Abe, Progr. Theor. Phys. 31 (6), 957 (1964).
63. R. Abe, Progr. Theor. Phys. 30 (2) (1963).
64. E. W. Prohowsky, Phys. Rev. 136 (6A), A1731 (1964).
65. В. П. Силин, ФММ 13, 180 (1962).
66. П. С. Зырянов, Г. И. Гусева, УФН 95, 561 (1969).
67. В. П. Калашников, ФММ 16, 20 (1963).