1971 г. Июнь *Том 104, вып. 2*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

548.0:53

ДИСЛОКАЦИОННАЯ ТЕОРИЯ УПРУГОГО ДВОЙНИКОВАНИЯ КРИСТАЛЛОВ

А. М. Косевич, В. С. Бойко

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 202
1. Модель тонкого двойника 206
2. Некоторые особенности профиля двойника 211
3. Почему упругий двойник тонкий 218
4. Гистерезис при упругом двойниковании 225
5. Двойник в пластине. Экспериментальное определение параметров теории 236
6. Теория И. М. Лифшица и дислокационное описание двойников конечной толщины 245
Цитированная литература 252

Двойникование наряду со скольжением является одним из основных типов пластического деформирования кристаллов. Экспериментальное изучение двойникования в ряде кристаллов может быть проведено очень чистыми методами и довольно точно охарактеризовано количественно. В связи с этим представляется интересным подробный теоретический анализ процесса двойникования, который успешно может быть проделан на основе теории дислокаций. Подробное и последовательное рассмотрение двойников в настоящее время выполнено для стадии упругого двойникования. Исключительность ситуации, реализующейся в случае упругого двойника,— макроскопическое скопление одноименных дислокаций, находящихся в равновесии с внешним упругим полем, а также с силами сопротивления со стороны кристаллической решетки,— позволила, используя сравнительно простую модель, создать количественную дислокационную теорию тонких двойников. В рамках этой теории удалось описать основные закономерности упругого двойникования и получить зависимости, допускающие прямую экспериментальную проверку.

Обсуждаемая ниже теория упругого двойникования носит полумикроскопический характер, поскольку она содержит два феноменологических параметра, точные значения которых не вытекают из самой теории. Однако в настоящее время предложены и реализованы способы определения этих параметров теории путем постановки количественных экспериментов. Поэтому можно считать, что на дислокационном уровне достигнуто сравнительно полное количественное описание пластичности кристалла в случае упругого двойникования. Поскольку в большинстве случаев пластической деформации такое описание отсутствует, а его получение является важнейшей задачей физики прочности и пластичности, то изложение основных теоретических и экспериментальных результатов, полученных при изучении упругого двойникования, представляется нам весьма полезным.

ВВЕДЕНИЕ

Двойником в простейшем случае называют такой дефект кристаллической решетки, который возникает при одновременном существовании в теле двух кристаллических структур, являющихся зеркальным изображением одна другой (рис. 1). Плоскость AA' на рис. 1 (и любая ей параллельная) носит название плоскости двойникования. Естественно, что в кристалле может быть несколько эквивалентных систем плоскостей двойникования.

Мы ограничимся именно этим упрощенным определением двойника, поскольку, с одной стороны, его содержание достаточно для описания качественных особенностей двойникования в общем случае, а с другой стороны, оно является исчерпывающим для двойников в некоторых материалах типа кальцита ($CaCO_3$), натронной селитры ($NaNO_3$), сурьмы и др. Полную кристаллографическую классификацию двойников можно найти в монографии [1].

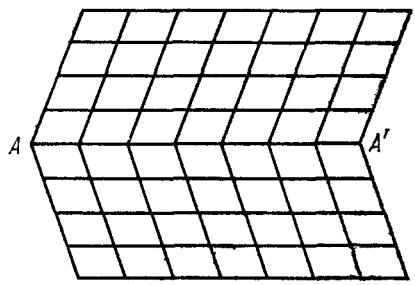


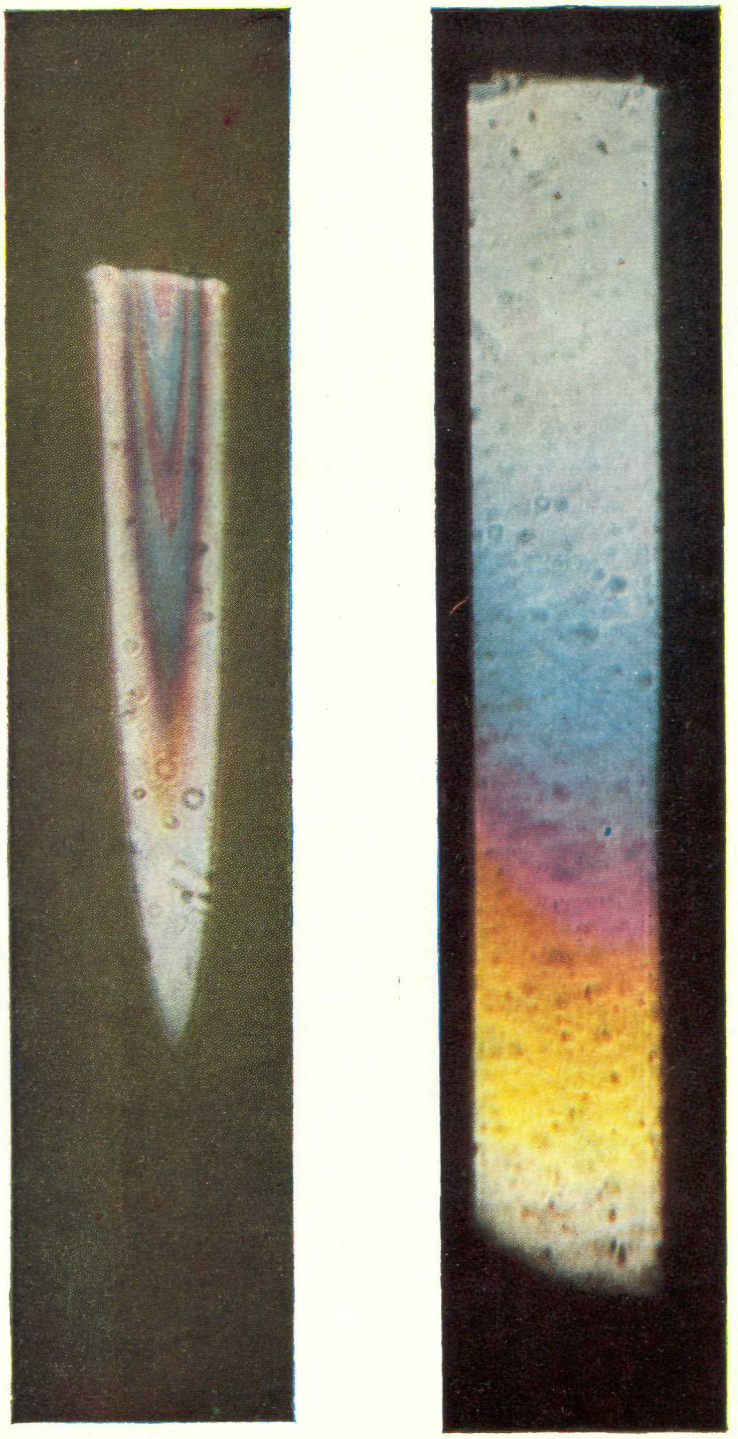
Рис. 1. Схема расположения кристаллических плоскостей у когерентной границы двойника.

Если одна из изображенных на рис. 1 структур занимает незначительную часть объема кристалла, то ее условно называют двойниковой прослойкой, в то время как остальную часть образца — материнским кристаллом. Эти две области кристалла разделены границей двойника. В том случае, когда граница двойника совпадает с плоскостью двойникования, подобно тому как изображено на рис. 1. она называется когерентной границей.

Двойники могут возникать в процессе роста кристалла, при переходе из одной модификации в другую и под влиянием механических воздействий. В дальнейшем нас будет интересовать механическое двойникование, т. е. такой процесс пластической деформации, при котором часть кристалла приобретает двойниковую ориентацию под действием внешней нагрузки. Для экспериментального изучения двойникования наиболее удобны кристаллы, в которых наблюдение этого процесса не затруднено параллельно протекающим скольжением. Классическим объектом для исследования двойникования является кальцит, в котором скольжение при комнатных температурах и обычных нагрузках фактически не наблюдается.

Очень важным этапом двойникования является открытая Гарбером [2] стадия упругого двойникования. Упругим двойникованием обычно называют такой процесс пластической деформации, при котором двойник, возникший в кристалле под действием внешней нагрузки, обратимым образом меняет свои размеры при изменении внешней нагрузки. С ростом нагрузки он увеличивается, а при ослаблении нагрузки — уменьшается, «выходя» из кристалла при снятии нагрузки. Во избежание недоразумений подчеркнем, что слово «упругий» в данном случае не имеет отношения к понятию упругой деформации, так как сам процесс двойникования является одной из реализаций пластической деформации. Термин «упругий двойник» отражает лишь обратимый характер соответствующей деформации кристалла.

Существенным моментом в опытах Гарбера [2-5] явилось применение сосредоточенных нагрузок для создания и удержания упругого двойника в кристалле. До экспериментов Гарбера при двойниковании обычно



а) *б*)

Рис. 2. *а*) Интерференционная окраска упругого двойникового лепестка в кристалле кальцита. *б*) Интерференция на упругом двойнике в кальците, образованном нагрузкой лезвием.

использовали распределенные нагрузки, создающие в кристалле почти однородное упругое поле. В таких условиях двойники удавалось наблюдать только на стадии остаточных двойниковых прослоек (двойниковых слоев, пересекающих весь образец и остающихся в кристалле после снятия нагрузки). В настоящее время ясно (см. гл. 4 настоящего обзора), что для существования упругого двойника необходимо неоднородное достаточно быстро убывающее в глубине кристалла упругое поле. Именно такое поле возникает в результате приложения сосредоточенных нагрузок, которые и использовались в работах [2-5].

Сконцентрированная в малой области поверхности образца внешняя нагрузка создает двойник, имеющий форму тонкого клинообразного лепестка, лежащего в плоскости двойникования (см. рис. 2, *а* на цветной вклейке).

Если нагрузка создается лезвием, то двойник приобретает форму клина, выходящего на боковые поверхности кристалла. Такой двойник в прозрачном кристалле вызывает интерференцию, эквивалентную интерференции на тонком клине (рис. 2, *б*).

При длине упругого двойника, значительно меньшей толщины кристаллического образца, его размеры непрерывно растут с увеличением приложенной нагрузки. В образцах толщиной 1 *см* могут наблюдаться двойниковые лепестки длиной в несколько миллиметров. О толщине упругого двойника можно судить по его интерференционной окраске, которая видна на рис. 2 (цветная вклейка).Упругие двойники большой длины имеют толщину от нескольких десятых долей микрона до нескольких микрон. Следовательно, отношение толщины упругого двойника к его длине обычно порядка $\sim 10^{-4}$—10^{-3}. Наблюдения Гарбера, а также детальные измерения формы упругого двойника в зависимости от величины внешней нагрузки, проведенные Обреимовым и Старцевым [6], показали, что упругий двойник остается очень тонким в течение всего процесса своего роста в кристалле. Этот результат является очень важным экспериментальным фактом, на который существенно опирается излагаемая дислокационная теория двойников.

Если длина двойника становится сравнимой с толщиной кристалла, плавная зависимость его длины от нагрузки нарушается и происходит скачкообразное превращение двойникового лепестка в остаточную прослойку [3].

В том случае, когда внешняя нагрузка начинает уменьшаться до момента образования остаточной двойниковой прослойки, двойник обычно сокращается по мере ослабления нагрузки. Обратимый характер пластической деформации при двойниковании является весьма специфической особенностью этого явления. Физическая причина такой обратимости очень проста: межфазная граница двойник — материнский кристалл обладает определенной поверхностной энергией, порождающей силы поверхностного натяжения, действующие на контур двойника. Именно эти силы после снятия внешней нагрузки могут восстановить первоначальную форму кристалла, «изгнав» из него упругий двойник.

Универсальность явления упругого двойникования как обязательной начальной стадии развития двойника подтверждается фактами обнаружения упругих двойников в натронной селитре [7], сурьме [8], висмуте [9], кремнистом железе [10], цинке [11], а также графите, альбите и т. д. (подробнее см. в [1]).

Открытие явления упругого двойникования, описываемого весьма простой связью между внешними силами и характерными параметрами двойника, не могло не привлечь внимания теоретиков. Работами Владимирского [12] и Лифшица [13,14] была создана макроскопическая теория двойникования. Лифшиц и Обреимов [15], а также Френкель и Конторова [16]

проанализировали процесс двойникования на атомарном уровне. Степанов [17] дал объяснение двойникованию, рассмотрев его как механоориентационный процесс в анизотропном кристалле.

Владимирский [12] рассмотрел упругое двойникование как установление механического равновесия системы, состоящей из кристалла с двойником и внешней нагрузки. В работе [12] существенно использовалось малое отношение толщины двойника к его длине и была дана оценка этого отношения в терминах макроскопических параметров. Однако наиболее важным принципиальным результатом работы [12] является введение понятия двойникующей дислокации и формулировка дислокационной модели двойника. Модель двойникующей дислокации Владимирского, опубликованная им в 1947 г., приведена на рис. 3. Эта дислокация является как бы отдельной ступенькой на когерентной границе двойника, поэтому определенный набор дислокаций может обеспечить любой наклон макроскопической границы двойника к плоскости двойникования. К сожалению, в иностранной литературе утвердилось мнение о том, что модель двойникующей дислокации впервые была предложена Франком и Ван-дер-Мерве [18] в 1949 г., и обычно не упоминается работа Владимирского.

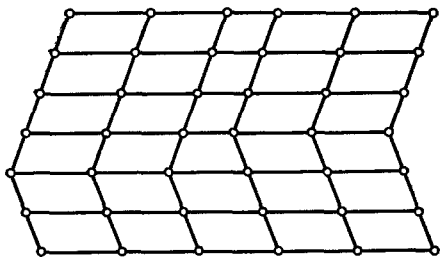


Рис. 3. Модель двойникующей дислокации по Владимирскому [12].

Общая теория плоских макроскопических двойников в неограниченной среде, дающая возможность более полно описать процесс упругого двойникования, была развита И. М. Лифшицем [13,14] на основе нелинейной теории упругости. В работах Лифшица изучалось локальное равновесие двойниковой прослойки при заданных силах, приложенных к границе раздела материнского кристалла и двойника. Было выведено уравнение, описывающее профиль двойника, и получен следующий важный результат: угол раствора конца свободного двойника обязательно равен нулю, т. е. кончик двойникового клина должен быть «бесконечно острым».

Но поскольку силы, действующие на границе двойника, в работах [13,14] не конкретизировались, оставался неясным ряд вопросов, относящихся к равновесной форме двойника, в частности, вопрос об отношении толщины двойника к его длине. Дело в том, что в посылках работ [13,14] не содержится никакого физически малого параметра, который мог бы определить отношение толщины двойника к его длине, а эксперимент всегда дает малую величину такого отношения для упругого двойника.

В работе Лифшица и Обреимова [15] процесс двойникования был подвергнут последовательному рассмотрению на атомарном уровне. Если в макроскопической теории [13,14] предполагалась нелинейная связь напряжений и деформаций, то в работе [15] было сделано предположение о нелинейном характере сил межатомного взаимодействия, которое свелось к введению «двойникующего усилия» (некоторой специальной пары сил). Процесс двойникования происходил как перемещение атомарных ступеней на границе двойника. Описание двойникования в подобных терминах очень близко к использованию атомарной модели двойникующей дислокации, хотя такие понятия в статье [15] не фигурировали. Несмотря на то, что развитый в [15] атомарный подход позволяет рассматривать явление двойникования на микроскопическом уровне, сложность и недостаточная изученность характера сил межатомного взаимодействия не позволяет в рамках такого подхода получить количественные закономерности про-

цесса двойникования. Такие закономерности оказалось возможным получить при использовании дислокационной модели двойникования. Но прежде чем мы перейдем к оправданию дислокационного подхода, следует сказать о полезных для теории выводах, вытекающих из анализа одномерной модели двойникования Френкеля и Конторовой [16]. В этой работе обращено внимание на глубокую аналогию между процессами двойникования и скольжения. Из анализа [16] следует, что в обоих случаях процесс деформации обусловлен постепенным распространением конечного сдвига в решетке. Отличаются эти сдвиги лишь видом перемещающейся конфигурации атомов, осуществляющей нужную перестройку кристаллической решетки. На современном языке это фактически означает, что указанные два вида пластической деформации отличаются только типом соответствующих дислокаций.

Прямые экспериментальные доказательства дислокационного строения границы двойника были получены сравнительно недавно, после того как достигла высокого уровня методика избирательного травления. Сам вопрос о доказательстве дислокационной структуры границы двойник — материнский кристалл возник потому, что в принципе возможно представить себе существование широкой пограничной области, в которой происходил бы непрерывный переход от кристаллической решетки исходного кристалла к его двойниковой модификации. Именно такая точка зрения была выдвинута в работе Конторовой [19], где по аналогии с рассмотрением границы раздела между доменами в ферромагнетике обсуждался вопрос о толщине двойниковой границы. Однако травление поверхности образца кальцита, на которую выходит граница упругого двойника [20], показало, что эта граница состоит из протяженных когерентных участков, слабо протравленных в виде узких канавок, и отдельных характерных для дислокаций глубоких ямок травления, находящихся на расстоянии нескольких микрон друг от друга. Следы этих дефектов исчезают после выхода упругого двойника из кристалла. Наблюдение этим же методом характерных для дислокаций фигур травления на границе остаточного двойника было проведено в работах [21–23,87]. Наиболее убедительное доказательство связи этих фигур травления в кальците с двойникующими дислокациями получено в опытах [23], где, в частности, наблюдалось перемещение этих дефектов под действием механических нагрузок. Прямые наблюдения двойникующих дислокаций в сурьме описаны в работе [24], где было показано, что дислокации расположены в границе двойника на расстояниях порядка микрона. После перечисленных публикаций стали известны результаты ряда работ, в которых наблюдение двойникующих дислокаций производилось иными методами (электронно-микроскопически [25], методами рентгеновской топографии [26] и др.) Таким образом, мы считаем, что в настоящее время нет сомнения в дислокационной структуре границы двойника.

В дислокационной модели задача о форме двойника во внешнем упругом поле сводится к задаче о равновесии некоторого скопления однотипных дислокаций. В случае тонкого двойника можно говорить о двойникующих дислокациях, расположенных в одной плоскости скольжения. Тогда мы приходим к проблеме плоского скопления дислокаций, которая многократно обсуждалась в литературе [27,28,29]. Но при таком упрощении задачи она становится аналогичной другим дислокационным проблемам пластичности, в частности, проблеме полос скольжения [30] или тонких трещин [31]. Более того, оказывается, что дислокационное описание тонкой трещины [32] приводит к основным уравнениям так называемой силовой теории трещин, развивавшейся Баренблаттом (см. обзор [33]) и вовсе не использовавшей представлений о дислокациях. Сходство описания

пластической деформации при двойниковании или скольжении и разрушении кристалла при развитии трещин обусловлено следующим физическим обстоятельством. В кристаллической решетке с ее огромными силами связи между атомами кинетика указанных неупругих деформаций кристалла обязательно должна включать локализацию фронта развития процесса в небольшой области и некоторую постепенность его распространения.

В силу аналогии дислокационных моделей тонкого двойника, незавершенной полосы скольжения и тонкой трещины распределение дислокаций вдоль таких макроскопических дефектов подчиняется одним и тем же закономерностям (отличаются лишь векторы Бюргерса соответствующих дислокаций и силы, действующие на дислокацию со стороны кристалла). Более того, в каком-то смысле незавершенная полоса скольжения и тонкая трещина являются предельными случаями тонкого двойника. Обсуждение этой ситуации содержится в обзоре одного из авторов [34] и будет повторено в соответствующих местах нижеследующего изложения.

1. МОДЕЛЬ ТОНКОГО ДВОЙНИКА

Рассмотрим упругий двойник у поверхности кристалла. Разрез такого двойникового клина, след плоскости двойникования которого совпадает с осью X, схематически изображен на рис. 4. Наклонные параллельные

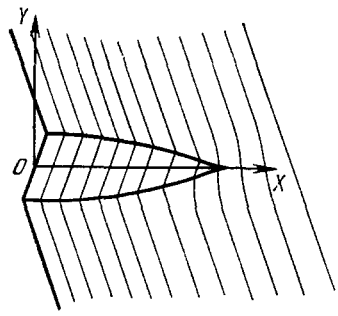


Рис. 4. Двойник у поверхности тела.

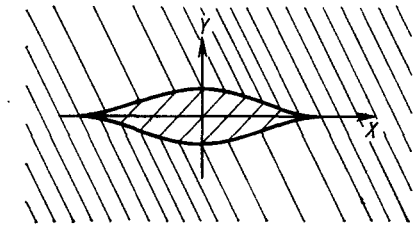


Рис. 5. Двойник в неограниченной среде.

прямые на схеме указывают ориентацию атомных плоскостей в двойниковой прослойке и в материнском кристалле. В том случае, когда двойникование производится нагрузкой бесконечно длинным лезвием, действующим на поверхность кристалла по прямой, параллельной оси Z (перпендикулярной плоскости рисунка), возникающий двойник бесконечно протяжен вдоль оси Z. Описание подобного двойника сводится к заданию его профиля в плоскости XOY, и соответствующая математическая задача о равновесии подобного двойника сводится к плоской задаче теории упругости. В связи с последним такой двойник будем называть плоским. Однако следует иметь в виду, что обычно возникающие у поверхности кристалла двойники создаются сосредоточенной нагрузкой, а потому не являются плоскими. При определенной концентрации напряжений двойник, вообще говоря, может возникнуть не у поверхности, а в глубине кристалла [35,36]. На рис. 5 показана схема разреза двойника внутри кристалла.

Приступая к дислокационному описанию двойника и стараясь сделать ясной исходную модель, представим себе «одноатомную двойниковую прослойку», набором которых реализуется макроскопический двойник. Схема разреза такой прослойки, сделанная в духе общепринятых атомных

дислокационных схем, представлена на рис. 6. Одноатомный двойник заканчивается частичной дислокацией, линия которой проходит через заштрихованную на рисунке область. Составляющая вектора Бюргерса **b** в плоскости XOY изображена на рис. 6, а ее величина, очевидно, равна $b = 2a \operatorname{tg} \alpha$ (2α — угол двойникования).

Легко видеть, что двойниковая граница может быть реализована определенным набором двойникующих дислокаций типа изображенной на рис. 3, расположенных по контуру двойниковой прослойки (рис. 7).

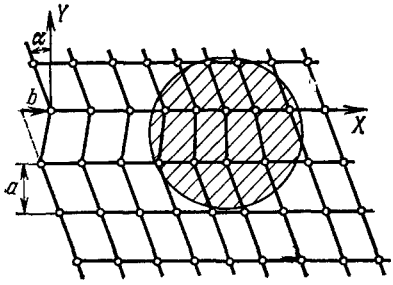


Рис. 6. Одноатомная двойниковая прослойка в кристалле.

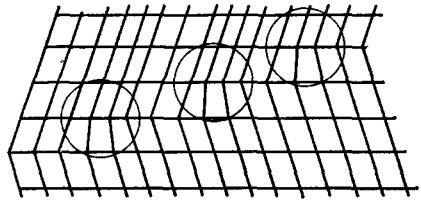


Рис. 7. Дислокационная модель границы двойника.

Переходя к условному изображению дислокаций, двойник на рис. 4 можно заменить совокупностью двойникующих дислокаций, представленной на рис. 8. Толщина двойника у выхода на поверхность h равна произведению полного числа дислокаций N, образующих двойник, и расстояния a:

$$h = Na.$$

Величина ступеньки δ, возникающей на поверхности кристалла при двойниковании, подобным же образом связана с N и с вектором Бюргерса **b**.

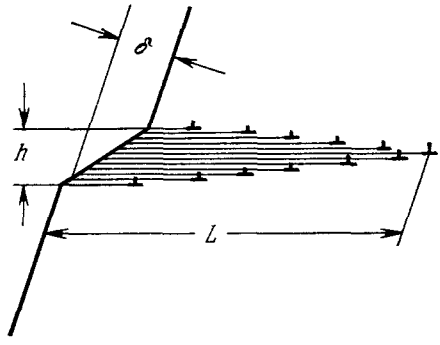


Рис. 8. Двойник как совокупность дислокаций.

В случае тонкого двойника, как было показано еще Владимирским [12], среднее расстояние между дислокациями вдоль длины двойника порядка 1 *мкм*. Таким образом, это расстояние примерно в 10 000 раз превышает межатомное расстояние, которое разделяет плоскости скольжения соседних двойникующих дислокаций. Очевидно, что среднее расстояние между дислокациями, выраженное в межатомных расстояниях, определяет порядок величины отношения длины двойника к его толщине, т. е. отношение $\frac{L}{h}$. Поэтому в основном по малому параметру $\frac{h}{L}$ приближении все дислокации можно считать расположенными в одной плоскости (плоскости двойникования) [37]. На рис. 9 условно изображен ряд дислокаций, соответствующих двойнику длины L. Прямую линию, вдоль которой расположены дислокации и которая является следом плоскости двойникования, обычно называют линией двойникования.

Будем считать двойник плоским, а ось X совпадающей с линией двойникования, наклоненной под углом θ к поверхности образца (рис. 9). Такой двойник образован скоплением прямолинейных дислокаций,

параллельных оси Z. Предположим, что в некоторой точке $x = a_0$ у поверхности образца имеется источник прямолинейных двойникующих дислокаций, способный под действием внешней нагрузки создавать нужное количество дислокаций. Точку расположения источника дислокаций мы будем считать удаленной от поверхности на расстояние, которое по порядку величины не может быть меньше ступеньки δ, образованной при двойниковании на поверхности кристалла. Последнее связано с тем, что в процессе образования двойника область выхода плоскости двойникования на поверхность кристалла может быть подвергнута искажениям недислокационного типа. Линейные размеры этой области порядка δ. Поскольку именно в этой области происходит зарождение двойникующих дислокаций, а механизм их образования интересовать нас не будет, то достаточно положить, что дислокации попарно «рождаются» в точке $x = a_0$, где $a_0 \gg \delta$. В силу закона сохранения вектора Бюргерса одновременно рождаются дислокации противоположного знака, причем число положительных дислокаций равно числу отрицательных. Мы будем считать внешнюю нагрузку такой, что под ее действием отрицательные дислокации выходят на поверхность кристалла, создавая на ней характерную ступеньку, а положительные — перемещаются в область $a_0 < x < L$, где создают двойниковый клин.

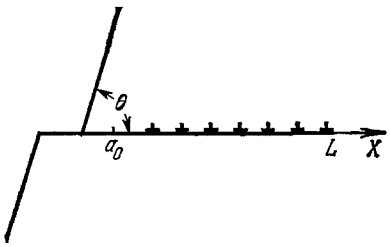


Рис. 9. Дислокационная модель тонкого двойника.

О макроскопическом двойнике имеет смысл говорить лишь тогда, когда число образовавшихся двойникующих дислокаций велико, а длина двойника значительна (в эксперименте часто число дислокаций, приходящихся на 1 *см* длины двойника, достигает величины порядка 10^4 при длине двойника порядка нескольких *мм*). Но в таком случае распределение дислокаций можно описывать плотностью, являющейся непрерывной функцией x и обозначаемой в дальнейшем $\rho(x)$. Толщина двойника $h(x)$ в некоторой точке x очевидным образом связана с плотностью дислокаций:

$$h(x) = a \int_x^L \rho(\xi)\, d\xi. \tag{1,1}$$

Из (1,1) следует, что функция $\rho(x)$ всегда должна удовлетворять условию

$$\int_{a_0}^L \rho(x)\, dx = \frac{\delta}{b} = \frac{h}{a} = N, \tag{1,2}$$

где, как мы уже отмечали, N — полное число двойникующих дислокаций одного знака, а δ — полный сдвиг по линии двойникования на поверхности тела.

Распределение дислокаций вдоль упругого двойника не может быть произвольным, а определяется условием равновесия кристалла с двойником под действием внешних нагрузок. Совершенно ясно, что подобное равновесное распределение определяется в виде решения некоторой вариационной проблемы. Однако легко сформулировать условие равновесия двойника, не формулируя вариационного принципа, а используя весьма простые физические соображения. Действительно, известно, что воздействие на дислокацию в кристалле может описываться в терминах действующих на нее сил. Поэтому условие равновесия системы дислокаций можно записать в виде равенства нулю всех сил, действующих на каж-

дую дислокацию. При составлении подобного условия следует иметь в виду, что на дислокацию в кристалле действуют силы двух типов: сила упругого происхождения (сила Пича — Келера), учитывающая упругие поля, созданные как внешними нагрузками, так и остальными дислокациями в кристалле, и сила неупругого происхождения (типа сил Пайерлса и сил поверхностного натяжения), препятствующая свободному «скольжению» дислокации в кристалле.

Интересуясь в основном качественными физическими результатами, мы будем анализировать те ситуации, которые приводят к наиболее простым математическим выражениям, но обладают достаточной общностью. Идя по этому пути, мы сделаем прежде всего предположение о том, что все дислокации в двойнике являются либо чисто краевыми, либо чисто винтовыми дислокациями. Тогда вектор Бюргерса рассматриваемых дислокаций будет иметь только одну составляющую ($b = b_x$ для краевой и $b = b_z$ для винтовой дислокации). Далее, поскольку в какой-то мере свободное перемещение рассматриваемых дислокаций может происходить только в плоскости двойникования, то достаточно рассмотреть составляющие интересующих нас сил только вдоль оси X. В дальнейшем проекция силы на ось X будет обозначаться без указания индекса оси.

Упругая сила, действующая на единицу длины некоторой дислокации со стороны внешнего поля и других дислокаций, образующих двойник, равна (см. формулу Пича — Келера в [32])

$$f^{\text{уп}}(x) = b\sigma^e(x) + b \int\limits_{a_0}^{L} \sigma^0(x, \xi)\, \rho(\xi)\, d\xi, \tag{1,3}$$

где $\sigma(x)$ — это соответствующая компонента тензора упругих напряжений, причем $\sigma^e(x)$ — напряжения, созданные внешними нагрузками, а $\sigma^0(x, \xi)$ — напряжения, созданные в точке x на линии двойникования отдельной дислокацией, расположенной в точке ξ этой же линии.

Интеграл в (1,3) понимается в смысле главного значения, что с одной стороны исключает учет самодействия рассматриваемой дислокации, а с другой — делает разумным указанное интегрирование, так как функция $\sigma^0(x, \xi)$ обладает особенностью при совпадении ее аргументов (она имеет особенность типа особенности функции Грина).

В неограниченном однородном кристалле всегда можно записать

$$\sigma^0(x, \xi) = \frac{B}{x-\xi},$$

где коэффициент B имеет порядок величины произведения модуля сдвига μ и величины вектора Бюргерса ($B \sim \mu b$), а его конкретное значение определяется анизотропией среды [38]. В изотропной среде для краевой и винтовой дислокаций имеем соответственно

$$B_{\text{кр}} = \frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)}, \quad B_{\text{винт}} = \frac{\mu b}{2\pi},$$

где ν — коэффициент Пуассона.

Для дислокации в ограниченном кристалле имеем

$$\sigma^0(x, \xi) = B\left[\frac{1}{x-\xi} + K(x, \xi)\right],$$

где функция двух переменных $K(x, \xi)$ имеет весьма громоздкий вид, однако не обладает особенностью при $x = \xi$. В случае полуограниченного однородного кристалла ее выражение может быть получено на основании результатов работы [39] для изотропной среды или работы [40] для анизотропной среды.

Сила неупругого происхождения состоит из двух существенно разных частей. Во-первых, любая дислокация (как двойникующая, так и полная) испытывает силу торможения, подобную силе сухого трения. Эта сила, существующая даже в идеальном кристалле и обусловленная дискретностью строения кристаллической решетки, впервые была проанализирована Пайерлсом [41], а затем Набарро [42].

Если двойники распространяются в дефектном кристалле, то действующая на дислокацию эффективная сила торможения, кроме силы Пайерлса, включает силу сопротивления, обусловленную распределенными в образце дефектами. Дефекты оказывают как непосредственное воздействие на дислокации, препятствуя их огибанию, пересечению и т. п., так и сопротивление, описываемое их упругими полями. Чтобы подчеркнуть то обстоятельство, что описанная сила имеет слагаемые, отличные от силы Пайерлса, мы будем называть ее в дальнейшем просто силой трения. Величина и направление этой силы в равновесии зависит от направления движения дислокации, предшествовавшего равновесию, так как она включает в себя диссипативную силу, всегда направленную против движения. Поэтому вид силы неупругого происхождения зависит в значительной мере от способа образования двойника *). Мы будем предполагать, что она направлена против движения, и в пределе бесконечно малой скорости равна постоянной, отличной от нуля величине.

Во-вторых, сила неупругого происхождения включает в себя силу поверхностного натяжения, действующую на двойникующую дислокацию со стороны материнского кристалла вдоль плоскости двойникования перпендикулярно линии дислокации. Эта сила обусловлена тем, что двойникующая дислокация, в отличие от полной, при своем движении порождает некоторый плоский дефект упаковки («одноатомную двойниковую прослойку», изображенную на рис. 6), образование которого связано с дополнительной поверхностной энергией. Очевидно, что действие такой силы испытывают лишь дислокации, расположенные только на конце двойника. В самом деле, добавление одной дислокации в той части двойника, ширина которой имеет макроскопические размеры, практически не меняет площадь поверхности раздела материнского и сдвойникованного кристалла и не изменяет существенно поверхностную энергию. В то же время добавление одной дислокации у острия двойника, где границы раздела удалены друг от друга на несколько атомных слоев, может значительно изменить соответствующую поверхностную энергию. Это предположение подтверждается качественным рассмотрением [43]. В работе [43] показано, что межфазная поверхностная энергия в двойнике существенно уменьшается с увеличением числа атомных слоев, перешедших в двойниковое положение. В частности, оказывается, что уже трехслойный двойник практически можно рассматривать как таковой, обладающий двумя когерентными двойниковыми границами, тогда как однослойный двойник является значительно более сильно нарушенной областью кристалла с высокой энергией дефекта.

Различие в характере искажений кристалла, порождаемых дислокациями на кончике двойника (головными дислокациями скопления) и дислокациями на двойниковой границе, можно усмотреть при сравнении схемы рис. 6, соответствующей головной дислокации (дислокации типа Шокли), и схемы рис. 3 для двойникующей дислокации.

Указанные особенности поверхностного натяжения мы учтем, предположив, что эта часть силы неупругого происхождения равна нулю

*) Как мы увидим ниже, зависимость этой силы от характера движения, предшествовавшего равновесию, является причиной гистерезиса, имеющего место в процессе упругого двойникования.

везде вне малой окрестности у конца двойника и резко возрастает по величине у конца, достигая некоторого большого конечного значения на самом конце двойника. Введение такой силы аналогично введению «модуля сцепления» у концов тонкой трещины [33], но имеет другую физическую природу.

Условие равновесия дислокации в точке x под действием всех перечисленных выше сил эквивалентно требованию

$$f^{\text{уп}}(x) + f^{\text{неуп}}(x) = 0, \quad f^{\text{неуп}}(x) = bS(x), \tag{1,4}$$

где $S(x)$ обозначает напряжения на линии двойникования, эквивалентные наличию сил неупругого происхождения.

После выделения характерной сингулярной части ядра $\sigma^0(x, \xi)$ соотношение (1,4) может быть записано в виде

$$\fint_{a_0}^{L} \frac{\rho(\xi)\, d\xi}{\xi - x} - \int_{a_0}^{L} K(x, \xi)\, \rho(\xi)\, d\xi = \frac{1}{B}[\sigma(x) + S(x)] \equiv \omega(x). \tag{1,5}$$

Если поле внешних нагрузок и зависимость сил неупругого происхождения от координаты x считаются известными, то соотношение (1,5) может рассматриваться как уравнение для нахождения функции $\rho(x)$ по заданной функции $\omega(x)$. Заметим, что оно является сингулярным интегральным уравнением.

Таким образом, анализ плотности дислокаций $\rho(x)$, а значит, и профиля двойника сводится к исследованию математической проблемы, представленной уравнением (1,5). Ядро рассматриваемого уравнения имеет особенность типа особенности ядра Коши, поэтому качественное исследование его решения довольно подробно можно произвести в общем случае [44].

2. НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ПРОФИЛЯ ДВОЙНИКА

Мы уже отмечали, что профиль плоского двойника полностью описывается функцией $\rho(x)$. Поэтому качественное изучение его формы сводится фактически к анализу уравнения равновесия, выводом которого была закончена предыдущая глава.

Явный вид уравнения равновесия двойника в некотором кристаллическом образце определенной формы получается подстановкой в (1,5) конкретного выражения для $K(x, \xi)$. Ядро $K(x, \xi)$ существенно зависит от анизотропии среды, угла θ (см. рис. 9) и удаления двойникующих дислокаций от поверхности кристалла *).

Мы не можем дать замкнутое аналитическое представление решения уравнения (1,5) при произвольном ядре $K(x, \xi)$. Однако даже в общем случае можно сделать ряд физически важных качественных выводов, относящихся к характеристике равновесного распределения дислокаций $\rho(x)$.

---

*) Для справок мы приведем краткий перечень работ, посвященных явной записи уравнения (1,5) и изучению особенностей формы двойника на основе этого уравнения в ряде специальных случаев. В работах [45, 46] рассматривался двойник в неограниченной изотропной среде, в работе [47] — в неограниченной анизотропной среде. Двойник, перпендикулярный плоской поверхности изотропного тела, подробно изучен в [48, 49, 50]. В работе [51] рассмотрен двойник, плоскость двойникования которого расположена под произвольным углом к поверхности изотропного тела, там же приведены уравнения для случая, когда двойник расположен на некоторой глубине под поверхностью изотропного тела. Работа [40] посвящена двойнику у плоской поверхности анизотропной среды. В работах [52, 53] рассмотрен двойник в изотропной плоскопараллельной пластине, а в [54] — двойник вблизи границы двух анизотропных сред с разными упругими модулями.

Прежде всего заметим, что при $L - a_0 \ll L \sim a_0$, когда источник дислокаций находится далеко в глубине кристалла и поля напряжений дислокаций почти не отличаются от полей напряжений в неограниченном кристалле, уравнение (1,5) переходит в уравнение равновесия тонкого двойника, полученное впервые Лифшицем [13]:

$$\int_{a_0}^{L} \frac{\rho(\xi)\, d\xi}{\xi - x} = \omega(x). \tag{2,1}$$

Определение функции $\omega(x)$ дано в (1,5). Следует только отметить, что в предлагаемой здесь записи уравнения (2,1) сила $\omega(x)$ имеет вполне конкретный вид и, в частности, явно включает силы неупругого происхождения, чего не было в уравнении работ [13, 14].

Важным результатом работы [13], касающимся формы двойника, был вывод о том, что кончик свободного двойникового клина имеет нулевой угол раствора (противоположные границы двойника касаются друг друга

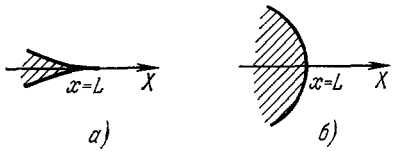


Рис. 10. Форма конца упругого двойника в глубине кристалла.
а) Конец свободен; б) конец застопорен.

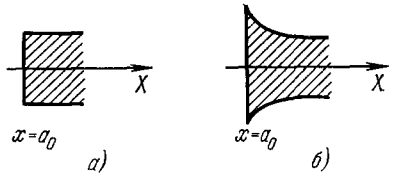


Рис. 11. Форма двойника у выхода на поверхность кристалла.
а) Поверхность кристалла свободна; б) на поверхности имеется стопор, препятствующий выходу дислокаций при разгрузке.

на его конце). Аналогичный вывод естественно может быть сделан на основании уравнения (1,5) и в общем случае, т. е. для двойника в кристаллическом образце любой формы при произвольной анизотропии. Достаточно заметить, что двойник может увеличивать свою длину при росте внешней нагрузки лишь в том случае, когда действующие на его кончик силы торможения ограничены. Но в таком случае величина $\omega(L)$ должна быть конечной, а потому первое слагаемое левой части уравнения (1,5) в соответствующей точке

$$\int_{a_0}^{L} \frac{\rho(\xi)\, d\xi}{\xi - L}$$

также должно быть ограниченным. Для выполнения этого требования необходимо, чтобы $\rho(\xi) \to 0$ при $\xi \to L$. Из физического смысла функции $\rho(x)$, определяемого соотношением (1,1), следует, что условие $\rho(L) = 0$ делает кончик двойника бесконечно острым, т. е. требует, чтобы угол раствора профиля у конца двойника был равен нулю. Профиль конца двойника в этом случае схематически изображен на рис. 10, *а*.

Те же соображения относятся к точке $x = a_0$; если двойник удерживается в кристалле только силой приложенных к поверхности напряжений ($\omega(a_0)$ ограничена), то $\rho(a_0) = 0$. Обычно все двойникующие дислокации «зарождаются» на поверхности тела (в точке $x = a_0$, являющейся единственным источником дислокаций) и под возрастающей нагрузкой лишь перемещаются по оси X. Тогда в интервале $a_0 < x < L$ имеются лишь дислокации одного знака ($\rho(x) \geqslant 0$) и условие $\rho(a_0) = 0$ означает, что двойник выходит на поверхность тела в виде плоскопараллельной прослойки (рис. 11, *а*).

Если двойник свободен, т. е. если сдерживающие его силы ограничены на обоих концах двойника ($\rho(a_0) = \rho(L) = 0$), то остается открытым вопрос о его длине. Для составления математического условия, которое определит длину двойника, проще всего воспользоваться некоторыми формальными результатами теории сингулярных интегральных уравнений. Известно [44], что уравнение типа (1,5) имеет обращающееся в нуль на обоих концах интервала (a_0, L) решение лишь в том случае, когда правая часть этого уравнения $\omega(x)$ удовлетворяет специальному условию ортогональности:

$$\int_{a_0}^{L} \omega(x)\,\rho_0(x)\,dx = 0, \tag{2,2}$$

где $\rho_0(x)$ — решение однородного уравнения, сопряженного уравнению (1,5) *). Физический смысл условия (2,2) довольно прост [32] — оно выражает требование ограниченности напряжений, вызываемых в кристалле свободным двойником.

Поскольку функция $\rho_0(x)$ однозначно определяется ядром интегрального уравнения (естественно, с точностью до произвольного множителя), то соотношение (2,2) является условием для определения длины двойника. В простейшем случае двойника в неограниченной однородной среде это условие принимает следующую форму [32]:

$$\int_{a_0}^{L} \frac{\omega(x)\,dx}{\sqrt{(L-x)(x-a_0)}} = 0. \tag{2,3}$$

До сих пор шла речь о свободных упругих двойниках. Однако в кристалле могут возникнуть условия, при которых развитие двойника стопорится некоторыми препятствиями в глубине образца. Такие препятствия, останавливающие скольжение двойникующих дислокаций, мы будем называть стопорами. Простейшими примерами плоского стопора могут служить остаточная двойниковая прослойка другой системы двойникования [55, 36], граница кристаллического зерна [56], межфазная граница. В таком случае рост внешней нагрузки не приводит к изменению длины двойника, достигшего в своем развитии стопора. Поэтому длина двойника может считаться фиксированной при практически произвольных внешних нагрузках. Соотношение (1,2) определяет в такой ситуации полное число двойникующих дислокаций одного знака, порожденное заданной внешней нагрузкой (или толщину двойника у его выхода на поверхность).

Поскольку в этом случае условие (2,2), вообще говоря, не выполняется, то из теории сингулярных интегральных уравнений [44] следует, что $\rho(L)$ становится неограниченным. Учет стопора в уравнении (1,5) можно произвести, введя в качестве силы торможения некоторую силу, сосредоточенную в точке $x = L$. Наличие подобной точечной силы приводит к особенности функции $\rho(x)$ в указанной точке ($\rho(L) = \infty$). Геометрический смысл этого свойства функции $\rho(x)$ сводится к тому, что угол раствора профиля двойника у его конца равен 180° (рис. 10, *б*).

Естественно, представленный на рис. 10,*б* контур двойника, а также буквальная формулировка утверждения, на основании которого он построен, должны пониматься в условном смысле. Предлагаемая теория

---

*) Однородное уравнение, сопряженное интегральному уравнению $\int_{a_0}^{L} K(x, \xi)\,\rho(x)\,dx = 0$, имеет вид $\int_{a_0}^{L} K(\xi, x)\,\rho_0(x)\,dx = 0$.

тонких двойников исходит из предположения, что среднее расстояние между соседними дислокациями значительно больше величины вектора Бюргерса ($b\rho(x) \ll 1$). Формально это предположение нарушается в непосредственной окрестности стопора, и последовательное рассмотрение задачи, вообще говоря, должно основываться на анализе равновесия дискретного ряда дислокаций, расположенных в параллельных плоскостях двойникования. Подобная проблема была обсуждена в работе Эшелби, Франка и Набарро [27] применительно к скоплению дислокаций в одной плоскости скольжения, сдерживаемому стопором. Из результатов работы [27] вытекает, что при большом числе дислокаций в скоплении распределение практически всех дислокаций (исключая несколько дислокаций у самого стопора) мало отличается от того, которое следует из континуального рассмотрения. А поскольку макроскопическая теория не может претендовать на точное определение координат ближайших к стопору дислокаций скопления, то в рамках применимости макроскопического подхода соответствующие выводы являются непротиворечивыми. Правда, положение усложняется тем, что в случае двойникования дислокации находятся в параллельных плоскостях «скольжения» (образуют «разноэтажное» скопление). Но даже в этом случае можно надеяться, что вплоть до расстояний, на которых $b\rho(x) \sim 1$, качественное поведение функции $\rho = \rho(x)$ не будет отличаться от того, которое мы предсказываем на основании анализа уравнений равновесия тонкого двойника. Таким образом, излагаемая теория «не несет ответственности» за точный вид контура двойника на рис. 10, *б* лишь в непосредственной близости от конца двойника, где $b\rho(x) > 1$.

Может иметь место и другая ситуация, а именно, может случиться, что при некоторой внешней нагрузке зарождение дислокаций в точке $x = a_0$ прекратится. Этим самым будет зафиксирована толщина двойника у выхода на поверхность, или, что то же, величина δ. Если к тому же по какой-либо причине на поверхности тела образуется стопор для двойникующих дислокаций, то при разгрузке в точке $x = a_0$ появляется сосредоточенная сила, сдерживающая выходящие из кристалла дислокации. Тогда у функции $\rho(x)$ появится особенность в этой точке, и профиль двойника будет иметь в этой области форму, показанную на рис. 11, *б*.

Мы не будем приводить громоздких выражений для функции $\rho(x)$, получаемых выбором различных решений (1,5), отвечающих наличию или отсутствию стопоров в точках $x = a_0$ и $x = L$ (соответствующие выражения можно найти, например, в работе [32]). Как пример подробного анализа формы двойника в процессе его эволюции мы рассмотрим лишь простейший случай, когда все качественное описание может быть проиллюстрировано замкнутыми аналитическими выражениями. Допустим, что двойник, линия двойникования которого перпендикулярна плоской поверхности кристалла, образован винтовыми дислокациями. Тогда ядро $K(x, \xi)$ имеет весьма простой вид

$$K(x, \xi) = \frac{1}{x-\xi} - \frac{1}{x+\xi}, \tag{2,4}$$

что соответствует возникновению силы зеркального изображения для винтовой дислокации у поверхности кристалла. При таком ядре уравнение (1,5) сводится к следующему сингулярному уравнению:

$$\fint_{a_0}^{L} \frac{\rho(\xi)\,\xi\,d\xi}{\xi^2 - x^2} = \frac{1}{2}\,\omega(x), \tag{2,5}$$

явная запись решения которого уже не представляет труда.

Будем считать, что вначале свободный упругий двойник при своем росте встречает стопор в точке $x = a_2$ на линии двойникования (рис. 12). Может случиться, что под действием внешней нагрузки источник дислокаций в точке $x = a_0$ способен испустить число дислокаций, не превышающее конечного значения N. Тогда при условии

$$\int_{a_0}^{L} \rho(x)\, dx < N$$

длина двойника определяется соотношением (2,2), а сама функция $\rho(x)$ имеет вид

$$\rho(x) = -\frac{2}{\pi^2}\sqrt{(L^2-x^2)(x^2-a_0^2)}\oint_{a_0}^{L}\frac{\omega(\xi)\,\xi\, d\xi}{(\xi^2-x^2)\sqrt{(L^2-\xi^2)(\xi^2-a_0^2)}}. \qquad (2,6)$$

Следует ожидать, что с ростом нагрузки длина двойника будет возрастать (позднее мы убедимся в справедливости этого). Предположим, что источник дислокаций «иссякнет» раньше, чем конец двойника достигнет стопора. Тогда при дальнейшем росте внешней нагрузки для этого двойника, как для любого свободного двойника, должны выполняться условия типа (1,2) и (2,2) при заданном N. Легко сообразить, что когда значение a_0 фиксировано, эти математические условия не могут, вообще говоря, выполняться одновременно. Это и значит, что на части линии двойникования вблизи источника ($x = a_0$) дислокации должны полностью отсутствовать:

$$\rho(x) = 0, \qquad a_0 < x < a_1,$$

где точка $x = a_1$ определяет правую границу указанного интервала. Следовательно, на участке ($a_0 < x < a_1$) двойник имеет вид плоскопараллельной прослойки (рис. 12, *б*). Правее точки $x = a_1$ плотность дислокаций $\rho(x)$ определяется формулой типа (2,6) с заменой значения a_0 на a_1. Величина a_1 и длина двойника L определяются теперь формулами типа (1,2) и (2,2), в которых снова следует заменить a_0 на a_1.

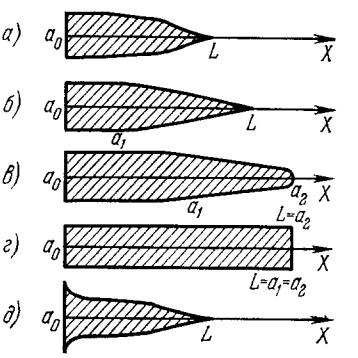


Рис. 12. Эволюция формы и размеров упругого двойника в кристалле при нагрузке (*а* — *г*) и разгрузке (*д*):

а) Свободно растущий двойник; *б*) рост двойника после прекращения работы источника дислокаций на поверхности кристалла; *в*) конец двойника встречает стопор (a_2 — точка расположения стопора); *г*) форма застопоренного двойника в пределе бесконечно больших нагрузок; *д*) стопор на поверхности препятствует выходу двойника из кристалла при разгрузке.

После достижения концом двойника стопора ($L = a_2$) длина двойника делается фиксированной, а его конец округляется *) (рис. 12, *в*), причем функция $\rho(x)$ имеет вид

$$\rho(x) = -\frac{2}{\pi^2}\sqrt{\frac{x^2-a_1^2}{L^2-x^2}}\oint_{a_1}^{L}\sqrt{\frac{L^2-\xi^2}{\xi^2-a_1^2}}\,\frac{\omega(\xi)\,\xi\, d\xi}{\xi^2-x^2}. \qquad (2,7)$$

Легко убедиться, что при сильном возрастании внешней нагрузки точка $x = a_1$ приближается к концу двойника $x = L$. Действительно, допустим, что во всех точках двойника $\sigma(x) \gg S(x)$ и внешняя сила про-

*) По поводу контура двойника на рис. 12, *в* следует повторить то же самое, что говорилось относительно рис. 10, *б*, а именно, формула (2,7) описывает этот контур лишь в интервале значений x, где $b\rho(x) \lesssim 1$.

порциональна некоторому параметру P: $\sigma(x) = P\tau(x)$. Тогда $\omega(x) \approx \approx \frac{P}{B}\tau(x)$, и из уравнения равновесия (типа (1,5) с нижним пределом интегрирования a_1) следует, что $\rho(x) = P\chi(x)$, где функция $\chi(x)$ есть решение этого уравнения равновесия с правой частью, равной $\frac{\tau(x)}{B}$. В этом случае условие типа (1,2) примет вид

$$\int_{a_1}^{L} \chi(x)\,dx = \mathrm{const}/P. \tag{2,8}$$

С ростом P левая часть (2,8) должна уменьшаться, стремясь к нулю. Но так как $\chi(x) > 0$ и $\chi(L)$ неограниченно, то a_1 будет неизбежно приближаться к L. Таким образом, в пределе бесконечно больших P двойниковый клин полностью превращается в плоскопараллельную прослойку *), изображенную на рис. 12, *г*. Обычно такую форму имеет так называемая остаточная двойниковая прослойка.

Если же на той стадии, когда двойник еще не превратился в плоскопараллельную прослойку, производить ослабление внешней нагрузки (разгрузку), то от стадии рис. 12, *в* мы снова перейдем к стадии рис. 12, *б*. Дальнейшее зависит от вида дефекта, прекратившего действие источника дислокаций. Если этот дефект эквивалентен некоему стопору, то двойникующие дислокации не могут выйти из кристалла и при достаточно малых нагрузках его форма приобретает вид рис. 12, *д*, а функция $\rho(x)$ дается выражением

$$\rho(x) = -\frac{2}{\pi^2}\sqrt{\frac{L^2-x^2}{x^2-a_0^2}}\int_{a_0}^{L}\sqrt{\frac{\xi^2-a_0^2}{L^2-\xi^2}}\,\frac{\omega^*(\xi)\,\xi\,d\xi}{\xi^2-x^2}, \tag{2,9}$$

где $\omega^*(x)$ — функция, отличная от $\omega(x)$ изменением сил неупругого происхождения при разгрузке (подробнее об этом см. в гл. 4).

В заключение анализа уравнения равновесия заметим, что всегда, когда функция $S(x)$ «достаточно хорошая», поведение $\rho(x)$ у концов двойника в общем случае мало зависит от вида функции $\omega(x)$. На свободном конце двойника ($x = x_1$) плотность дислокаций убывает как корень из расстояния до точки $x = x_1$:

$$\rho(x) \backsim \sqrt{|x-x_1|}, \tag{2,10}$$

а у стопора в точке $x = x_2$ она неограниченно возрастает по закону

$$\rho(x) \backsim \frac{1}{\sqrt{|x-x_2|}} \tag{2,11}$$

---

*) Вывод о бесконечно большом значении P, при котором происходит превращение двойника в плоскопараллельную прослойку, естественно, связан с предположением о том, что все двойникующие дислокации расположены в одной плоскости. Если учесть, что дислокации расположены в соседних атомных плоскостях, удаленных на расстояние a друг относительно друга, то окажется, что уже при конечных напряжениях порядка $\sigma \sim \frac{\mu b}{a}$ двойникующие дислокации будут выстраиваться в в стенку друг над другом, сдерживаемые только плоской поверхностью стопора. Последнее утверждение было подтверждено прямым машинным расчетом [57]. То обстоятельство, что расстояние между плоскостями скольжения соседних дислокаций конечно, играет важную роль при встрече двойника со стопором, размеры которого d в перпендикулярном плоскости двойникования направлении невелики. В этом случае с ростом внешней нагрузки толщина двойника h может превзойти величину d, после чего двойникующие дислокации смогут проходить «над стопором». Процесс огибания двойником стопора конечных размеров экспериментально наблюдался в работе [58].

Вспоминая ограничения, накладываемые на область применения формулы (2,11), постараемся оценить длину интервала вблизи конца застопоренного двойника, где эта формула несправедлива. Рассмотрим наиболее «опасный» с этой точки зрения случай однородной внешней нагрузки: $\sigma(x) = P = \text{const}$. Тогда плотность дислокаций вблизи стопора равна [32]

$$b\rho(x) = \frac{2P(1-\nu)}{\mu}\sqrt{\frac{x-a_0}{|x_2-x|}} \sim \frac{P}{\mu}\sqrt{\frac{L}{|x_2-x|}}. \qquad (2,12)$$

Как мы отмечали выше, критичными являются расстояния, на которых $b\rho(x) \sim 1$. Из (2,12) следует, что этим расстояниям отвечает удаление от конца двойника порядка величины

$$|x_2-x| \sim \left(\frac{P}{\mu}\right)^2 L.$$

Если взять $P \sim 10^{-3}\,\mu$, что даже превышает обычно прикладываемые к двойникующемуся кристаллу нагрузки, то оказывается $|x_2 - x| \sim 10^{-6}L$. Обычно изучаются двойники длиной в несколько миллиметров; для них область неприменимости формулы (2,11) оказывается меньше разрешающей способности применяющихся в этом случае оптических приборов.

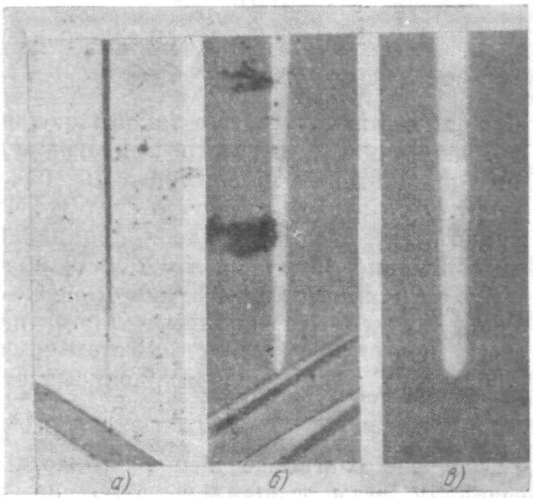


Рис. 13. Форма конца двойника в кристалле висмута [36].

а) Свободный двойник; б — в) застопоренный двойник.

Приведенные выше результаты, касающиеся формы двойника, можно сравнить с экспериментальными данными, полученными Солдатовым и Старцевым [36] при изучении формы двойников в висмуте. Обнаружено, что если двойник свободно движется по кристаллу, не встречая препятствий, то он имеет форму сильно вытянутого в направлении движения клина с очень тонким концом (рис. 13, *а*). Если при движении в глубь кристалла двойник встречает препятствие, в частности, препятствие в виде двойниковой прослойки другой ориентации, то рост в длину прекращается. Толщина двойника быстро увеличивается и в «носике» двойника образуется характерное закругление, по форме напоминающее полуокружность, с которой сопрягаются границы двойника (рис. 13, *б*, *в*). Численное дифференцирование экспериментальных данных о толщине двойника по формуле, обратной (1,2), позволило определить функцию $\rho(x)$. Полученная зависимость [36] для случая застопоренного двойника с малой погрешностью описывается формулой типа (2,11).

По нашему мнению, описанные результаты работы [36] показывают хорошее согласие дислокационного описания двойников с их наблюдаемыми свойствами, в частности, подтверждают предсказанную теорией форму растущего двойника, встретившего препятствие *).

*) В принципе можно было бы себе представить, что застопоренный двойник остается клиновидным с возрастающим по мере нагрузки углом раствора клина.

3. ПОЧЕМУ УПРУГИЙ ДВОЙНИК ТОНКИЙ

Многие особенности процесса упругого двойникования существенно определяются силами неупругого происхождения *). Особая роль этих сил лучше всего может быть проиллюстрирована при обсуждении вопроса об отношении толщины упругого двойника к его длине. В частности, мы сейчас убедимся, что только включение сил неупругого происхождения в уравнение равновесия двойника позволяет понять, почему в поле знакопостоянных упругих напряжений может существовать свободный двойник конечной длины и почему он всегда остается тонким.

Для обсуждения этого вопроса нужно получить выражение для толщины и длины упругого двойника. Ясно, что замкнутые формулы для этих величин могут быть получены только в некоторых простейших случаях. Один из таких случаев представляет плоский двойник, образованный винтовыми дислокациями, для которого ядро $K(x, \xi)$ задано формулой (2,4). Воспользовавшись этим ядром, мы запишем уравнение типа (2,5) в несколько иной форме:

$$\fint_{a_0}^{L} \frac{\rho(\xi)\,d\xi}{x-\xi} - \int_{a_0}^{L} \frac{\rho(\xi)\,d\xi}{x+\xi} = \omega(x). \tag{3,1}$$

Любопытно заметить, что такое же уравнение будет определять равновесие двойника, созданного в неограниченном кристалле дислокациями, источник которых находится в интервале $(-a_0, a_0)$ вблизи начала координат. Для этого достаточно считать, что внешняя нагрузка есть четная функция x, а рождающиеся две дислокации противоположного знака одновременно появляются в точках $x = \pm a_0$.

Для конкретизации функции $\omega(x)$, определяемой соотношением (1,5), будем считать, что двойник является растущим, т. е. он порожден монотонно возрастающей силой. В этом случае, как отмечалось в гл. 1, силы неупругого происхождения, описываемые функцией $S(x)$, имеют вид

$$S(x) = -S_0 - S_{\text{п}}(x), \quad S_0 = \text{const}. \tag{3,2}$$

Первое слагаемое в правой части (3,2), а именно, S_0, определяет величину силы трения, которую испытывает двойникующая дислокация в кристалле. По порядку величины

$$S_0 \sim \sigma_s, \tag{3,3}$$

где σ_s — «микроскопический» предел текучести материала по отношению к двойникованию, т. е. стартовое напряжение, начиная с которого, внешняя нагрузка перемещает отдельную двойникующую дислокацию. Второе слагаемое в (3,2), $S_{\text{п}}(x)$, описывает силу поверхностного натяжения, отличную от нуля лишь в малых окрестностях ε у конца двойника. Если $\varepsilon \ll L$, то эта сила не зависит от длины двойника. Чтобы подчеркнуть независимость $S_{\text{п}}(x)$ от длины двойника, запишем $S_{\text{п}}(x) = A(L - x)$, где функция $A(\xi)$ монотонно убывает с ростом своего аргумента от некоторого максимального значения $S_{\text{п}}^0$ до нуля на малом интервале $(0 < \xi < \varepsilon)$.

Решение (3,1) или (2,3) для свободного двойника, когда $\rho(a_0) = \rho(L) = 0$, дается формулой (2,4), причем полудлина двойника L нахо-

*) Здесь имеется следующая аналогия с электростатикой: так же, как при описании равновесия системы электрических зарядов, часто решающим является учет сил неэлектрического происхождения, в теории упругости при изучении равновесия системы дислокаций часто определяющую роль играют силы неупругого происхождения.

дится из условия (2,3). Поскольку нас будут интересовать только те решения (3,1), которые обращаются в нуль в точке $x = a_0$, для упрощения дальнейшего анализа малую величину a_0 можно положить равной нулю ($a_0 = 0$). Тогда (3,1) сведется к

$$\int_{-L}^{L} \frac{\rho(\xi)\,d\xi}{\xi - x} = \frac{1}{B}\left[\sigma(x) + S(x)\right] \tag{3,4}$$

и его решение (2,6) примет вид

$$\rho(x) = \rho_0(x) + \rho_{\text{п}}(x), \tag{3,5}$$

$$\rho_0(x) = -\frac{1}{B\pi^2}\sqrt{L^2 - x^2}\int_{-L}^{L} \frac{\sigma(\xi)\,d\xi}{(\xi - x)\sqrt{L^2 - \xi^2}}, \tag{3,6а}$$

$$\rho_{\text{п}}(x) = \frac{1}{B\pi^2}\sqrt{L^2 - x^2}\int_{-L}^{L} \frac{S_{\text{п}}(\xi)\,d\xi}{(\xi - x)\sqrt{L^2 - \xi^2}}. \tag{3,6б}$$

Условие (2,2) заменится теперь условием

$$F(L) = S_0 + J(L), \tag{3,7}$$

где использованы обозначения

$$F(L) = \frac{1}{\pi}\int_{-L}^{L} \frac{\sigma(x)\,dx}{\sqrt{L^2 - x^2}}, \qquad J(L) = \frac{1}{\pi}\int_{-L}^{L} \frac{S_{\text{п}}(x)\,dx}{\sqrt{L^2 - x^2}}. \tag{3,8}$$

Условие (3,7) является трансцендентным уравнением, определяющим длину двойника. Отметим некоторые свойства входящих в это уравнение функций $F(L)$ и $J(L)$, вытекающие из их определения (3,8). Предположим, что функция $\sigma(x)$ положительна при всех x и интегрируема на неограниченном интервале *), т. е. что существует отличный от нуля интеграл

$$\Phi_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \sigma(x)\,dx, \tag{3,9}$$

который с точностью до множителя определяет полную внешнюю силу, действующую в плоскости двойникования (приходящуюся на единицу длины вдоль оси Z). Если x_0 — расстояние, на котором существенно убывает функция $\sigma(x)$, то очевидно, что по порядку величины

$$\Phi_0 \sim x_0\sigma(0). \tag{3,9а}$$

Из (3,7) и (3,8) следует, что асимптотически при больших L

$$F(L) = \frac{\Phi_0}{L} \quad \text{при} \quad L \to \infty. \tag{3,10}$$

Что касается $J(L)$, то из свойств функции $S_{\text{п}}(x)$ следует, что при $L \gg \varepsilon$

$$J(L) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{L} \frac{A(L - x)\,dx}{\sqrt{L^2 - x^2}} \approx \frac{M}{\sqrt{L}}, \qquad M = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{A(x)\,dx}{\sqrt{x}}, \tag{3.11}$$

где M — не зависящая от длины двойника постоянная **).

*) Таким свойством обладает любое упругое поле, созданное концентрированной нагрузкой.

**) Постоянная M отличается от модуля сцепления работы [33] множителем $\frac{1}{\pi\sqrt{2}}$ и от принятого в работах [52, 59, 60] определения множителем $\frac{1}{\pi}$.

Из определения модуля M (3,11) вытекает следующий порядок его величины:

$$M \sim \sqrt{\varepsilon} S_{\text{п}}^{0}. \tag{3,12}$$

$S_{\text{п}}^{0}$ характеризует напряжение, необходимое для движения головной дислокации (частичной дислокации, схематически изображенной на рис. 6), и по порядку величины равно

$$S_{\text{п}}^{0} \sim \frac{\beta}{b}, \tag{3,13}$$

где β — энергия единицы площади дефекта упаковки, связанного с этой частичной дислокацией. Для оценок ее можно принять равной удвоенному значению поверхностной энергии когерентной двойниковой границы (например, для кальцита, используя результаты [59, 60], получаем $\beta \sim 2\alpha \sim$ ~ 70 *эрг/см*^{2} и $S_{\text{п}}^{0} \sim 7 \cdot 10^3$ *кГ/см*^{2} $\sim 3 \cdot 10^{-2}$ μ). По-видимому, в большинстве случаев $S_{\text{п}}^{0} \sim 10^{-1} - 10^{-2}$ μ.

Так как функция $S_{\text{п}}(x)$ отлична от нуля только в конце двойника, во всех расчетах, в которых интересуются свойствами двойника в точках, удаленных от его концов, эта функция может быть заменена сосредоточенной функцией с правильной нормировкой. Легко видеть, что эта замена может быть реализована с помощью δ-функции следующим образом:

$$\begin{aligned} S_{\text{п}}(x) &= \frac{\pi}{\sqrt{2}} M \sqrt{L-x}\, \delta(L-x) \quad \text{для} \quad x > 0, \\ S_{\text{п}}(x) &= \frac{\pi}{\sqrt{2}} M \sqrt{L+x}\, \delta(L+x) \quad \text{для} \quad x < 0. \end{aligned} \tag{3,14}$$

Используя (3,11), можно записать уравнение (3,7) в виде

$$F(L) = S_0 + \frac{M}{\sqrt{L}}. \tag{3,15}$$

При известных S_0 и M и заданной функции $\sigma(x)$ соотношение (3,15) является уравнением для определения длины двойника. Таким образом, решение (3,5) и (3,6) совместно с этим уравнением позволяет при известных внешних напряжениях и известных силах неупругого происхождения полностью определить механически равновесную форму упругого двойника *). Однако нам представляется важным обратить внимание на некоторое физическое различие уравнений (3,4) и (3,15), связанное с разной степенью детализации функции $S_{\text{п}}(x)$. Для описания профиля двойника (во всяком случае у его концов) нужно знать точный вид функции $S_{\text{п}}(x)$, входящей под интеграл в (3,6б). Но вид этой функции существенно определяется характером сил межатомного взаимодействия. Это обстоятельство ставит функцию $S_{\text{п}}(x)$ в особые условия в рамках нашей теории. В частности, вряд ли можно предложить какой-нибудь макроскопический эксперимент для определения вида этой функции. Поэтому какую-либо информацию о $S_{\text{п}}(x)$ можно получить только путем анализа микроскопических моделей двойникующих дислокаций. К сожалению, нам не известен точный вид потенциалов межатомных взаимодействий, и такой путь определения $S_{\text{п}}(x)$ нельзя признать достаточно надежным.

С другой стороны, уравнение (3,15) для длины двойника включает силы неупругого происхождения лишь в виде двух параметров S_0 и M.

*) Если $S_{\text{п}}(x) \to 0$, то (3,4) дает распределение полных дислокаций вдоль незавершенной полосы скольжения, а (3,15) позволяет определить длину скопления во внешнем поле. При $S_0 \to 0$ (3,4) переходит в уравнение, описывающее форму тонкой трещины, а (3,15) фактически совпадает с основным уравнением силовой теории тонких трещин [33], определяющим длину трещины во внешнем поле.

Поскольку длина двойника является его макроскопической характеристикой, величины S_0 и M в уравнении (3,15) могут рассматриваться как феноменологические параметры. Следовательно, можно предложить способ экспериментального определения величин S_0 и M. Постановка количественного эксперимента в условиях, максимально приближенных к рассматриваемым в теории, была предложена и реализована в работах [59-61], где найдены значения S_0 и M для кальцита ($S_0 \approx 0{,}2 - 0{,}3$ *кГ/см*^{2}, $M \approx \approx 1$ *кГ/см*$^{3/2}$). Возможность экспериментального определения главных параметров модели является, по нашему мнению, большим достоинством полумикроскопической теории упругих двойников.

Возвращаясь к вопросу о длине и толщине двойника, обратимся к уравнению (3,15), считая функцию $\sigma(x)$ положительной при всех x и интегрируемой. Предположим сначала, что отсутствуют силы неупругого происхождения. Тогда из положительности функции $F(L)$ и вида ее асимптотики (3,10) следует, что при $S(x) = 0$ единственное возможное решение уравнения (3,15) соответствует $L = \infty$, т. е. бесконечно длинному двойнику.

Таким образом, мы приходим к следующему утверждению: если бы отсутствовали силы неупругого происхождения, то под действием знакопостоянной внешней нагрузки в теле не мог бы существовать свободный равновесный двойник конечных размеров.

Естественно, что можно представить себе такое знакопеременное поле упругих напряжений, которое могло бы уравновесить двойник даже при отсутствии сил неупругого происхождения *). Однако при изучении упругих двойников наиболее интересен случай знакопостоянного распределения напряжений, так как возможность равновесия двойника в таких условиях имеет принципиальное значение.

Поскольку при $S(x) = 0$ длина двойника была бы бесконечной, в силу непрерывности функций, входящих в (3,15), конечная равновесная длина упругого двойника в кристалле велика в меру малости сил неупругого происхождения.

Имея в виду последнее заключение, рассмотрим случай, когда силы неупругого происхождения очень малы, т. е. когда $S(x)$, а следовательно, и правая часть (3,15) являются исчезающе малыми величинами. Тогда длина двойника L очень велика и, как следует из (3,15) и (3,10), определяется уравнением

$$\frac{\Phi_0}{L} = S_0 + \frac{M}{\sqrt{L}}. \tag{3,16}$$

Ясно, что уравнение (3,16) справедливо при $L \gg \varepsilon$.

Оценим прежде всего относительную роль двух сил, представленных первым и вторым слагаемым в правой части (3,16), составив отношение

$$\gamma = \frac{S_0\sqrt{L}}{M} = \varkappa\sqrt{L}, \quad \varkappa = \frac{S_0}{M}. \tag{3,17}$$

Так как, в принципе, довольно простой анализ уравнения (3,16) при произвольных γ связан с громоздкими выкладками, мы ограничимся рассмотрением двух предельных случаев $\gamma \gg 1$ и $\gamma \ll 1$.

Когда $\gamma \gg 1$, для получения полудлины двойника достаточно положить в уравнении (3,16) $M = 0$ (заметим, что $M = 0$ имеет место, например, для незавершенной полосы скольжения):

$$L = \frac{\Phi_0}{S_0} \sim x_0 \frac{\sigma(0)}{\sigma_s}. \tag{3,18}$$

*) Такая же ситуация имеет место в электростатике, где специально подобранное электрическое поле может обеспечить равновесие любой системы зарядов.

Из (3,18) видно, что обязательное условие $L \gg x_0$ может быть реализовано только при $\sigma(0) \gg \sigma_s$, т. е. при очень большой концентрации напряжений в точке нахождения источника дислокаций.

Для $\gamma \ll 1$ полудлина двойника, как видно из (3,16), равна

$$L = \left(\frac{\Phi_0}{M}\right)^2. \tag{3,19}$$

Необходимая для создания двойника с $L \gg x_0$ концентрация напряжений в этом случае должна быть такой, чтобы $\sigma(0) \gg \frac{M}{\sqrt{x_0}}$.

Формулы (3,18) и (3,19) в явном виде подтверждают сделанные выше выводы о том, что длина упругого двойника в кристалле велика в меру малости сил неупругого происхождения. Однако сама по себе длина двойника не является полной характеристикой его формы и физический интерес представляет отношение длины двойника к его толщине.

Рассмотрим толщину двойника в его центре $h(0)$, представив ее по аналогии с (3,5) в виде суммы

$$h(0) = h_0(0) + h_{\text{п}}(0). \tag{3,20}$$

Первое и второе слагаемые правой части определяются через ρ_0 и $\rho_{\text{п}}$ соответственно по формуле (1,1).

Прежде чем производить расчеты h_0 и $h_{\text{п}}$, обратим внимание на следующее очень важное обстоятельство: толщина двойника всецело определяется числом испущенных источником дислокаций. Поскольку концентрация внешних напряжений в районе источника дислокаций всегда велика, их роль в этой области значительно больше роли сил неупругого происхождения. В связи с этим толщина двойника в его центре практически полностью описывается слагаемым h_0. Количественные оценки, произведенные в работе [46], подтверждают это заключение. Поэтому для оценки $h(0)$ достаточно вычислить h_0. Пользуясь (1,1) и (3,5), представим h_0 в виде

$$h_0 = \frac{La}{B\pi^2} \int_{-1}^{1} \frac{\sigma(L\xi)\, d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \fint_0^1 \frac{\sqrt{1-x^2}\, dx}{x-\xi}.$$

Еще раз напомним, что для рассматриваемых нами двойников предполагается выполненным условие $L \gg x_0$. Но при этом асимптотически

$$h_0 = \frac{La}{B\pi^2} \int_{-1}^{1} \sigma(L, \xi)\, d\xi \fint_0^1 \frac{dx}{x-\xi} \approx -\frac{2La}{B\pi^2} \int_0^1 \sigma(L\xi) \ln \xi\, d\xi.$$

Следовательно, по порядку величины

$$h_0 \sim \frac{a}{B} \ln\left(\frac{L}{x_0}\right) \Phi_0 \sim \frac{\ln\left(\frac{L}{x_0}\right)}{\left(\frac{L}{x_0}\right)} \frac{\sigma(0)}{\mu} L. \tag{3,21}$$

Поскольку явная зависимость длины двойника от действующих сил может быть получена только в предельных случаях (3,18) и (3,19), мы ограничимся рассмотрением именно этих случаев.

Когда $\gamma \gg 1$, то из (3,18) и (3,21) следует, что отношение толщины двойника к длине имеет порядок величины

$$\frac{h}{L} \sim \frac{\sigma_s}{\mu} \ln\left(\frac{\sigma(0)}{\sigma_s}\right). \tag{3,22}$$

Оценка (3,22) показывает, что при исчезающе малом $\frac{\sigma_s}{\mu}$ отношение $\frac{h}{L}$ стремится к нулю, так как всегда $\sigma(0) < \mu$. Что же касается зависимости $\frac{h}{L}$ от внешних напряжений в точке расположения источника дислокаций $\sigma(0)$, то следует ожидать слабого логарифмического увеличения отношения $\frac{h}{L}$ с ростом $\sigma(0)$.

В случае $\gamma \ll 1$, используя (3,19) и (3,21), получим

$$\frac{h}{L} \sim \frac{1}{\mu} \frac{M^2}{\Phi_0} \ln \left(\frac{\Phi_0}{\sqrt{x_0} M} \right). \tag{3,23}$$

Из оценки (3,23) следует, что при исчезающе малом $\frac{1}{\mu} \frac{M^2}{\Phi_0}$ отношение $\frac{h}{L}$ стремится к нулю, а также и то, что в этом случае величина $\frac{h}{L}$ должна уменьшаться с ростом внешней нагрузки.

Выводы, полученные в двух предельных случаях, мы объединим в одном утверждении: если функция $\sigma(x)$ знакопостоянна и силы неупругого происхождения малы, то отношение толщины двойника к его длине является малой величиной, стремящейся к нулю вместе с исчезновением сил неупругого происхождения *).

Заканчивая обсуждение вопроса об отношении толщины упругого двойника к его длине, мы считаем необходимым указать, что первые оценки $\frac{h}{L}$ в рамках макроскопической теории были сделаны Владимирским, который выразил величину этого отношения в терминах внешней нагрузки и констант кристалла (модуля упругости и постоянной решетки). Следует также упомянуть работы Купера [62, 63], в которых для весьма, упрощенной двойниковой модели были оценены толщина двойника, а также отношение $\frac{h}{L}$.

При экспериментальном изучении упругих двойников [2–11, 36, 64–66] всегда отмечалась малая величина отношения его толщины к длине (например, для кальцита $\frac{h}{L} \sim 10^{-4}$, для висмута и сурьмы $\frac{h}{L} \sim 10^{-3}$). Однако нам хотелось бы обратить внимание не на определение самой численной величины этого отношения, а на выяснение тенденции его изменения с ростом длины двойника, что было сделано в работе [65]. Соответствующий эксперимент проводился с двойниками, для которых выполняется условие $\gamma \ll 1$. Но в этом случае, объединяя (3,19) и (3,23), имеем

$$\frac{h}{L} \sim \frac{1}{\mu} \frac{M^2}{M\sqrt{L}} \ln \left(\sqrt{\frac{L}{x_0}} \right) \sim \frac{1}{2\mu} \frac{M}{\sqrt{L}} \ln \frac{L}{x_0}.$$

Таким образом, отношение $\frac{h}{L}$ должно падать с ростом длины двойника. Именно этот результат теории подтверждается в работе [65], где показано, что с ростом нагрузки длина двойника возрастает быстрее его толщины.

При оценке отношения толщины двойника к его длине мы воспользовались тем обстоятельством, что h определяется внешними упругими

*) Предложенная Фриделем [67] оценка отношения толщины двойника, уравновешенного только внешним упругим полем, к его длине не представляет интереса с точки зрения обсуждаемой проблемы, поскольку неявно предполагает, что упругое поле описывается знакопеременной функцией координат, а в таком случае длина двойника определяется тем характерным расстоянием, на котором меняет знак эта функция.

силами. Но нужно иметь в виду, что форма двойника существенно зависит от сил неупругого происхождения, в частности от $S_п(x)$. Больше того, можно убедиться, что для материалов с большим поверхностным натяжением, для которых можно пренебречь силой трения ($S_0 = 0$), форма конца длинного двойника полностью определяется силой поверхностного натяжения.

Из (3,6а) следует, что закон убывания $\rho_0(x)$ у конца двойника описывается функцией

$$\rho_0(x) = \frac{C_0}{B}\sqrt{L^2 - x^2}, \qquad C_0 = \text{const} \sim \frac{\Phi_0}{L^2}. \tag{3,24}$$

Аналогично из (3,6б) вытекает, что на конце двойника

$$\rho_п(x) = \frac{C_п}{B}\sqrt{L^2 - x^2}, \qquad C_п = \text{const} \sim \frac{1}{\varepsilon}\frac{M}{\sqrt{L}}, \tag{3,25}$$

поэтому при $\Delta x \leqslant \varepsilon$

$$\frac{\rho_0(x)}{\rho_п(x)} = \frac{C_0}{C_п} \sim \left(\frac{\varepsilon}{L}\right)\frac{\Phi_0}{M\sqrt{L}}. \tag{3,26}$$

Таким образом, для очень длинных двойников ($L \to \infty$) основную роль играет вклад плотности $\rho_п(x)$ и профиль двойника у его конца действительно зависит только от $\rho_п(x)$. Он имеет такой же вид, как конец тонкой трещины [68], и может быть схематически изображен кривой, приведенной на рис. 14. Зависимость толщины двойника $h(x)$ от координаты на основании формулы (1,1) дается выражением

$$h(x) = \frac{2}{3}\frac{aC_п}{B}\sqrt{2L}(L - x)^{3/2}, \qquad L - x \leqslant \varepsilon. \tag{3,27}$$

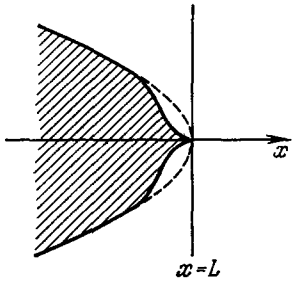


Рис. 14. Схема профиля двойника на двух крайних концевых участках.

Штриховой линией на рис. 14 изображена кривая

$$y(x) = \text{const}\cdot\sqrt{L^2 - x^2}, \tag{3,28}$$

сопрягающаяся при $L - x \gtrsim \varepsilon$ с истинным профилем двойника. Следовательно, форма конца двойника действительно определяется только силой поверхностного натяжения и не зависит от внешней нагрузки и длины двойника (благодаря этому и появляется возможность введения константы M).

Наконец, исходя из физических представлений о силе поверхностного натяжения на границе двойника, следует указать возможный порядок величины ε. Мы определим ε как то расстояние от конца двойника, на котором толщина двойника такова, что противоположные поверхности двойника перестают влиять друг на друга силами молекулярного взаимодействия. Обозначим эту толщину h_k и воспользуемся (3,27), оценкой $C_п$ в (3,25) и (3,12). Тогда

$$\varepsilon \sim \frac{\mu}{S_п^0} h_k. \tag{3,29}$$

Если считать $h_k \sim 10^{-7}$ *см* и взять $S_п^0 \sim 10^{-1} - 10^{-2}$ μ, то получим для ε оценку $\varepsilon \sim 10^{-6} - 10^{-5}$ *см*.

Хотя оценка (3,29) весьма приблизительна, она указывает, что, строго говоря, заключения о форме конца двойника сделаны на пределе справедливости использованной нами макроскопической теории. Более того, поскольку размер ε имеет полумикроскопический характер, в экспери-

менте по изучению макроскопических форм двойника будет наблюдаться профиль, близкий к тому, который описывается кривой (3,28). Именно такой профиль у клиновидных двойников в α-Fe наблюдался в работе [69]. Обнаружение «клюва» на конце двойника требует очень большой разрешающей способности приборов, с помощью которых изучается профиль двойника.

В настоящем разделе мы подробно обсуждали, почему двойник тонкий, рассматривая пример двойника, созданного нагрузкой лезвием, т. е. образованного прямолинейными дислокациями. Однако при анализе многих вопросов двойникования в кристалле, в частности проблемы зарождения двойников, приходится анализировать двойники иной формы. Но какую бы форму ни имел свободный упругий двойник, отношение его толщины к длине должно подчиняться тем же качественным закономерностям, которые были изложены выше. Иллюстрацией этого утверждения может служить рассмотрение осесимметричного двойника в работе [46], где показано, что отношение толщины такого двойника к его радиусу мало в меру малости сил неупругого происхождения.

4. ГИСТЕРЕЗИС ПРИ УПРУГОМ ДВОЙНИКОВАНИИ

В настоящей главе мы изучим развитие двойника в неограниченном кристалле при немонотонной зависимости внешней нагрузки от времени. Изменение нагрузки будет предполагаться квазистатическим, т. е. происходящим бесконечно медленно и в каждый момент времени полностью описываемым зависимостью напряжений от некоторого внешнего параметра. Положим, что функция $\sigma(x)$ зависит от параметра P, с изменением которого от 0 до P_0 величина $\sigma(x)$ монотонно возрастает от 0 до $\sigma_P(x) = \sigma(P_0, x)$. Тогда увеличению P будет соответствовать рост нагрузки, а уменьшению P — процесс разгрузки. В простейшем случае напряжения $\sigma(x)$ пропорциональны внешней нагрузке *); тогда $\sigma(P, x) = P\tau(x)$ и $F(L) = PG(L)$, где $G(L)$ зависит только от длины двойника и определяется первой формулой (3,8), в которой вместо $\sigma(x)$ следует подставить $\tau(x)$.

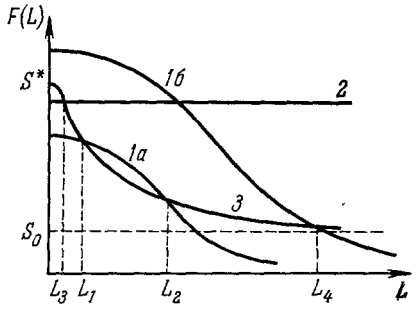


Рис. 15. Определение длины двойника путем графического решения уравнения (3,7).

1 — кривая $F(L)$ для случая внешнего поля, монотонно убывающего в глубину кристалла (1а — $P < P^*$, 1б — $P > P^*$); 2 — кривая $F(L)$ в случае однородного внешнего поля; 3 — кривая $S_0 + J(L)$.

Наиболее показательным для характеристики эволюции двойника нам представляется изменение его длины, которое можно проанализировать путем графического решения трансцендентного уравнения (3,7). Правая часть (3,7) всегда является монотонно убывающей функцией L, имеющей максимум $S^* = S_0 + S_{\text{п}}^0$ при $L = 0$ и асимптотически приближающейся к S_0 при $L \to \infty$ (рис. 15, кривые 1). Поэтому тип решения уравнения (3,7) существенно определяется видом функции $G(L)$. Примем, что $G(L)$ является монотонно убывающей функцией своего аргумента, убывающей медленнее, чем $J(L)$. Последнее предположение соответствует обычно встречающимся в эксперименте условиям. Дело в том, что значительное убывание $G(L)$ всегда происходит при макроскопических

*) Подобная ситуация возникает тогда, когда приложение внешней нагрузки к поверхности кристалла не вызывает значительного смятия последней.

значениях L. Это связано с малой скоростью спада функции $\tau(x)$ с глубиной, обусловленной макроскопическим характером создания внешней нагрузки. Что же касается функции $J(L)$, то ее основное убывание происходит при $L \sim \varepsilon$.

Будем считать вначале, что P возрастает, и рассмотрим рис. 15, на котором схематически дано графическое решение уравнения (3,7). При очень малых P график функции $F(L)$ лежит ниже кривой *3*, поэтому уравнение (3,7) не имеет решений. С ростом P при некотором $P = P_{\min}$ в точке ($P_{\min}$, $L_{\min}$) происходит касание графика функции $F(L)$ и кривой *3*. С этого момента появляется решение уравнения (3,7). При дальнейшем увеличении P рассматриваемые кривые пересекаются в двух точках, что свидетельствует о раздвоении решения уравнения (3,7) на два решения (L_1 и L_2 на рис. 15). Решение L_1 убывает с ростом P, поэтому, как было отмечено в работе [33], оно отвечает неустойчивому по отношению к бесконечно малому изменению внешней нагрузки двойнику. Решение L_2 соответствует устойчивому двойнику, но тем не менее при нашем способе создания двойника подобный двойник не возникает. Действительно, до тех пор пока $F(0) \equiv \sigma(0) < S^*$, приложенная к дислокации внешняя сила в точке нахождения источника дислокаций меньше полной силы торможения. Поэтому дислокации под действием упругого поля не могут «оторваться» от их источника (напомним, что зарождение дислокаций предполагается безактивационным и их размножение заключается в отводе дислокаций внешними напряжениями от источника). Следовательно, двойник длины L_2 может возникнуть только флуктуационным путем. Но если рассматриваемые изменения параметра P происходят в течение ограниченного времени, флуктуационный механизм возникновения макроскопического двойника можно не учитывать. Возможность образования двойника не реализуется вплоть до значения $P = P^*$, которое определяется из условия $P^*G(0) = S^*$. В этот момент исчезает решение $L_1(P)$, соответствующее неустойчивому двойнику, и выполняется условие $\sigma(0) = S^*$, т. е. выполняется достаточное условие образования двойника, благодаря чему скачком возникает двойник конечной длины (обозначим ее L^*). При дальнейшем увеличении P ($P > P^*$) остается только одно решение уравнения (3,7) (длина L_4 на рис. 15), и двойник плавно увеличивает свою длину с ростом нагрузки.

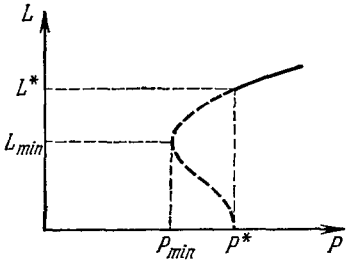


Рис. 16. Зависимость длины двойника от нагрузки на начальном этапе двойникования.

График зависимости $L(P)$ для рассматриваемого случая приведен на рис. 16. Нижний участок кривой $L = L(P)$ при $P < P^*$ отвечает неустойчивому двойнику, а верхний участок этой кривой при $P < P^*$ соответствует длинам двойника, образующегося лишь флуктуационным путем (поэтому соответствующая часть кривой также изображена штриховой линией).

Зависимость $L(P)$ будет несколько иной, если допустить, что монотонная функция $F(L)$ убывает с ростом своего аргумента быстрее, чем $J(L)$. Такая ситуация безусловно реализуется при $S_п \ll S_0$ и любом заметном убывании $\sigma(x)$, т. е., в частности, при сдвигообразовании ($S_п = 0$) под действием сосредоточенной нагрузки. Тогда для возникновения двойника также необходимо превышение пороговой нагрузки P^*; уравнение (3,7) имеет в этом случае только одно решение (устойчивый двойник), и двойник начинает расти с нулевой длины.

Специальный физический интерес представляет рассмотрение предельного случая однородной нагрузки. Если $\sigma(x) \equiv \sigma(0) = \text{const}$, то $F(L) = \sigma(0)$ и при $S_0 < \sigma(0) < S^*$ уравнение (3,7) имеет только одно решение ($L = L_3$ на рис. 15), которое соответствует неустойчивому двойнику. Как только параметр P достигает значения P^*, это решение исчезает. Однако формально существует еще решение $L = \infty$. Поэтому в соответствии с вышеизложенным анализом мы можем заключить, что при $P = P^*$ скачком возникает двойник бесконечной длины. Физический смысл подобного утверждения сводится к тому, что при $P = P^*$ возникает двойниковая прослойка, проходящая через весь кристалл. Таким образом, равновесный устойчивый двойник конечной длины не может быть образован в кристалле однородным полем напряжений. Для его возникновения необходима некоторая концентрация напряжений, создающая достаточно быстро убывающее с расстоянием упругое поле. Этот вывод подтверждается экспериментальными результатами Гарбера [4,70].

Мы уже отмечали, что обычно наблюдавшиеся в эксперименте двойники не являются плоскими и имеют вид «лепестков», образованных нагрузкой, сконцентрированной на небольшом участке поверхности кристалла [2-7, 20, 65, 66]. Форма таких двойников близка к форме половины очень тонкой круговой линзы и в простейшем случае может быть представлена в виде скопления круговых дислокационных петель. Анализ развития двойника в такой модели [46] показывает, что и в этом случае можно повторить все основные выводы относительно особенностей образования двойника.

Подводя итог рассмотрению возникновения двойника под нарастающей нагрузкой, отметим следующие существенные пункты. Во-первых, в любом случае двойник может появиться лишь при нагрузке, превышающей некоторое пороговое значение. Во-вторых, начальный этап роста двойника полностью определяется характером внешней нагрузки. В-третьих, устойчивый двойник конечных размеров может быть образован только при концентрации напряжений в области, где расположен источник двойникующих дислокаций. Однородное поле напряжений не может создать двойник конечной длины.

Сопоставим эти выводы с экспериментальными результатами по возникновению упругих двойников.

Необходимость достижения пороговой нагрузки для возникновения двойника отмечалась в экспериментальных работах [2-4, 66] при упругом двойниковании кальцита и в работе [9] при двойниковании металлов. Роль концентрации нагрузки при упругом двойниковании была показана Гарбером [2-4] и отмечалась затем всеми исследователями, изучавшими упругое двойникование. Фактически, именно благодаря применению концентрированной нагрузки Гарберу удалось обнаружить и изучить упругое двойникование, тогда как до экспериментов [2] двойникование в кальците в большинстве случаев изучалось в однородном поле напряжений, когда не могли наблюдаться упругие двойники конечной длины. Зависимость начального этапа роста двойника от характера внешней нагрузки иллюстрируется, по нашему мнению, результатами экспериментов [65]. В этой работе фактически было показано, что длина скачкообразно рождающегося двойника увеличивается с ростом области существенного убывания функции $F(L)$, связанной в свою очередь со степенью концентрации внешней нагрузки.

После возникновения двойника характер дальнейшего его роста с увеличением нагрузки определяется видом функции $F(L)$. Если $F(L)$ есть монотонная функция L, то длина двойника будет плавно увеличиваться с ростом P. При немонотонной зависимости $F(L)$ от своего аргу-

мента может наблюдаться скачкообразное удлинение двойника. Все качественные выводы для двойников в этом случае совпадают с выводами теории трещин [33]. Поэтому мы не будем на них подробно останавливаться.

Перейдем к изучению поведения двойника при разгрузке, т. е. при уменьшении параметра P. Допустим, что возрастание внешней нагрузки прекратилось при значении параметра $P = P_m$. Тогда равновесная плотность дислокаций вдоль двойника $\rho_m(x)$ и его длина L_m в конце процесса нагрузки будут определяться соответственно (3,5) и (3,7), в которых следует положить $P = P_m$.

Изменение размеров и формы двойника при разгрузке будет происходить за счет перемещения составляющих его дислокаций в направлении, обратном направлению их движения при нагрузке. Но так как при уменьшении P знак внешних напряжений $\sigma(x)$ не меняется, обратное движение дислокаций возможно только в результате их взаимодействия и действия силы поверхностного натяжения. Однако следует иметь в виду, что наличие силы «сухого трения», направленной против возможного перемещения дислокации, препятствует перемещению дислокаций в начальный период разгрузки, когда уменьшение внешней силы очень мало и нескомпенсированная этим уменьшением часть силы взаимодействия меньше S_0. Поэтому начало движения некоторой дислокации существенно зависит от соотношения сил, действующих на нее со стороны внешнего поля и со стороны остальных дислокаций.

Анализ поведения дислокаций в процессе разгрузки в значительной мере определяется характером внешних напряжений. Мы ограничимся простейшим случаем, когда напряжения $\sigma(x)$ являются монотонно убывающей функцией $|x|$ и по-прежнему прямо пропорциональны параметру P, т. е. $\sigma(x) = P\tau(x)$.

Пока все дислокации неподвижны, их действие на единичную дислокацию в точке x определяется напряжением $\psi_0(x)$, выражение для которого следует из уравнения равновесия (3,4):

$$\psi_0(x) = B \int_{-L_0}^{L_0} \frac{\rho_m(\xi)\,d\xi}{x-\xi} = S_0 + S_{\text{п}}(x) - P_m\tau(x). \tag{4,1}$$

Суммарные напряжения $\varphi(x) = \varphi(P, x)$, действующие на дислокацию со стороны остальных дислокаций, поверхностного натяжения и внешних полей, в начале разгрузки равны

$$\varphi(x) = \psi_0(x) + \sigma(x) - S_{\text{п}}(x) = S_0 - (P_m - P)\,\tau(x). \tag{4,2}$$

Для того чтобы дислокации начали двигаться, величина соответствующей силы должна превзойти силу трения хотя бы в одной точке: $|\varphi(x)| \geqslant S_0$. Возможность реализации этого условия определяется величиной $\sigma_m(0)$ и соотношением S_0 и $S_{\text{п}}^0$, в зависимости от которых может быть три различных случая.

Случай 1. $S_{\text{п}}^0 < S_0$, $\sigma_m(0) < 2S_0$. В этом случае, как следует из (4,2),

$$-S_0 < \varphi(x) < S_0,$$

а потому ни при каком значении параметра P сила $\varphi(x)$ не может превзойти силу торможения. Следовательно, ни одна дислокация не переместится в процессе разгрузки и форма двойника после разгрузки останется той же, какой была к концу нагружения. Таким образом, двойник с малой поверхностной энергией, образованный сравнительно малой внешней силой, не меняет своей формы и размеров после снятия нагрузки.

Случай 2. $M < \sqrt{L_m} S_0$, $\sigma_m(0) > 2S_0$. В этом случае, до тех пор пока наибольшее значение абсолютной величины силы $\varphi(P, x)$ меньше S_0, все дислокации будут находиться на своих старых местах, так как ни в одной точке приложенная к дислокации сила не превышает силу торможения S_0. Поведение дислокаций при дальнейшем убывании P зависит от вида функции $\varphi(P, x)$ и, в частности, от положения точки наибольшего по абсолютной величине отрицательного значения $\varphi(x)$. В нашем случае эта точка будет отвечать минимуму $\varphi(P, x)$ при $x = 0$.

При значении параметра $P = P_к$, определяемого из условия $\varphi(P_к, 0) = -S_0$, т. е. при $P_к = P_m - \frac{2S_0}{\tau(0)}$, в центре двойника сила $\varphi(0)$ сравнивается с силой торможения S_0 и при дальнейшем уменьшении P превосходит ее, вызывая в средней части двойника перемещение дислокаций. Заметим, что разность $P_m - P_к$ не зависит от длины двойника и для данного вида нагрузки является фиксированной величиной.

Возможность движения дислокаций при $P > P_к$ в некоторой окрестности точки $x = 0$ приводит к их перераспределению. Пусть это перераспределение охватывает интервал $(-x_0, x_0)$, вне которого дислокации остаются неподвижными. Тогда в интервалах $x_0 < |x| < L_0$ плотность дислокаций по-прежнему описывается функцией $\rho_0(x)$, а в интервале $(-x_0, x_0)$ для плотности дислокаций легко получить следующее выражение [45]:

$$\rho(x) = \rho_0(x) + \frac{P_m - P}{\pi} \sqrt{x_0^2 - x^2} \int_{-x_0}^{x_0} \frac{\tau(\xi)\, d\xi}{(\xi - x)\sqrt{x_0^2 - \xi^2}}, \tag{4,3}$$

причем величина x_0 определяется из условия ортогональности, аналогичного (3,7),

$$\int_{-x_0}^{x_0} \frac{\tau(x)\, dx}{\sqrt{x_0^2 - x^2}} = \frac{2\pi S_0}{P_m - P}. \tag{4,4}$$

Легко заметить, что при наших предположениях о функции $\tau(x)$ уравнение (4,4) определяет монотонно убывающую функцию $x_0 = x_0(P)$. Формально предельное значение $x_0(0)$ в конце разгрузки (при $P = 0$) дается уравнением

$$\int_{-x_0(0)}^{x_0(0)} \frac{\tau(x)\, dx}{\sqrt{x_0^2 - x^2}} = \frac{2\pi S_0}{P_m}. \tag{4,5}$$

Но (4,5) имеет смысл лишь в том случае, когда $x_0(0) \leqslant L_m$. Сравнивая (4,5) с (3,7) и учитывая предположенные свойства функции $\sigma(x)$ ($\tau'(x) \leqslant 0$ при $x \geqslant 0$), легко убедиться, что при $M < \sqrt{L_m}\, S_0$ всегда предельное значение $x_0(0) < L_m$.

Таким образом, когда $M < \sqrt{L_m}\, S_0$, после полной разгрузки в среде остается двойник (заклинившийся двойник), распределение дислокаций вдоль которого существенно отличается от (3,5). Правда, на конце двойника ($x_0(0) < |x| < L_m$) это распределение по-прежнему описывается функцией $\rho_m(x)$, однако в его средней части плотность дислокаций дается выражением (4,3) при $P = 0$, когда $x_0 = x_0(0)$.

Следовательно, если двойник образован действием силы очень большой величины, так что $\sqrt{L_m}\, S_0 > M$, то после разгрузки его длина не меняется, форма двойника у концов ($x_0(0) < |x| < L_m$) остается неизменной, а толщина его средней части уменьшается.

Отличие функции $\rho(x)$ при разгрузке от плотности дислокаций при нагрузке означает, что двойникование имеет гистерезисный характер.

В данном случае гистерезис удобно проиллюстрировать на зависимости толщины центральной части двойника h от P при увеличении и последующем уменьшении внешней силы.

Как было показано выше, при возрастании P от 0 до P^* двойник отсутствует ($h = 0$); при $P = P^*$ двойник зарождается, допустим, с толщиной h^*, а при дальнейшем росте P его толщина в простейшем случае монотонно увеличивается (рис. 17), достигая величины h_m при $P = P_0$. При изменении P в обратном направлении (от P_m к 0) толщина h остается постоянной для значений $P_к < P < P_m$ и монотонно (в простейшем случае *)) уменьшается по мере дальнейшего убывания P. В конце разгрузки толщина двойника отлична от нуля и на некоторую определенную величину Δh меньше h_m (рис. 17).

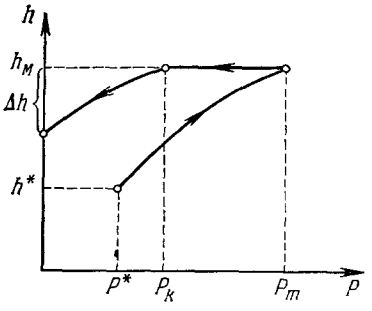


Рис. 17. Зависимость толщины центральной части двойника h от P при нагрузке и разгрузке.

Из характера рассмотренного выше гистерезиса следует важный вывод: плоский двойник внутри твердого тела (формально — в неограниченной среде), обладающий настолько большой длиной, что $\sqrt{L_m}\, S_0 > M$, остается в кристалле и после снятия напряжений. Для сдвига этот вывод справедлив всегда (для полных дислокаций $S_п = 0$).

Может возникнуть вопрос о том, как распределяется сила трения вдоль двойника, заклинившегося в кристалле. Нужно заметить, что до сих пор мы конкретизировали лишь предельные значения силы трения, считая их равными величинам $\pm S_0$ (в зависимости от направления квазистатического движения дислокации). Если же дислокация неподвижна и приложенные к ней силы заранее не известны, то сила трения не определена, хотя и ограничена: $|s| \leqslant S_0$. Сила s и ее распределение вдоль двойника $s = s(x)$ всецело определяются условием равновесия дислокаций под действием остальных сил. В случае заклинившегося в кристалле двойника (когда $\sigma(x) = 0$) при описанном выше процессе разгрузки сила $s(x)$ легко может быть определена на основании (3,4) и (4,3).

Случай 3. $M > \sqrt{L_m} S_0$. В этом случае при некотором значении параметра P уравнение (4,4) для $x_0 = x_0(P)$ имеет решение $x_0(P_1) = L_m$, соответствующее тому моменту, когда в возвратное движение приходят дислокации вдоль всей длины двойника. В ходе дальнейшего убывания P плотность дислокаций вдоль двойника описывается формулой (3,5), причем полудлина двойника L определяется решением трансцендентного уравнения

$$F(L) = \frac{M}{\sqrt{L}} - S_0. \qquad (4,5')$$

Простой графический анализ уравнения (4,5′) показывает, что при $P = P_2 = \frac{S_п^0 - S_0}{\tau(0)}$ двойник исчезает ($L = 0$). Легко видеть, что разность нагрузок, при которых появляется и исчезает двойник, определяется соотношением $P^* - P_2 = \frac{2S_0}{\tau(0)}$ и не зависит от длины двойника. Любопытно отметить, что эта величина в точности совпадает с длиной гистерезисного участка на кривой зависимости толщины двойника от нагрузки $P^* - P_2 = P_m - P_к$ (см. рис. 17 и 18). Величина же гистерезисного участка $\Delta P = P_m - P_1$ на кривой $L = L(P)$ (рис. 18) суще-

*) Так будет всегда при монотонно убывающей функции $\sigma(x)$.

ственно зависит от длины двойника. В простейшем случае, когда $F(L) = PG(L)$, из (3,15) и (4,5) вытекает следующее выражение для этой величины:

$$\Delta P = \frac{2S_0}{G(L)}. \qquad (4,6)$$

Поскольку длины устойчивых равновесных двойников отвечают участкам убывания функции $G(L)$, величина гистерезисного участка ΔP растет с длиной двойника L. Например, из (4,6) и (3,10) следует, что при больших длинах двойников ΔP возрастает прямо пропорционально L.

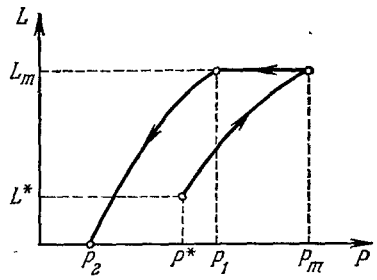


Рис. 18. Гистерезисная петля на кривой зависимости длины двойника L от внешней нагрузки P.

Таким образом, в случае $M > \sqrt{L_m} S_0$ гистерезис при двойниковании может характеризоваться также различной зависимостью длины двойника L от параметра P при нагрузке и разгрузке. После зарождения двойника при $P = P^*$ с ростом P происходит увеличение длины двойника, которая достигает значения L_m при $P = P_m$ (рис. 18). Когда параметр P уменьшается, то вначале перераспределение дислокаций не связано с изменением длины двойника ($P_1 < P < P_m$) и лишь при $P < P_1$ двойник укорачивается, исчезая под нагрузкой, соответствующей $P = P_2$. Следовательно, не очень длинный двойник с большой поверхностной энергией ($M > \sqrt{L_m} S_0$) исчезает после снятия породившей его нагрузки.

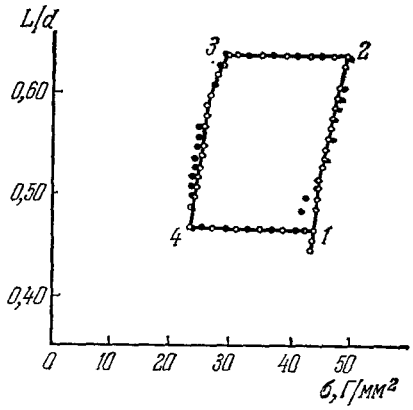


Рис. 19. Зависимость относительной длины двойника от макроскопической нагрузки [60].

d — ширина кристалла; светлые кружки — экспериментальные точки на первой гистерезисной петле, черные — на повторной.

Сопоставляя разобранные нами различные случаи поведения двойника при разгрузке с экспериментальными наблюдениями, подчеркнем один важный вывод изложенной теории. Если в процессе разгрузки начался процесс укорочения двойника, то такой двойник неизбежно выйдет из кристалла при полном снятии нагрузки (имеется в виду монотонно убывающее с глубиной упругое поле). Отмеченное в экспериментальных работах заклинивание двойника после его частичного укорочения [8] могло быть обусловлено возникновением дополнительных препятствий (упругих полей дислокаций скольжения, образующих зону аккомодации, или иных стопоров) у основания двойника.

Количественные измерения гистерезиса при упругом двойниковании кальцита были проведены в работе [60]. На рис. 19 представлена соответствующая экспериментальная кривая, изображающая зависимость длины двойника (в некотором удобном масштабе) от макроскопической нагрузки. Участок кривой *1—2* соответствует этапу нагружения (происходил рост нагрузки от σ_1 до σ_2). После достижения значения σ_2 проводилось уменьшение нагрузки, в ходе которого длина двойника оставалась неизменной (участок *2—3* рис. 19) вплоть до нагрузки σ_3. Гистерезисный

участок $\Delta\sigma = \sigma_2 - \sigma_3$ при данном способе нагружения оказался значительным, что позволило проводить измерения с достаточной точностью. Дальнейшее уменьшение нагрузки сопровождалось сокращением длины двойника (участок *3—4* рис. 19). После уменьшения нагрузки до величины σ_4, при которой длина двойника совпадала со своим исходным значением, разгрузка прекращалась. Последующая нагрузка (от σ_4 до σ_1) порождала второй горизонтальный участок на рассматриваемой диаграмме (интервал *4—1* на рис. 19), который замыкал гистерезисную петлю, показанную на графике светлыми кружочками. Для проверки воспроизводимости результатов цикл измерений повторялся. Оказалось, что вторая петля гистерезиса (на рис. 19 она показана черными кружочками) с точностью до десятых долей процента совпадала с первоначальной, что свидетельствует о вполне удовлетворительной воспроизводимости опыта. Из рис. 19 видно, что $\sigma_2 - \sigma_3 > \sigma_1 - \sigma_4$; это является экспериментальным подтверждением сделанного выше предположения о зависимости гистерезисного участка от длины двойника *).

Гистерезис при двойниковании полностью обусловлен наличием силы торможения, имеющей характер силы сухого трения, поэтому экспериментальное наблюдение [60] гистерезисной петли является очень надежным подтверждением существования силы подобного типа. Такое замечание мы вынуждены сделать в связи с тем, что некоторые исследователи (см., например, [71]) приписывают силе торможения характер вязкого трения (сила вязкого трения исчезает вместе со скоростью дислокации и не может привести к гистерезису в квазистатических условиях).

Проведенный нами анализ гистерезиса был основан на рассмотрении механически равновесной длины двойника, соответствующей некоторому мгновенному состоянию при квазистатическом процессе. Мы убедились, что одному и тому же макроскопически определенному состоянию (заданному значением P и, например, температурой кристалла) отвечают по крайней мере два предельных значения длины двойника (при бесконечно медленной нагрузке, когда сила трения $s(x) = -S_0$, и при бесконечно медленной разгрузке, когда $s(x) = S_0$). Мы уже отмечали выше, что в общем случае на функцию $s(x)$ наложено лишь требование ограниченности ее модуля $|s(x)| \leqslant S_0$, поэтому в зависимости от условий нагружения, в частности — от чередования периодов нагрузки и разгрузки, могут образоваться двойники разной формы и длины, соответствующие разным функциям $s(x)$. В том случае, когда длина симметричного двойника L значительно превосходит расстояние, на котором существенно убывает внешняя нагрузка, она находится как решение уравнения

$$\frac{\Phi_0}{L} = \frac{M}{\sqrt{L}} - \int_{-L}^{L} \frac{s(x)\,dx}{\sqrt{L^2 - x^2}}. \tag{4,7}$$

Если принять, что $M \gg \sqrt{L} S_0$, то решение (4,7) в линейном по $\frac{\sqrt{L} S_0}{M}$ приближении запишется как

$$L = L_0\left[1 + \frac{2\sqrt{L_0}}{M} \int_{-L_0}^{L_0} \frac{s(x)\,dx}{\sqrt{L_0^2 - x^2}}\right], \qquad L_0 = \left(\frac{\Phi_0}{M}\right)^2. \tag{4,8}$$

*) Напомним, что гистерезис длины упругого двойника был обнаружен Гарбером [4]. Детальные исследования этого эффекта были проведены затем Вильямсом и Каном [66]. Однако применение сосредоточенной нагрузки и связанное с этим неконтролируемое изменение условий контакта на поверхности образца не позволяют выделить гистерезис в чистом виде и сказываются на воспроизводимости эксперимента Поэтому использованная авторами [4, 66] методика, по нашему мнению, не дает возможности производить количественные измерения гистерезиса.

Таким образом,

$$L_0\left(1-\frac{\Delta L}{L_0}\right)\leqslant L\leqslant L_0\left(1+\frac{\Delta L}{L_0}\right),\qquad \frac{\Delta L}{L_0}=\frac{2S_0\sqrt{L_0}}{M},\tag{4,9}$$

причем наибольшая длина отвечает $s(x)=S_0$, а наименьшая — $s(x)=-S_0$. На рис. 20 в виде кривых *1* и *2* схематически изображены предельные значения $L=L_0\left(1\pm\frac{\Delta L}{L}\right)$ как функции параметра P. Заштрихованная область на рис. 20 состоит из точек (P, L), изображающих механически равновесные состояния двойника. Сечение этой области прямой линией $P=\text{const}$ определяет интервал возможных равновесных длин при фиксированном параметре P. Но длина двойника является макроскопической характеристикой системы, поэтому наличие некоторого интервала ее равновесных значений означает, что проанализированные механически равновесные двойники не отвечают термодинамическому равновесию кристалла.

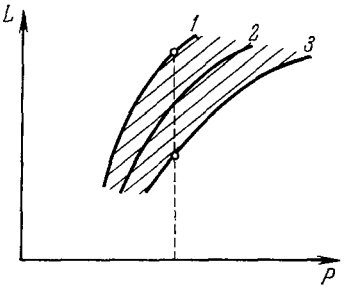


Рис. 20. Связь длины двойника L и внешней нагрузки P в зависимости от величины и знака силы трения $s(x)$.

1 — $s(x)=\text{const}=-S_0$; *2* — $s(x)=\text{const}=0$; *3* — $s(x)=\text{const}=S_0$.

Впервые качественное различие между механически равновесными и термодинамически равновесными двойниками было отмечено Лифшицем [13]. Однако в макроскопической теории [13] отсутствуют параметры и соотношения, позволяющие произвести количественное описание различий формы термодинамически равновесного двойника от механически равновесных. Поэтому мы будем следовать излагаемой дислокационной теории двойников и выясним, какой двойник из всех тех, что находятся в механическом равновесии при заданных внешних нагрузках, является термодинамически равновесным.

Термодинамическое равновесие упругой среды с тонким двойником отвечает минимуму величины

$$\mathscr{E}=E_{\text{уп}}-\oint\limits_{\Sigma}\sigma^0_{ik}u_i\,d\Sigma_k+E_{\text{п}},$$

где $E_{\text{уп}}$ — упругая энергия деформирования, $E_{\text{п}}$ — поверхностная энергия на плоскости двойникования, σ^0_{ik} — внешняя нагрузка на поверхности тела, а интегрирование в поверхностном интеграле производится по поверхности упругого тела Σ.

Легко проверить [72], что

$$E_{\text{уп}}-\oint\limits_{\Sigma}\sigma^0_{ik}u_i\,d\Sigma_k=\frac{1}{2}\int\sigma^e_{ik}\varepsilon^e_{ik}\,d\Omega+\frac{1}{2}\int\sigma^\partial_{ik}\varepsilon^\partial_{ik}\,d\Omega-$$

$$-bH\int\limits_{-L}^{L}dx\,\rho(x)\int\limits_0^x\sigma^e_{xy}(x')\,dx'-\int\limits_{\Sigma}\sigma^e_{ik}u^e_i\,d\Sigma_k,\tag{4,10}$$

где индекс «*e*», как и раньше, отмечает внешние поля, а индекс «∂» — поля, созданные самим двойником, т. е. теми дислокациями, которые его образуют. Длина дислокации по оси Z обозначена через H.

Характерно, что под знак поверхностного интеграла в (4,10) входят лишь смещения, созданные внешними напряжениями на поверхности тела.

Поверхностная энергия $E_п$, порождающая «силу»— $S_п(x)$, определяется соотношением

$$BE_п = H \int_{-L}^{L} dx\, \rho(x) \int_{0}^{x} S_п(x')\, dx'. \tag{4,11}$$

Так как поле внешних напряжений считается фиксированным, то интересующая нас часть величины $\mathscr{E}$ равна

$$\Delta\mathscr{E} = \frac{1}{2} \int \sigma_{ik}^{\partial} \varepsilon_{ik}^{\partial}\, d\Omega - H \int_{-L}^{L} dx\, \rho(x) \int \frac{\sigma(x')\, dx'}{B} + E_п. \tag{4,12}$$

Первое слагаемое в (4,12) определяет энергию взаимодействия дислокаций, образующих двойник; поэтому

$$B \cdot \frac{1}{2} \int \sigma_{ik}^{\partial} \varepsilon_{ik}^{\partial}\, d\Omega = -\frac{H}{2} \int_{-L}^{L} dx \int_{-L}^{L} dx' \ln|x - x'|\, \rho(x) \rho(x'). \tag{4,13}$$

Второе слагаемое в (4,12) определяет энергию дислокаций во внешнем поле напряжений.

Подставляя (4,11) и (4,13) в (4,12), мы получим $\Delta\mathscr{E}$ как функционал плотности распределения дислокаций $\rho(x)$. Функция $\rho(x)$, дающая минимум этого функционала, удовлетворяет условию

$$\int_{-L}^{L} d\xi\, \rho(\xi) \ln|x - \xi| + \int_{0}^{x} d\xi\, [\sigma(\xi) - S_п(\xi)] = 0. \tag{4,14}$$

Продифференцируем (4,14) по x:

$$\int_{-L}^{L} \frac{\rho(\xi)\, d\xi}{\xi - x} = \frac{1}{B} [\sigma(x) - S_п(x)]. \tag{4,15}$$

Условие (4,15) является сингулярным интегральным уравнением относительно $\rho(x)$ и определяет плотность дислокаций вдоль термодинамического равновесного двойника. Это уравнение формально совпадает с уравнением (3,4), если в последнем положить $S_0 \equiv 0$. Следовательно, все формулы, которые мы раньше получали и обсуждали, относятся и к термодинамически равновесному двойнику, если в них положить $S_0 \equiv 0$. В частности, формула (4,7) заменится на

$$PG(L) = \frac{M}{\sqrt{L}}, \tag{4,16}$$

а график функции $L = L(P)$ при всех P схематически изобразится кривой *3* на рис. 20.

На диаграмме (P, L) квазистатические процессы изменения механического состояния двойника будут изображаться следующими кривыми, состоящими из двух различных участков. При нагрузке первый участок кривой процесса является прямой, выходящей из точки произвольного начального состояния (точка O на рис. 21, *а*) и заканчивающейся на нижней предельной кривой (точка A на рис. 21, *а*). В течение этой части процесса длина двойника не меняется. Дальнейший рост нагрузки приводит к увеличению двойника, которое описывается движением вдоль нижней предельной кривой (участок AQ на рис. 21, *а*). Аналогично при разгрузке кривая процесса состоит из прямолинейного участка OM ($L = \text{const}$) и участка верхней предельной кривой MN (рис. 21, *а*).

Иначе выглядят кривые установления термодинамически равновесной длины двойника, отвечающей фиксированной внешней нагрузке.

Если предоставить механически равновесному двойнику, пришедшему в состояние (P_0, L_1) в процессе нагрузки (рис. 21, *б*), возможность перейти в термодинамически равновесное состояние, то его длина L со временем будет увеличиваться. В эксперименте [60] наблюдалась другая ситуация, а именно, установление термодинамического равновесия на этапе разгрузки, когда начальное состояние отвечало точке (P_0, L_2) на рис. 21, *б*. После окончания процесса частичного квазистатического разгружения нагрузки фиксировалась и проводилась длительная выдержка. Наблюдения велись до тех пор, пока суточное изменение длины двойника при

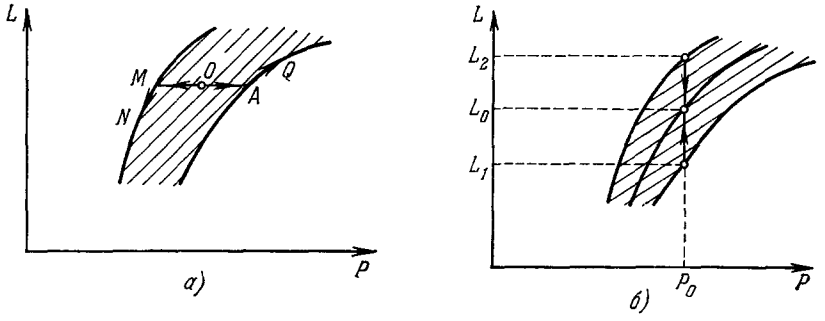


Рис. 21. *а*) Квазистатические процессы изменения механического состояния двойника. *б*) Установление термодинамически равновесной длины двойника при фиксированной внешней нагрузке.

комнатной температуре не сравнивалось с погрешностью измерения длины. В результатах экспериментов, представленных в табл. I, легко заметить характерную тенденцию укорочения двойника. Небольшой подогрев кристалла приводил к интенсификации процесса установления термодинамически равновесной длины двойника.

Таблица I

Установление термодинамически равновесной длины упругого двойника

Номер двойника	Начальная длина	Конечная длина	Продолжительность эксперимента, *час*
1	0,33	0,25	51
2	0,45	0,35	170
3	0,48	0,45	96
4	0,62	0,60	83

Сравнивая данные табл. I с типичным экспериментальным графиком на рис. 19, можно заключить, что времена выдержки в описанном опыте были недостаточны для завершения процесса установления термодинамически равновесной длины двойника. Действительно, при условии $S_0\sqrt{L} \ll M$, которое отвечало постановке эксперимента, из (4,9) следует, что термодинамически равновесная длина равна $L_0 = \frac{1}{2}(L_1 + L_2)$ (см. рис. 21, *б*). Даже грубо прикидочное размещение данных табл. I на графике рис. 19 показывает, что длина двойника в конце опыта еще значительно превосходила вытекающее из теории значение L_0.

Наконец, обратим внимание на то, что заклинившийся в кристалле после полной разгрузки двойник (случаи 1 и 2 гистерезиса, рассмотренные выше) должен выйти из кристалла в процессе установления термодинамического равновесия. Этот результат теории может объяснить экспериментальные факты отжига заклинившихся двойников в $NaNO_3$ [73], висмуте [74] и сурьме [75] (естественно, что наблюдавшийся в этих опытах процесс мог осложняться преодолением стопоров).

5. ДВОЙНИК В ПЛАСТИНЕ. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ТЕОРИИ

Обсуждавшиеся в предыдущих разделах качественные особенности поведения двойника при изменении внешней нагрузки анализировались на примере двойника в неограниченном кристалле (или двойника у плоской поверхности кристалла, занимающего полупространство). Однако в эксперименте, как правило, имеют дело с двойником, длина которого сравнима с размерами кристаллического образца. Поэтому для количественного сравнения результатов эксперимента с выводами теории необходимо иметь соответствующие формулы для двойников в ограниченных кристаллах, т. е. для ситуаций, максимально приближающихся к условиям опыта. Но, помимо такой чисто прикладной стороны вопроса, рассмотрение двойников в ограниченном кристалле имеет важное принципиальное значение для изучения качественно новых свойств двойников, отсутствующих у таковых в неограниченном кристалле.

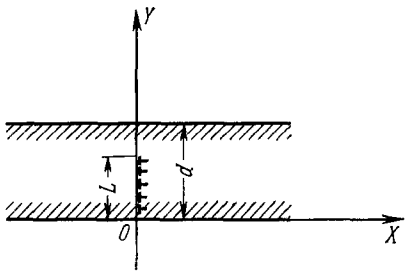


Рис. 22. Модель упругого двойника в пластине.

Чтобы пояснить последнее замечание, обсудим кратко проблему устойчивости двойника в кристалле. В работе [50] было показано, что двойник у плоской поверхности полуограниченного кристалла всегда устойчив, если его длина значительно превышает размеры области приложения внешней нагрузки. Это вызвано тем, что на такой глубине поле напряжений уже монотонно убывает в глубь кристалла, следствием чего является плавный и монотонный рост длины двойника с увеличением нагрузки. А рост длины с увеличением внешней нагрузки является признаком устойчивости двойника. Однако еще в работах [12, 13] было отмечено, что в том случае, когда длина двойника становится сравнимой с толщиной кристалла, его устойчивость нарушается. Ясно, что строгое определение границы устойчивости двойника в ограниченном кристалле может быть сделано лишь на основании количественного анализа соответствующей задачи.

В качестве простейшей модели ограниченного кристалла мы рассмотрим плоскопараллельную пластину, т. е. кристалл, ограниченный двумя параллельными свободными плоскостями. Будем считать двойник в пластине плоским, образованным набором винтовых дислокаций, перпендикулярным поверхности и выходящим на нее одним из концов (рис. 22).

Такой двойник должен уравновешиваться поверхностной силой, направленной параллельно линии каждой дислокации и не меняющейся вдоль нее (в теории упругости соответствующее деформированное состояние называется антиплоской деформацией). Выбор системы координат указан на рис. 22. Этот выбор, в частности, предполагает, что линии дислокаций — это прямые, параллельные оси Z. Задача о равновесии такого двойника была полностью решена в работе [52], причем в изотропном приближении был получен явный вид трансцендентного уравнения, определяющего длину двойника. Ограничивая себя случаем изотропной среды, приведем полученное в [52] уравнение равновесия, определяющее

плотность дислокаций вдоль двойника:

$$\int_0^L \frac{\rho(\xi)\sin\frac{\pi\xi}{d}\,d\xi}{\cos\frac{\pi\xi}{d}-\cos\frac{\pi y}{d}} = -\frac{2d}{\mu b\pi}\left[\sigma_{xz}^e(y)-S_0-S_{\text{п}}(y)\right], \tag{5,1}$$

где b — вектор Бюргерса, d — толщина пластины, μ — модуль сдвига.

Заменой $x=\cos\frac{\pi\xi}{d}$ уравнение (5,1) может быть приведено к простейшему интегральному уравнению с ядром Коши, поэтому его решение может быть получено в общем виде. Если интересоваться ограниченными решениями этого уравнения, т. е. рассматривать только свободные двойники, то легко получить соотношение, эквивалентное условию ортогональности (3,7); не меняя форму записи уравнения (3,7), приведем новые выражения для функций $F(L)$ и $J(L)$:

$$F(L)=\frac{1}{d}\int_0^L \frac{\sigma_{xz}(y)\sin\frac{\pi y}{d}\,dy}{\sqrt{\left(1-\cos\frac{\pi y}{d}\right)\left(\cos\frac{\pi y}{d}-\cos\frac{\pi L}{d}\right)}}, \tag{5,2а}$$

$$J(L)=\sqrt{\frac{\pi}{2d}\operatorname{ctg}\frac{\pi L}{2d}}\,M, \tag{5,2б}$$

где параметр M имеет прежний смысл.

Рассмотрим трансцендентное уравнение (3,7), содержащее функции (5,2), с точки зрения его использования для экспериментального определения основных параметров теории S_0 и M.

Если упругие поля пропорциональны параметру P ($\sigma_{xz}(y)=P\tau(y)$), то мы можем записать уравнение, аналогичное (3,15), а именно,

$$PG(L)=S_0+\sqrt{\frac{\pi}{2d}\operatorname{ctg}\frac{\pi L}{2d}}\,M, \tag{5,3}$$

где $G(L)$ определяется формулой (5,2а), в которой следует заменить $\sigma_{xz}(y)$ на $\tau(y)$.

В том случае, когда известны внешние нагрузки (т. е. $PG(L)$) и соответствующая этим нагрузкам длина двойника L, из (5,3) можно получить информацию о S_0 и M. Таким образом, соотношения типа (5,3) могут быть непосредственно использованы для определения параметров теории S_0 и M.

Однако мы начнем с обсуждения качественно новых явлений, специфичных для двойников в пластине. Прежде всего обратим внимание на поведение функции $F(L)$ в окрестности $L=d$. Легко убедиться, что всегда, когда внешние напряжения непрерывны в точке выхода линии двойникования на противоположную границу полосы кристалла ($y=d$), имеет место условие $F'(d)=0$.

Заметим также, что из (5,2) следует

$$F(d)=\frac{1}{d}\int_0^d \sigma_{xz}(y)\,dy=\frac{Q_z}{d}, \tag{5,4}$$

где интеграл определяет полную силу на плоскости двойникования, а Q_z равняется z-составляющей полной силы, приложенной к внешней поверхности кристалла с одной стороны от плоскости двойникования (если плоскость двойникования принята за плоскость $x=0$, то идет речь о «правой» стороне $x>0$). Последняя часть равенства (5,4) получена

на основании статических уравнений равновесия, из которых также следует, что полная сила, приложенная к внешней поверхности образца с другой стороны от плоскости двойникования ($x < 0$), отличается только знаком от Q_z.

Любопытно заметить, что в том случае, когда все внешние усилия, направленные по оси Z, распределены с одной стороны от плоскости двойникования, $F(d) = 0$.

Что касается функции $J(L)$, то ее поведение в окрестности $L = d$ также представляет интерес. Легко заметить, что при $d - L \ll d$ можно записать

$$J(L) = \frac{\pi M}{2d}\sqrt{d-L}, \tag{5,5}$$

из чего следует $J(d) = 0$ и $J'(d) = -\infty$.

Имея общие представления о функциях $F(L)$ и $J(L)$, перейдем к анализу роста двойника. При малых внешних нагрузках (малых P), пока $L \ll d$, характер роста двойника будет таким же, как в полуограниченной среде, и характерные для ограниченного кристалла особенности развития двойника проявляются только при $L \sim d$.

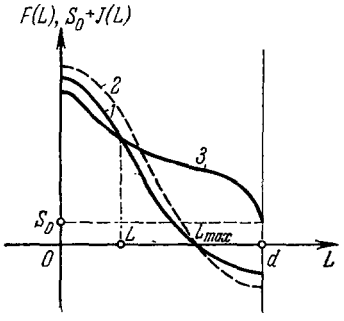


Рис. 23. Графическое решение уравнения (5,3) при $Q_z < S_0 d$. 1, 2 — кривые $F(L)$ при разных P; 3 — кривая $S_0 + J(L)$.

Предположим, что в процессе нагружения все время соблюдается условие $Q_z < S_0 d$ (для реализации такого условия достаточно считать, что кривая $F(L)$ в любой момент нагружения хотя бы в одной точке пересекает ось абсцисс). Тогда из элементарного анализа графиков рис. 23 следует, что равновесная длина двойника оказывается всегда меньше толщины образца ($L < d$). В простейшем случае, когда $F(L) = PG(L)$ и $G(L)$ есть знакопеременная функция, легко увидеть существование максимальной длины $L_{\max}$, которая не может быть превзойдена при любой конечной нагрузке. Очевидно, что $L_{\max}$ есть наименьший корень уравнения $G(L) = 0$. Может оказаться, что $L_{\max} = d$ (так будет, например, тогда, когда внешние силы приложены с одной стороны от плоскости двойникования). При этом под действием нарастающей нагрузки двойник будет подходить сколь угодно близко к противоположной поверхности кристалла, не достигая ее ни при какой конечной величине внешней силы.

Если, начиная с некоторой нагрузки, $Q_z > S_0 d$ и кривая $F(L)$ не пересекает ось абсцисс, то при достаточно большой внешней силе двойник проходит через всю пластину («проскакивает» через весь образец). В этой ситуации основной интерес представляет вопрос о том, каким образом реализуется завершающая фаза прохождения кристалла. Последний вопрос связан непосредственно с проблемой устойчивости упругого двойника в ограниченном кристалле. Физическая причина возможной потери устойчивости двойника имеет простое дислокационное истолкование. Наличие противоположной поверхности кристалла порождает силу, притягивающую к ней дислокации, и при определенных условиях действие этой силы может оказаться решающим для дислокаций на конце двойника. Двойник перестает непрерывным образом следовать за возрастанием нагрузки и при дальнейшем увеличении внешней силы скачкообразно удлиняется до $L = d$.

Так же, как в силовой теории трещин [33], формальный критерий устойчивости двойника по отношению к бесконечно малым изменениям внешней нагрузки сводится к требованию

$$\frac{dL}{dP} > 0. \tag{5,6}$$

Легко показать, что если длина двойника может возрастать до $L = d$, требование (5,6) обязательно нарушается, во всяком случае, при длинах двойника, мало отличающихся от толщины образца ($d - L \ll d$). Из условия $F'(d) = 0$ вытекает, что при $d - L \ll d$ график функции $F(L)$ имеет вид горизонтальной прямой $F(L) = F(d)$, которая пересекает кривую $S_0 + J(L)$ при $F(d)$, слегка превышающих значение S_0. Используя поведение функции $J(L)$ в обсуждаемой области (5,5), легко найти зависимость длины двойника от нагрузки:

$$L = d - 4\left(\frac{d}{\pi M}\right)^2 [F(P, d) - S_0]^2. \tag{5,7}$$

Следовательно, если $\left(\frac{dF}{dP}\right) > 0$, то при $F(d) > S_0$ вместо условия (5,6) мы получаем обратное неравенство $\frac{dL}{dP} < 0$, показывающее, что достаточно длинный двойник, независимо от способа его возникновения, обязательно теряет устойчивость.

Иллюстрацией вышеизложенного может служить рассмотрение графического решения уравнения (5,3), представленное на рис. 24. Предположим, что $F(L)$ — монотонно убывающая функция. Тогда существует такая область, в которой уравнение (5,3) имеет два решения L_1 и L_2 (кривая *1*). Второе из этих решений не удовлетворяет условию устойчивости. С ростом нагрузки длина устойчивого двойника L_1 растет. Наконец, при достижении параметром нагрузки определенного значения $P = P_к$ (кривая *2*) происходит касание графиков $F(L)$ и $[J(L) + S_0]$. В точке касания $L = L_к$, как легко убедиться, $\frac{dL}{dP} = 0$. При дальнейшем увеличении нагрузки исчезает решение уравнения (5,3), т. е. исчезает возможность существования статического равновесного двойника. Поскольку к моменту времени $P = P_к$ двойник уже обладал длиной $L_к$, а все образующие его дислокации испытывают воздействие внешней силы вдоль направления его роста при $P < P_к$, последующее динамическое поведение двойника должно привести к тому, что двойник «проскочит» через весь кристалл.

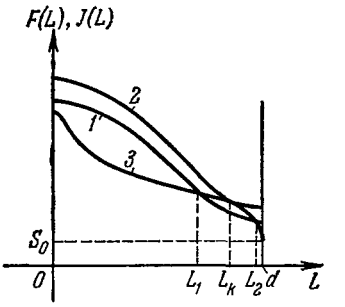


Рис. 24. Графическое решение уравнения (5,3) при $Q_z > S_0 d$.
1, *2* — кривые $F(L)$;
3 — кривая $S_0 + J(L)$.

Следовательно, для рассматриваемых двойников всегда существует некоторая критическая длина $L_к$, определяемая распределением внешних сил и при достижении которой теряется устойчивость статического равновесного двойника. Схематический график зависимости $L = L(P)$, на котором видно появление критической длины $L_к$, приведен на рис. 25. Эта схема сделана для случая, представленного на рис. 24.

В общем случае критическое значение $L_к$ определяется как наибольший корень уравнения

$$\frac{dL}{dP} = 0. \tag{5,8}$$

В том случае, когда $F(L)=PG(L)$, условие (5,8) преобразуется в следующее уравнение для определения критической длины устойчивого двойника:

$$G(L)J'(L)=[J(L)+S_0]G'(L). \tag{5,9}$$

Таким образом, в ограниченном кристалле могут реализоваться только две возможности. Если $F(L)$ — знакопеременная функция, то имеется максимальная возможная длина, которая не может быть превзойдена при любом конечном P. Если же $F(L)$ — знакопостоянная функция, то при достаточно большом P (таком, что $F(d)>S_0$) произойдет потеря устойчивости с последующим скачкообразным превращением упругого двойника в остаточную двойниковую прослойку. Качественный анализ показывает, что эта закономерность имеет место и в случае упругих двойников в ограниченном кристалле с анизотропией общего вида [52], а также для упругих двойников вблизи границы раздела сред с различными упругими модулями [54]. Поэтому изложенные выше теоретические выводы могут быть использованы для анализа экспериментальных данных о поведении упругих двойников вблизи границ остаточных двойниковых прослоек, границ зерен и т. д. Потеря устойчивости упругого двойника вблизи остаточной двойниковой прослойки экспериментально наблюдалась в кальците [55]. Взаимодействие двойника с границей зерна описано в работе [56]. Нам также представляется, что потеря устойчивости двойников в кристаллитах может быть одной из причин, приводящих к прерывистому характеру пластической деформации в поликристаллах, когда последняя осуществляется главным образом путем двойникования (см., например, [76, 77]).

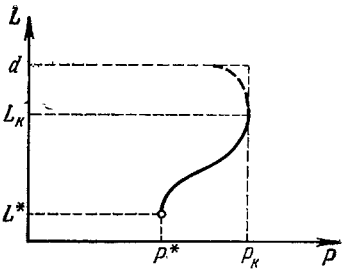


Рис. 25. Зависимость длины двойника от нагрузки в ограниченном кристалле.

Заканчивая обсуждение вопроса об устойчивости, отметим, что все наше рассмотрение применимо и к так называемым трещинам продольного сдвига, развитие которых анализировалось ранее в работе [78]. Приближенное решение задачи о поведении трещин общего вида вблизи поверхности тела было ранее получено в работе [79].

Несколько иная ситуация с устойчивостью двойника, образованного винтовыми дислокациями, должна возникать в том специальном случае, когда плоскость двойникования строго параллельна поверхностям бесконечно протяженной пластины. Оказывается [53], что при такой ориентации плоскости двойникования отсутствует критическая длина двойника, однако остается критическая нагрузка $P_к$, при подходе к которой двойник непрерывным образом увеличивает свою длину, стремящуюся к бесконечности при $P \to P_к$.

Следует сказать несколько слов о гистерезисе при двойниковании в ограниченном кристалле. Легко убедиться, что все качественные выводы предыдущего раздела (гл. 4) могут быть получены также для двойника у поверхности изотропного тела [50] и для двойника в пластине [52]. Однако величина участка $\Delta P = P_m - P_1$ на гистерезисной кривой (см. рис. 18) существенно зависит от формы и размеров кристалла, в котором производится двойникование. Ясно также, что о гистерезисе имеет смысл говорить только в случае двойника, длина которого меньше критической или максимально возможной.

Перейдем, наконец, к описанию экспериментального определения феноменологических параметров теории, а именно — величин S_0 и M. Для нахождения этих параметров следует использовать теоретические соотношения, связывающие S_0 и M с экспериментально наблюдаемыми характеристиками упругого двойника. В качестве таковых могут быть рассмотрены его механически равновесная и критическая длины, а также величина гистерезисного участка ΔP на кривой зависимости длины двойника от нагрузки. В некоторые из формул, связывающих характерные длины двойника с величинами S_0 и M, входят интегралы от функции $\sigma(x)$, для вычисления которых необходимо знать распределение упругих напряжений вдоль плоскости двойникования. Другими словами, для возможности количественной обработки результатов эксперимента необходимо знать напряженное состояние образца. Это напряженное состояние должно быть найдено путем решения соответствующей задачи теории упругости с граничными условиями, близкими к реализуемым в эксперименте. В работе [59] получено точное решение задачи об антиплоской деформации пластины при следующих краевых условиях (рис. 26). Верхняя и нижняя поверхности пластины при $x < x_a$ закреплены (их смещения точно равны нулю), верхняя поверхность пластины при $x > x_a$ свободна, а на нижней поверхности в точке $x = x_c > x_a$ приложена сила величины P, параллельная оси Z. Такие граничные условия близки к ситуации, реализуемой в эксперименте, когда кристалл находится в зажиме и к нему приложено внешнее усилие посредством тонкой тяги, наклеенной на его поверхности.

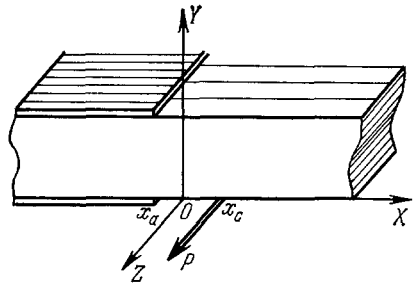


Рис. 26. Схема антиплоской деформации пластины.

Нужная нам компонента тензора напряжений как функция y при $x = 0$ имеет вид

$$\sigma_{zx} = A \frac{e^{\frac{\pi x_c}{d}} \cos\left(\frac{\pi y}{d} - \varphi\right) - \cos\frac{\pi\varphi}{d}}{\sqrt[4]{\operatorname{ch}\frac{2\pi x_a}{d} - \cos\frac{2\pi y}{d}}\left(\operatorname{ch}\frac{\pi x_c}{d} - \cos\frac{\pi y}{d}\right)}, \tag{5,10}$$

где

$$\varphi = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sin\frac{2\pi y}{d}}{\cos\frac{2\pi y}{d} - \exp\left(-\frac{2\pi|x_a|}{d}\right)},$$

$$A = \frac{P}{d}\frac{\sqrt{e^{\frac{2\pi x_c}{d}} e^{\frac{2\pi x_a}{d}} - 1}}{2^{5/4}\sqrt{e^{\frac{\pi|x_a|}{d}} e^{\frac{\pi x_c}{d}}}}.$$

Мы видим, что напряженное состояние в данном случае представимо в виде $\sigma_{zx}(y) = P\tau(y)$, т. е. упругое поле пропорционально параметру нагрузки P. Ранее мы убедились, что такая зависимость упругих напряжений от P значительно упрощает теоретический анализ эволюции двойника.

При проведении соответствующего эксперимента удалось образовать упругий двойник, состоящий из прямолинейных винтовых дислокаций,

а затем обеспечить его устойчивость и развитие под влиянием распределенной нагрузки, приложенной по схеме, близкой к рис. 26. Для этого образец кальцита *1* вклеивался в зажим *2*, как показано на рис. 27. На небольшом расстоянии от зажима наклеивалась тяга *3* для приложения нагрузки. Перед опытом при помощи специального устройства накладывалась сосредоточенная нагрузка, достаточная для образования упругого двойника *4*, состоящего из прямолинейных отрезков винтовых двойникующих дислокаций. При соответствующем грузе P образовавшийся двойник стабилизировался *). Таким образом в эксперименте действительно удалось создать условия, соответствующие схеме рис. 26.

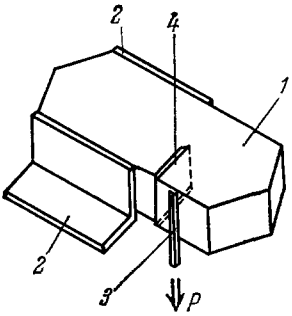


Рис. 27. Схема нагружения и крепления кристалла [59].
1 — кристалл кальцита; *2* — зажимы; *3* — тяга; *4* — двойник,

Для полного совпадения экспериментальной ситуации с расчетным напряженным состоянием нужно потребовать, чтобы толщина образца была значительно меньше его размеров вдоль оси Z (см. рис. 26). Это требование, к сожалению, не могло быть удовлетворено. Однако оценки [80] показывают, что погрешности эксперимента, вызываемые этим обстоятельством, а также возникающие при измерении P и L, в сумме имеют порядок величины 10%.

Описанный способ воздействия на двойник использовался в количественных экспериментах по определению феноменологических параметров S_0 и M.

Вначале опишем нахождение величин S_0 и M, основанное на измерении зависимости длины двойника от нагрузки. Схема их определения была такой. Полученные в эксперименте значения нагрузок P и соответствующие им длины двойников L подставлялись сначала в (5,11), а затем результат расчета подставлялся в (5,2а). После этого для каждой пары величин P и L записывалось соотношение (5,3). Совместный анализ большого числа полученных таким образом соотношений для разных двойников позволяет довольно точно определить S_0 и M. Результаты для двух кристаллов приведены в табл. II.

Таблица II

Значения S_0 и M (по зависимости длины двойника от нагрузки)

Номер кристалла	S_0, кГ/см²	M, кГ/см$^{3/2}$
1	0,50±0,05	1,00±0,12
2	0,31±0,01	1,03±0,02

Другим способом, позволяющим определить S_0 и M, является использование экспериментальных данных о гистерезисе. Действительно, совокупность уравнений (5,3) (для момента, непосредственно предшествовавшего разгрузке) и (4,6) можно рассматривать как систему, позволяющую при известном напряженном состоянии и экспериментально определенном гистерезисном участке ΔP полностью определить параметры S_0 и M. Соответствующие эксперименты и вычисления были проделаны в работе [60]. Результаты приведены в табл. III. Параллельно приводятся параметры S_0 и M, полученные из обработки диаграммы L (P) для тех же двойников.

Расчет конкретного напряженного состояния обычно представляет определенные технические трудности, поэтому полезно иметь некоторое

*) Мы обращаем внимание на то, что удержание и воздействие на упругий двойник в кристалле с помощью распределенной нагрузки представляет собой интересную экспериментальную задачу, которая, насколько нам известно, впервые была решена в работе [59].

Таблица III

Значения параметров S_0 и M (по гистерезису и по зависимости длины двойника от нагрузки)

Номер кристалла	По гистерезису		По зависимости $L(P)$	
	S_0, $кГ/см^2$	M, $кГ/см^{3/2}$	S_0, $кГ/см^2$	M, $кГ/см^{3/2}$
1	0,27±0,02	1,04±0,06	0,28±0,05	1,00±0,06
2	0,49±0,09	0,93±0,09	0,49±0,17	0,92±0,17

соотношение, которое мало чувствительно к напряженному состоянию. Исключив $G(L)$ из (4,6) и (5,3), мы можем найти отношение параметров S_0 и M:

$$\varkappa = \frac{S_0}{M} = \frac{\Delta P}{2P - \Delta P}\sqrt{\frac{\pi}{2d}\operatorname{ctg}\frac{\pi L}{2d}}, \qquad (5,11)$$

которое от распределения напряжений не зависит и может быть определено в опытах с гистерезисом. Сопоставляя $\varkappa$, полученную без расчета напряженного состояния из опытов по гистерезису, с величиной $\varkappa$, получаемой после обработки диаграммы $L = L(P)$ на основании рассчитанного распределения упругих напряжений, можно проверить применимость расчетных формул работы [59].

В случае кристалла № 1 имеем соответственно 0,26 $см^{-1/2}$ и 0,28 $см^{-1/2}$, а для кристалла № 2 — соответственно 0,53 $см^{-1/2}$ и 0,53 $см^{-1/2}$. Сравнение приведенных значений $\varkappa$ для каждого кристалла показывает, что расчет напряженного состояния достаточно хорошо соответствует условиям эксперимента.

Важно отметить, что разброс экспериментальных значений M не превышает погрешностей эксперимента. Для S_0 разброс экспериментальных значений от кристалла к кристаллу оказывается бо́льшим, чем погрешность эксперимента. Это может быть обусловлено различиями в дефектной структуре разных образцов. Для проверки такого предположения проводились измерения S_0 и M на кристаллах, которые заведомо очень сильно отличались количеством дефектов [81]. В кристаллах, плотность полных дислокаций скольжения в которых менялась от 10^2 $см^{-2}$ до 10^4 $см^{-2}$, различия значений M не превышали погрешности эксперимента. Что же касается величины S_0, то она менялась соответственно в пределах от 0,3 $кГ/см^2$ до 1 $кГ/см^2$ *).

Коль скоро речь зашла о том, чем определяется величина S_0, заметим, что в силу трения дают вклад также и дефекты, возникающие в процессе упругого двойникования (возникновение таких дефектов было обнаружено в сурьме [82] и кальците [83]). В работе [83] показано, что в процессе многократного повторения циклов нагрузка — разгрузка увеличивается число образовавшихся дефектов, что сопровождается ростом площади петли гистерезиса **).

*) Такое увеличение укладывается в то, которое должно порождаться упругими полями от равномерно распределенных в кристалле дислокаций скольжения с соответствующими плотностями.

**) В недавно появившейся работе Кэйга и Гилмана [88] также сообщается о наблюдении дефектов, возникающих при упругом двойниковании кальцита, и авторы считают эти дефекты причиной гистерезиса при упругом двойниковании. Действительно, как показано в работе [83], при наличии большой плотности полных дислокаций в кристалле значительная часть гистерезисной петли обусловлена возникающими при

В сравнительно чистых монокристаллах, где исходная плотность полных дислокаций $\sim 10^2$ $см^{-2}$, величина S_0 в процессе такого циклирования практически не менялась. Более того, оценки показывают, что средние внутренние напряжения от имеющихся в таких кристаллах дефектов значительно меньше измеряемого значения S_0. Поэтому можно предположить, что измеренное значение S_0 в этих кристаллах лишь незначительно превышает значение решеточной силы трения двойникующей дислокации *).

Третьим способом, позволяющим определить S_0 и M, является использование экспериментальных данных о потере устойчивости упругого двойника. Совокупность уравнений (5,8) для критической длины и (5,3) для длины двойника в момент потери устойчивости при экспериментально измеренных $P_к$ и $L_к$ дают значения S_0 и M. Такой подход использовался в работе [60], где критическая длина оказалась равной 0,85—0,90 толщины образца. Рассчитанные на основании анализа потери устойчивости значения S_0 и M приведены в табл. IV, где даны также эти величины, полученные на этом же двойнике другими способами.

Таблица IV

Значения S_0 и M (по критической длине, гистерезису и зависимости $L(P)$)

Способ измерения	S_0, $кГ/см^2$	M, $кГ/см^{3/2}$
По зависимости $L(P)$	0,22	1,01
По гистерезису	0,37	0,87
По критической длине	0,29	0,89

Параметр M, в принципе, может быть также определен из соотношения (4,16) при известном напряженном состоянии кристалла и экспериментально определенной термодинамически равновесной длине двойника. Однако, как отмечалось в гл. 4, попытка использовать этот метод для количественных измерений связана с необходимостью чрезвычайно длительной выдержки кристалла при фиксированной нагрузке **).

Очень важным обстоятельством, на которое мы считаем необходимым обратить внимание, является то, что три различных независимых физических эксперимента дают очень близкие значения величин S_0 и M. На этом основании мы вправе считать их константами реального кристалла. Тем самым рассматриваемая дислокационная теория избавляется от модельных параметров и может быть использована для достоверного количественного описания тех процессов пластического деформирования, которые реализуются путем упругого двойникования.

упругом двойниковании дефектами. В то же время в хороших кристаллах кальцита удается сделать до 30 циклов нагрузка — разгрузка, и изменение петли находится в пределах погрешности эксперимента. Это, как нам кажется, свидетельствует о том, что в хороших кристаллах гистерезис обусловлен решеточной силой трения, что соответствует теоретическим представлениям.

*) Дополнительные доказательства утверждения о решеточном характере силы трения в кристалле с небольшим числом дефектов получены в работе [89] при измерении температурной зависимости S_0. Характер обнаруженной температурной зависимости и количественные характеристики оказались соответствующими теоретически рассчитанным для пайерлсовской модели силы торможения [90, 91].

**) Возможно, процесс установления термодинамически равновесной длины может быть ускорен неким слабым циклическим воздействием, однако, насколько нам известно, подобные эксперименты не проводились.

В заключение отметим, что обычно в качестве константы материала, характеризующей его склонность к двойникованию, пользуются не параметром M, а другой макроскопической величиной — коэффициентом поверхностного натяжения α межфазной границы двойник — материнский кристалл. Связь M и α для двойников может быть получена точно так же, как связь модуля сцепления и коэффициента для свободной поверхности кристалла в силовой теории трещин [33, 32]. В случае двойника, образованного винтовыми дислокациями, имеем

$$\alpha = \frac{\pi^3 M^2}{4\mu}. \tag{5,12}$$

Если подставить в (5,12) приведенные выше значения M и величину модуля сдвига вдоль соответствующей плоскости в кальците, получаем $\alpha \approx 35$ *эрг/см*^{2}. Оценка коэффициента α по приближенным формулам, приведенным в работе Владимирского [12], с использованием экспериментальных данных [59, 60] приводит к значениям α того же порядка величины [80].

6. ТЕОРИЯ И. М. ЛИФШИЦА И ДИСЛОКАЦИОННОЕ ОПИСАНИЕ ДВОЙНИКОВ КОНЕЧНОЙ ТОЛЩИНЫ

В предыдущих разделах мы неоднократно упоминали теорию Лифшица и обращали внимание на конкретизацию и развитие формулировок

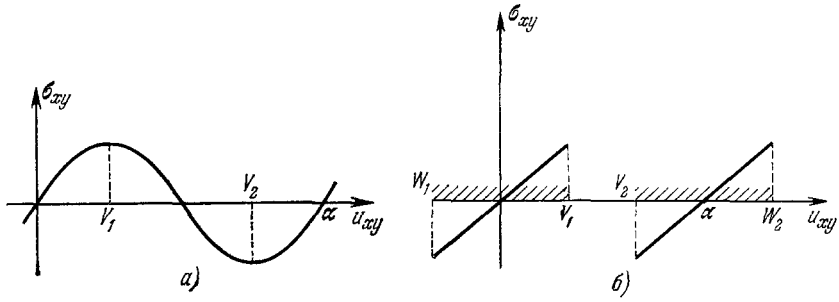


Рис. 28. Нелинейная зависимость сдвиговых напряжений от деформаций в двойникующемся кристалле [13].

а) Схема точной зависимости; б) упрощенная зависимость, используемая при малых деформациях.

ряда выводов этой теории в дислокационных терминах. Поскольку предложенная Лифшицем феноменологическая теория двойников [13, 14] не использует никаких представлений о двойниковой границе, то важно убедиться, что дислокационное описание двойника приводит к результатам, согласующимся с выводами макроскопической теории. Одновременно хотелось бы обратить внимание на некоторые конкретные результаты, учитывающие конечную толщину двойника.

В связи с этим мы считаем полезным хотя бы кратко изложить теорию двойников конечной толщины. Предложенная Лифшицем теория основана на представлении о специфической нелинейной зависимости напряжений σ_{ik} от деформаций u_{ik} в двойникующемся кристалле. Подобная зависимость обусловлена тем, что в таком кристалле существуют два равновесных положения, соответствующих сдвойникованному и обычному состояниям кристалла и отличающихся деформацией сдвига, равной углу двойникования. Для простоты будем считать, что среда изотропна или обладает кубической симметрией (в последнем случае оси декартовых координат предполагаются направленными по осям симметрии четвертого порядка). Пусть, как и раньше, ось X совпадает со следом плоскости

двойникования. Тогда график зависимости σ_{xy} от u_{xy} имеет вид, схематически изображенный на рис. 28, *а*, где α — угол двойникования. Однако требование механической устойчивости относительно бесконечно малых сдвигов (например, при тепловых колебаниях) приводит к тому, что состояния кристалла со сдвиговыми деформациями $V_1 < u_{xy} < V_2$ не реализуются (являются неустойчивыми). Часть кристалла, в которой u_{xy} достигнет критического значения V_1, перейдет в двойниковое положение $u_{xy} > V_2$. Таким образом, область двойника (область *2* на рис. 29) будет отделена от остального кристалла границей разрывов тензора деформаций, причем в соответствии с вышесказанным

$$u_{xy}^{(1)} < V_1, \tag{6,1а}$$

$$u_{xy}^{(2)} > V_2, \tag{6,1б}$$

где индексы (1) и (2) относятся соответственно к материнскому кристаллу и двойнику.

Для наших целей вместо графика рис. 28, *а* достаточно схемы из двух прямолинейных участков (рис. 28, *б*), первый из которых соответствует упругой деформации материнского кристалла:

$$\sigma_{xy} = 2\mu u_{xy}, \qquad \mu = \lambda_{1212},$$

а второй — упругой деформации сдвойникованного материала

$$\sigma_{xy} = 2\mu\,(u_{xy} - \alpha),$$

где α — угол двойникования $\left(\text{в нашей модели } \alpha = \operatorname{arctg}\frac{b}{2a}\right)$.

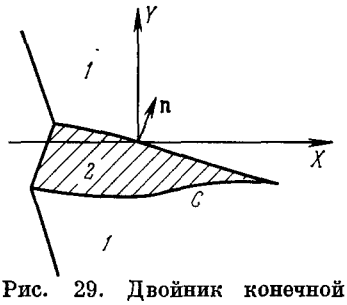


Рис. 29. Двойник конечной толщины в кристалле.
1 — материнский кристалл; *2* — двойник.

Поскольку в принятой модели на границе раздела двойник — материнский кристалл возникает разрыв упругих напряжений, равновесие обычной и двойниковой фазы может иметь место только в том случае, когда по указанной границе распределена некоторая поверхностная сила. Если $x = x(s)$, $y = y(s)$ — это параметрическое уравнение контура двойника (s — длина, отсчитываемая вдоль контура), то согласно [13] в плоской задаче теории упругости эта сила имеет компоненты $f_x = f_0\frac{dx}{ds}$, $f_y = -f_0\frac{dy}{ds}$, где $f_0 = 2\alpha\mu$. Чтобы найти напряжения от двойника в кристалле в рамках такого подхода, нужно решить плоскую задачу теории упругости о напряжениях, вызываемых в среде сосредоточенными силами $\mathbf{f}$.

Используем общие формулы теории упругости анизотропного тела [84], определяющие тензор напряжений в случае, когда плоскость XOY является плоскостью симметрии кристалла. Если сила, порождающая упругие напряжения, имеет вид $\mathbf{f}\,(f_x, f_y, 0)$, тензор σ_{ik} можно следующим образом представить с помощью функций комплексного переменного:

$$\sigma_{i1}(x, y) = -\frac{\partial\varphi_i}{\partial y}, \qquad \sigma_{i2}(x, y) = \frac{\partial\varphi_i}{\partial x},$$

$$\varphi_i = 2\,\mathrm{Re}\sum_{\alpha=1}^{2} p_{i\alpha}\Phi_\alpha(z_\alpha) \qquad (i = 1, 2), \tag{6,2}$$

где $z_\alpha = x + im_\alpha y$. В случае кубических кристаллов m_α являются вещественными положительными числами, определяемыми модулями упру-

гости среды. Функции $\Phi_\alpha(z)$ — это некоторые функции комплексного переменного z [84], а матрица $p_{i\alpha}$ имеет вид

$$\| p_{i\alpha} \| = \begin{pmatrix} -im_1 & -im_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В дальнейшем нам понадобятся производные $F_\alpha(z) = \frac{d\Phi_\alpha(z)}{dz}$, так как именно через них выражаются компоненты σ_{ik}. В случае силы $\mathbf{f}$, сосредоточенной в точке (ξ, η), функция $F_\alpha(z)$ имеет вид [84]

$$F_\alpha(z) = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{2} \left(\frac{N_{\alpha k}}{C_k} \right) \frac{f_k}{z - \zeta_\alpha},$$

где $\zeta_\alpha = \xi + im_\alpha \eta$, $N_{\alpha k}$ — некоторая вполне определенная матрица второго ранга, а числа C_k $(k = 1, 2)$ равны

$$C_1 = -\operatorname{Im} \sum_{\alpha=1}^{2} p_{1\alpha} N_{\alpha 1}, \qquad C_2 = -\operatorname{Im} \sum_{\alpha=1}^{2} p_{2\alpha} N_{\alpha 2}.$$

Используем конкретный вид «двойникующей силы» $\mathbf{f}$ и учтем действие всех сил, сосредоточенных вдоль контура c. Тогда функция $F_\alpha(z)$ в случае двойника примет вид

$$F_\alpha(z) = \frac{f_0}{4\pi} \left\{ \frac{N_{\alpha 1}}{C_1} \oint \frac{d\xi}{z - \zeta_\alpha} - \frac{N_{\alpha 2}}{C_2} \oint_c \frac{d\eta}{z - \zeta_\alpha} \right\}, \tag{6,3}$$

где интеграл берется по замкнутому контуру двойника, расположенного в неограниченном кристалле.

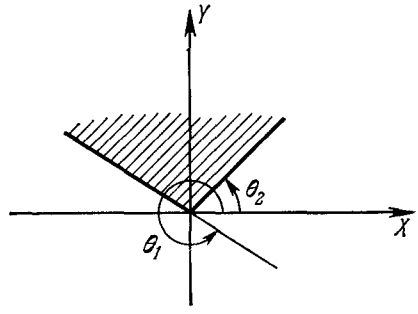


Рис. 30. Угловая точка на границе двойника.

Оказывается, что из общей формулы (6,3) можно извлечь очень важный вывод, касающийся характера излома контура двойника в угловых точках. Допустим, что на контуре c имеется угловая точка $z = 0$, углы наклона касательных к кривой c в которой равны θ_1 и θ_2 (см. рис. 30, где контур c обходится слева направо). Выясним, как ведут себя упругие напряжения, созданные двойником, при подходе к угловой точке. Для этого достаточно проанализировать поведение функций $F_\alpha(z)$ при $z \to 0$. Представим эту функцию в виде

$$F(z) = \oint_c \frac{\psi(\zeta)\, d\zeta}{z - \zeta}, \tag{6,4}$$

где кусочно-непрерывная функция $\psi(\zeta)$ определяется соотношением

$$\psi(\zeta) = \left[A + B \left(\frac{d\eta}{d\xi} \right) \right] \frac{1}{\frac{d\zeta}{d\xi}}, \tag{6,5}$$

в котором постоянные множители A и B элементарно определяются через константы в формуле (6,3), $\zeta = \xi + im\eta(\xi)$, а зависимость $\eta = \eta(\xi)$ является уравнением контура c. Очевидно, что предельные значения функции $\psi(\zeta)$ при подходе к угловой точке слева и справа не совпадают, так как не совпадают производные $\frac{d\eta}{d\xi}$, определяющие тангенсы углов наклона лучей контура c в угловой точке.

В теории сингулярных интегралов типа Коши [44, 85] показывается, что при наличии разрыва у функции $\psi(\zeta)$ в точке $\zeta = 0$ функция $F(z)$ имеет логарифмическую особенность в точке $z = 0$ и ее сингулярная часть равна

$$F(z) = [\psi(+0) - \psi(-0)] \ln z. \tag{6,6}$$

Если учесть, что

$$\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)_{-0} = \operatorname{tg}\theta_1, \qquad \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)_{+0} = \operatorname{tg}\theta_2,$$

то на основании выражения (6,6) для сингулярной части функции $F(z)$ можно получить такую форму записи:

$$F(z) = \left(A - \frac{i}{m} B\right) e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \ln z, \tag{6,7}$$

где

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = m \operatorname{tg}\theta_1, \qquad \operatorname{tg}\varphi_2 = m \operatorname{tg}\theta_2.$$

При включении логарифмической сингулярности (6,7) в выражение для упругих напряжений окажется, что и напряжения сохраняют эту особенность. Однако неограниченное возрастание σ_{xy}, а значит, и тензора u_{xy} противоречит условию механической устойчивости двойника (6,1). Поэтому рассмотренная нами особенность функции $F(z)$ не должна проявляться, что возможно лишь при $\varphi_1 = \varphi_2$ или при $\varphi_1 - \varphi_2 = \pm\pi$. Условие $\varphi_1 = \varphi_2$ тривиально и означает отсутствие угловой точки, а условие $\varphi_1 - \varphi_2 = \pm\pi$ означает, что угловая точка является точкой возврата. Это означает, что кончик двойника в такой точке должен иметь нулевой угол раствора. Таким образом, обсужденный в гл. 2 вывод о форме кончика незастопоренного двойника не связан с предположением о малой толщине двойника. Нулевой угол раствора конца двойника есть общее свойство любых свободных двойников.

Перейдем к сопоставлению теории Лифшица и дислокационной теории двойникования [47]. Как отмечалось в гл. 1, изображенный на рис. 29 двойник может быть представлен набором дислокаций, расположенных по его контуру (см. рис. 8). Если считать распределение дислокаций непрерывным и ввести плотность этого распределения $g(s)$ вдоль контура двойника, то нетрудно написать связь $g(s)$ с толщиной двойника в данной точке:

$$h(x) = -a \int\limits_{x(s)>x} g(s)\, ds, \tag{6,8}$$

где по-прежнему ось OX — это след плоскости двойникования, и a — межатомное расстояние в направлении, перпендикулярном плоскости двойникования. Легко видеть, что (6,8) является обобщением формулы (1,1) на случай двойника конечной толщины. Для предельно тонкого двойника (6,8) совпадает с (1,1), если положить $\rho(x) = 2g(x)$.

Покажем, следуя [47], что напряжения от двойника в кристалле, вычисленные на основании формулы (6,3), совпадают с таковыми, созданными распределенными по контуру двойника дислокациями. Естественно, что мы проведем доказательство при тех предположениях, при которых были получены результаты [13], а именно, предположим, что среда обладает кубической симметрией и оси координат направлены по осям симметрии четвертого порядка. Двойник будем считать бесконечно протяженным вдоль оси Z и образованным совокупностью краевых двойникующих дислокаций, оси которых расположены по его контуру.

Для случая одной дислокации с вектором Бюргерса **b**, расположенной в точке (ξ, η) неограниченной среды, функции $F_\alpha(z)$ имеют вид [38]

$$F_\alpha(z) = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{2} \left(\frac{M_{\alpha k}}{D_k}\right) \frac{b_k}{z-\zeta_\alpha}, \tag{6,9}$$

где $M_{\alpha k}$ — матрица, обратная матрице $p_{k\alpha}$, а числа D_k $(k=1, 2)$ равны

$$D_1 = -\operatorname{Im} \sum_{\alpha=1}^{2} N_{\alpha 1}^{-1} M_{\alpha 1}, \qquad D_2 = -\operatorname{Im} \sum_{\alpha=1}^{2} N_{\alpha 2}^{-1} M_{\alpha 2},$$

и символ $N_{\alpha k}^{-1}$ обозначает матрицу, обратную $N_{\alpha k}$. Поскольку двойник образован краевыми дислокациями, векторы Бюргерса которых направлены по оси x, то $b_k = b\delta_{k1}$. Поэтому двойнику в дислокационной модели соответствует такая функция $F_\alpha(z)$:

$$F_\alpha(z) = \frac{bM_{\alpha 1}}{4\pi D_1} \oint_c \frac{g(s)\,ds}{z-\zeta_\alpha(s)}, \tag{6,10}$$

где $\zeta_\alpha(s) = \xi(s) + im_\alpha \eta(s)$ и $\xi = \xi(s)$, $\eta = \eta(s)$ есть параметрическое уравнение контура двойника.

Теперь несколько видоизменим формулу (6,3), имея в виду ее сравнение с (6,10). Воспользуемся тем, что $\oint \frac{d\zeta}{z-\zeta} = 0$ для z вне контура c, а также тем, что $\eta'(s) = ag(s)$, и преобразуем (6,3) к виду

$$F_\alpha(z) = -\frac{\mu b}{4\pi} \left(\frac{N_{\alpha 1}}{C_1} im_\alpha + \frac{N_{\alpha 2}}{C_2}\right) \oint_c \frac{g(s)\,ds}{z-\zeta_\alpha(s)}. \tag{6,11}$$

Если учесть явный вид матриц $p_{i\alpha}$ и $N_{i\alpha}$ (см. [84,38]), то можно показать, что коэффициенты, стоящие перед интегралами в (6,10) и (6,11), равны.

Поскольку формулы для напряжений являются основой анализа процесса двойникования, совпадение (6,10) и (6,11) доказывает эквивалентность обоих подходов. Таким образом, дислокационное описание упругого двойника является точным с точки зрения теории упругости при любой толщине двойника.

Имея формулы (6,3) или (6,10) для нахождения упругих напряжений от дислокаций на контуре двойника, можно записать условие механического равновесия, фактически определяющее уравнение контура двойника. Мы не станем анализировать это уравнение в общем случае, а проделаем предельный переход к тонкому двойнику и проследим, как получаются основные формулы теории тонких двойников. Пусть $\eta = \eta_1(x)$ — уравнение верхней границы двойника, а $\eta = \eta_2(x)$ — нижней (при таком определении $\eta_1(x) \geqslant \eta_2(x)$). Толщина двойника в каждой точке определится очевидным равенством $h(x) = \eta_1(x) - \eta_2(x)$, а положение его средней линии, уравнение которой мы запишем в виде $y = \eta(x)$, дается условием $\eta(x) = \frac{1}{2}(\eta_1(x) + \eta_2(x))$. Для тонкого двойника величины $h(x)$ и $\eta(x)$ можно считать малыми. Тогда напряжения на верхней и нижней границах двойника могут быть найдены путем подстановки (6,10) или (6,11) в (6,2) и последующего разложения по малым величинам $\eta(x)$ и $h(x)$ [86]. Удерживая первые два члена подобного разложения и учитывая все действующие на дислокации силы, получим такие

уравнения равновесия дислокаций на каждой из границ двойника:

$$\left.\begin{aligned} -a\tau_0 \fint_{-L}^{L} \frac{\rho(t)\,dt}{t-x} + \tau_1 \{h(x)\eta_2''(x) - 2a\rho(x)\eta'(x)\} = \\ = \sigma^e(x, 0) + \eta_1(x)\left(\frac{d\sigma^e}{dy}\right)_0 + S_1(x), \\ -a\tau_0 \fint_{-L}^{L} \frac{\rho(t)\,dt}{t-x} - \tau_1 \{h(x)\eta_1''(x) - 2a\rho(x)\eta'(x)\} = \\ = \sigma^e(x, 0) + \eta_2(x)\left(\frac{d\sigma^e}{dy}\right)_0 + S_2(x), \end{aligned}\right\} \quad (6,12)$$

где по-прежнему $a\rho(x) = -h'(x)$, константы τ_0 и τ_1, имеющие порядок величины μ, соответственно равны

$$\tau_0 = \frac{2\alpha\lambda_{1111}}{\pi(m_1+m_2)}, \quad \tau_1 = \alpha\lambda_{1111}.$$

$S_1(x)$ и $S_2(x)$ — силы неупругого происхождения соответственно на верхней и нижней границах двойника (различие в силе неупругого происхождения на каждой из границ может быть обусловлено наличием стопоров на какой-либо из границ, неодинаковыми условиями зарождения дислокаций на каждой из границ и т. д.). Функция $\sigma^e(x, y)$ определяет распределение неоднородных внешних напряжений вблизи плоскости двойникования.

Решение системы уравнений (6,12) при заданных внешних напряжениях $\sigma^e(x, 0)$, их градиентах $\frac{\partial\sigma^e(x)}{\partial y}$ и силах неупругого происхождения $S_1(x)$ и $S_2(x)$ позволяет полностью восстановить форму двойника, которая определяется двумя функциями: $h(x)$ и $\eta(x)$.

Если силы неупругого происхождения на обеих границах одинаковы и несимметричность формы двойника обусловлена только градиентом внешних напряжений, то в первом приближении можно пренебречь членами порядка h^2. Тогда в качестве основного приближения по параметру $\frac{h}{L}$ мы получим уравнение

$$-a\tau_0 \int_{-L}^{L} \frac{\rho(t)\,dt}{t-x} = \sigma^e(x, 0) + S(x),$$

которое совпадает с исходным уравнением дислокационной теории тонких двойников (1,5). Это уравнение фактически определяет толщину двойника в каждой точке x.

Уравнение второго приближения получается из (6,12) путем вычисления полуразности условий на верхней и на нижней границах [14]:

$$\tau_1[h(x)\eta''(x) + 2\rho(x)\eta'(x)] = h(x)\left(\frac{d\sigma^e}{dy}\right)_0.$$

В этом уравнении функции $\rho(x)$ и $h(x)$ считаются известными из решения уравнения первого приближения, а потому оно определяет $\eta(x)$, т. е. изгиб двойника в неоднородном поле напряжений. Этому уравнению легко придать вид

$$\eta''(x) + 2\left[\frac{d}{dx}\ln h(x)\right]\eta'(x) = -q(x),$$

$$q(x) = \frac{a}{2b\mu}\left(\frac{d\sigma^e(x, 0)}{dy}\right)_0. \quad (6,13)$$

Ясно, что решение этого уравнения может быть получено в квадратурах, поскольку

$$\eta'(x) = -\frac{1}{h^2(x)} \int_L^x q(x') h^2(x') dx'. \tag{6,14}$$

При записи (6,14) мы приняли естественное, на наш взгляд, условие $\eta'(L) = 0$. Действительно, как мы видели раньше, для свободного двойника $\rho(L) = 0$, а так как изгиб средней линии $\eta = \eta(x)$ у конца двойника связан только с перераспределением дислокаций на верхней и нижней границах двойника у его конца, то следует положить $\eta'(L) = 0$.

Вблизи конца двойника (например, в окрестности $L - x \ll L$) может быть получена явная координатная зависимость $\eta = \eta(x)$, поскольку, с одной стороны, можно считать $q(x) = q(L) = \text{const}$, а с другой стороны, в этой области известна функция $h = h(x)$. Используя формулы (3,27) и (3,28), легко получить

$$\left.\begin{aligned} \eta'(x) &= \frac{1}{4} q(L)(L-x), \qquad x < \varepsilon, \\ \eta'(x) &= \frac{1}{2} q(L)(L-x), \quad \varepsilon \ll x \ll L. \end{aligned}\right\} \tag{6,15}$$

На основании (6,15) мы заключаем, что у правого конца двойника уравнение его средней линии имеет вид

$$\eta(x) = \eta(L) + \text{const}\,(L-x)^2,$$

где постоянный множитель изменяется в два раза при переходе из области $x < \varepsilon$ в область $\varepsilon \ll x \ll L$.

В заключение этого раздела мы выясним конкретный физический смысл некоторых величин, являющихся параметрами феноменологической теории, предложенной Лифшицем. Напряжения в упругой среде вокруг двойника при заданной внешней нагрузке определяются условиями на границе двойника, где они вполне определенным образом связаны с силами неупругого происхождения. При подходе со стороны материнского кристалла к границе двойника получаем (смотри соотношение (1,4))

$$u_{xy}^{(1)} = \frac{\sigma_{xy}}{2\mu} = -\frac{S(x)}{2\mu}. \tag{6,16}$$

Используя обсужденное ранее свойство силы неупругого происхождения $S(x)$ при нагрузке $-S_0 \leqslant S(x)$, убеждаемся, что в среде может существовать устойчивый упругий двойник, если деформации удовлетворяют условиям

$$\left.\begin{aligned} &W_1 < u_{xy}^{(1)} < V_1, \\ &V_1 = \frac{S_{\text{п}}^0 + S_0}{2\mu} \approx \frac{S_{\text{п}}^0}{2\mu}, \quad W_1 = -\frac{S_0}{2\mu}. \end{aligned}\right\} \tag{6,17}$$

Переходя к анализу условий внутри двойника, заметим, что в случае свободного двойника малой толщины малым является также и наклон профиля двойника к плоскости двойникования. В этом случае на границе материнского кристалла и двойника выполняется условие $\sigma_{xy}^{(1)} = \sigma_{xy}^{(2)}$; следовательно, можно получить соотношение

$$u_{xy}^{(2)} = \alpha - \frac{S(x)}{2\mu},$$

из которого следует, что

$$\left.\begin{aligned} &V_2 < u_{xy}^{(2)} < W_2, \\ &V_2 = \alpha - \frac{S_0}{2\mu}, \quad W_2 = \alpha + \frac{S_{\text{п}}^0 + S_0}{2\mu} \approx \alpha + \frac{S_{\text{п}}^0}{2\mu}. \end{aligned}\right\} \qquad (6,18)$$

Интересно отметить, что определяемые формулами (6,17) и (6,18) величины V_1 и V_2 не удовлетворяют предположенному в работе [13] условию $V_1 = \alpha - V_2$. Более того, следует ожидать, что $V_1 \gg \alpha - V_2$. Это различие величин V_1 и $\alpha - V_2$ становится совершенно очевидным и естественным, если учесть характер силы поверхностного натяжения, не учтенной в работе [13]. Как и в [13], величина V_1 в нашей модели определяет начало двойникования при нагрузке (двойник начинает образовываться при $u_{xy}^{\text{I}}(0) = V_1$), а величина V_2 — начало «раздвойникования» при разгрузке (двойник начинает уменьшаться при $u_{xy}^{(2)}(0) = u_{xy}^{(1)}(0) + \alpha = V_2$). Физический смысл различия V_1 и $\alpha - V_2$ при наличии сил поверхностного натяжения заключается в том, что эти силы «выталкивают» двойниковый клин из кристалла, поэтому они противодействуют образованию двойника, увеличивая значение V_1, и способствуют «уходу» двойника из кристалла, уменьшая $\alpha - V_2$.

Харьковский государственный университет
Физико-технический институт АН УССР

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. М. В. Классен-Неклюдова. Механическое двойникование кристаллов, М., Изд-во АН СССР, 1960.
2. Р. И. Гарбер, ДАН СССР **21**, 233 (1938).
3. Р. И. Гарбер ЖЭТФ **10**, 234 (1940).
4. Р. И. Гарбер ЖЭТФ **17**, 47 (1947).
5. Р. И. Гарбер, ФТТ **1**, 814 (1959).
6. И. В. Обреимов, В. И. Старцев, ЖЭТФ **35**, 1065 (1958).
7. Р. И. Гарбер, ЖЭТФ **10**, 828 (1940).
8. В. И. Старцев, В. М. Косевич, ДАН СССР **101**, 861 (1955).
9. В. П. Солдатов, В. И. Старцев, ФТТ **6**, 1671 (1964).
10. В. М. Финкель, В. А. Зрайченко, И. Н. Воронов, ДАН СССР **160**, 329 (1965).
11. В. П. Солдатов, ФММ **24**, 744 (1967).
12. К. В. Владимирский, ЖЭТФ **17**, 530 (1947).
13. И. М. Лифшиц, ЖЭТФ **18**, 1134 (1948).
14. И. М. Лифшиц, Уч. зап. ХГУ, Труды физ.-мат. фак-та **3**, 7 (1952).
15. И. М. Лифшиц, И. В. Обреимов, Изв. АН СССР, сер. физ. **12**, 65 (1948).
16. Т. А. Конторова, Я. И. Френкель, ЖЭТФ **8**, 1340 (1938).
17. А. В. Степанов, ЖЭТФ **17**, 713 (1947).
18. F. C. Frank, J. H. van der Merwe, Proc. Roy. Soc. **A198**, 205 (1949).
19. Т. А. Конторова, ЖЭТФ **12**, 68 (1942).
20. Р. И. Гарбер, Е. И. Степина, ДАН СССР **128**, 499 (1959).
21. Г. Б. Райс, ДАН СССР **117**, 419 (1957).
22. В. З. Бенгус, Ф. Ф. Лаврентьев, Л. М. Сойфер, В. И. Старцев, Кристаллография **5**, 441 (1960).
23. В. З. Бенгус, С. Н. Комник, В. И. Старцев, ДАН СССР **141**, 607 (1961).
24. В. М. Косевич, Кристаллография **5**, 749 (1960).
25. R. L. Holder, G. Thomas, Acta Met **11**, 994 (1963).
26. A. Authier, M. Sauvage, J. Phys. **27**, 137 (1966).
27. J. D. Eshelby, F. C. Frank, F. R. N. Nabarro, Phil. Mag. **42**, 351 (1951).
28. G. Leibfried, Zs. Phys. **130**, 214 (1951).
29. G. Leibfried, Zs. angew. Phys. **6**, 251 (1954).
30. В. Л. Инденбом, в сборнике «Некоторые вопросы физики пластичности кристаллов», М., Изд-во АН СССР, 1960.
31. В. Л. Инденбом, ФТТ **3**, 2071 (1961).

32. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория упругости, М., «Наука», 1965.
33. Г. И. Баренблатт, ПМТФ, № 3, 4 (1961).
34. А. М. Косевич, Теория дислокаций, ч. 4. Дислокационная теория тонких двойников, Ротапринт, ФТИ АН УССР, Харьков, 1963.
35. М. В. Якутович, Э. С. Яковлева, ЖЭТФ **9**, 884 (1939).
36. В. П. Солдатов, В. И. Старцев, ДАН СССР **166**, 588 (1966).
37. В. Л. Инденбом, Теория двойникования, в книге М. В. Классен-Неклюдовой «Механическое двойникование кристаллов», М., Изд-во АН СССР, 1960.
38. A. N. Stroh, Phil. Mag. **3**, 625 (1958).
39. J. S. Koehler, Phys. Rev. **60**, 397 (1941).
40. А. М. Косевич, Л. А. Пастур, ФТТ **4**, 1679 (1962).
41. R. Peierls, Proc. Phys. Soc. **52**, 34 (1940).
42. F. R. N. Nabarro, Proc. Phys. Soc. **59**, 256 (1947).
43. K. Ogawa, Phil. Mag. **11**, 217 (1965).
44. Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, М., Физматгиз, 1962.
45. А. М. Косевич, ФТТ **3**, 3263 (1961).
46. А. М. Косевич, ФТТ **4**, 1103 (1962).
47. А. М. Косевич, Л. А. Пастур, ФТТ **5**, 1978 (1963).
48. А. М. Косевич, Л. А. Пастур, ФТТ **3**, 1291, 2890 (1961).
49. А. М. Косевич, Л. А. Пастур, Труды 2-го совещания по физике щелочно-галоидных кристаллов, Рига, 1962.
50. А. М. Косевич, Л. А. Пастур, ПМТФ, № 5, 77 (1963).
51. А. М. Косевич, Л. А. Пастур, ФТТ **3**, 1871 (1961).
52. В. С. Бойко, Л. А. Пастур, Э. П. Фельдман, ФТТ **8**, 2986 (1966).
53. Э. П. Фельдман, ПМТФ, № 5, 134 (1967).
54. В. С. Бойко, Э. П. Фельдман, ФТТ **8**, 3671 (1966).
55. В. И. Старцев, В. М. Косевич, Ю. С. Томенко, Кристаллография **1**, 425 (1956).
56. Р. И. Гарбер, И. А. Гиндин, М. Г. Константиновский, ЖТФ **23**, 2127 (1953).
57. M. Marcinkowski, K. Sree Harsha, Trans. TMS-AIME **242**, 1405 (1968).
58. В. М. Косевич, Н. Г. Мороз, В. И. Башмаков, Кристаллография **5**, 426 (1960).
59. В. С. Бойко, Р. И. Гарбер, ЖЭТФ **50**, 905 (1966).
60. В. С. Бойко, Р. И. Гарбер, Л. Ф. Кривенко, ФТТ **9**, 435 (1967).
61. В. С. Бойко, в сборнике «Республіканська нарада молодих вчених України», Київ, 1966.
62. R. E. Cooper, Acta Met. **13**, 46 (1965).
63. R. E. Cooper, Acta Met. **14**, 78 (1966).
64. R. W. Cahn, J. Inst. Met. **76**, 121 (1949).
65. Р. И. Гарбер, Е. И. Степина, ФТТ **5**, 211 (1963).
66. A. I. Williams, R. W. Cahn, Deformation Twinning, New York — London, Gordon and Breach Sci. Publishers 1964, p. 192.
67. J. Friedel, Les dislocations, Paris, 1956 (см. перевод: Ж. Фридель, Дислокации, М., «Мир», 1967).
68. Г. И. Баренблатт, ПММ **23**, 706 (1959).
69. И. А. Гиндин, Л. А. Чиркина, ФТТ **11**, 120 (1969).
70. Р. И. Гарбер, ДАН СССР **57**, 555 (1947).
71. J. Gilman, W. Johnston, Dislocations and Mechanical Properties of Crystals, John Wiley, N. Y., 1957 (см. перевод: Дислокации и механические свойства кристаллов, М., ИЛ, 1960).
72. J. D. Eshelby, Solid State Phys. **3**, 79 (1956) (см. перевод: Д. Эшелби, Континуальная теория дислокаций, М., ИЛ, 1963).
73. Р. И. Гарбер, ЖЭТФ **17**, 63 (1947).
74. Р. И. Гарбер, И. А. Гиндин, М. Г. Константиновский, В. И. Старцев, ДАН СССР **74**, 343 (1950).
75. В. М. Косевич, В. И. Башмаков, ФММ **11**, 100 (1961).
76. В. Боас, Е. Шмидт, Пластичность кристаллов, в особенности металлических, М., ГОНТИ, 1938.
77. И. А. Гиндин, Б. Г. Лазарев, Я. Д. Стародубов, ФТТ **3**, 920 (1961).
78. Г. И. Баренблатт, Г. П. Черепанов, ПММ **25**, 1110 (1961).
79. Г. И. Баренблатт, Г. П. Черепанов, Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, № 3, 79 (1960).
80. В. С. Бойко, Кандидатская диссертация (ФТИ АН УССР, Харьков, 1967).

81. В. С. Бойко, Р. И. Гарбер, Л. Ф. Кривенко, в сборнике «Динамика дислокаций», Харьков, ФТИАН УССР, 1968, стр. 175.
82. В. И. Старцев, В. П. Солдатов, в сборнике «Физическая природа пластической деформации», Киев, «Наукова думка», 1966.
83. В. С. Бойко, Р. И. Гарбер, Л. Ф. Кривенко, ФТТ **10**, 2968 (1968).
84. С. Г. Лехницкий, Теория упругости анизотропного тела, М.—Л., Гостехиздат, 1950.
85. Ф. Д. Гахов, Краевые задачи, М., Физматгиз, 1963.
86. А. Г. Ситенко, Уч. зап. ХГУ, Труды физ.-матем. фак-та **3**, 17 (1952).
87. R. E. Keith, J. J. Gilman, Acta Met. **8**, 1 (1960).
88. H. Kaga, J. J. Gilman, J. Appl. Phys. **40**, 3196 (1969).
89. В. С. Бойко, Р. И. Гарбер, В. Ф. Кившик, ФТТ **12**, 3198 (1970).
90. J. Dorn, S. Rajnak, Trans. AIME **230**, 1052 (1964).
91. P. Guyot, J. Dorn, Canad. J. Phys. **45**, 983 (1967) (см. перевод в сборнике «Актуальные вопросы теории дислокаций», М., «Мир», 1968).