УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

533.9

УСТОЙ ЧИВОСТЬ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКОВ В ПЛАЗМЕ И ПРОБЛЕМА КРИТИЧЕСКИХ ТОКОВ

.І. С. Богданкевич, А. А. Рухадзе

СОДЕРЖАНИЕ

	Duggerra			609
	Введение			+00
2	Постановка задачи и исходные уравнения			612
3.	Предельные токи в некомпенсированных электронных пучках			615
4.	Критические токи в компенсированных неограниченных электронных п	учн	:ax	618
ō	Влияние конечных продольных размеров системы на критические токи в	зэл	6 к -	
	тронных пучках			623
6.	Взаимодействие неограниченного релятивистского электронного	луч	іка	
-	с плазмой			628
7.	Устойчивость ограниченного электронного пучка в плазме			631
	Устойчивость ограниченного электронного пучка в плазме Критические токи релятивистских электронных пучков в плазме			$631 \\ 633$
8.				
8. 9.	Критические токи релятивистских электронных пучков в плазме			633

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы внимание исследователей вновь привлекли проблемы сильноточных электронных ускорителей. Это, с одной стороны, объясняется развитием электроники больших мощностей и созданием хорошо эмитирующих поверхностей (электронные пучки, плазменный катод и др.), а с другой — возрастающим интересом к интенсивным источникам рентгеновского и СВЧ излучений. Немаловажную роль при этом сыграли также недавно высказанные идеи об использовании мощных релятивистских электронных пучков для инициирования управляемых термоядерных реакций и для передачи энергии на большие расстояния.

Уже в первых работах Лэнгмюра (см. 1 и цитированную там литературу) было показано, что основным препятствием на пути получения сильноточных электронных пучков является объемный заряд, ограничивающий предельный ток в пучках. Для преодоления этого препятствия Пирсом 2 была высказана идея компенсации заряда электронного пучка ионным фоном. При этом он обратил внимание, что и в компенсированных электронных пучках ток не может быть неограниченно большим; при токах, превышающих некоторое критическое значение, в системе могут развиваться электростатические неустойчивости. Однако, ограничиваясь случаем бесконечно тяжелых ионов, Пирс не мог доказать, что в этих условиях система действительно неустойчива. Физическую природу неустойчивости электронного пучка, проходящего через ионный остов. раскрыли значительно позже Будкер 3 и Бунеман 4, которые учитывали конечную массу ионов. Ниже будет показано, что именно эта неустойчивость определяет предельный ток в компенсированном электронном пучке.

В случае нерелятивистских пучков этот ток всего в несколько раз больше вакуумного предельного тока, определяемого объемным зарядом электронов пучка. Экспериментальные исследования ⁵, однако, не подтвердили полностью этот вывод теории. В некоторых случаях, когда электронный пучок удерживался не очень сильным магнитным полем, предельный ток оказывался меньше определенного из условия развития неустойчивости Бунемана. В работах ⁵ правильно было отмечено, что причиной расхождения между теорией и экспериментом является токово-конвективная неустойчивость ^{6, 7}, которая в определенных условиях может развиваться при токах, меньших, чем это требуется для развития бунемановской неустойчивости.

Позже в работах 8,9 была предпринята попытка систематизации различных видов неустойчивостей, которые могут развиваться в компенсированных электронных пучках, и, исходя из условий возникновения неустойчивостей, были определены критические токи в такой системе. Несмотря на качественное согласие с экспериментом, анализ, проведенный в этих работах, следует признать неудовлетворительным. Дело в том, что в работах ^{8, 9} использовалась теория устойчивости пространственно-неоднородной плазмы в приближении геометрической оптики (теория, развитая в работах 6,7), которая позволяет определить критические токи в компенсированных пучках по отношению к возбуждению коротковолновых колебаний. Более строгий анализ, проведенный в работе 10, показал, что критические токи в действительности определяются возбуждением длинноволновых колебаний с длиной волны, большей поперечных размеров электронного пучка. Для исследования устойчивости пучков по отношению к таким длинноволновым колебаниям необходимо решение граничной задачи, которое дается в гл. 4 и 5 настоящего обзора. Для сравнения в гл. 3 приводятся выражения для предельных токов в некомпенсированных электронных пучках в случае как нерелятивистской, так и релятивистской энергии пучка. Следует заметить, что в отличие от нерелятивистских электронных пучков, предельные токи в которых неоднократно обсужлались в литературе (см. 1, 11, а также обзорные работы 12, 13), вопрос о предельных токах релятивистских некомпенсированных пучков, насколько нам известно, обсуждался лишь в работах 10, 14, 15. Это замечание, однако, относится к электронным пучкам, удерживаемым от расплывания сильным продольным магнитным полем, значительно превышающим собственное магнитное поле тока пучка. Вопросы предельных токов в частично или полностью компенсированных релятивистских электронных пучках, уравновещенных собственным полем тока, обсуждались уже давно 16, 17. Обзор литературы по предельным токам релятивистских пучков, определяемым из условий равновесия, был недавно дан в работе 18, в которой, в частности, показывается, что при наличии сильного продольного магнитного поля ток в электронном пучке не ограничен условиями равновесия. Ограничение на ток пучка накладывают требования его устойчивости.

Как уже отмечалось выше, критический ток в нерелятивистском компенсированном пучке, определяемый условием устойчивости, может превышать предельный ток некомпенсированного пучка всего лишь в несколько раз. Иное положение имеет место в случае релятивистских энергий электронов пучка. В гл. 4 и 5 настоящего обзора показывается, что критический ток в релятивистском компенсированном пучке может превышать вакуумный ток в $(\mathcal{E}/mc^2)^2$ раз, где \mathcal{E} — энергия электронов. Однако следует заметить, что такое возрастание тока возможно лишь в условиях, когда в системе не развивается токово-конвективная неустойчивость. Последняя, вообще говоря, может развиваться при весьма малых токах, даже меньших, чем предельный ток в некомпенсированном пучке.

При конечных значениях магнитного поля создать условия, когда токово-конвективная неустойчивость в компенсированном пучке не будет развиваться, довольно трудно. Поэтому воспользоваться указанным выше преимуществом компенсированного пучка по сравнению с некомпенсированным в реальных условиях нелегко. Значительно легче, как это показано в работе ¹⁹, получить большие токи в перекомпенсированных электронных пучках в случае, когда пучок проходит через более плотную плазму. Условия развития электронной токово-конвективной неустойчивости ^{7,20}, ограничивающей критический ток в перекомпенсированных пучках, значительно затруднены. Вопросы взаимодействия релятивистского электронного пучка с более плотной плазмой и проблемы критических токов в такой системе обсуждаются в гл. 6, 7 и 8 настоящего обзора.

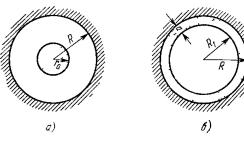
. Теории взаимодействия электронных пучков с плазмой посвящено большое количество работ (см. 21, 22 и цитированную в них литературу). Тем не менее имеющийся на сегодняшний день огромный экспериментальный материал ²³ не всегда удается объяснить и количественно сопоставить с теорией. В последние годы в экспериментальном исследовании взаимодействия пучков с плазмой наметился, с нашей точки зрения, хороший подход 5, 20, который позволяет установить соответствие экспериментов с теорией. Этот подход состоит в исследовании взаимодействия пучка с плазмой, созданной им же самим, путем ионизации газа и в определении критических параметров (критического тока либо критической плотности плазмы), при которых в системе возникают неустойчивости. Процесс образования плазмы при этом является медленным по сравнению с характерными временами развития неустойчивостей. Поэтому, регулируя давление газа, плотность пучка, его энергию, величину продольного магнитного поля и геометрические размеры системы, всегда можно создать условия для развития какого-либо одного вида неустойчивости и детально его исследовать. Такой экспериментальный подход к взаимодействию пучка с плазмой требует соответствующего изменения и в постановке теоретических исследований. Задачей теории становится выяснение тех критических параметров плазмы и пучка, при которых в ограниченной системе возникает тот или иной вид коллективного взаимодействия. Именно с этой точки зрения в настоящем обзоре излагается теория устойчивости электронных пучков в плазме.

Наконец, укажем еще на одно преимущество систем с перекомпенсированным электронным пучком. Как будет показано ниже (см. гл. 8, а также работы $^{24,\ 25}$), при взаимодействии релятивистского электронного пучка с плазмой относительная потеря энергии пучка на возбуждение колебаний порядка $(\mathcal{E}/mc^2)(n_1/n_2)^{1/3}$, где n_1 и n_2 — плотности электронов в пучке и в плазме соответственно. В условиях, когда эта величина мала, потери энергии пучка и возникающий при этом энергетический разброс электронов незначительны, и, несмотря на то, что в системе выполнены условия развития неустойчивости, пучок практически без изменения проходит через плазму. В этом случае следует говорить о критических токах в системе, в отличие от случая строго компенсированных пучков, когда в результате развития неустойчивости Бунемана пучок теряет значительную часть своей энергии 26 и претерпевает существенные изменения. Поэтому в компенсированных пучках критические токи являются одновременно и предельными.

Наконец, в гл. 9 настоящего обзора развитые теоретические представления сравниваются с экспериментами ^{5,9,20,27,28} по исследованию взаимодействия электронных пучков с образованной ими же плазмой.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим электронный пучок в эквипотенциальном дрейфовом пространстве, проходящий по оси металлического волновода радиуса R, продольные размеры которого $L\gg R$. Критические токи, пропускаемые такой системой, будут определены из условия устойчивости электронного



Рпс 1.

пучка, при прохождении его либо через компенсирующий фон ионов, либо через более плотную плазму. Поэтому в настоящей главе мы сформулируем основные уравнения, описывающие устойчивость такого пучка. При этом исследованы две возможные геометрии электронного пучка, представленные на рис. 1 (случаи a) и δ)). В первой из них пучок радиуса $r_0 \leqslant R$

проходит по оси волновода, а во второй — он является «трубчатым» с толщиной $a=R-R_1$. В пределах $r_0\to R$ и $R_1\to 0$ оба эти случая совпадают и описывают электронный пучок, полностью заполняющий сечение волновода.

Прежде всего отметим, что для предотвращения пространственного расплывания пучка систему следует помещать в достаточно сильное продольное магнитное поле, удовлетворяющее условию

$$B_0^2/8\pi \gg n_1 mc^2 \gamma, \tag{2.1}$$

где n_1 — плотность электронов в пучке, m — масса покоя, $\gamma = (1-u^2/c^2)^{-1/2}$ (u — скорость электронов), а B_0 — напряженность магнитного поля. При выполнении условия (2,1) энергия магнитного поля значительно больше энергии электронов пучка, что позволяет ограничиться при исследовании устойчивости рассмотрением лишь потенциальных (электростатических) колебаний поля в системе.

Кроме того, будем предполагать, что магнитное поле B_0 значительно превосходит собственное поле тока, т. е. в случае а)

$$B_0 \gg 2J/cr_0, \tag{2.2a}$$

а в случае б)

$$B_0 \gg \frac{12JR}{c(R^2 - R_1^2)} \longrightarrow \frac{J}{ca}$$
 при $a \ll R$. (2,26)

Ниже показывается, что условия (2,2) эквивалентны требованию малости ларморовского радиуса электронов в продольном магнитном поле по сравнению с поперечными размерами пучка, т. е. условию поперечной локализации электронов.

При полях $B_0 \geqslant 10^5$ э условия (2,1) и (2,2) хорошо выполняются для пучков с энергией $\mathcal{E} \leqslant (1-10)$ Мэв и $r_0 \sim a \sim 1$ см при токах $J \leqslant (1-5) \times 10^5$ а (или, что то же самое, для $n_1 \leqslant (1-3) \cdot 10^{13}$ см⁻³).

Наконец, следует особо оговорить, что все дальнейшее рассмотрение взаимодействия электронных пучков с плазмой относится к стационарному случаю и поэтому не учитывает работу для создания собственного магнитного поля тока пучка. Эта работа, в особенности в области больших токов и релятивистских энергий электронов, может значительно превосходить кинетическую энергию пучка. Однако она затрачивается лишь в переход-

ном процессе установления тока в системе; в стационарном же режиме энергия магнитного поля не меняется и работа не расходуется. Заметим, что в рассматриваемой нами системе магнитная энергия тока превышает кинетическую энергию пучка в условиях, когда выполняются следующие неравенства:

$$J > \frac{4mc^3}{e} \frac{c}{u} (\gamma - 1) \frac{1}{1 + 4 \ln{(R/r_0)}}$$
 (2,3a)

в случае а) и

$$J > \frac{4mc^3}{e} \frac{c}{u} (\gamma - 1) \frac{R^2 - R_1^2}{R^2 + R_1^2}$$
 (2.36)

в случае б) (трубчатый пучок). Для электронных пучков, полностью заполняющих сечение волновода (т. е. $r_0 \approx R$, или $R_1 = 0$), при энергиях 1-10~M неравенство (2,3) выполняется лишь при очень больших токах $J \gg (1-15) \cdot 10^5~a$. Однако если пучок неполностью заполняет волновод, то магнитная энергия тока оказывается больше кинетической энергии частиц пучка уже при сравнительно малых токах, порядка нескольких десятков килоампер.

После того, как указаны основные ограничения, сформулируем уравнения, описывающие движение электронного пучка. Так как нас интересуют электронные пучки большой энергии и их устойчивость по отношению к быстронарастающим колебаниям, тепловым движением частиц можно пренебречь. Поэтому для описания рассматриваемой системы нами используются релятивистские уравнения двухжидкостной гидродинамики холодной плазмы (см., например, ²⁹)

$$\frac{\frac{\partial n_{\alpha}}{\partial t} + \operatorname{div} n_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} = 0,}{\sqrt{1 - \frac{v_{\alpha}^{2}}{c^{2}}}} = \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left\{ -\nabla \Phi + \frac{1}{c} \left[\mathbf{v}_{\alpha} \cdot \mathbf{B}_{0} \right] \right\},
\Delta \Phi = -4\pi \sum_{\alpha} e_{\alpha} n_{\alpha},$$
(2.4)

где $\alpha = e, i, a \Phi$ — потенциал электрического поля, которое возникает в системе только при колебаниях.

При рассмотрении некомпенсированного электронного пучка следует решать нелинейную стационарную систему (2,4) с учетом пространственного заряда электронов и из условия запирания пучка определять предельный ток, пропускаемый системой (см. гл. 3).

Для определения критических токов в компенсированных и перекомпенсированных пучках система уравнений (2,4) линеаризуется и решается задача об устойчивости. При этом в стационарном равновесном состоянии предполагается, что электроны пучка движутся со скоростью и относительно покоящихся ионов или плотной плазмы. Ось z считается направленной вдоль оси волновода, причем скорость пучка и внешнее магнитное поле параллельны оси z. Поскольку критические токи в электронных пучках, как будет видно из дальнейшего, определяются возбуждением наиболее длинноволновых колебаний в системе, параметры пучка и плазмы (размеры которой считаем совпадающими с размерами пучка) можно считать однородными с резкой границей. Линеаризуя систему (2,4) по малым отклонениям от равновесного состояния и принимая для неравновесных величин зависимость от времени и координат в виде

$$f(r) e^{-i\omega t + il\varphi + ih_z z}, (2.5)$$

где l и k_z —соответственно азимутальное и продольное волновые числа, для потенциала поля возмущений получим следующее уравнение:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\varepsilon_{\perp}r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \left(\frac{l}{r}\frac{\partial g}{\partial r} - \varepsilon_{\perp}\frac{l^2}{r^2} - \varepsilon_{\parallel}k_z^2\right)\Phi = 0. \tag{2.6}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{split} \epsilon_{\perp} &= 1 - \sum \frac{\frac{\omega_L^2 (1 - \beta^2)^{1/2}}{(\omega - \mathbf{k} \mathbf{u})^2 - \Omega^2}}{1 - \beta^2}, \\ \epsilon_{||} &= 1 - \sum \frac{\frac{\omega_L^2 (1 - \beta^2)^{3/2}}{(\omega - \mathbf{k} \mathbf{u})^2}}{(\omega - \mathbf{k} \mathbf{u})^2}, \\ g &= \sum \frac{\frac{\omega_L^2 \Omega}{\omega - \mathbf{k} \mathbf{u}}}{\omega - \mathbf{k} \mathbf{u}} \left[\frac{(\omega - \mathbf{k} \mathbf{u})^2}{1 - \beta^2} - \Omega^2 \right]^{-1}, \end{split}$$

где $\omega_L^2 = 4\pi e^2 n/m$, $\Omega = eB_0/mc$, $\beta = u/c$ и суммирование распространяется по всем сортам заряженных частиц в системе.

Уравнение (2,6) должно быть дополнено граничными условиями. На свободной поверхности пучка эти условия получаются путем интегрирования уравнения (2,6) по бесконечно тонкому слою вблизи поверхности и имеют вид

$$\{\Phi\}_{z=r_0, R_1} = 0, \tag{2.7}$$

$$\left\{ \varepsilon_{\perp} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{l}{r} g \Phi \right\}_{r=r_0, R_1} = 0. \tag{2.8}$$

На поверхности же металлического волновода имеем очевидное условие

$$\Phi|_{r=R}=0. (2.9)$$

Решая уравнение (2,6) с учетом граничных условий (2,8) и (2,9), находим дисперсионное уравнение малых электростатических колебаний системы. В случае а), т. е. для пучка, проходящего по оси волновода, это уравнение записывается в виде

$$\varepsilon_{\perp} \frac{1}{J_{I}(\iota \alpha r_{0})} \frac{dJ_{I}(\iota \alpha r_{0})}{dr_{0}} + \frac{l}{r_{0}} g + f_{I} = 0, \qquad (2.10)$$

где

$$f_{l} = |k_{z}| \frac{I_{l}(|k_{z}|R) K'_{l}(|k_{z}|r_{0}) - K_{l}(|k_{z}|R) I'_{l}(|k_{z}|r_{0})}{I_{l}(|k_{z}|r_{0}) K_{l}(|k_{z}|R) - I_{l}(|k_{z}|R) K_{l}(|k_{z}|r_{0})}.$$
 (2.11)

Для трубчатого же пучка (случай б)) дисперсионное уравнение электростатических колебаний имеет вид

$$\begin{split} J_{l}(i\alpha R) &\left\{ I_{l}(|k_{z}|R_{1}) \left[i\alpha \epsilon_{\perp} N_{l}'(i\alpha R_{1}) + \frac{l}{R_{1}} g N_{l}(i\alpha R_{1}) \right] - \\ &- |k_{z}| N_{l}(i\alpha R_{1}) I_{l}'(|k_{z}|R_{1}) \right\} + N_{l}(i\alpha R) \left\{ |k_{z}| J_{l}(i\alpha R_{1}) I_{l}'(|k_{z}|R_{1}) - \\ &- I_{l}(|k_{z}|R_{1}) \left[i\alpha \epsilon_{\perp} J_{l}'(i\alpha R_{1}) + \frac{l}{R_{1}} g J_{l}(i\alpha R_{1}) \right] \right\} = 0. \end{split}$$
 (2.12)

В соотношениях (2,10) — (2,12) J_l , I_l , N_l и K_l — функции Бесселя, а $\alpha_1 = k_z^2 \, (\epsilon_\parallel/\epsilon_\perp). \tag{2.13}$

Заметим, что в условиях, когда $R_1 \rightarrow 0$ или $r_0 \rightarrow R$, т. е. когда пучок полностью заполняет сечение волновода, уравнения (2,10) и (2,12) совпадают и записываются в виде

$$J_{l}(i\alpha R) = 0. (2.14)$$

Для бесконечной в продольном направлении системы соотношения (2,10), (2,12) и (2,14) представляют собой дисперсионные уравнения, определяющие спектры колебаний $\omega = \omega$ (k). Наша задача состоит в определении параметров плазмы и пучка, при которых в системе возникает неустойчивость, т. е. среди корней уравнений (2,10), (2,12) и (2,14) появляются решения с $\operatorname{Im} \omega$ (k) > 0. Именно из этого условия в гл. 4 и 6 будут определены критические токи в пучке и критические плотности плазмы, соответствующие началу неустойчивости в системе.

Если же волновод имеет конечные продольные размеры, то соотношения (2,10)-(2,14) следует рассматривать как характеристические уравнения для определения волновых чисел k_z . При этом решение имеет вид $\Phi=\sum\limits_n C_n e^{ik_znz}$, где k_{zn} — корни характеристического уравнения.

Для получения дисперсионного уравнения это решение нужно подставить в граничные условия на торцах волновода, причем число этих граничных условий должно соответствовать числу корней k_{zn} . Эти граничные условия будут обсуждены ниже в гл. 5 и 7 при определении критических параметров пучка и плазмы, соответствующих началу неустойчивости в ограниченных системах.

3. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТОКИ В НЕКОМПЕНСИРОВАННЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКАХ

В некомпенсированных электронных лучках ток не может превышать некоторое значение, определяемое пространственным зарядом электронов. Выражения для предельного тока можно получить непосредственно из уравнения (2,4), рассматривая чисто электронный пучок. Учитывая законы сохранения энергии и импульса

$$mc^2\gamma + e\Phi = mc^2 = \text{const},$$

 $env = j = \text{const},$ (3.1)

уравнение Пуассона для цилиндрически-симметричного электронного пучка сводится к виду

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = -\frac{4\pi i}{c} \left[1 - \left(1 - \frac{e\Phi}{mc^2} \right)^{-2} \right]^{-1/2}. \tag{3.2}$$

При написании соотношений (3,1) и (3,2) мы приняли $\Phi = 0$ при $\nu = 0$. Именно такой отсчет потенциала принят в литературе *) 1, 2, 11-14.

Анализ уравнения (3,2) в общем случае при произвольном отношении $e\Phi/mc^2$ весьма сложен и возможен лишь путем численного решения этого уравнения. Однако такой анализ существенно упрощается в предельных случаях нерелятивистской и релятивистской энергии пучка. В нерелятивистском пределе, когда $e\Phi \ll mc^2$, из уравнения (3,2) получаем

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = -\frac{4\pi i}{\sqrt{2e\Phi/m}} \,. \tag{3.3}$$

Это уравнение справедливо внутри электронного пучка. В области, не занятой пучком, потенциал удовлетворяет однородному уравнению.

^{*)} Во избежание недоразумений заметим, что при входе в волновод (в дрейфовое пространство) все электроны пучка имеют одну и ту же энергию (и, следовательно, и скорость), определяемую ускоряющей системой. Заметим, однако, что на длине порядка радиуса волновода электроны тормозятся объемным зарядом пучка и на больших расстояниях $z \gg R$ устанавливается однородная в продольном направлении и неоднородная по радиусу стационарная картина, которая и описывается системой уравнений (2,4). Рассматриваемое однородное по оси z частное решение этой системы (3,1) и (3,2), по существу, соответствует наличию достаточно сильного продольного магнитного поля, удовлетворяющего неравенствам (2,2).

Для определения предельного тока электронного пучка уравнение Пуассона необходимо решать при следующих граничных условиях:

$$\Phi|_{r=0} = \Phi_0, \quad \Phi|_{r=R} = \frac{mu^2}{2e},
\{\Phi\}_{r=r_0, R_1} = \left\{\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right\}_{r=r_0, R_1} = 0.$$
(3,4)

Найденное при этом соотношение между током в пучке и значением потенциала на оси волновода $J(\Phi_0)$ следует максимализировать по Φ_0 . Максимальное значение тока J(u) и представляет собой искомый предельный ток некомпенсированного электронного пучка, пропускаемый рассматриваемой системой. Поскольку уравнение (3,3) является нелинейным, решение такой задачи, строго говоря, возможно только численно. Именно таким образом и был определен предельный ток в нерелятивистском электронном пучке, проходящем в дрейфовом пространстве по оси металлического волновода ¹¹. Мы приведем здесь приближенное аналитическое выражение для тока, пропускаемого такой системой, полученное из частного решения уравнения $\Phi = \left(\frac{9}{4} J \sqrt{\frac{m}{2e}}\right)^{2/3} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{4/3}$ (для этого реше-

ния $\Phi_0 = 0$):

$$J_0 = \frac{8}{9} \frac{mu^3}{4e} \frac{1}{\left[1 + \frac{4}{3} \ln (R/r_0)\right]^{3/2}}.$$
 (3.5)

Численный анализ, проведенный в работе 11, для предельных токов при различных отношениях R/r_0 дает следующие значения:

$$J_0 = \frac{mu^3}{4e} \begin{cases} 0.88 & \text{при } R \approx r_0, \\ 0.31 & \text{при } R = 2.2r_0, \\ 0.14 & \text{при } R = 10r_0. \end{cases}$$
 (3.6)

Сравнение этих значений с (3,5) показывает, что эта формула с достаточно хорошей степенью точности дает значения предельного тока вплоть до $R/r_0 \sim 10$.

При больших значениях отношения R/r_0 , когда $\ln \left(R/r_0 \right) \gg 1$, формула (3,5) становится неточной. В этом случае можно получить точное аналитическое выражение для предельного тока в пучке для любых энергий электронов, считая потенциал внутри пучка однородным и равным Φ_0 . Второе граничное условие (3,4) при этом следует заменить на

$$\Phi|_{r=R} = \frac{\mathscr{E} - mc^2}{2} = \frac{mc^2}{2} (\gamma - 1), \tag{3.7}$$

справедливое при любых энергиях электронов. Здесь $\gamma = \mathscr{E}/mc^2 =$ $= 1/\sqrt{1-(u^2/c^2)}$. Определяя ток, пропускаемый системой в этих условиях, и максимализируя его по Фо, находим выражение для предельного тока в пучке

$$J_0 = \frac{mc^3}{e} \frac{1}{2 \ln (R/r_0)} (\gamma^{2/3} - 1)^{3/2}. \tag{3.8}$$

В нерелятивистком пределе, когда $\gamma \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2}$, это выражение принимает вид

$$J_0 = \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{mu^3}{4e} \frac{1}{\ln(R/r_0)}.$$
 (3.9)

В обратном же пределе ультрарелятивистских энергий электронов в пучке, когда $\gamma \gg 1$, из (3,8) получаем

$$J_0 = \frac{\mathcal{E}c}{e} \frac{1}{2 \ln (R/r_0)}.$$
 (3.10)

Для ультрарелятивистского электронного пучка предельный ток можно получить при любых значениях отношения R/r_0 . Дело в том, что в этом случае уравнение Пуассона (3,2) при учете неравенства $e\Phi\gg mc^2$ сводится к линейному

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) = -\frac{4\pi i}{c},\tag{3.11}$$

которое легко решается аналитически точно. В результате для предельного тока находим выражение 10,14

$$J_0 = \frac{\&c}{e} \frac{1}{1 + 2 \ln{(R/r_0)}}.$$
 (3.12)

При $\ln{(R/r_0)} \gg 1/2$ это выражение переходит в (3,10).

Наконец, приведем интерполяционную формулу для предельного тока в электронном пучке, проходящем в дрейфовом пространстве по оси металлического волновода, обобщающую формулу (3,6)—(3,12):

$$J_0 = \frac{mc^3}{e} \frac{1}{1 + 2 \ln (R/r_0)} (\gamma^{2/3} - 1)^{3/2}. \tag{3.13}$$

В области больших энергий электронов, $\gamma \gg 1$, эта формула является точной, но и в области нерелятивистских энергий она с хорошей степенью точности совпадает с (3,6).

Из сравнения формул (3,5) — (3,13) видно, что с ростом энергии электронов рост предельного тока в пучке замедляется. В нерелятивистской области энергий $J_0 \sim \mathcal{E}^{3/2}$, в то время как в ультрарелятивистском пределе $J_0 \sim \mathcal{E}$. Это обстоятельство существенно ограничивает величину предельного тока в вакуумных системах в области релятивистских энергий пучка. Так, при $\mathcal{E} \sim 1-10$ Мэв и $R \sim r_0$ вакуумный ток меняется в пределах $J_0 \sim (3-30)\cdot 10^4$ а. При $R > r_0$ предельный ток, пропускаемый вакуумной системой, оказывается еще меньше.

Значительно бо́льшие токи могут быть достигнуты в трубчатых электронных пучках в условиях, когда $R\gg a$, т. е. когда толщина пучка a во много раз меньше радиуса волновода. В этом пределе уравнение Пуассона (3,2) путем замены r=R-x (при $R\gg x$) сводится к плоскому уравнению

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -\frac{4\pi i}{c} \left[1 - \left(1 - \frac{e\Phi}{mc^2} \right)^{-2} \right]^{-1/2},\tag{3.14}$$

которое допускает точное аналитическое решение. Удовлетворив граничным условиям (3,4) и (3,7), окончательно для предельного тока в трубчатом электронном пучке при $R\gg a$ получаем выражение ¹⁵

$$J_0 = \frac{mc^3}{e} \left(\gamma^{2/3} - 1 \right)^{3/2} \frac{R}{a}. \tag{3.15}$$

Видно, что предельный ток в некомпенсированном трубчатом электронном пучке в R/a раз превышает предельный ток в вакуумной системе при полном заполнении пучком сечения волновода. Этот результат кажется физически очевидным. Действительно, при полном заполнении сечения волновода предельный ток в электронном пучке не зависит от радиуса пучка. Однако существенно, что пучок касается металлических стенок волновода. Поэтому, если вблизи поверхности волновода расположить

пучки с радиусом $a \ll R$, можно достичь увеличения тока в системе в R/a раз. При энергиях электронов $\mathcal{E} \sim 1-10~M$ в и $R/a \sim 10$ предельный ток в трубчатом пучке оказывается порядка $J_0 \approx (3-30)\cdot 10^5~a$.

Следует заметить, что отношение R/a в трубчатом пучке не может быть сколь угодно большим. Дело в том, что, как уже указывалось выше, пренебрежение собственным магнитным полем тока пучка (условия (2,2)) накладывает ограничение малости ларморовского радиуса электронов по сравнению с поперечными размерами пучка. Действительно, приняв в релятивистском электронном пучке оценку для тока $J_0 \sim \frac{mc^3}{e} \gamma \frac{R}{a}$ (при $R \approx a$ эта оценка пригодна и для пучка, полностью заполняющего сечение волновода), из условий (2,2) находим $a \gg \frac{mc^2}{eB_0} \gamma \frac{R}{a} = \frac{c}{\Omega_e} \gamma \frac{R}{a}$, где $\Omega_z = eB_0/mc$. В интересующей нас области энергий электронов $\mathscr{E} \sim 1 - 10$ Мэв при $a \sim 1$ см отношение $R/a \approx 10$ может быть достигнуто лишь в достаточно сильных магнитных полях $B_0 \gg 10^5$ э.

Отмеченное увеличение предельного тока в R/a раз в трубчатом пучке имеет место в условиях, когда полость внутри пучка является вакуумной либо когда пучок заключен между двумя коаксиальными металлическими цилиндрами. Если же полость внутри пучка заполнена плазмой, то, как показано в работе ¹³, предельный ток в трубчатом пучке не возрастает по сравнению со случаем сплошного пучка. В рассматриваемой нами системе с большим продольным магнитным полем плазма образуется лишь в области, занятой электронным пучком, и не может диффундировать за пределами трубчатого пучка (за короткое время длительности импульса). Поэтому полость внутри пучка реально является вакуумной.

В заключение еще раз подчеркием, что приведенные выше выражения для предельных токов в некомпенсированных электронных пучках, так же как и все результаты настоящего обзора, справедливы лишь при наличии сильного продольного магнитного поля, удовлетворяющего условиям (2,2). Только в этом случае собственное поле тока не играет существенной роли в формировании пучка; электроны пучка удерживаются и направляются внешним продольным магнитным полем. Если же условия (2,2) не выполнены, то траектории электронов и равновесие пучка в целом существенно определяются собственным магнитным полем пучка. Очевидно, что при этом теряют смысл и первые интегралы движения в форме (3,1), а вместе с ними и приведенные выше формулы для предельных токов некомпенсированных электронных пучков. Выражения для предельных токов в электронных пучках с учетом влияния магнитного поля тока на движение электронов можно найти в работах 1, 12, 16-18.

4. КРИТИЧЕСКИЕ ТОКИ В КОМПЕНСИРОВАННЫХ НЕОГРАНИЧЕННЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКАХ

Рассмотрим теперь электронный пучок, заряд которого компенсирован ионами. Как уже отмечалось выше, в таких компенсированных пучках ток может быть больше, чем в некомпенсированных. Однако и в компенсированных пучках ток не может быть сколь угодно большим и ограничен условием развития электростатических неустойчивостей. Минимальное значение тока, при котором в пучке возникает неустойчивость, в дальнейшем будет называться критическим. Выражение для критического тока можно получить из анализа соотношений (2,10) — (2,14), которые для рассматриваемого здесь случая неограниченного в продольном направлении электронного пучка представляют собой дисперсионное уравнение колебаний.

Прежде всего исследуем устойчивость электронного пучка, полностью заполняющего сечение волновода, т. е. $R \approx r_0$. Легко показать, что в этом случае дисперсионное уравнение (2,14) сводится к виду

$$k_z^2 \left[1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\gamma^3 (\omega - k_z u)^2} - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} \right] + \frac{\mu_{sl}^2}{R^2} \left(1 - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2 - \Omega_i^2} \right) = 0, \tag{4.1}$$

где $n_c = n_i = n_1$, а μ_{sl} — корни функции Бесселя $J_l(\mu_{sl}) = 0$. При получении уравнений (4,1) мы учли неравенство (2,1), которое позволяет ограничиться исследованием устойчивости пучка в области частот ($\omega - k_z u$) $^2 \ll \Omega_c^2 (1 - \beta^2) = \Omega_c^2 (\gamma^2)^2$.

 $-k_z u)^2 \ll \Omega_c^2 (1-\beta^2) = \Omega_c^2/\gamma^2$. При анализе уравнения (4,1) следует различать два предельных случая. Если величина $\frac{\mu_{sl}^2 \gamma^3}{k_z^2 R^2} \frac{m}{M} \ll 1$, то неустойчивые решения этого уравнения лежат в области $\omega < k_z u$, причем

$$\omega^2 = \frac{b \pm \sqrt{\overline{b^2 - 4a\omega_{Li}^2 \Omega_i^2}}}{2a},\tag{4.2}$$

где

$$egin{align} a = 1 - rac{\omega_{L,c}^2}{\gamma^3 k_z^2 u^2} + rac{\mu_{sl}^2}{k_z^2 R^2} \,, \ b = a \Omega_i^2 + \omega_{Li}^2 + \mu_{sl}^2 rac{\omega_{Li}^2}{k_z^2 R^2} \,. \end{array}$$

Из условия неустойчивости ($\omega^2 < 0$ при a < 0) находим ток в пучке, при котором происходит возбуждение моды колебаний с заданными волновыми числами k_z , l и μ_{sl} ^{3,19} *):

$$J = \frac{mu^3}{4e} \gamma^3 (k_z^2 R^2 + \mu_{sl}^2). \tag{4.3}$$

В противоположном предельном случае, когда $\frac{\mu_{sl}^2 \gamma^3}{k_s^2 R^2} \frac{m}{M} \gg 1$, неустойчивые решения уравнения (4,1) лежат в области $\omega \approx k_z u$. Записав $\omega = k_z u + \gamma_0$, для определения малой добавки γ_0 получаем

$$\gamma_0^2 = \frac{\omega_{1,e}^2 k_z^2 R^2}{\mu_{sl}^2 \gamma^3 \left(1 - \frac{\omega_{Li}^2}{k_z^2 u^2 - \Omega_i^2}\right)}.$$
 (4,4)

Отсюда видно, что нарастающими могут быть колебания ($\gamma_0^2 < 0$), для которых $\omega_{Li}^2 > k_z^2 u^2 \geqslant \Omega_i^2$. Ток, необходимый для возбуждения колебаний с заданным значением ω , при этом имеет вид

$$J = \frac{mu^3}{4e} \frac{M}{m} k_z^2 R^2. (4.5)$$

Критический ток в компенсированном электронном пучке с радиусом $r_0 \approx R$, полностью заполняющим сечение волновода, находится путем минимализации выражений (4,3) и (4,5) и соответствует минимальному току в пучке, при котором в системе возникает бунемановская неустойчивость. Он равен

$$J_{\rm KP} = \min \left\{ \begin{array}{l} \frac{mu^3}{4e} (2,4)^2 \gamma^3, \\ \frac{mu}{4e} \frac{m}{M} R^2 \Omega_e^2. \end{array} \right. \tag{4.6}$$

^{*)} Заметим, что при получении выражения (4,3) мы пренебрегали членами порядка $(m/M)^{1/3} \ \gamma \ll 1$. В дальнейшем такими членами пренебрегается всюду.

В случае сильных магнитных полей, когда $\Omega_e > \frac{2,4u\gamma^{3/2}}{R} \sqrt{\frac{M}{m}}$, критический ток, пропускаемый рассматриваемой нами системой, определяется первым из выражений (4,6); в обратном же пределе он совпадает со вторым выражением. Следует при этом заметить, что, строго говоря, это утверждение справедливо практически для неограниченных систем, длина которых $L \gg \left(\frac{\pi u}{\Omega_i}, \frac{\pi R}{2,4} \sqrt{\frac{M}{m}} \frac{1}{\gamma^{3/2}}\right)$. Влияние конечных продольных размеров системы на критические токи в компенсированных электронных пучках обсуждается в следующей главе.

Выражения (4,3), (4,5) и (4,6) справедливы не только для случая, когда пучок полностью заполняет волновод и $r_0 \approx R$, но также и в том случае, когда между пучком и металлическими стенками волновода имеется небольшой зазор, удовлетворяющий условию $2,4 \ln{(R/r_0)} \ll 1$. Если же зазор достаточно велик, так что выполняется обратное условие (точнее, $\ln{(R/r_0)} \gg 1$), то уравнение (2,40) принимает вид

$$1 - \frac{\omega_{Li}^{2}}{\omega(\omega + \Omega_{l})} - \frac{\omega_{Le}^{2}}{\Omega_{e}(\omega - k_{z}u)} + \frac{k_{z}^{2}r_{0}^{2}}{2l(l+1)} \left[1 - \frac{\omega_{Le}^{2}}{\gamma^{3}(\omega - k_{z}u)^{2}} - \frac{\omega_{Li}^{2}}{\omega^{2}} \right] + \frac{r_{0}}{l} f_{l} = 0,$$

$$(4.7)$$

где

$$f_{l} = \begin{cases} \frac{1}{r_{0}} \frac{1}{\ln(R/r_{0})} & \text{при } l = 0, \\ \frac{l}{r_{0}} & \text{при } l \neq 0. \end{cases}$$
(4.8)

Уравнение (4,7) справедливо для длинноволновых колебаний, когда $\alpha r_0 \ll 1$ и $k_z R \ll 1$. Именно такие колебания определяют критические токи в рассматриваемой нами системе.

Для аксиально-симметричных мод колебаний (l=0) из уравнения (4,7) получаем

$$1 + \frac{2}{k_z^2 r_0^2 \ln (R/r_0)} - \frac{\omega_{Le}^2}{\gamma^3 (\omega - k_z u)^2} - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} = 0.$$
 (4,9)

Легко показать, что неустойчивые решения этого уравнения (с ${\rm Im}\,\omega>0$) появляются лишь при условии $\omega_{Le}^2>\gamma^3\left(k_z^2u^2+\frac{2u^2}{r_0^2\ln{(R/r_0)}}\right)$, причем неустойчивость носит пучковый характер (является бунемановского типа 3,4) и частота возбуждаемых колебаний лежит в области $\omega\leqslant\left(\frac{m}{M}\right)^{1/3}\gamma k_z u$. Минимальный ток, необходимый для возбуждения этих колебаний, при этом определяется выражением

$$J_0 = \frac{mu^3}{4e} \gamma^3 \frac{2}{\ln{(R/r_0)}}.$$
 (4.10)

Если же $l\neq 0$, то неустойчивыми оказываются колебания как в области частот $\omega \ll k_z u$, так и при $\omega \gg k_z u$; для колебаний в области $\omega \ll k_z u$ дисперсионное соотношение (4,7) сводится к квадратному уравнению

$$\left[2 + \frac{\omega_{Le}^2}{k_{\tau u}\Omega_e} - \frac{r_0^2\omega_{Le}^2}{\gamma^3u^22l(l+1)}\right]\omega(\omega + \Omega_l) - \omega_{Li}^2 = 0, \tag{4.11}$$

корни которого равны

$$\omega = \frac{1}{2} \left[-\Omega_i \pm \sqrt{\Omega_i^2 + 4\omega_{Li}^2 \left(2 + \frac{\omega_{Le}^2}{k_z u \Omega_e} - \frac{r_0^2 \omega_{Le}^2}{\gamma^3 u^2 2l (l+1)}\right)^{-1}} \right]. \quad (4.12)$$

Из условия неустойчивости колебаний (${\rm Im}\,\omega>0$) находим следующее выражение для тока, соответствующего возбуждению аксиально-несимметричной моды с заданными k_z и l:

$$J_{l} = \frac{mu^{3}}{e} l (l+1) \gamma^{3} \frac{1}{1 + \frac{2l (l+1) u \gamma^{3}}{|k_{z}| \Omega_{e} r_{0}^{2}|}}.$$
 (4.13)

Неустойчивость эта носит токово-конвективный характер 6,7 и развивается лишь при конечных значениях продольного магнитного поля, когда второе слагаемое в знаменателе выражения (4,13) отлично от нуля. При $k_z \to 0$, согласно этому выражению, $J_l \to 0$. В действительности, однако, величина k_z не может быть сколь угодно малой; колебания оказываются неустойчивыми лишь при условии $4k_z u \geqslant \Omega_i$. При минимальных значениях k_z ток J_l стремится к выражению

$$J_t = \frac{mu}{8e} \frac{m}{M} r_0^2 \Omega_e^2. \tag{4.14}$$

Очевидно, что критический ток для возбуждения длинноволновых колебаний в области частот $\omega \ll k_z u$ соответствует минимальному из выражений (4,10) и (4,14), т. е.

$$J_{\rm KP} = \min\{J_0, J_l\}. \tag{4.15}$$

Отсюда следует, что в сильных магнитных полях, когда $\Omega_e > \frac{2u\gamma^{3/2}}{r_0} \sqrt{\frac{M}{m \ln{(R/r_0)}}}$, критический ток определяется возбуждением аксиально-симметричных мод колебаний вследствие развития неустойчивости Бунемана; в обратном случае определяющими являются аксиально-несимметричные моды и токово-конвективная неустойчивость.

Развитием токово-конвективной неустойчивости определяется также и характер длинноволновых колебаний в области частот $\omega \gg k_z u$, в которой дисперсионное уравнение (4,7) имеет вид

$$2 + \frac{\omega_{Li}^2}{\omega(\omega + \Omega_i)} \left(\frac{\omega}{\Omega_i} + \frac{k_2 u}{\omega} \right) - \frac{\omega_{Le}^2 \gamma^{-3} k_z^2 r_0^2}{\omega^2 \cdot 2l \ (l+1)} = 0. \tag{4.16}$$

Легко видеть, что решения уравнения (4,15), соответствующие неустойчивым колебаниям, возможны лишь при $\omega \ll \Omega_i$ (а следовательно, $\Omega_i \gg \sum k_z u$), причем

$$\frac{\omega^2}{\Omega_i^2} = \frac{M}{m} \frac{k_z^2 r_0^2}{2l(l+1)} \left(1 + 2 \frac{\Omega_i^2}{\omega_{Ii}^2} \right)^{-1} \left[1 - \frac{2l(l+1)u}{\Omega_{e} |k_z| r_0^2} \right]. \tag{4.17}$$

Неустойчивы моды, для которых $2l\ (l+1)\ u > \Omega_e\ |\ k_z\ |\ r_0^2$. Это неравенство не зависит от плотности, и можно думать, что такая неустойчивость развивается при сколь угодно малых токах в пучке. В действительности, однако, ток ограничен снизу значением

$$J \gg \frac{mu}{s} \Omega_{\mathbf{e}} |k_z| ur_0^2. \tag{4.18}$$

В бесконечно длинных системах величина $|k_z|$ может стремиться к нулю, поэтому и ток (4,18) (а вместе с ним и критический ток) оказывается сколь угодно малым. В системах с конечной длиной это не так.

Для коротковолновых по радиусу колебаний, когда $\alpha r_0 \gg 1$, а $k_z R \ll 1$, корни уравнения (2,10) с хорошей степенью точности совпадают с корнями уравнения $J_l'(i\alpha r_0) = 0$. При этом весь анализ дисперсионного соотношения подобен проведенному выше и приводит к значениям токов для возбуждения таких колебаний, подобным (4,3) и (4,5), где μ_{sl} —

отличные от нуля корни уравнения $J'_{l}(\mu_{sl})=0$. Критический ток для возбуждения коротковолновых колебаний при этом аналогичен (4,6) с заменой множителя $(2,4)^2$ на $(3,9)^2$.

Из приведенного выше анализа устойчивости компенсированных релятивистских электронных пучков, проходящих в дрейфовом пространстве по оси металлического волновода, следует, что критические токи для возбуждения различных мод колебаний в условиях полного заполнения волновода пучком всегда больше, чем при неполном заполнении. Аналогичное положение имеет место, как показано в гл. 3, для некомпенсированных пучков такой же геометрии. С другой стороны, в случае трубчатых электронных пучков при отсутствии компенсации заряда предельный ток больше, чем в однородном пучке, полностью заполняющем волновод. Поэтому представляет интерес определить критические токи в трубчатых пучках в условиях компенсации заряда электронов ионами.

Дисперсионное уравнение для электростатических колебаний в компенсированном трубчатом пучке неограниченной длины (2,12) в условиях, когда $R-R_1=a\ll R$, а $\alpha R\gg 1$, сводится к виду

$$k_z^2 \left[1 - \frac{\omega_{Le}^2 \gamma^{-3}}{(\omega - k_z u)^3} - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} \right] + \frac{\pi^2 \left(s + \frac{1}{2} \right)^2}{a^2} \left(1 - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2 - \Omega_i^2} \right) = 0, \quad (4.18')$$

где $s=0,\,1,\,2,\,\ldots$ Это уравнение полностью аналогично уравнению (4,1), и описывает пучковое взаимодействие электронов пучка с компенсирующими заряд ионами (т. е. содержит лишь неустойчивости бунемановского типа). Поэтому анализ уравнения (4,1) сохраняет силу и для уравнения (4,18'). В результате для критического тока при возбуждении коротковолновых (по радиусу, $a\alpha \geqslant 1$) колебаний в компенсированном трубчатом пучке получим выражение ¹⁵ (ср. с (4,6))

$$J_{\text{KP}} = \min \begin{cases} \frac{\pi^2}{2} \frac{mu^3}{4e} \gamma^3 \frac{R}{a}, \\ \frac{mu}{4e} \frac{m}{M} \Omega_e^2 \cdot 2Ra. \end{cases}$$
(4.19)

Из сравнения этого выражения с (4,6) следует, что в случае сильных магнитных полей, когда в формулах (4,6) и (4,19) минимальными являются верхние выражения, критический ток для возбуждения аксиально-симметричных мод колебаний в трубчатом электронном пучке в R/a раз превосходит соответствующий ток однородного пучка, полностью заполняющего волновод *), совершенно так же, как это имеет место для некомпенсированных пучков. Если же магнитное поле является не очень сильным, то указанный выигрыш в величине критического тока отсутствует, и даже может оказаться, что критический ток в компенсированном трубчатом пучке меньше, чем в однородном.

Рассмотрим теперь длинноволновые (по радиусу) колебания в трубчатом пучке, $\alpha R \ll 1$. Дисперсионное уравнение (2,12) для таких колебаний при условии $k,a \ll 1$ записывается в виде

$$1 - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2 - \Omega_i^2} - \frac{la}{R} \left[\frac{\omega_{Li}^2 \Omega_i}{\omega \left(\omega^2 - \Omega_i^2\right)} - \frac{\omega_{Le}^2}{\Omega_e \left(\omega - k_z u\right)} \right] = 0. \tag{4.20}$$

Это уравнение в отличие от (4,18') содержит токово-конвективную неустойчивость, обусловленную возбуждением аксиально-несимметричных мод

^{*)} Заметим, что этот вывод справедлив только в случае, когда полость внутри пучка не заполнена плазмой. Если же полость заполнена плазмой, то критический ток в компенсированном трубчатом пучке для возбуждения аксиально-симметричных колебаний такого же порядка, как и в сплошном ¹³.

колебаний с $l \neq 0$. Она возможна как в области частот $\omega > \Omega_i$, так и при $\omega < \Omega_i$. В области частот $\omega > \Omega_i$ неустойчивы моды, для которых $\omega < k_z u$, причем

$$\omega^{2} = \frac{\omega_{Li}^{2}}{1 - \frac{la}{R} \frac{\omega_{Lc}^{2}}{\Omega_{e} \mid k_{z} \mid u}}.$$
 (4,21)

Минимальный ток, необходимый для возбуждения таких колебаний, совпадает с нижним выражением (4,19). Поэтому критический ток в компенсированном трубчатом пучке при учете возможного развития высокочастотной токово-конвективной неустойчивости ($k_z u > \omega > \Omega_t$) не меняется и определяется формулой (4,19).

Иное положение имеет место для низкочастотной токово-конвективной неустойчивости при $\omega < \Omega_i$. Из уравнения (4,20) следует, что

$$\omega = \frac{k_z u}{2} \pm \sqrt{\frac{k_z^2 u^2}{4} + \frac{la}{R} \frac{\omega_{Li}^2}{\Omega_i} \frac{k_z u}{1 + \omega_{Li}^2/\Omega_t^2}}.$$
 (4,22)

Условие возникновения неустойчивости (${\rm Im}\,\omega>0$) при этом приводит к следующему выражению для тока ¹⁵:

$$J = \frac{mu}{4e} \frac{\Omega_e \mid k_z \mid u \cdot 2Ra}{4l \frac{a}{R} - \frac{\mid k_z \mid u}{\Omega_i}}.$$
 (4.23)

В неограниченно длинных системах $|k_z| \to 0$, а следовательно, и ток $J \to 0$. В результате сколь угодно малым оказывается и критический ток в трубчатом пучке, который в бесконечно длинных системах определяется формулой (4,23). В системах с конечной длиной, как показывается в следующей главе, критический ток в пучке ограничен снизу.

5. ВЛИЯНИЕ КОНЕЧНЫХ ПРОДОЛЬНЫХ РАЗМЕРОВ СИСТЕМЫ НА КРИТИЧЕСКИЕ ТОКИ В ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКАХ

Для ограниченных в продольном направлении систем соотношения (2,10) и (2,12) являются характеристическими уравнениями, определяющими волновые числа k_{zn} . При этом решение уравнения поля (2,6) $\Phi = \sum_n C_n e^{ik_{zn}z}$ должно удовлетворять граничным условиям на торцах волновода, т. е. при z=0 и z=L. Если торцы волновода металлические, то, очевидно,

$$\Phi|_{z=0, L} = 0. (5.1)$$

Эти условия достаточны, если характеристические уравнения сводятся к квадратным уравнениям. Часто, однако, эти уравнения оказываются более высокой степени относительно k_z и приходится использовать дополнительные граничные условия. В качестве таких условий можно взять граничные условия Пирса 2

$$\widetilde{v}_{z1} = \frac{e}{m} (1 - \beta^2)^{3/2} \sum_{n} \frac{k_{zn}}{\omega - k_{zn} u} C_n e^{ik_{zn} z} |_{z=0} = 0,$$

$$\widetilde{n}_1 = \frac{e}{m} \sum_{n} C_n e^{ik_{zn} z} \frac{k_{zn}^2 (1 - \beta^2)^{3/2}}{(\omega - k_{zn} u)^2} \Big|_{z=0} = 0,$$
(5.2)

где v_{zi} и n_1 — возмущенные значения скорости и плотности электронов пучка при колебаниях. В рассматриваемых ниже случаях условия (5,1) и (5,2) оказываются достаточными.

Исследование устойчивости компенсированного электронного пучка в ограниченных системах начнем со случая пучка, полностью заполняющего волновод, $r_0 \approx R$. Характеристическое уравнение (2,14) при этом сводится к уравнению (4,1). В области частот $\omega < k_z u$ это уравнение определяет два значения $k_{z,1,2} = \pm k_n$. Граничные условия (5,1) дают для k_n следующие значения *): $k_n = \pi n/L$ при $n=1,2,3,\ldots$ В результате частоты возбуждаемых колебаний и ток, необходимый для их возбуждения, определяются формулами (4,2) и (4,3), в которых $k_z \to k_n$. Отсюда следует, что если длина системы удовлетворяет условию

$$\frac{L}{r_0} < \frac{\pi}{2.4} \sqrt{\frac{M}{m}} \frac{1}{v^{3/2}},$$
 (5.3)

то критический ток в однородном компенсированном пучке определяется выражением

$$J_{\rm RP} = \frac{(2,4)^2 mu^3}{4e (1 - \beta^2)^{3/2}} . \tag{5.4}$$

Если система является достаточно длинной, так что выполняется условие, обратное (5,3), то неустойчивые колебания возникают в системе на частотах $\omega \gg \pi u/L$. Характеристическое уравнение (4,1) при этом определяет два корня $k_{z1, 2} = \frac{\omega}{u} \pm k_n$, причем граничные условия (5,1) приводят к следующему дисперсионному уравнению:

$$k_n = \frac{\omega}{u} \frac{r_0 \omega_{Le}}{u \mu_{s/V}^{3/2}} \left(1 - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2 - \Omega_i^2} \right)^{-1} = \frac{\pi n}{L}.$$
 (5.5)

Из анализа этого уравнения и условия возникновения неустойчивости (${\rm Im}\,\omega>0$) определяем критические токи, пропускаемые системой в рассматриваемом случае:

$$J_{\rm Kp} = \max \begin{cases} 2.4 \frac{\pi}{4} \frac{mu^3 r_0}{eL} \sqrt{\frac{M}{m}} \gamma^{3/2}, \\ \frac{mu}{4e} \frac{m}{M} r_0^2 \Omega_e^2. \end{cases}$$
 (5.6)

Формулы (5,4) и (5,6) определяют критические токи в системах произвольной длины. В частности, в пределе неограниченного волновода $(L \to \infty)$ они соответствуют результатам, полученным в предыдущей главе, если учесть, что критический ток в системе определяется минимальным из выражений (5,4) и (5,6). Это замечание относится также и к системам конечной длины в условиях, когда параметры таковы, что критический ток определяется первым из выражений (5,6).

Рассмотрим теперь случай неполностью заполненного волновода, когда $r_0 \ll R$. Характеристическое уравнение (2,10) для длинноволновых колебаний при этом сводится к (4,7). Так же как и в случае неограниченного волновода, проанализируем это уравнение отдельно для мод с l=0 и для мод с $l\neq 0$.

Для аксиально-симметричных мод колебаний (l=0) в области частот $\omega \ll k_z u$, в которой только и возможно существование неустойчивости. уравнение (4,7) является квадратным и определяет два корня $k_{z1,2}=\pm k_n$, которые при учете граничных условий (5,1) принимают дискретные значения $k_n=\pi n/L$, где $n=1,2,\ldots$ (заметим, что условия, (5,2)

^{*)} Заметим, что условия (5,2) при этом удовлетворяются автоматически.

при этом выполняются автоматически). В результате для спектра частот колебаний получаем

$$\omega^2 = \omega_{Li}^2 \left[1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\gamma^3 k_n^2 u^2} - \frac{2}{\ln(R/r_0)} \right]^{-1}.$$
 (5.7)

Из условия возникновения неустойчивости в системе ($\omega^2 < 0$) при этом находим следующее выражение для минимального тока, необходимого для возбуждения аксиально-симметричных мод колебаний:

$$J_0 = \frac{mu^3}{4e} \frac{2}{\ln(R/r_0)} \gamma^3. \tag{5.8}$$

При получении этого выражения было учтено наше основное предположение о длине системы $L/r_0 > \pi \sqrt{\frac{\ln (R/r_0)}{2}}$. Благодаря этому условию формула (5,8) в точности совпадает с (4,10), полученной для случая неограниченного волновода, как этого и следовало ожидать.

Для аксиально-несимметричных мод $(l \neq 0)$ при $k_z^2 r_0^2 \ll 1$ корни характеристического уравнения (4,7) равны

$$k_{z_1, 2} = a \pm b, \tag{5.9}$$

где

$$\begin{split} a &= \frac{1}{u} \left[2\omega + \frac{\omega_{Li}^{2} \left(\omega - \Omega_{i} \right)}{2\Omega_{i} \left(\omega + \Omega_{l} \right)} \right] \left[2 - \frac{\omega_{Li}^{2}}{\omega \left(\omega + \Omega_{l} \right)} - \frac{r_{0}^{2}\omega_{Le}^{2}}{2l \left(l + 1 \right) u^{2}\gamma^{3}} \right]^{-1}, \\ b &= \left\{ \left[2\omega + \frac{\omega_{Li}^{2} \left(\omega - \Omega_{i} \right)}{2\Omega_{i} \left(\omega + \Omega_{i} \right)} \right]^{2} \frac{1}{u^{2}} - \frac{\omega^{2}}{u^{2}} \left(2 + \frac{\omega_{Li}^{2}}{\Omega_{i} \left(\omega + \Omega_{l} \right)} \right) \times \right. \\ &\times \left[2 - \frac{\omega_{Li}^{2}}{\left(\omega + \Omega_{l} \right) \omega} - \frac{r_{0}^{2}\omega_{Le}^{2}}{2l \left(l + 1 \right) u^{2}\gamma^{3}} \right]^{1/2} \left[2 - \frac{\omega_{Li}^{2}}{\omega \left(\omega + \Omega_{l} \right)} - \frac{r_{0}^{2}\omega_{Le}^{2}}{2l \left(l + 1 \right) u^{2}\gamma^{3}} \right]^{-1}. \end{split}$$

Граничные условия (5,1) при этом приводят к дисперсионному уравнению $b=k_n=\pi n/L$, которое в пределе $\omega \ll k_n u$ дает следующий спектр низкочастотных колебаний:

$$\omega = -\frac{\Omega_i}{2} \pm \left\{ \frac{\Omega_i^2}{4} \pm \omega_{Li}^2 \left[2 - \frac{r_0^2 \omega_{Le}^2}{2l(l+1)u^2 \gamma^3} \left(1 + \frac{ul(l+1)\gamma^3}{k_n \Omega_e r_0^2} \right) \right]^{-1} \right\}^{1/2}. \quad (5.10)$$

Из условия возникновения неустойчивости ($1 \text{ m } \omega > 0$), которая носит характер токовой конвекции, при этом находим минимальный ток, необходимый для возбуждения аксиально-несимметричных мод колебаний с частотой $\omega \ll k_n u$ в компенсированном электронном пучке (он соответствует возбуждению моды с l=1):

$$J_{l} = \frac{mu^{3}}{e} \gamma^{3} l (l+1) \left[1 + \frac{ul (l+1) \gamma^{3}}{k_{B} \Omega_{e} r_{b}^{2}} \right]^{-1}.$$
 (5,11)

Эта формула аналогична формуле (4,13), полученной для возбуждения низкочастотных колебаний ($\omega < k_z u$) в неограниченном волноводе. В случае достаточно длинных систем, когда $I > \frac{\pi}{2} \frac{\Omega_e r_0^2}{u \gamma^3}$, она приводит к следующей зависимости минимального тока, необходимого для возбуждения аксиально-несимметричных мод колебаний, от параметров пучка:

$$J_t = \frac{\pi}{L} \frac{mu^2}{e} \Omega_e r_o^2. \tag{5.12}$$

С ростом длины системы L ток J_l падает. Однако эта формула справедлива лишь до тех пор, пока $L < 2\pi u/\Omega_i$. В более длинных системах, когда $L > 2\pi u/\Omega_i$, низкочастотные моды аксиально-несимметричных колебаний ($\omega \ll k_n u$) оказываются устойчивыми. Уравнение $b = k_n = \pi n/L$ 4 уфн, т. 103, вып. 4

в длинных системах имеет неустойчивые решения при $\omega_{Li}^2 > \Omega_i k_n u$, причем частота возбуждаемых колебаний $\omega = 2k_n u$. Минимальный ток, необходимый для возникновения такой неустойчивости, равен (ср. с (4,18))

$$J_l = \frac{mu}{4e} \,\Omega_e \, \frac{\pi u}{L} \, r_0^2. \tag{5.13}$$

Отсюда видно, что в длинных системах критический ток может быть сколь угодно малым и ограничен он снизу продольным размером системы.

Суммируя все сказанное, в пределе длинноволновых колебаний приходим к следующему выражению для критического тока в компенсированном электронном пучке в волноводе конечной длины и в случае $R\gg r_0$:

$$J_{\rm ED} = \min\{J_0, J_l\},\tag{5.14}$$

где J_0 определяется формулой (5,8), а J_l — максимальным из выражений (5,11) — (5,12).

Что касается коротковолновых колебаний, то так же, как и в случае неограниченного волновода, критический ток для их возбуждения определяется выражением типа (5,6) с заменой (2,4) на (3,9). Истинный критический ток в системе, очевидно, определяется минимальным из выражений (5,6) и (5,14).

Совершенно аналогично проводится анализ устойчивости и определение критических токов в компенсированном трубчатом пучке конечной длины. Так, в достаточно коротких системах, когда $\frac{L}{a} < 2 \sqrt{\frac{M}{m}} \frac{1}{\gamma^{3/2}}$, неустойчивыми могут быть лишь коротковолновые колебания, для которых $\alpha R \gg 1$, а $\omega \ll |k_z| u$. При этом характеристическое уравнение (4,18), которое полностью аналогично уравнению (4,1), с учетом граничных условий (5,1) дает $k_{z1,2} = \pm k_n = \pm \frac{\pi n}{L}$; для критического же тока получаем выражение (ср. с (5,4))

$$J_{\rm Rp} = J_1 = \frac{\pi^2}{2} \frac{R}{a} \frac{mu^3}{4e} \gamma^3. \tag{5.15}$$

В более длинных системах, удовлетворяющих условию $2\sqrt{\frac{M}{m}}\gamma^{-3/2} < \frac{L}{a} < \frac{\pi u}{a\Omega_i}$, неустойчивыми оказываются колебания с $\omega > \pi u/L$, причем характеристическое уравнение (4,18) определяет два корня $k_{z1,\;2} = \frac{\omega}{u} \pm \frac{L}{u}$. Совершенно так же, как это было сделано выше, для критического тока в компенсированном трубчатом пучке в этом случае имеем

$$J_{RP} = \min\{J_1, J_2\}, \tag{5.16}$$

где (ср. с (5,6))

$$J_{2} = \max \begin{cases} \frac{\pi^{2}}{4} \frac{mu^{3}}{e} \frac{R}{L} \sqrt{\frac{M}{m}} \gamma^{3/2}, \\ \frac{mu}{4e} \frac{m}{M} \Omega_{e}^{2} 2Ra. \end{cases}$$
 (5,17)

Наконец, если система достаточно длинная, так что $L>\pi u/\Omega_i$, то критический ток в компенсированном электронном пучке определяется соотношением

$$J = \min\{J_4, J_2, J_3\},\tag{5.18}$$

где

$$J_3 = \frac{mu^3}{4e} \frac{M}{m} \frac{2\pi^2 Ra}{I^2}.$$
 (5.19)

Токи J_1 и J_2 обусловлены возбуждением аксиально-симметричных мод колебаний, т. е. связаны с развитием в системе пучковой неустойчивости бунемановского типа; ток же J_3 связан с развитием токово-конвективной неустойчивости в трубчатом пучке, сопровождаемом возбуждением аксиально-несимметричных мод. Видно, что в очень длинных системах именно эта неустойчивость определяет величину критического тока.

В заключение приведем количественные оценки критических токов в компенсированных электронных пучках и сравним их с предельными токами, которые можно получить в вакуумных системах. При этом ограничимся системами конечной длины, для которых $L < \pi u/\Omega_i$.

В случае достаточно тяжелых ионов с атомным весом больше 100 это неравенство выполняется вплоть до $L\sim 10^3~cm$ даже в очень сильных магнитных полях $B_0\sim 10^6$ э. Именно системы такой длины и представляют в реальных случаях наибольший интерес.

В условиях, когда радиус электронного пучка совпадает с радиусом волновода, т. е. $r_0 \approx R$, критический ток при компенсации заряда пучка определяется формулами (5,4) и (5,6). Сравнение этих формул с (3,6), (3,12) и (3,13), определяющими предельные токи в некомпенсированных электронных пучках, показывает, что при $\frac{L}{R} < \sqrt{\frac{M}{m}} \frac{1}{v^{3/2}}$ существенным преимуществом компенсированные пучки обладают в области релятивистских энергий электронов. В нерелятивистской области энергий критический ток в компенсированном пучке всего в 6 раз превосходит предельный ток J_0 , пропускаемый вакуумной системой, в то время как в релятивистской области энергий это отношение может быть довольно большим $J_{\rm KP}/J_0 \approx \left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)^2 \approx \gamma^2$. Это обстоятельство открывает большие возможности для получения сильноточных электронных пучков при компенсации заряда электронов ионным фоном. Так, при $\mathscr{E} \sim 5~M$ эв ток в компенсированном пучке может быть порядка $J_{\rm кр} \sim 10^7~a$, что в 100 раз превышает предельный вакуумный ток J_0 для такого пучка. Следует заметить, однако, что достижение такого тока возможно лишь в достаточно коротких системах, когда $\frac{L}{R} \leqslant \sqrt{\frac{M}{m}} \frac{1}{25} \leqslant 20$. В более длинных системах, как видно из выражений (5,6), критический ток в компенсированном электронном пучке меньше и при $\frac{L}{R} > \sqrt{\frac{M}{m}} \frac{1}{v^{3/2}}$ имеем $J_{\rm KP}/J_0 \approx 2\frac{R}{L} \sqrt{\frac{M\gamma}{m}}$. Отсюда при $\mathcal{E} \sim 5~M$ эв, $\sqrt{\frac{M}{m}} \sim 400$ и $L/R \approx 10^2$ получаем $J_{\rm RP}/J_0 \approx 25$.

В условиях, когда пучок не полностью заполняет волновод и $\ln (R/r_0)\gg 1$, указанные выше преимущества компенсированного пучка по сравнению с некомпенсированным могут проявляться лишь при наличии достаточно сильного продольного магнитного поля, удовлетворяющего требованию

$$\Omega_e > \frac{u}{r_0} \frac{L}{2\pi r_0} \frac{\gamma^3}{\ln (R/r_0)}. \tag{5.20}$$

При выполнении этого неравенства критический ток в компенсированном пучке будет определяться формулой (5,8) и $J_{\rm KP}/J_0 \approx \left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)^2 = \gamma^2$. Для пучка с $\mathscr{E} \sim 5~M$ эв, $r_0 \sim 1~c$ м, $R/r_0 \sim 10$ и $L/r_0 \sim 100$ неравенство (5,20) выполняется только в очень сильных магнитных полях $B_0 \geqslant 10^7$ э, которые могут быть получены лишь в импульсных системах. При меньших полях критический ток в компенсированном электронном пучке

определяется формулой (5,12), причем $\frac{J_{\rm kp}}{J_0}\sim \frac{2\pi r_0}{L}\,\frac{\Omega_e r_0}{c}\,\ln\,(R/r_0)$. Если же $B_0<10^5$ з, то критический ток в пучке оказывается меньше вакуумного тока. Причиной такого уменьшения тока в пучке является токово-конвективная неустойчивость.

Аналогичное положение имеет место и в трубчатых электронных пучках. В относительно коротких системах и при наличии сильных магнитных полей, как видно из формул (5,15) — (5,19), компенсированные трубчатые пучки, так же как и некомпенсированные, обладают существенным преимуществом по сравнению с однородными пучками: в них могут быть достигнуты токи в R/a раз большие. При $R/a \approx 10$ и $\mathscr{E} = 5$ M - 8 максимальный ток в компенсированном трубчатом пучке может быть порядка 10^8 a. Однако в длинных системах и относительно слабых магнитных полях это преимущество трубчатых токов вследствие развития токовоконвективной неустойчивости уже не имеет места. Более того, критический ток в достаточно длинных компенсированных трубчатых пучках может даже оказаться меньше, чем в однородных некомпенсированных пучках.

6. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ НЕОГРАНИЧЕННОГО РЕЛЯТИВИСТСКОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА С ПЛАЗМОЙ

Выше мы убедились в преимуществах компенсированных электронных пучков при достижении больших токов по сравнению с некомпенсированными. В реальных условиях, однако, воспользоваться этими преимуществами весьма трудно, так как для этого необходимо помещение системы в очень сильное магнитное поле. В противном случае в компенсированном пучке может развиваться токово-конвективная неустойчивость, соответствующая возбуждению аксиально-несимметричных мод колебаний и, по существу, сводящая указанные выше преимущества на нет.

Для получения сильноточных электронных пучков в реальных условиях практически более перспективными, с нашей точки зрения, являются перекомпенсированные пучки, или, иными словами, системы с относительно плотной плазмой, через которую пропускается электронный пучок. Вопрос о критических параметрах такой системы, при которых в релятивистском перекомпенсированном электронном пучке развиваются электростатические неустойчивости, обсуждается в работе ¹⁹ *). Эта работа и положена в основу дальнейшего изложения.

Прежде всего рассмотрим задачу взаимодействия неограниченного электронного пучка с плазмой. Для исследования этой задачи мы будем исходить из уравнений (2,10) и (2,12), которые в рассматриваемом случае представляют собой дисперсионные уравнения электростатических колебаний. При $R \approx r_0$, т. е. в случае плазмы, полностью заполняющей волновод, уравнение (2,10) сводится к виду

$$k_z^2 \left[1 - \frac{\omega_{L1}^2}{\gamma^3 (\omega - k_z u)^2} - \frac{\omega_{L2}^2}{\omega^2} \right] + \frac{\mu_{sl}^2}{R^2} \left(1 - \frac{\omega_{L2}^2}{\omega^2 - \Omega_e^2} \right) = 0, \tag{6.1}$$

здесь ω_{L_1} и ω_{L_2} — лэнгмюровские частоты электронов пучка и плазмы, плотности которых в лабораторной системе координат соответственно равны n_1 и n_2 . При написании уравнения (6,1) мы учли условие (2,1), которое позволяет ограничиться исследованием устойчивости электрон-

st) На существование критической плотности плазмы для возбуждения нерелятивистским электронным пучком симметричных мод колебаний было ранее указано в работах 30 .

ного пучка в области частот $(\omega - k_z u)^2 \ll \Omega_e^2/\gamma^2$. Легко понять, что при $n_1 \ll n_2 \gamma^3$ решения уравнения (6,1), соответствующие неустойчивым колебаниям системы, могут лежать лишь в области частот $\omega \approx k_z u$. При этом для длинноволновых колебаний с $k_z u \ll \Omega_e$ условие возникновения неустойчивости записывается в виде

$$n_2 \geqslant 3 \cdot 10^{-10} \left(k_z^2 + \frac{\mu_{sl}^2}{R^2} \right) u^2 \left\{ \left[1 + \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^{1/3} \frac{1}{\gamma} \right]^3 - \frac{\mu_{sl}^2 u^2}{r_0^2 \Omega_e^2} \right\}^{-1}. \tag{6.2}$$

Для коротковолновых же колебаний с $k_2 u > \Omega_e$ неустойчивость возни-кает, если*)

$$n_2 \geqslant 3 \cdot 10^{-10} k_z^2 u^2 \left\{ 1 + \left[\frac{n_1 \gamma^{-3}}{n_2 \left(1 + \mu_3 t / k_z^2 R^2 \right)} \right]^{1/3} \right\}^{-3}$$
 (6,3)

Минимальное значение плотности плазмы n_2 , соответствующее началу неустойчивости в системе, будет называться критическим. Очевидно, что для определения критической плотности плазмы выражения (6,2) и (6,3) должны быть минимализированы по волновым числам k_z и μ_{sl} , наименьший из найденных при этом минимумов (минимум миниморум) и будет представлять искомую критическую плотность ¹⁹

$$n_{2\text{Rp}} = \min \left\{ 3.10^{-10} \frac{\mu_{00}^2 u^2}{R^2} \left\{ \left[1 + \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^{1/3} \frac{1}{\gamma} \right]^3 - \frac{\mu_{00}^2 u^2}{R^2 \Omega_e^2} \right\}^{-1}, \\ 3.10^{-10} \Omega_e^2 \left\{ 1 + \left[\frac{n_1 \gamma^{-3}}{n_2 \left(1 + \frac{\mu_{00}^2 u^2}{R^2 \Omega_e^2} \right)} \right]^{1/3} \right\}^{-1},$$
 (6,4)

где $\mu_{00}=2,4$. Согласно этим выражениям, зависимость критической плотности плазмы от магнитного поля является довольно сильной и может даже носить почти «резонансный» характер при достаточно больших плотностях пучка; при малых плотностях пучка, когда $\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{1/3}\frac{1}{\gamma}\ll 1$, резонанс не проявляется. При достижении критической плотности (6,4) в плазме развивается пучковая неустойчивость и происходит возбуждение основных мод колебаний s=l=0 с частотой $\omega\approx k_zu\leqslant\Omega_e$ и инкрементом нарастания $\gamma_0\leqslant\left(\frac{n_1}{2n_2}\right)^{1/3}k_zu\,\frac{1}{\gamma}$. При этом волновое число k_z может меняться в довольно широких пределах от k_z \min , которое определяется длиной системы (см. гл. 7), и до μ_{00}/R . Поэтому и частоты возбуждаемых колебаний лежат в пределах $\pi u/L\leqslant\omega\leqslant\omega_{L2}$.

Формула (6,4) остается справедливой также и в том случае, когда имеется зазор между плазмой и металлическим кожухом, но он достаточно мал, так что 2,4 $\ln{(R/r_0)} \ll 1$. В обратном пределе, когда $R \gg r_0$, точнее $\ln{(R/r_0)} \gg 1$, зазор оказывает существенное влияние на характер взаимодействия пучка с плазмой. Критическая плотность плазмы в этом случае определяется возбуждением длинноволновых по радиусу колебаний, для которых $\alpha r_0 \ll 1$, и уравнение (2,10) принимает вид

$$1 - \frac{k_{z}^{2} r_{0}^{2}}{k_{z}^{2} r_{0}^{2} + 2l (l+1)} \left[\frac{\omega_{L2}^{2}}{\omega^{2}} + \frac{\omega_{L1}^{2}}{\gamma^{3} (\omega - k_{z} u)^{2}} \right] - \frac{2l (l+1)}{k_{z}^{2} r_{0}^{2} + 2l (l+1)} \left[\frac{\omega_{L2}^{2}}{\omega \Omega_{e}} + \frac{\omega_{L1}^{2}}{\Omega_{e} (\omega - k_{z} u)} - \frac{r_{0}}{l} f_{l} \right] = 0. \quad (6.5)$$

^{*)} Следует заметить, что возбуждение циклотронных колебаний, когда $\omega \approx k_z u \approx \Omega_e$, возможно при плотностях плазмы, превышающих значения (6,3).

При написании этого уравнения считалось также, что $k_z R \ll 1$, так как именно длинноволновые колебания определяют критическую плотность плазмы. Из уравнения (6,5) находим следующее выражение для минимальной плотности плазмы, при которой происходит возбуждение симметричных мод колебаний с l=0:

$$n_{20} = 3 \cdot 10^{-10} \frac{u^2}{r_0^2} \frac{2}{\ln (R/r_0)} \left\{ 1 + \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^{1/3} \frac{1}{\gamma} \right\}^{-3}.$$
 (6.6)

Анализ уравнения (6,5) для несимметричных мод ($l \neq 0$) более сложен, и аналитически удается провести его лишь при условии, когда можно пренебречь членами порядка $\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{1/3}\frac{1}{\gamma}$. При этом условии для минимальной плотности плазмы, соответствующей началу возбуждения моды колебаний с заданными l и k_z , получаем выражение ¹⁹

$$n_{2l} = 3 \cdot 10^{-10} \frac{u^2}{r_0^2} \left[4l (l+1) + \eta^2 \frac{\omega_{Ll}^2 r_0^2}{u^2 \gamma^3} \right] (1 + 2\eta)^{-1}, \tag{6.7}$$

где

$$\eta = \frac{l(l-1)u}{|k_z| r_0^2 \Omega_e}.$$

Минимализируя (6,7) по l и k_z , находим критическую плотность плазмы для возбуждения несимметричных мод колебаний

$$n_{2\text{Rp}} = 5 \cdot 10^{-5} \, \frac{u}{r_0} \, \sqrt{n_1} \, \gamma^{3/2}. \tag{6.8}$$

При выводе этой формулы предполагалось, что ω_{L1}^2 $r_0^2 \ll 4u^2\gamma^{-3}$, так как только при этом условии критическая плотность, определенная формулой (6,8), может быть меньше, чем (6,6). Более точно это требование записывается в виде

$$\frac{u}{r_0} > 10^5 \sqrt{n_1} \gamma^{3/2} \ln R/r_0. \tag{6.9}$$

В условиях выполнения этого неравенства критическая плотность плазмы соответствует развитию пучково-дрейфовой неустойчивости в системе и возбуждению моды с $l=1,\ k_z=\omega_{L1}\gamma^{3/2}/\sqrt{2}\ r_0\Omega_e$ и, согласно (6,8), растет с ростом плотности пучка. В противном случае критическая плотность плазмы определяется формулой (6,6) и соответствует возбуждению аксиально-симметричных мод колебаний в системе *).

Заметим, что формулы (6,6) и (6,8) остаются справедливыми также и для конечного, но достаточно длинного волновода. Если учесть, что частота возбуждаемых колебаний порядка $\omega \approx k_z u$, а инкремент $\gamma_0 \leqslant \left(\frac{n_1}{2n_n}\right)^{1/3} k_z u \frac{1}{v}$, для справедливости формулы (6,8) необходимо, чтобы

$$\frac{L}{r_0} \gg \frac{\sqrt{2} \Omega_e}{\omega_{L1} \gamma^{1/2}} \left(\frac{2n_2}{n_1}\right)^{1/3} \approx 1.5 \cdot 10^{-6} \left(\frac{u}{r_0}\right)^{1/3} \frac{\Omega_e}{n_1^{2/3}}.$$
 (6.10)

Формула же (6,6) является справедливой при выполнении более слабого условия

$$\frac{L}{r_0} \gg \left(\frac{2n_2}{n_1}\right)^{1/3} \gamma. \tag{6.11}$$

^{*)} В формулах (6,6) и (6,8) отсутствует резонансная зависимость критической плотности плазмы от магнитного поля, характерная для полностью заполненного волновода (см. формулу (6,4)). Такая зависимость может сохраняться и при наличии зазора, если только $\ln (R/r_0) \leqslant 1$. В этом случае, однако, дисперсионное уравнение (2,10) следует анализировать численно. Резонансная зависимость может появиться также в условиях, когда радиус плазмы превосходит радиус пучка.

Это же неравенство определяет применимость формулы (6,4) для случая $r_0 \approx R$. Следует отметить, что неравенства (6,10) и (6,11) являются грубо оценочными. Более строго влияние конечных продольных размеров волновода на критическую плотность плазмы исследуется в следующей главе. Тем не менее, уже из этих неравенств следует, что условия развития пучково-дрейфовой неустойчивости (6,9) и (6,10) реализовать очень трудно. Практически всегда критическая плотность плазмы определяется развитием пучковой неустойчивости с возбуждением аксиально-симметричных мод колебаний.

Еще в большей степени затруднено возбуждение аксиально-несимметричных мод в трубчатом электронном пучке, взаимодействующем с плотной плазмой. В этом легко убедиться, анализируя дисперсионное уравнение (2,12) для такого пучка на устойчивость. Для коротковолновых колебаний, $\alpha R \gg 1$, уравнение (2,12) принимает вид

$$k_z^2 \left[1 - \frac{\omega_{L1}^2 \gamma^{-3}}{(\omega - k_z u)^2} - \frac{\omega_{L2}^2}{\omega^2} \right] + \frac{\pi^2 \left(s + \frac{1}{2} \right)^2}{a^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega^2 - \Omega_e^2} \right) = 0, \quad (6.12)$$

где $s=0,1,2,\ldots$ Это уравнение полностью аналогично уравнению (6,1). Поэтому весь анализ, проведенный выше, сохраняет силу и в рассматриваемом случае. Именно, для критической плотности по аналогии с (6,4) имеем

$$n_{2\text{Rp}} = \min \begin{cases} 3 \cdot 10^{-10} \frac{\pi^2 u^2}{4a^2} \left\{ \left[1 + \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^{1/3} \frac{1}{\gamma} \right]^3 - \frac{\pi^2 u^2}{4\Omega_e^2 a^2} \right\}^{-1}, \\ 3 \cdot 10^{-10} \Omega_e^2 \left[1 + \left(\frac{n_1}{n_2 \gamma^3} \right)^{1/3} \left(1 + \frac{\pi^2 u^2}{4a^2 \Omega_e^2} \right)^{-1/3} \right]^{-3}. \end{cases}$$
(6.13)

Выражения (6,13) соответствуют развитию пучковой неустойчивости и возбуждению аксиально-симметричных мод колебаний в перекомпенсированном трубчатом пучке. Аксиально-несимметричные моды в принципе могут возбуждаться в длинноволновом пределе $\alpha R \ll 1$, когда уравнение (2,12) принимает вид

$$1 - \frac{\omega_{L2}^2}{\omega^2 - \Omega_e^2} + \frac{la}{R} \left[\frac{\omega_{L2}^2 \Omega_e}{\omega (\omega^2 - \Omega_e^2)} - \frac{\omega_{L1}^2}{\Omega_e (\omega - k_z u)} \right] = 0.$$
 (6.14)

Легко показать, что это уравнение имеет неустойчивые решения лишь при условии $\omega_{L2} \geqslant k_z u > \Omega_e$, а следовательно, критическая плотность для развития пучково-дрейфовой неустойчивости всегда больше, чем (6,13).

7. УСТОЙЧИВОСТЬ ОГРАНИЧЕННОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА В ПЛАЗМЕ

Проведенное в предыдущей главе рассмотрение, строго говоря, пригодно лишь для неограниченно длинного волновода. Только в этом случае соотношения (2,10) и (2,12) представляют собой дисперсионные уравнения колебаний. В случае ограниченного волновода эти соотношения являются характеристическими уравнениями и определяют набор возможных волновых чисел k_{zn} колебаний системы. Для получения дисперсионных уравнений в этом случае решения уравнения поля $\Phi = \sum_{n} C_{n}e^{ik_{zn}z}$ нужно подставить в граничные условия (на торцах волновода), число которых должно соответствовать числу корней характеристических уравнений. Условия разрешимости полученных при этом систем алгебраических уравнений и представляют дисперсионные уравнения колебаний.

Как уже отмечалось выше, в случае полного заполнения волновода плазмой, когда $r_0 \approx R$, а также для возбуждения симметричных колебаний с l=0 при $R\gg r_0$ в трубчатом пучке влиянием граничных условий на торцах волновода можно пренебречь, если выполнено условие (6,11). При этом критическая плотность плазмы определяется формулами (6,4), (6,6) и (6,13) соответственно. Условие (6,11) в реальных экспериментах, как правило, выполняется с большим запасом; поэтому, следуя работе 19, ниже мы ограничимся исследованием влияния ограниченности волновода на возбуждение несимметричных мод с $l \neq 0$ при $R \gg r_0$, когда характеристическое уравнение имеет вид (6,5) *). Это уравнение определяет четыре корня k_{zn} , и поэтому, вообще говоря, необходимо удовлетворить четырем граничным условиям на торцах волновода при $z=0,\ L.$ Однако если учесть, что наиболее существенное влияние граничные условия оказывают на длинноволновые колебания с длиной волны, сравнимой с продольным размером, в уравнении (6.5) можно перейти к пределу $k_z^2 r_0^2 \ll 1$. Если, кроме того, заметить, что критическая плотность плазмы может быть меньше определенной формулой (6,6) и соответствующей возбуждению моды с l=0 только при условии $\eta\gg 1$, из (6,5)получаем квадратное уравнение, корни которого равны

$$k_{z_1, 2} = p \pm \sqrt{p^2 - 4q},$$
 (7.1)

где

$$\begin{split} p &= \left[\; 2\omega u \; \left(2 - \frac{\omega_{L2}^2}{\omega \Omega_e} \right) - u \; \frac{\omega_{L1}^2}{\Omega_e} \; \right] \left[\; \left(2 - \frac{\omega_{L2}^2}{\omega \Omega_e} \right) \; u^2 - \frac{\omega_{L1}^2 r_0^2}{\gamma^3 2l \; (l+1)} \; \right]^{-1}, \\ q &= \left[\; \omega^2 \left(2 - \frac{\omega_{L2}^2}{\omega \Omega_e} \right) - \omega_{L1}^2 \; \frac{\omega}{\Omega_e} \; \right] \left[\; u^2 \left(2 - \frac{\omega_{L2}^2}{\omega \Omega_e} \right) - \frac{\omega_{L1}^2 r_0^2}{\gamma^3 2l \; (l+1)} \; \right]^{-1}. \end{split}$$

Это обстоятельство позволяет для решения задачи ограничиться очевидными граничными условиями (5,1) на металлических торцах волновода, которые приводят к следующему дисперсионному уравнению: $k_{z1}-k_{z2}=2k_n=2\pi n/L$, где $n=1,\ 2,\ \ldots$, или, что то же самое,

$$\omega^3 + 3p_1\omega - 2q_1 = 0, \tag{7.2}$$

где

$$3p_{1} = -\frac{4k_{n}^{2}u^{4}l\left(l+1\right)\gamma^{3}}{\omega_{L_{1}}^{2}r_{0}^{2}} \;\; , \;\; 2q_{1} = \frac{2k_{n}^{2}u^{4}l\left(l+1\right)\omega_{L_{2}}^{2}\gamma^{3}}{\Omega_{e}\omega_{L_{1}}^{2}r_{0}^{2}} \;\; .$$

Из условия появления комплексных корней уравнения (7,2), соответствующих неустойчивым колебаниям, находим плотность плазмы, при которой в системе возможно возбуждение несимметричной моды колебаний с заданными волновыми числами n и l:

$$n_2 \geqslant 10^{-14} \frac{|k_n| u^2 \Omega_e \sqrt{l(l+1)} \gamma^{3/2}}{r_0 \sqrt{n_1}}$$
 (7.3)

Отсюда для минимальной плотности, соответствующей возбуждению моды с l=n=1, имеем

$$n_{2\text{sp}} = 10^{-14} \frac{\sqrt{2} \pi u^2 \Omega_e \gamma^{3/2}}{L r_0 \sqrt{n_1}} . \tag{7.4}$$

С ростом продольного размера системы, как видно из (7,4), величина $n_{2\text{кр}}$ уменьшается и при $L \to \infty$ стремится к нулю. В действительности,

^{*)} Конечная длина волновода для аксиально-симметричных мод проявляется лишь в том, что ограничивается частота возбуждаемых колебаний $\omega \geqslant \pi u/L$.

однако, уменьшение критической плотности плазмы с ростом L происходит до тех пор, пока выражение (7,4) не сравнится с (6,8), справедливым для случая неограниченного волновода. Дальнейшее увеличение длины волновода уже не влияет на критическую плотность плазмы; волновод становится неограниченным, и в силу вступают результаты предыдущей главы. С другой стороны, выражение (7,4) справедливо только в условиях, когда оно меньше, чем (6,6), так как в противном случае в системе будет происходить возбуждение моды с l=0. Таким образом, зависимость критической плотности плазмы от магнитного поля, содержащаяся в формуле (7,4), может проявляться в довольно узкой области, лежащей между значениями (6,8) и (6,6), или, что то же самое, когда

$$10^{-4} \frac{\Omega_{\rho} \gamma^{3/2}}{\sqrt{n_1}} \ln (R/r_0) < \frac{L}{r_0} < 10^{-9} \frac{u\Omega_{\rho}}{n_1 r_0}. \tag{7.5}$$

Заметим, что неравенства (7,5) могут выполняться только при условии (6,9). Это подтверждает высказанную выше мысль о трудности наблюдения пучково-дрейфовой неустойчивости в перекомпенсированных электронных пучках.

8. КРИТИЧЕСКИЕ ТОКИ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКОВ В ПЛАЗМЕ

Проведенный анализ взаимодействия релятивистского электронного пучка малой плотности с плазмой позволяет оценить критические токи в пучках, которые можно пропустить через плазму, заполняющую волновод. Наибольший интерес, естественно, представляет транспортировка пучка на большие расстояния. Поэтому мы обсудим этот вопрос на примере неограниченно длинного волновода.

Из формул *) (6,4), (6,6) и (6,13) следует, что электронный пучок в плазме может быть неустойчивым практически при сколь угодно малом токе в пучке, если только плотность плазмы превышает критическое значение $n_{2 \text{кp}}$. С другой стороны, при $n_1 \ll n_2 \gamma^3$ и $n_2 \ll n_{2 \text{kp}}$ электронный пучок в плазме всегда устойчив, причем зависимость $n_{2 \text{kp}}$ от тока в пучке является слабой. Именно это обстоятельство и дает возможность оценить верхний предел критического тока релятивистского электронного пучка в плазме. Он равен

$$J_{\rm KP} < eun_{\rm 2KP} \gamma^3 S_0, \tag{8.1}$$

где S_0 — площадь сечения пучка (для цилиндрического пучка $S_0=\pi r_0^2$, где $r_0\leqslant R$; для трубчатого $S_0=\pi$ ($R^2-R_1^2$), $S_0=2\pi Ra$), а $n_{2\kappa p}$ в зависимости от геометрии пучка определяется формулами (6,4), (6,6) и (6,13). В результате для критического тока электронного пучка в плазме получаем следующий предел:

$$J_{\rm RP} < \frac{mu^3}{4e} \gamma^3 \xi; \tag{8.2}$$

здесь ξ — геометрический фактор, равный $\xi = \mu_{00}^2 = (2,4)^2$ в случае полного заполнения волновода плазмой, $\xi = 2/\ln{(R/r_0)}$ при $R \gg r_0$ и $\xi = \frac{\pi^2}{2} \frac{R}{a}$ для трубчатого пучка. При написании формулы (8,2) предполагалось, что система помещена в достаточно сильное продольное

^{*)} Выше уже отмечалось, что условие развития пучково-дрейфовой неустойчивости с возбуждением аксиально-несимметричных мод колебаний реализовать очень трудно. Поэтому мы ограничиваемся рассмотрением следствий, вытекающих из обычной пучковой неустойчивости с возбуждением аксиально-симметричных мод.

магнитное поле, так что $\Omega_l \gg u/\Delta$, где Δ — поперечный размер (радиус или толщина) электронного пучка. Кроме того, было пренебрежено членами порядка $\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{1/3}\frac{1}{\gamma}$, что справедливо в условиях, когда ток в пучке значительно меньше предела (3,2) по крайней мере на порядок. Даже при этом ограничении токи в электронных пучках, которые возможно пропустить через плотную плазму, оказываются весьма внушительными. В таких перекомпенсированных пучках можно получить токи всего на порядок меньшие, чем предельно достижимые токи в компенсированных пучках. Так, при $\mathcal{E}=5$ Мэв в перекомпенсированном пучке, полностью заполняющем волновод, без особого труда можно иметь ток $J\sim 10^6$ а. В трубчатом пучке ток может быть еще больше в R/a раз.

Важно отметить, что сильно перекомпенсированные пучки обладают одним существенным преимуществом по сравнению с компенсированными пучками. Дело в том, что даже если в такой системе возникает неустойчивость, нотери энергии пучка (переход направленной энергии пучка в энергию электростатических колебаний) и связанное с этим энергетическое расплывание пучка при достаточно большой плотности плазмы может быть незначительным. Действительно, из проведенного выше анализа следует, что в пучках малой плотности в условиях, когда плотность плазмы близка к критической, как правило, должны развиваться одномодовые неустойчивости *). Взаимодействие пучка с волной и нарастание последней при этом происходит до тех пор, пока амплитуда волны не достигнет критического значения, соответствующего захвату электронов пучка волной. Из этого условия получаем оценку для амплитуды потенциала установившейся волны при развитии неустойчивости в системе плазма — пучок:

$$e\Phi_0' = \frac{mu'^2}{2}, \tag{8.3}$$

где Φ_0' , u' — амплитуда потенциала и скорость электронов пучка в системе координат, связанной с волной. В этой системе координат электроны пучка оказываются нерелятивистскими благодаря условию $\omega \approx k_z u$. При переходе к лабораторной системе координат с учетом того обстоятельства. что в последней поле волны чисто потенциально, получаем

$$\Phi_0 = \frac{m}{2e} \left(\frac{\omega}{k_z} - u \right)^2 \gamma^3, \tag{8.4}$$

учитывая далее, что $\mathbf{E}_0 = -\nabla \Phi_0$ и что максимальный инкремент нарастания колебаний γ_0 $_{\max} = (\omega - k_z u)_{\max} \approx \left(\frac{n_1}{2n_2}\right)^{1/3} \frac{1}{\gamma} \, k_z u$, после несложных вычислений находим относительную долю энергии, передаваемой пучком электростатической волне 25 **):

$$\frac{E^2}{8\pi n_1 mc^2 \gamma} = \frac{11}{2^{4/3}} \frac{u^2}{c^2} \left(\frac{n_1}{2n_2}\right)^{1/3} \gamma. \tag{8.5}$$

Это отношение, как легко понять, характеризует и размытие пучка при развитии неустойчивости в плазме. Поэтому в условиях, когда правая

^{*)} Это действительно так для аксиально-несимметричных мод колебаний, поскольку необходимые плотности плазмы, соответствующие возбуждению различных мод таких колебаний, согласно (7,3), существенно отличаются друг от друга. Что касается симметричных мод, то плотности плазмы, необходимые для их возбуждения. вообще говоря, мало отличаются друг от друга и проявление одномодовой неустойчивости следует ожидать лишь в относительно коротких системах, когда $L/r_0 \sim (2n_2/n_1)^{1/3}\gamma$ (см. также 25).

^{**)} Заметим, что аналогичный результат получается и в квазилинейной теории релаксации пучка в плазме ²⁴.

часть соотношения (8,5) мала, потери энергии пучка и его энергетическое размытие пренебрежимо малы *). Напротив, в компенсированных пучках (когда $n_1 \approx n_2$) нет такого малого параметра, и развитие неустойчивостей в таком пучке вызывает его полное разрушение. В этом смысле можно считать, что критические токи, найденные выше для компенсированных пучков, являются, по существу, предельными, в то время как в перекомпенсированных пучках они только критические; в последних без существенного разрушения пучка возможно достижение больших токов. Именно в этом и состоит преимущество перекомпенсированных пучков по сравнению с компенсированными.

Наконец, следует обратить внимание на тот факт, что правая часть соотношения (8,5) растет с ростом энергии электронов и в релятивистской области может стать порядка единицы. Это означает, что энергия возбуждаемых в плазме колебаний может стать порядка энергии самого пучка, т. е. практически вся энергия пучка при развитии неустойчивости будет переходить в энергию СВЧ колебаний. В этом также состоит существенное преимущество релятивистских электронных пучков перед нерелятивистскими при их использовании для создания генераторов и усилителей СВЧ волн сантиметрового и миллиметрового диапазонов. Мощности таких источников могут быть очень большими. Действительно, при энергии электронов 10 M в и токе $J \sim 10^5$ a (ток меньше вакуумного, см. гл. 3) мощность СВЧ генератора, основанного на взаимодействии такого пучка с плазмой, даже при $n_1/n_2 \leqslant 10^{-4}$, согласно (8,5), может превысить 10^{10} sm.

В довольно широких пределах можно менять спектр возбуждаемых пучком в плазме СВЧ волн. Из результатов гл. 7 следует, что в системах конечной длины происходит возбуждение колебаний со спектром $\omega = \frac{\pi n}{L} u$. где $n=1,2,\ldots$ номера различных мод. Если учесть, что пучковые неустойчивости являются конвективными 22 и поэтому реально усиливаются лишь моды, для которых $\gamma_0 \max \approx \left(\frac{n_1}{2n_2}\right)^{1/3} \frac{\pi n u}{\gamma L} > \frac{u}{L}$, легко определить область частот, возбуждаемых пучком колебаний **),

$$\gamma \left(\frac{2n_2}{n_1}\right)^{1/3} \frac{u}{L} < \omega < \frac{\mu_0 u}{r_0} \approx \omega_{L2}, \tag{8.6}$$

где $\mu_0=2,4$ для цилиндрического пучка и $\mu_0=\pi/2$ — для трубчатого (в последнем случае под r_0 следует понимать толщину пучка a). Отсюда видно, что в условиях, когда $\gamma\left(\frac{2n_2}{n_1}\right)\frac{r_0}{L}\ll 1$, спектр СВЧ волн является широким; если же это отношение порядка единицы, то спектр оказывается узким, и можно говорить о развитии в плазме практически одномодовой пучковой неустойчивости.

9. СРАВНЕНИЕ ТЕОРИИ С ЭКСПЕРИМЕНТОМ

Исследованию взаимодействия пучков заряженных частиц с плазмой посвящено большое количество экспериментальных работ. Прекрасный обзор этих работ был дан недавно Я.Б. Файнбергом ²³. Наиболее выигрышными, с нашей точки зрения, являются работы по изучению

^{*)} Следует заметить, что указанный малый нараметр обеспечивает также малость амплитуд высших гармоник электростатического поля при развитии пучковой неустойчивости 25

^{**)} Учитывая, что возбуждение аксиально-несимметричных мод колебаний в перекомпенсированных пучках затруднено, при оценках мы ограничиваемся рассмотрением лишь симметричных мод.

взаимодействия электронного пучка с созданной им же самим плазмой в результате ионизации остаточного газа в камере с целью определения критических параметров, при которых в системе возникают неустойчи-

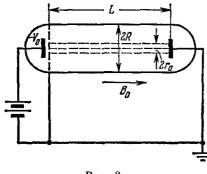


Рис. 2.

вости. Такой подход исследования плазменнопучкового взаимодействия был предложен М. В. Незлиным 5,9 и развит в работах 20,27,28 . Экспериментальная установка, использованная в этих работах, схематически изображена на рис. 2. Электронный пучок, эмитируемый накаленным катодом под потенциалом — V_0 , ускоряется в промежутке между катодом и заземленной сеткой (промежуток I), проходит через дрейфовое пространство II и собирается коллектором. При этом электронный пучок ионизует остаточный газ, создавая плазму в камере и компенсируя

тем самым заряд пучка. Процесс ионизации газа является медленным по сравнению с характерными временами развития неустойчивостей

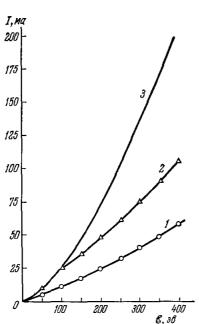


Рис. 3. Зависимость критического тока компенсированного пучка от энергии электронов при $L=100~{\rm cm},$ $R=5~{\rm cm}$ п $r_0=0.5~{\rm cm}.$

Кривая 2 соответствует магнитному полю $B_0=4000$ гс, кривая I—полю $B_0=600$ гс, а кривая 3 рассчитана по формуле (5,8).

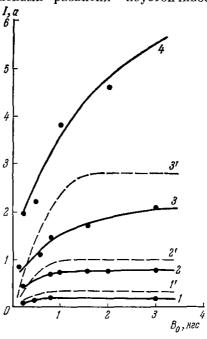


Рис. 4. Зависимость критического тока компенсированного пучка от величины магнитного поля при $L=100\ cm$, $R==7.5\ cm$, $r_0=1.5\ cm$.

Экспериментальные кривые I-4 (сплошные линии) соответствуют энергиям электронов 0,5, 1, 2 и 4 кэв. Штриховыми линиями представлены теоретические кривые.

в системе, что позволяет исследовать поведение электронного пучка на разных стадиях его компенсации.

Вначале электронный пучок некомпенсирован, и пропускная способность (точнее, предельный ток) рассматриваемой системы определяется формулами гл. 3 настоящего обзора.

На этой стадии сравнение теории с экспериментом, показывающее хорошее количественное согласие между ними, проводилось как в работах $^{5, 9, 20, 28}$, так и в многочисленных более ранних исследованиях *) (см. обзоры $^{1, 12}$).

Далее в процессе ионизации газа электронный пучок захватывает образованные ионы и нейтрализуется. Критические токи в таком компенсированном пучке экспериментально исследовались в работах ^{5, 9}, где

впервые было показано, что критический ток в компенсированном электронном пучке определяется развитием бунемановской (сопровождаемой возбуждением аксиально-симметричных мол колебаний) и токово-конвективной (с возбуждением аксиально-несимметричных неустойчивостей. Перехол моп) от первого вида неустойчивости ко второму сопровождается изменением зависимости критического тока от энергии пучка (рис. 3), заимствованный из работ 5, как это и предсказывается теорией, изложенной в гл. 5 (см. формулы (5,8), (5,11) и (5,14)).

Из графиков рис. З видно, что при малых энергиях $J_{\rm кp} \sim u^3 \sim \mathcal{E}^{3/2}$, а при больших $J_{\rm кp} \sim u^2 \sim \mathcal{E}^{3/2}$. Чем больше продольное магнитное поле, тем позже по энергии происходит переход от первого закона ко второму, что находится в полном соответствии с теорией.

Во введении уже отмечалось, что предпринятая в работе ⁹ попыт-

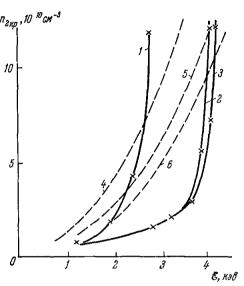


Рис. 5. Зависимость критической плотности плазмы от энергии пучка при $L=60\ cm$, $R=0.65\ cm$, $r_0=0.5\ cm$, $B_0=1200\ cc$. Экспериментальные кривые I-3 (сплошные линии) соответствуют току 0.13; 0.4 и $0.7\ a$. Штриховыми линиями представлены теоретические кривые.

ка сравнения теории с экспериментом является неудовлетворительной, так как она основана на теории устойчивости компенсированного электронного пучка по отношению к коротковолновым колебаниям, описываемым в приближении геометрической оптики ^{6,7} (см. также ⁸). Как показано в гл. 4 и 5 настоящего обзора, критические токи в электронных пучках определяются развитием длинноволновых колебаний. В связи с этим П. С. Стрелковым и А. Шкварунцом ³¹ были вновь проведены тщательные эксперименты по исследованию критических токов в компенсированных электронных пучках с целью сравнения экспериментальных результатов с развитой выше теорией. Проведенное ими сопоставление эксперимента с теорией показано на рис. 4. Видно, что теория не только качественно, но и количественно хорошо описывает эксперимент, что свидетельствует о правильности основ теории.

В заключение обсудим эксперименты по взаимодействию электронных пучков с более плотной плазмой $^{20,\ 27,\ 28},$ также проведенных

^{*)} Следует отметить, что все исследования предельных токов электронных пучков для рассматриваемой нами системы проводились лишь в области нерелятивистских энергий электронов. Эксперименты, описанные в 18 , отпосятся к иной системе; в частности, в них отсутствует внешнее удерживающее пучок продольное магнитное поле. В работах 5 , 9 , 20 , 27 , 28 также исследовались только нерелятивистские пучки.

Таблица I

Л. С. БОГДАНКЕВИЧ, А. А. РУХАДЗЕ

Цилиндрический пучок	Трубчатый пучок
$J_0 = \frac{17}{1 + 2 \ln (R/r_0)} (\gamma^{2/3} - 1)^{3/2}, \kappa a$	$J_0 = 17 \frac{R}{a} (\gamma^{2/3} - 1)^{3/2}, \ \kappa a$

Критические токи в компенсированных пучках

Цилиндриче	Цилиндрический пучок		
ln R/ro≪1	ln <i>R/r</i> 0≫1	Трубчатый пучок	
$\frac{L}{r_0} < \frac{\pi}{2,4} \sqrt{\frac{M}{m}} \gamma^{-3/2}$ $J_{\text{Rp}} = (2,4)^2 \frac{mu^3}{4e} \gamma^3$ $\frac{\pi}{2,4} \sqrt{\frac{M}{m}} \gamma^{-3/2} < \frac{L}{r_0} <$ $< \frac{2,4\pi u^2}{r_0^2 \cdot 2_e^2} \left(\frac{M}{m} \gamma\right)^{3/2}$ $J_{\text{Rp}} = \frac{2,4\pi mu^3}{4e} \frac{r_0}{L} \gamma^{3/2}$ $\frac{L}{r_0} > 2,4\pi \frac{u^2}{r_0^2 \cdot 2_e^2} \left(\frac{M}{m} \gamma\right)^{3/2}$ $J_{\text{Rp}} = \min \begin{cases} \frac{(2,4)^2 mu^3}{4e} \gamma^3 \\ \frac{mu}{4e} \frac{m}{M} r_0^2 \Omega_e^2 \end{cases}$	$L < \frac{2\pi u}{\Omega_{i}}$ $J_{\text{Kp}} = \min \begin{cases} \frac{mu^{3}}{4e} \frac{2}{\ln R/r_{0}} \gamma^{3} \\ \frac{mu^{3}}{e} \gamma^{3} \frac{l(l+1)}{1 + \frac{ul(l+1)L}{\pi\Omega_{e}r_{0}^{2}}} \gamma^{3} \\ \frac{mu}{4e} \frac{m}{M} r_{0}^{2} \Omega_{e}^{2} \end{cases}$ $L > \frac{2\pi u}{\Omega_{i}}$ $J_{\text{Kp}} = \min \begin{cases} \frac{mu^{3}}{4e} \frac{2}{\ln R/r_{0}} \gamma^{3} \\ \frac{mu}{4e} \Omega_{e} \frac{\pi u}{L} r_{0}^{2} \end{cases}$	$\frac{L}{a} < 2 \sqrt{\frac{M}{m}} \gamma^{-3/2}$ $J_{Rp} = J_1 = \frac{\pi^2}{2} \frac{R}{a} \frac{mu^3}{4e} \gamma^3$ $2 \sqrt{\frac{M}{m}} \gamma^{-3/2} < \frac{L}{a} < \frac{\pi u}{a\Omega_i}$ $J_{Rp} = \min \{J_1, J_2\}$ $J_2 = \max \begin{cases} \frac{\pi^2 mu^3}{4e} \frac{R}{L} \sqrt{\frac{M}{m}} \gamma^{3/2} \\ \frac{mu}{4e} \frac{m}{M} \Omega_c^2 2Ra \end{cases}$ $\frac{L}{a} > \frac{\pi u}{a\Omega_i}$ $J_{Rp} = \min \{J_1, J_2, J_3\}$ $J_3 = \frac{mu^3}{4e} \frac{M}{m} \frac{2\pi^2 Ra}{L^2}$	

Таблица II Критические плотности плазмы для перекомпенсированных пучков

ln <i>R/r</i> 0≪1	$\ln R/r_0 \gg 1$
$n_{2\text{Rp}} = \min \left\{ \begin{array}{l} \frac{(2,4)^2 u^2}{3 \cdot 10^9 r_0^2} \left\{ \left[1 + \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^{1/3} \times \right. \right. \\ \left. \times \frac{1}{\gamma} \right]^3 - \frac{(2,4)^2 u^2}{r_0^2 \Omega_e^2} \right\}^{-1} \\ \frac{\Omega_e^2}{3 \cdot 10^9} \left\{ 1 + \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^{1/3} \frac{1}{\gamma} \times \right. \\ \left. \times \left[1 - \frac{(2,4)^2 u^2}{r_0^2 \Omega_e^2} \right]^{-1/3} \right\}^{-3} \end{array} \right.$	$\frac{L}{r_0} < \frac{10^{-4} \Omega_e \gamma^{3/2}}{1 \cdot n_1} \ln (R r_0)$ $n_{2\text{Rp}} = \frac{u^2}{3 \cdot 10^9 r_0^2} \frac{2}{\ln R/r_0}$ $\times \left[1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{1/3} \frac{1}{\gamma} \right]^{-3}$
Трубчатый пучок	$\frac{10^{-4}\Omega_{e}}{\sqrt{n_{1}}}\gamma^{3/2} \ln R/r_{0} < \frac{L}{r_{0}} < 10^{-9} \frac{u\Omega_{e}}{n_{1}}$
$n_{2\text{Kp}} = \min \begin{cases} \frac{\pi^2}{4} \frac{u^2}{3 \cdot 10^9 a^2} \left\{ \left[1 + \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^{1/3} \times \frac{1}{\gamma} \right]^3 - \frac{\pi^2 u^2}{4\Omega_c^2 a^2} \right\}^{-1} \\ \frac{\Omega_c^2}{3 \cdot 10^9} \left\{ 1 + \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^{1/3} \times \frac{1}{\gamma} \left[1 + \frac{\pi^2 u^2}{4\Omega_c^2 a^2} \right]^{-1/3} \right\}^{-3} \end{cases}$	$\frac{n_{2\text{Kp}} = 4, 4 \cdot 10^{-14} u^2 \Omega_e \gamma^{3/2} \left(L r_0 \sqrt{n_1} \right)^{-1}}{\frac{L}{r_0} > 10^{-9} \frac{u \Omega_e}{n_1} > 10^{-4} \frac{\Omega_e \gamma^{3/2}}{\sqrt{n_1}} \ln \left(R r_0 \right)}$ $n_{2\text{Kp}} = 5 \cdot 10^{-5} \frac{u}{r_0} \sqrt{n_1} \gamma^{3/2}$

на установках, схематически представленных на рис. 2. В условиях, когда ток в электронном пучке меньше как критического тока компенсированного пучка, так и предельного тока некомпенсированного пучка (этого можно достичь путем соответствующего подбора накала катода), неустойчивости в системе на стадии нейтрализации не развиваются. Пучок, продолжая ионизовать остаточный газ в камере, создает плазму, плотность которой больше плотности электронов пучка $n_2\gg n_1$. При достижении плотности плазмы некоторого критического значения $n_{2\ \mathrm{kp}}$, как показано в гл. $6\ \mathrm{u}\ 7$ настоящего обзора, в системе развиваются высокочастотные пучковая и пучково-дрейфовая неустойчивости. Эти неустойчивости не могут привести к срыву тока (см. гл. 8) и экспериментально проявляются в виде мощного СВЧ излучения из плазмы и резкого роста ионизации газа под действием флуктуационных полей 20, 27, 28. По резкому возрастанию ионизации газа и определялась критическая плотность плазмы в работе 28. из которой заимствованы результаты, представленные на рис. 5. Видно, что зависимость $n_{2\ \mathrm{KD}}$ от энергии электронов при разных значениях продольного магнитного поля и тока пучка в условиях полного заполнения волновода плазмой хорошо описывается теоретическими формулами, полученными в гл. 7. При неполном заполнении волновода плазмой соответствие теории с экспериментом носит качественный характер 28.

Все описанные выше эксперименты относятся к цилиндрическим пучкам, проходящим по оси металлического волновода. Эксперименты с трубчатыми пучками в настоящее время только проводятся. Планируются также эксперименты с релятивистскими электронными пучками

с большими токами. Мы уверены, что эти эксперименты, так же как и описанные выше, приведут к новому успеху теории и откроют путь к получению сверхсильноточных электронных пучков большой мощности.

Физический институт им. П. Н. Лебедева AH CCCP

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- 1. Дж. Пирс, Теория и расчет электронных пучков, М., ИЛ, 1956. 2. J. R. Pierce, J. Appl. Phys. 15, 721 (1944).

- 3. Г. И. Будкер, Атомная энергия 1, 3 (1956). 4. О. Випетап, Phys. Rev. 115, 503 (1959). 5. М. В. Незлин, А. М. Солицев, ЖЭТФ 53, 437 (1967); М. В. Незлин, ЖЭТФ 53, 1180 (1967).
- 6. Л. С. Богданкевич, Е. Е. Ловецкий, А. А. Рухадзе, Ядерный синтез 6, 9, 176 (1966).
- 7. А. Б. Михайловский, ЖТФ 35, 1933, 1945 (1965).
- 8. М. Д. Райзер, А. А. Рухадзе, П. С. Стрелков, ЖЭТФ 38, 776 (1968). 9. М. В. Незлин, М. И. Тактакишвили, А. С. Трубников, ЖЭТФ 55, 397 (1968); М. В. Незлин, УФН 102, 105 (1970).
- 10. Л. С. Богданкевич, И. И. Желязков, А. А. Рухадзе, ЖЭТФ 57,
- 315 (1969); Int. J. Electronics 28, 441 (1970). 11. L P. S m i t h, P. L. H a r t m a n, J. Appl. Phys. 11, 220 (1940).
- 12. Г. И в и, Проблемы современной физики 6, 5 (1956).
- 13. R. J. Briggs, Electron-Stream Interaction with Plasma, Cambridge Mass., M. I. T. Press, 1964.
- 14. В. А. Годяк, Л. В. Дубовой, Г. Р. Заболоцкая, ЖЭТФ 57, 1795 (1969).
- Л. С. Богданкевич, А. А. Рухадзе, Краткие сообщения по физике, № 2, 37 (1970).
- 16. H. Alfven, Phys. Rev. 55, 425 (1939).
- 17. I. Lawson, J. Elect. and Control 3, 587 (1957); 5, 146 (1958); J. Nucl. Energy,
- Plasma Phys. 1, 31 (1959).

 18. D. Hammar, N. Rostoker. Propagation of High Current Relativistic Electron Beams, Cornell University, LPS 16, June 1969; Phys. Fluids 13, 1831 (1970).

 19. Л. С. Богданкевич, И. И. Желязков, А. А. Рухадзе, Изв. вузов
- (Радиофизика) 13, 21 (1970).
- 20. А. М. Райзер, А. А. Рухадзе, П. С. Стрелков, ЖЭТФ 53, 1891 (1967). 21. Я. Б. Файнберг, Атомная энергия 11, 313 (1961).
- 22. А.И. Ахиезер, И. А. Ахиезер, Р. В. Половин, А.Г. Ситенко, К. Н. Степанов, Коллективные колебания плазмы, М., Атомиздат, 1963.
 23. Ја. В. Fainberg, Czechosł. J. Phys. **B18**, 652 (1968).
 24. Я.Б. Файнберг, В. Д. Шапиро, В. И. Шевченко, ЖЭТФ 57, 966

- 25. Р. И. Ковтун, А. А. Рухадзе, ЖЭТФ 58, 1709 (1970). 26. В. Д. Шапиро, ЖЭТФ 44, 613 (1963). 27. А. К. Березин идр., Plasma Phys., and Contr. Nuclear Fusion, Int. Atom.
- Епегду Agency, Vienne 1966, v. 1, р. 515.
 28. Л. С. Богданкевич, М. Д. Райзер, А. А. Рухадзе, П. С. Стрел-ков, ЖЭТФ 58, 1219 (1970).
 29. Е. Е. Ловецкий, А. А. Рухадзе, ЖЭТФ 48, 514 (1965).
- 30. А. К. Березин, Я. Б. Файнберг и др., Атомная энергия 26, 256 (1969); Труды Международной конференции по управляемому термоядерному синтезу, т. 2, 723. Новосибирск, 1969.
- 31. А. Шкварунец, Дипломная работа (Физ. фак-т МГУ, 1970).