

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

539.12...172

**СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ И РАССЕЯНИЕ В СИСТЕМЕ  
ТРЕХ ЧАСТИЦ***А. Г. Ситенко, В. Ф. Харченко*

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение . . . . .	469
1. Нерелятивистская теория систем, состоящих из трех частиц . . . . .	474
2. Сепарабельное представление двухчастичной $t$ -матрицы . . . . .	486
3. Связанные состояния и рассеяние в системе трех одинаковых бесспиновых частиц . . . . .	500
4. Связанные состояния и рассеяние в системе трех нуклонов . . . . .	506
Цитированная литература . . . . .	524

## ВВЕДЕНИЕ

Основные трудности современной теории ядра связаны как с недостаточным знанием природы ядерного взаимодействия, так и с многочастичным характером ядерных систем. Изучение ядерного взаимодействия между нуклонами — простейшими составными частями ядер — является одной из центральных проблем теории ядра. Имеющиеся в настоящее время экспериментальные данные по ядерному взаимодействию не противоречат допущению о двухчастичном характере ядерных сил. Теория ядра — нерелятивистская теория и основывается на допущении, что ядерное взаимодействие между нуклонами можно описать с помощью потенциала, в общем случае зависящего от спинного и изоспинного состояния нуклонов.

Хотя ядерное взаимодействие между нуклонами является сильным, тем не менее система двух нуклонов имеет только одно связанное состояние — дейтрон, характеризующееся чрезвычайно малой энергией связи. В силу этого обстоятельства из имеющихся данных по рассеянию двух нуклонов в нерелятивистской области энергий оказывается невозможным однозначное определение потенциала. Для устранения неоднозначности в определении потенциала необходимо либо существенное уточнение экспериментальных данных по рассеянию нуклонов, либо привлечение других данных.

Можно ожидать, что изучение ядерных систем, состоящих из трех и большего числа нуклонов, окажется существенным источником получения добавочной информации о взаимодействии между нуклонами. Действительно, свойства системы двух нуклонов при энергиях, близких к нулю, можно объяснить силами с нулевым радиусом действия. Однако в случае сил нулевого радиуса действия энергия связи системы трех нуклонов оказывается бесконечно большой<sup>111</sup>. Поэтому сам факт существования ядер тритона и  $\text{He}^3$  указывает на то, что ядерные силы характеризуются конечным радиусом действия.

Данные по рассеянию нуклонов на нуклонах при малых энергиях ( $\leq 10$  Мэв) позволяют определить только эффективные параметры, характеризующие величину и радиус потенциала взаимодействия. Эти данные, однако, недостаточны для полного определения формы потенциала. В отличие от задачи двух нуклонов, задача о движении трех (или большего числа) нуклонов оказывается более чувствительной к форме двухнуклонного потенциала. Значительный интерес представляет возможность объяснения свойств трехнуклонных систем и систем, состоящих из большего числа нуклонов, на основе двухчастичных сил, определяемых из решения двухнуклонной задачи.

Данные о двухнуклонном взаимодействии можно получить из свойств ядер, содержащих больше двух нуклонов, для чего необходим расчет свойств таких ядер. По существу, этот расчет означает решение задачи многих тел; простейшим примером такой задачи является задача о движении трех частиц, строгая формулировка которой и доказательство существования решения были получены относительно недавно.

Из-за указанных трудностей свойства системы трех нуклонов и других малонуклонных ядер детально исследовались с помощью различных вариационных методов. За последние три десятка лет проведено значительное число вариационных расчетов с использованием различных потенциалов, согласующихся с данными по взаимодействию двух нуклонов<sup>12</sup>. В случае центральных сил значение энергии связи тритона оказалось сильно зависящим от вида потенциала и завышенным по сравнению с экспериментальным значением. Введение тензорных сил приводит к качественному улучшению согласия с экспериментом. Наиболее последовательные вариационные расчеты энергии связи и волновой функции тритона с использованием потенциала Хамады — Джонстона, учитывающего различные детали ядерного взаимодействия — отталкивание на малых расстояниях, тензорные и спин-орбитальные силы, — были произведены в недавней работе Делвза и др.<sup>58</sup> Значение энергии связи тритона, найденное в<sup>58</sup>, оказалось равным  $6,7 \pm 1,0$  Мэв. Вариационные методы использовались также для оценки длин рассеяния нейтрона на дейтроне. Вариационный метод Кона позволяет получить для длины рассеяния нейтрона на дейтроне верхнюю границу. Результаты расчетов, однако, существенно зависят от вида пробных функций, и поэтому точность получаемых значений невелика. Для потенциала Хамады — Джонстона с помощью вариационного метода в<sup>58</sup> найдено следующее значение дублетной длины рассеяния:  ${}^2A = 1,2 \pm 1,0$  фм.

С принципиальной точки зрения более интересными представляются расчеты, основанные на непосредственном решении уравнений движения системы трех нуклонов. За последнее десятилетие достигнут значительный прогресс в формулировке уравнений задачи трех частиц и в разработке методов решения таких уравнений.

Как показали Скорняков и Тер-Мартirosян<sup>28</sup>, задача о движении трех нуклонов в случае двухчастичных сил с нулевым радиусом действия сводится к решению одномерных интегральных уравнений. Если орбитальный момент системы трех нуклонов равен нулю, то при значении суммарного спина  $S = 3/2$  и изоспина  $T = 1/2$  имеется одно интегральное уравнение, а при  $S = 1/2$  и  $T = 1/2$  — два интегральных уравнения. Для квартетного спинового состояния трех нуклонов интегральное уравнение содержит только один двухчастичный параметр — триплетную длину рассеяния нуклона на нуклоне. В случае нулевой энергии падающего нейтрона в результате решения указанного уравнения в работе<sup>28</sup> удалось рассчитать квартетную длину рассеяния нейтрона на дейтроне, равную  ${}^4A = 5,1$  фм. Для дублетного спинового состояния системы трех

нуклонов интегральные уравнения содержат два двухчастичных параметра — триплетную и синглетную длины рассеяния. При этом однородная система уравнений, отвечающая связанному состоянию системы трех нуклонов, приводит к бесконечно большому значению энергии связи. Неоднородная же система уравнений, описывающая рассеяние нейтрона на дейтроне, не имеет однозначного решения. (Неоднозначность связана с существованием решения соответствующей однородной системы уравнений при любом значении энергии системы нейтрон плюс дейтрон.) Для устранения этой неоднозначности Данилов<sup>14</sup> ввел в задачу, кроме двухчастичных параметров, еще дополнительный параметр — энергию связи системы трех нуклонов. Таким путем в<sup>14</sup> удалось получить для дублетной длины рассеяния нейтрона на дейтроне значение  $^2A = 0,48$  фм, хорошо согласующееся с экспериментальным значением.

Формальная теория рассеяния и реакций в системе из трех частиц в случае двухчастичных сил с конечным радиусом действия была развита Фаддеевым<sup>30, 31</sup>. Хотя в формализме работы<sup>30</sup> не устранена основная трудность многочастичных задач, связанная с тем, что полный гамильтониан системы не распадается на сумму аддитивных слагаемых, зависящих от координат отдельных подсистем, однако в<sup>30</sup> путем разделения волновой функции системы трех частиц на отдельные слагаемые удалось получить для них систему интегральных уравнений, допускающую однозначное решение. Ядра полученных уравнений выражаются через двухчастичные амплитуды рассеяния вне энергетической поверхности. Существенным преимуществом уравнений Фаддеева по сравнению с известным уравнением Липпмана — Швингера является то, что их ядра могут быть приведены к фредгольмовскому виду и поэтому при решении указанных уравнений могут быть использованы известные методы. Обобщение интегральных уравнений Фаддеева на случай системы трех нуклонов с учетом спиновой и изоспиновой зависимости взаимодействия между нуклонами было проведено в работе<sup>107</sup>. Обобщение уравнений Фаддеева на случай произвольного числа частиц проведено в работах<sup>32, 39</sup>.

Техника суммирования нерелятивистских диаграмм Фейнмана для задачи трех тел была развита в работах Комарова и Поповой<sup>17</sup>.

Разложением волновой функции по угловым функциям и отделением угловых переменных уравнения Фаддеева для системы трех частиц преобразуются в общем случае к бесконечной системе двумерных интегральных уравнений. Если двухчастичный потенциал характеризуется конечным радиусом действия, то взаимодействие между каждой парой частиц проявляется только в конечном числе парциальных состояний. В этом случае из бесконечного числа двумерных интегральных уравнений необходимо учитывать только конечное число уравнений.

Задача значительно упрощается, если двухчастичная амплитуда рассеяния имеет сепарабельный вид. В этом случае указанная система двумерных интегральных уравнений сводится к системе одномерных интегральных уравнений<sup>34, 107</sup>. Двухчастичная амплитуда рассеяния имеет сепарабельный вид, если взаимодействие между частицами описывается нелокальным сепарабельным потенциалом (потенциал Ямагучи<sup>116</sup>). Сепарабельный потенциал учитывает конечность радиуса действия сил между нуклонами и позволяет в явном виде решить задачу о движении двух нуклонов. Такой потенциал является довольно хорошей аппроксимацией локального короткодействующего потенциала для системы двух частиц, если в системе возможно образование не более одного связанного состояния. Применение сепарабельного потенциала для описания двухчастичного взаимодействия позволило разработать технику расчета трехчастичных систем (см. <sup>27</sup>). В результате численного решения одномерных инте-

гральных уравнений в работе <sup>107</sup> были найдены энергия связи и волновая функция тритона, а также квартетная и дублетная длины рассеяния нейтрона нулевой энергии на дейтроне. Независимо задача трех нуклонов с использованием сепарабельного потенциала была рассмотрена Митрой <sup>93</sup>.

Расчеты с сепарабельными потенциалами указали на существенную зависимость энергии связи тритона и дублетной длины рассеяния нейтрона на дейтроне от формы потенциала, а также от величины синглетного эффективного радиуса взаимодействия между нуклонами. Изменение значения синглетного эффективного радиуса от 2,4 до 2,7 фм приводит к уменьшению энергии связи тритона примерно на 1 Мэв и к увеличению величины дублетной длины примерно на 0,7 фм. Квартетная длина рассеяния нейтрона на дейтроне оказалась нечувствительной к изменению формы двухчастичного взаимодействия, что связано с влиянием принципа Паули, препятствующего одновременному сближению на малые расстояния всех трех нуклонов.

Расчитанные значения дублетной и квартетной длин рассеяния нейтрона на дейтроне оказались близкими к одному из двух возможных экспериментальных наборов длин рассеяния, которые были известны в то время,  $^4A > ^2A$ . В дальнейшем экспериментальные измерения с использованием поляризованных нейтронов и дейтронов, выполненные Шапиро и др. <sup>45</sup>, подтвердили правильность этого набора.

Влияние тензорных сил на свойства системы трех нуклонов исследовано для сепарабельных потенциалов в работах <sup>26, 108, 78, 54, 94, 102</sup>. Оказалось, что примесь *D*-состояния с весом в 4% уменьшает энергию связи тритона примерно на 2 Мэв и увеличивает дублетную длину на величину больше 1 фм <sup>26</sup>.

Исследованию упругого рассеяния нейтрона на дейтроне при конечных энергиях, а также реакции расщепления дейтрона при взаимодействии с нейтроном посвящены работы Амадо и др. <sup>42, 40</sup> и Филлипса <sup>100, 101</sup>. Расчитанные дифференциальные сечения в случае сепарабельного потенциала хорошо согласуются с экспериментальными данными. Трехчастичная модель реакции срыва с сепарабельным потенциалом рассматривалась в работах <sup>43, 104</sup>.

Уравнения Фаддеева для системы трех частиц можно привести к одному виду и в том случае, когда взаимодействие сепарабельно хотя бы между двумя частицами. Взаимодействие с нулевым радиусом представляет частный случай сепарабельного. В работах Бая и др. <sup>9</sup> проведено исследование задачи трех тел в случае, если взаимодействие между двумя частицами характеризуется нулевым радиусом действия, а потенциал взаимодействия каждой из этих частиц с третьей бесконечно тяжелой частицей имеет вид прямоугольной ямы.

Задача о движении трех частиц, взаимодействие между которыми описывается локальными потенциалами, была рассмотрена на основе уравнений Фаддеева в последнее время в ряде работ. Отметим прежде всего работы, основанные на численном решении двумерных интегральных уравнений. Непосредственное решение двумерного однородного интегрального уравнения, описывающего связанное состояние трех тождественных бесспиновых частиц, было выполнено Осборном <sup>72</sup>. Заметим, что проведение подобных расчетов находится на грани возможностей современной вычислительной техники. Метод последовательных итераций двумерного интегрального уравнения был применен в работах Мэлфли и Тйона <sup>91</sup> для нахождения энергии связи и волновой функции тритона. Ими использован локальный потенциал, имеющий вид суперпозиции двух потенциалов Юкавы с отталкиванием на малых расстояниях. Энергия связи тритона оказалась равной 8,3 Мэв по сравнению со значением

12,1 Мэв, полученным в случае чисто притягивающего юкавского потенциала с теми же значениями низкоэнергетических параметров.

Двумерные интегральные уравнения задачи трех нуклонов можно свести к одномерным уравнениям, если воспользоваться сепарабельным представлением для двухчастичной амплитуды рассеяния, что эквивалентно сепарабельному разложению матричных элементов потенциала взаимодействия. В случае обычно используемых для феноменологического описания двухнуклонного взаимодействия потенциалов, не очень сингулярных на малых расстояниях и быстро убывающих на больших расстояниях, двухчастичная амплитуда рассеяния может быть хорошо аппроксимирована несколькими первыми членами разложения.

Было предложено несколько способов аппроксимации двухчастичной амплитуды рассеяния рядами с сепарабельными слагаемыми<sup>96, 86, 67, 103, 15, 87</sup>. В методе, основанном на использовании теоремы Гильберта — Шмидта для симметричных интегральных уравнений<sup>18</sup>, сепарабельное разложение двухчастичной амплитуды рассеяния вне энергетической поверхности выражается через собственные функции и собственные значения ядра интегрального уравнения Липпмана — Швингера. Впервые такое сепарабельное представление было использовано Вайнбергом<sup>115</sup> при устранении расходимости борновского ряда для двухчастичной амплитуды рассеяния. Фаддеевым было указано<sup>61</sup> на возможность использования метода Гильберта — Шмидта для решения задачи о движении трех частиц. В настоящее время указанный подход использован в ряде работ для решения как атомных, так и ядерных трехчастичных задач<sup>50, 65, 109, 76, 81, 49, 84</sup>. В случае притягивающих потенциалов каждый член сепарабельного разложения отвечает соответствующему сепарабельному потенциалу притяжения. Учет последующих членов в этом разложении означает введение более сильного притяжения. Поэтому учет дальнейших поправок в разложении Гильберта — Шмидта может изменить результаты расчета только в одном направлении (увеличить энергию связи тритона и уменьшить дублетную длину рассеяния). В случае потенциала прямоугольной формы двухчастичная амплитуда рассеяния хорошо аппроксимируется двумя членами разложения Гильберта — Шмидта. Расчеты с таким потенциалом позволили оценить вклад высших парциальных моментов в двухчастичном взаимодействии в значения энергии связи тритона и длин рассеяния нейтрона на дейтроне. Этот вклад оказался малым и составляет 0,2% для энергии связи тритона и 0,5% для дублетной длины<sup>37, 79</sup>. Энергия связи тритона и дублетная длина рассеяния нейтрона на дейтроне в случае прямоугольной ямы согласуются с экспериментальными значениями лучше по сравнению со значениями для потенциала Хюльтена, имеющего размытый край и сингулярность в нуле.

Разложение Гильберта — Шмидта для двухчастичной амплитуды рассеяния унитарно только при учете бесконечного числа слагаемых. Если использовать разложение матричных элементов потенциала по собственным функциям ядра уравнения Липпмана — Швингера при фиксированной энергии, то для двухчастичной амплитуды рассеяния получим сепарабельное разложение, унитарное при учете конечного числа слагаемых. Такое разложение под названием унитарного полюсного разложения было использовано Хармсом<sup>69</sup>. Унитарное полюсное разложение может служить обоснованием для использования сепарабельных потенциалов, поскольку учет первого члена такого разложения (унитарное полюсное приближение) эквивалентен введению сепарабельного потенциала Ямагучи.

Другой метод сепарабилизации двухчастичной амплитуды рассеяния, так называемый метод Бейтмана<sup>52, 16</sup>, основан на замене матричного

элемента потенциала суммой сепарабельных слагаемых, коэффициенты при которых подбираются так, чтобы сумма совпадала с матричным элементом при определенных значениях аргументов. Указанный метод применялся для решения задачи трех нуклонов Беляевым и др.<sup>1-3, 11</sup>. В работах<sup>3, 11</sup> были рассчитаны энергия связи, формфакторы и вес состояния промежуточной симметрии для тритона, а также длины рассеяния нейтрона на дейтроне в случае потенциала Морзе и потенциала, выбранного в виде суперпозиции юкавских потенциалов. Используемые потенциалы учитывали отталкивание на малых расстояниях и согласовывались с данными о взаимодействии двух нуклонов при малых и больших энергиях. Оказалось, что совокупность рассчитанных величин в случае суперпозиции юкавских потенциалов лучше согласуется с экспериментальными данными по сравнению с величинами, рассчитанными для потенциала Морзе.

В работах Симонова и Бадалян<sup>23, 7, 25</sup> предложен метод решения задачи о связанном состоянии системы трех нуклонов, основанный на разложении волновой функции по шестимерным угловым гармоникам и позволяющий свести задачу к решению системы одномерных дифференциальных уравнений. Построению полной системы базисных собственных функций для системы трех частиц посвящены работы Смородинского и др.<sup>20, 21</sup>. Филипповым и Овчаренко развит метод разложения по обратным степеням параметра взаимодействия, позволяющий рассчитать энергию связанных состояний системы трех нуклонов<sup>33</sup>.

В настоящем обзоре изложена нерелятивистская теория трехчастичных систем с парным взаимодействием. Изложение основано на формализме Фаддеева с использованием сепарабельного представления для двухчастичного взаимодействия. Рассмотрены связанные состояния и упругое рассеяние в системе трех одинаковых бесспиновых частиц и в системе трех нуклонов \*).

## 1. НЕРЕЛЯТИВИСТСКАЯ ТЕОРИЯ СИСТЕМ, СОСТОЯЩИХ ИЗ ТРЕХ ЧАСТИЦ

### 1.1. У р а в н е н и е Л и п п м а н а — Ш в и н г е р а

Рассмотрим квантовомеханическую систему, состоящую в общем случае из нескольких взаимодействующих частиц. Будем предполагать, что гамильтониан системы  $H$  можно разбить на две части:

$$H = H_0 + V, \quad (1,1)$$

где первое слагаемое  $H_0$  описывает невозмущенное движение системы, а второе слагаемое  $V$  — взаимодействие, исчезающее при достаточном удалении взаимодействующих частей системы друг от друга.

В стационарной формулировке задача о рассеянии сводится к нахождению решения уравнения Шрёдингера

$$(H - E)\Psi = 0 \quad (1,2)$$

с определенными граничными условиями ( $E$  — энергия системы). На бесконечности решение  $\Psi$  должно иметь вид суммы падающей волны  $\Phi$ ,

\*) В последнее время появился ряд обзоров<sup>27, 60, 92, 46, 59, 98</sup>, в которых обсуждаются результаты расчетов на основе интегральных уравнений Фаддеева для трехчастичных систем с нелокальным сепарабельным взаимодействием. В отличие от указанных работ, в настоящем обзоре рассмотрены свойства систем с локальным взаимодействием.

являющейся решением невозмущенного уравнения

$$(H_0 - E)\Phi = 0, \quad (1,3)$$

и расходящейся рассеянной волны.

Решение уравнения (1,2), удовлетворяющее указанным граничным условиям, можно представить в виде

$$\Psi = \Phi + G_0(E \pm i0)V\Psi, \quad (1,4)$$

где  $G_0(z)$  — функция Грина невозмущенного уравнения (1,3):

$$G_0(z) \equiv (z - H_0)^{-1}, \quad z = E \pm i0. \quad (1,5)$$

Правило обхода полюса в (1,5) соответствует выбору расходящейся рассеянной волны в асимптотике  $\Psi$ . Формальное решение уравнения Шрёдингера (1,4) является интегральным уравнением и обычно называется уравнением Липпмана — Швингера<sup>88</sup>.

Амплитуда вероятности перехода системы из состояния, асимптотически описываемого функцией  $\Phi$ , в состояние, описываемое функцией  $\Phi'$ , определяется выражением  $(\Phi', V\Psi)$  при  $E' = E$ .

Решение уравнения (1,4) можно выразить непосредственно через асимптотическую функцию  $\Phi$  при помощи функции Грина уравнения (1,2)

$$G(z) \equiv (z - H)^{-1}. \quad (1,6)$$

Функция Грина  $G(z)$  удовлетворяет уравнению

$$G(z) = G_0(z) + G_0(z)VG(z). \quad (1,7)$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что решение (1,4) может быть представлено в виде

$$\Psi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i\varepsilon G(E + i\varepsilon)\Phi. \quad (1,8)$$

Действительно, умножая уравнение (1,7) при  $z = E + i\varepsilon$  на  $i\varepsilon$ , применяя его к функции  $\Phi$  и замечая, что  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i\varepsilon G_0(E + i\varepsilon)\Phi = \Phi$ , получим (1,4).

Обычно при рассмотрении задачи о рассеянии используют оператор перехода  $T$ . Представим функцию Грина  $G(z)$  в виде

$$G(z) = G_0(z) + G_0(z)T(z)G_0(z); \quad (1,9)$$

тогда для оператора  $T(z)$  из (1,7) получим уравнение

$$T(z) = V + VG_0(z)T(z). \quad (1,10)$$

Это уравнение, вообще говоря, эквивалентно уравнению Липпмана — Швингера (1,4). Действительно, применяя операторное равенство (1,10) к  $\Phi$  и сравнивая получаемое уравнение с уравнением (1,4), домноженным слева на  $V$ , легко увидеть, что

$$T\Phi = V\Psi. \quad (1,11)$$

Согласно (1,11) амплитуда перехода системы из состояния  $\Phi$  в состояние  $\Phi'$  непосредственно определяется матричным элементом оператора  $T$ :

$$(\Phi', V\Psi) = (\Phi', T\Phi). \quad (1,12)$$

Решения уравнения Шрёдингера (1,2) при отрицательных значениях энергии относительного движения отвечают связанным состояниям системы. Уравнение Шрёдингера для связанных состояний системы может быть записано при помощи функции Грина (1,5) в виде однородного интегрального уравнения

$$\Psi = G_0(E + i0)V\Psi. \quad (1,13)$$

Уравнение Липпмана — Швингера (1,4) при наличии связанных состояний у системы в общем случае не имеет однозначных решений<sup>63</sup>. Действительно, даже для системы, состоящей из двух частиц, уровни энергии

$$E = \frac{K^2}{2M} + \varepsilon$$

( $K$  — полный импульс,  $M$  — полная масса и  $\varepsilon$  — энергия относительного движения) многократно вырождены, так как различным распределениям энергии между внутренним движением и движением системы как целого отвечают различные состояния. Поскольку наличие связанного состояния у системы означает существование при фиксированном значении  $E$  решения однородного уравнения (1,13), решение неоднородного уравнения (1,4) становится неоднозначным. Для системы, состоящей из двух частиц, уравнение Липпмана — Швингера допускает однозначное решение только при переходе в систему центра масс; в этом случае  $K = 0$  и вырождение по энергии снимается  $E = \varepsilon$ .

Аналогичная неоднозначность решений уравнений Липпмана — Швингера имеет место и для систем, состоящих из трех и большего числа частиц. Так как в этом случае, кроме связанного состояния всей системы, возможны связанные состояния для подсистем, состоящих из меньшего числа частиц, решения неоднородных уравнений Липпмана — Швингера всегда неоднозначны. Однозначное решение допускает только однородное уравнение в случае связанного состояния всей системы, рассматриваемой в системе центра масс.

Скорняковым и Тер-Мартirosяном на примере системы трех частиц с нулевым радиусом действия было показано<sup>28</sup>, что волновая функция системы может быть разбита на отдельные слагаемые, для которых получается зацепляющая система интегральных уравнений. Обобщение на случай систем трех частиц с произвольным радиусом действия было проведено Фаддеевым<sup>30, 31</sup>. В отличие от интегральных уравнений Липпмана — Швингера, получаемые интегральные уравнения допускают однозначное решение.

## 1.2. Уравнения Фаддеева

Метод получения интегральных уравнений для систем взаимодействующих частиц рассмотрим на примере системы трех нерелятивистских бесспиновых частиц. В качестве невозмущенного гамильтониана  $H_0$  выберем оператор кинетической энергии частиц; при этом взаимодействие  $V$  в случае двухчастичных сил представится в виде суммы трех слагаемых,

$$V = V_{12} + V_{23} + V_{31}, \quad (1,14)$$

где  $V_{ij}$  характеризует взаимодействие между частицами  $i$  и  $j$ , убывающее с ростом относительного расстояния между ними. Заметим, что ядро интегрального уравнения (1,10) в этом случае является сингулярным вследствие наличия дельта-функций, выражающих сохранение импульса частицы, не взаимодействующей с выделенной парой.

Оператор перехода системы  $T$  согласно (1,10) в случае двухчастичных сил (1,14) естественно представить также в виде суммы

$$T(Z) = T^{(1)}(Z) + T^{(2)}(Z) + T^{(3)}(Z), \quad (1,15)$$

где отдельные слагаемые удобно определить посредством равенств

$$T^{(h)}(Z) = V_{ij} + V_{ij}G_0(Z)T(Z), \quad ijk = 123, 231, 312 \quad (1,16)$$



( $Z = E + i0$ ,  $E$  — полная энергия трехчастичной системы). Представив оператор  $T(Z)$  в правых частях (1,16) в виде (1,15), соотношения (1,16) можно рассматривать как систему зацепляющих операторных уравнений, определяющую отдельные слагаемые (1,15). Отметим, что итерационный ряд для  $T^{(k)}(Z)$  из (1,16) содержит как сингулярные слагаемые (вида  $V_{23}G_0(Z) V_{23}$ ,  $V_{23}G_0(Z) V_{23}G_0(Z) V_{23}$  и т. д.), так и слагаемые, в которых дельта-функции устраняются промежуточным интегрированием (вида  $V_{23}G_0(Z) V_{31}$  и т. д.). Полученная система (1,16), очевидно, эквивалентна уравнению (1,40) и поэтому так же, как и уравнение Липшмана — Швингера, не имеет однозначного решения.

Для устранения неоднозначности перестроим систему (1,16), считая известными двухчастичные операторы  $T_{ij}$ . Определим операторы  $T_{ij}$  с помощью уравнения

$$T_{ij}(Z) = V_{ij} + V_{ij}G_0(Z) T_{ij}(Z), \tag{1,17}$$

которое получится из (1,10), если в последнем пренебречь взаимодействием частиц  $i$  и  $j$  с третьей частицей. Заметим, что правая часть уравнения (1,17) содержит все сингулярности уравнения (1,16), поэтому сингулярности в (1,16) можно исключить с помощью (1,17). Выделяя в (1,16) диагональную часть и обращая двухчастичный оператор  $[1 - V_{ij}G_0(Z)]$ , систему зацепляющихся уравнений для отдельных слагаемых оператора перехода  $T$  с помощью (1,17) перепишем в виде

$$T^{(k)}(Z) = T_{ij}(Z) + T_{ij}(Z)G_0(Z) [T^{(i)}(Z) + T^{(j)}(Z)], \quad ijk = 123, 231, 312. \tag{1,18}$$

Полученная система интегральных уравнений, в отличие от (1,16), имеет однозначное решение. Итерационный ряд для второго слагаемого правой части (1,18) не содержит сингулярностей. Поэтому система интегральных уравнений (1,18) может быть решена фредгольмовскими методами\*).

Учитывая связь между оператором перехода  $T$  и функцией Грина  $G$  (1,9), из (1,18) можно получить систему уравнений для  $G$ . В соответствии с разбиением (1,15) имеем

$$\left. \begin{aligned} G(Z) &= G_0(Z) + G^{(1)}(Z) + G^{(2)}(Z) + G^{(3)}(Z), \\ G^{(i)}(Z) &= G_0(Z) T^{(i)}(Z) G_0(Z), \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \right\} \tag{1,19}$$

При этом функции  $G^{(i)}$  удовлетворяют уравнениям

$$G^{(k)}(Z) = G_{ij}(Z) - G_0(Z) + G_0(Z) T_{ij}(Z) [G^{(i)}(Z) + G^{(j)}(Z)], \quad ijk = 123, 231, 312, \tag{1,20}$$

где

$$G_{ij}(Z) = G_0(Z) + G_0(Z) T_{ij}(Z) G_0(Z).$$

На основе (1,20) с помощью (1,8) нетрудно получить соответствующие уравнения для нахождения волновой функции системы  $\Psi$ .

В системе трех взаимодействующих частиц возможно как инфинитное движение всех трех частиц, так и инфинитное движение отдельной частицы относительно двух других частиц, находящихся в связанном состоянии. Соответствующие асимптотические волновые функции системы обозначим через  $\Phi_{123}$  и  $\Phi_i$ , где  $i = 1, 2$  или  $3$ . (Индексы возле функции указывают номера несвязанных частиц в системе. Все частицы предполагаются различными.)

\*) Обобщение уравнений Фаддеева на случай произвольного числа частиц было проведено в работах <sup>32, 39</sup>.

Применяя уравнения (1,20), домноженные на  $i\varepsilon$ , к функции  $\Phi_{123}$  и учитывая (1,8), для нахождения волновой функции системы в случае несвязанного движения всех трех частиц  $\Psi_{123}$  получим следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \Psi_{123} &= \Phi_{123} + \Psi_{123}^{(1)} + \Psi_{123}^{(2)} + \Psi_{123}^{(3)}, \\ \Psi_{123}^{(1)} &= \Phi_{1(23)} - \Phi_{123} + G_0(Z) T_{23}(Z) [\Psi_{123}^{(2)} + \Psi_{123}^{(3)}], \\ \Psi_{123}^{(2)} &= \Phi_{2(31)} - \Phi_{123} + G_0(Z) T_{31}(Z) [\Psi_{123}^{(3)} + \Psi_{123}^{(1)}], \\ \Psi_{123}^{(3)} &= \Phi_{3(12)} - \Phi_{123} + G_0(Z) T_{12}(Z) [\Psi_{123}^{(1)} + \Psi_{123}^{(2)}], \quad Z = E + i0. \end{aligned} \right\} (1,21)$$

где  $\Phi_{1(23)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i\varepsilon G_{23}(E + i\varepsilon) \Phi_{123}$  и т. д. Функции  $\Phi_{1(23)}$  отличаются от  $\Phi_{123}$  учетом взаимодействия между частицами 2 и 3. Нетрудно убедиться, что разность  $\Phi_{1(23)} - \Phi_{123}$  представляет собой расходящуюся волну на больших расстояниях по относительной координате между частицами 2 и 3.

В случае рассеяния отдельной частицы на двух других частицах, находящихся в связанном состоянии, для нахождения волновой функции системы  $\Psi_1$  (при рассеянии частицы 1 на связанном состоянии частиц 2 и 3) можно получить уравнения

$$\left. \begin{aligned} \Psi_1 &= \Psi_1^{(1)} + \Psi_1^{(2)} + \Psi_1^{(3)}, \\ \Psi_1^{(1)} &= \Phi_1 + G_0(Z) T_{23}(Z) [\Psi_1^{(2)} + \Psi_1^{(3)}], \\ \Psi_1^{(2)} &= G_0(Z) T_{31}(Z) [\Psi_1^{(3)} + \Psi_1^{(1)}], \\ \Psi_1^{(3)} &= G_0(Z) T_{12}(Z) [\Psi_1^{(1)} + \Psi_1^{(2)}], \quad Z = E + i0. \end{aligned} \right\} (1,22)$$

Аналогичные системы уравнений имеют место для функций  $\Psi_2$  и  $\Psi_3$ .

Система трех интегральных уравнений (1,22) может быть сведена к системе двух интегральных уравнений для функций  $\Psi_1^{(I)} \equiv \Psi_1^{(1)}$  и  $\Psi_1^{(II)} \equiv \Psi_1^{(2)} + \Psi_1^{(3)}$ . Нетрудно проверить, что функции  $\Psi^{(I)}$  и  $\Psi^{(II)}$  удовлетворяют уравнениям

$$\Psi_1^{(I)} = \Phi_1 + G_0(Z) T_{23}(Z) \Psi_1^{(II)}, \quad \Psi_1^{(II)} = G_0(Z) T_1(Z) \Psi_1^{(I)}, \quad (1,23)$$

где оператор  $T_1$  описывает рассеяние отдельной частицы на двух других в отсутствие взаимодействия между ними:

$$T_1(Z) = V_1 + V_1 G_0(Z) T_1(Z), \quad V_1 = V_{12} + V_{13}. \quad (1,24)$$

Заметим, что как в случае инфинитного движения всех частиц, так и в случае рассеяния отдельной частицы на двух других в связанном состоянии имеем неоднородную систему интегральных уравнений, допускающую однозначное решение. Интегральные уравнения для системы трех частиц (1,21) и (1,22) получены Фаддеевым<sup>30</sup>. Интегральные уравнения (1,23) получены в работе Базя и др.<sup>9</sup>. Существенным преимуществом уравнений Фаддеева по сравнению с уравнениями Липпмана — Швингера является то, что ядра интегральных уравнений Фаддеева являются фредгольмовскими, поэтому при решении указанных уравнений могут быть использованы известные методы.

В случае связанного состояния всей системы для нахождения волновой функции  $\Psi_0$  аналогичным образом может быть получена следующая однородная система интегральных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \Psi_0 &= \Psi_0^{(1)} + \Psi_0^{(2)} + \Psi_0^{(3)}, \\ \Psi_0^{(1)} &= G_0(Z) T_{23}(Z) [\Psi_0^{(2)} + \Psi_0^{(3)}], \\ \Psi_0^{(2)} &= G_0(Z) T_{31}(Z) [\Psi_0^{(3)} + \Psi_0^{(1)}], \\ \Psi_0^{(3)} &= G_0(Z) T_{12}(Z) [\Psi_0^{(1)} + \Psi_0^{(2)}]. \end{aligned} \right\} (1,25)$$

Однородная система уравнений (1,25) имеет решения только при энергиях, соответствующих связанным состояниям системы. В системе центра масс эта энергия отрицательна ( $E < 0$ ). Заметим, что система уравнений (1,25) формально может быть получена из системы уравнений (1,22), если в последней положить  $\Phi_1 = 0$ .

1.3. Координаты и импульсы  
в системе из трех частиц

Обозначим массы трех частиц через  $m_1, m_2$  и  $m_3$ ; соответственно радиусы-векторы и импульсы частиц обозначим через  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$  и  $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$ . При описании относительного движения в системе, состоящей из трех частиц, удобно выбрать координаты Якоби

$$\boldsymbol{\rho}_1 = \mathbf{r}_1 - \frac{m_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3}{m_2 + m_3}, \quad \mathbf{r}_{23} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3, \quad \mathbf{R} = \frac{1}{M} (m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3), \quad (1,26)$$

где  $M = m_1 + m_2 + m_3$  — полная масса системы. Взамен относительных координат  $\boldsymbol{\rho}_1$  и  $\mathbf{r}_{23}$  можно использовать относительные  $\boldsymbol{\rho}_2$  и  $\mathbf{r}_{31}$  или  $\boldsymbol{\rho}_3$  и  $\mathbf{r}_{12}$ . Соответственно удобно ввести импульсы Якоби

$$\mathbf{p}_1 = \frac{(m_2 + m_3) \mathbf{k}_1 - m_1 (\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3)}{M}, \quad \mathbf{k}_{23} = \frac{m_3 \mathbf{k}_2 - m_2 \mathbf{k}_3}{m_2 + m_3}, \quad \mathbf{K} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3. \quad (1,27)$$

Взамен относительных импульсов  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{k}_{23}$  можно выбрать  $\mathbf{p}_2$  и  $\mathbf{k}_{31}$  или  $\mathbf{p}_3$  и  $\mathbf{k}_{12}$ .

Оператор кинетической энергии системы в координатах Якоби  $\mathbf{r}_{23}, \boldsymbol{\rho}_1$  и  $\mathbf{R}$  запишется в виде

$$H_0 = -\frac{1}{2\mu_{23}} \Delta_{23} - \frac{1}{2\mu_1} \Delta_1 - \frac{1}{2M} \Delta, \quad (1,28)$$

где  $\mu_{23} = \frac{m_2 m_3}{m_2 + m_3}$  и  $\mu_1 = \frac{m_1 (m_2 + m_3)}{M}$  — приведенные массы. В импульсном представлении  $H_0$  имеет вид

$$H_0 = \frac{k_{23}^2}{2\mu_{23}} + \frac{p_1^2}{2\mu_1} + \frac{K^2}{2M}. \quad (1,29)$$

Приведем явные выражения для асимптотических функций. Будем обозначать начальные значения импульсов индексами нуль. Асимптотическая функция  $\Phi_{123}$ , описывающая свободное движение всех частиц, может быть записана в виде

$$\Phi_{123} = e^{i\mathbf{p}_1^0 \boldsymbol{\rho}_1 + i\mathbf{k}_{23}^0 \mathbf{r}_{23} + i\mathbf{K}^0 \mathbf{R}}, \quad E_{123} = \frac{p_1^{02}}{2\mu_1} + \frac{k_{23}^{02}}{2\mu_{23}} + \frac{K^{02}}{2M}. \quad (1,30)$$

Отметим, что функция  $\Phi_{123}$  инвариантна относительно замены координат Якоби. Асимптотическая функция  $\Phi_1$  имеет вид

$$\Phi_1 = e^{i\mathbf{p}_1^0 \boldsymbol{\rho}_1 + i\mathbf{K}^0 \mathbf{R}} \Phi_{\kappa_{23}}(\mathbf{r}_{23}), \quad E_1 = \frac{p_1^{02}}{2\mu_1} - \frac{\kappa_{23}^2}{2\mu_{23}} + \frac{K^{02}}{2M}, \quad (1,31)$$

где  $\Phi_{\kappa_{23}}(\mathbf{r}_{23})$  является решением уравнения

$$\left( -\frac{1}{2\mu_{23}} \Delta_{23} + V_{23} - \varepsilon_{23} \right) \Phi_{\kappa_{23}}(\mathbf{r}_{23}) = 0 \quad (1,32)$$

при отрицательном значении энергии относительного движения  $\varepsilon_{23} = -\frac{\kappa_{23}^2}{2\mu_{23}}$ , т. е. функцией, описывающей связанное состояние системы

частиц 2 и 3. Асимптотическая функция  $\Phi_{1(23)}$  запишется в виде

$$\Phi_{1(23)} = e^{i\mathbf{p}_1^0 \mathbf{r}_1 + i\mathbf{k}^0 \mathbf{R}} \Phi_{\mathbf{k}_{23}^0}(\mathbf{r}_{23}), \quad E_{1(23)} = E_{123}, \quad (1,33)$$

где  $\Phi_{\mathbf{k}_{23}^0}(\mathbf{r}_{23})$  — решение уравнения (1,32) при  $\varepsilon_{23} = \frac{k_{23}^0{}^2}{2\mu_{23}} > 0$ , имеющее на бесконечности вид суммы плоской волны и расходящейся сферической волны.

#### 1.4. Импульсное представление

Интегральные уравнения Фаддеева имеют наиболее простой вид в импульсном представлении. Каждую из составляющих волновой функции системы  $\Psi^{(i)}$  удобно представлять в виде функции соответствующего набора координат:

$$\Psi^{(i)} \equiv \Psi^{(i)}(\mathbf{r}_{jk}, \mathbf{p}_i, \mathbf{R}), \quad ijk = 123, 231, 312. \quad (1,34)$$

В импульсном представлении функцию  $\Psi^{(i)}$  определим посредством равенства

$$\Psi^{(i)}(\mathbf{k}_{jk}, \mathbf{p}_i, \mathbf{K}) = \int e^{-i\mathbf{k}_{jk}\mathbf{r}_{jk} - i\mathbf{p}_i\mathbf{r}_i - i\mathbf{K}\mathbf{R}} \Psi^{(i)}(\mathbf{r}_{jk}, \mathbf{p}_i, \mathbf{R}) d\mathbf{r}_{jk} d\mathbf{p}_i d\mathbf{R}. \quad (1,35)$$

Поскольку оператор кинетической энергии в импульсном представлении является оператором умножения, функция Грина  $G_0(Z)$  в импульсном представлении диагональна. Оператор двухчастичного рассеяния  $T_{jk}(Z)$  диагонален в представлении полного импульса системы и импульса свободной частицы  $\mathbf{p}_i$ :

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{k}_{jk} \mathbf{p}_i \mathbf{K} | T_{jk}(Z) | \mathbf{k}'_{jk} \mathbf{p}'_i \mathbf{K}' \rangle = \\ & = (2\pi)^6 \langle \mathbf{k}_{jk} | t_{jk} \left( Z - \frac{p_i^2}{2\mu_i} - \frac{K^2}{2M} \right) | \mathbf{k}'_{jk} \rangle \delta(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}'_i) \delta(\mathbf{K} - \mathbf{K}'), \end{aligned} \quad (1,36)$$

где  $t_{ij}(z)$  — двухчастичная  $t$ -матрица, определяемая интегральным уравнением

$$t(z) = V + V(z - H_0)^{-1}t(z),$$

или

$$\langle \mathbf{k} | t(z) | \mathbf{k}' \rangle = \langle \mathbf{k} | V | \mathbf{k}' \rangle + \int \frac{\langle \mathbf{k} | V | \mathbf{q} \rangle \langle \mathbf{q} | t(z) | \mathbf{k}' \rangle d\mathbf{q}}{z - \frac{q^2}{2\mu}}, \quad z = \varepsilon + i0 \quad (1,37)$$

( $\varepsilon$  — энергия относительного движения двух частиц,  $\mu$  — приведенная масса). Уравнение (1,37) в общем случае определяет  $t$ -матрицу вне энергетической поверхности  $\left( \frac{k^2}{2\mu} \neq \frac{k'^2}{2\mu} \neq \varepsilon \right)$ . Напомним, что амплитуда упругого рассеяния частиц выражается через  $t$ -матрицу на энергетической поверхности:

$$f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = -\frac{\mu}{2\pi} \langle \mathbf{k} | t(\varepsilon + i0) | \mathbf{k}' \rangle, \quad \varepsilon = \frac{k^2}{2\mu} = \frac{k'^2}{2\mu}. \quad (1,38)$$

Двухчастичная  $t$ -матрица  $\langle \mathbf{k} | t(z) | \mathbf{k}' \rangle$  в плоскости комплексных энергий  $z$  имеет особенности, а именно — полюсы, соответствующие дискретному спектру, и разрез вдоль положительной части вещественной оси, порождаемый непрерывным спектром системы двух частиц. Явный вид указанных особенностей можно получить из так называемого

спектрального представления  $t$ -матрицы<sup>89</sup>:

$$\langle \mathbf{k} | t(z) | \mathbf{k}' \rangle = \langle \mathbf{k} | V | \mathbf{k}' \rangle + \sum_N \frac{g_N(\mathbf{k}) g_N(\mathbf{k}')}{z + (\kappa_N^2/2\mu)} + \\ + \int \frac{\langle \mathbf{k} | t \left( \frac{q^2}{2\mu} + i0 \right) | \mathbf{q} \rangle \langle \mathbf{q} | t \left( \frac{q^2}{2\mu} - i0 \right) | \mathbf{k}' \rangle}{z - (q^2/2\mu)} \frac{dq}{(2\pi)^3}, \quad (1,39)$$

где  $g_N(\mathbf{k}) = (k^2 + \kappa_N^2/2\mu) \varphi_N(\mathbf{k})$ ,  $N = \{n, l, m\}$ , а  $\kappa_N^2/2\mu$  и  $\varphi_N(\mathbf{k}) \equiv \varphi_{nl}(k) Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}})$  — энергия связи и волновая функция связанного состояния двух частиц в импульсном представлении  $\left( \int \varphi_N^2(\mathbf{k}) \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} = 1 \right)$ .

Так как все операторы, входящие в уравнения Фаддеева, диагональны в  $\mathbf{K}$ -представлении, волновая функция  $\Psi$  будет содержать множитель  $\delta(\mathbf{K} - \mathbf{K}^0)$ , выражающий собой закон сохранения полного импульса системы. Поэтому переходом к системе центра масс все зависимости от  $\mathbf{K}$  можно полностью исключить из рассмотрения.

В качестве примера рассмотрим в импульсном представлении систему интегральных уравнений Фаддеева (1,22) в случае рассеяния частицы на двух других частицах, находящихся в связанном состоянии:

$$\Psi_1 = \Psi_1^{(1)}(\mathbf{k}_{23}, \mathbf{p}_1) + \Psi_1^{(2)}(\mathbf{k}_{31}, \mathbf{p}_2) + \Psi_1^{(3)}(\mathbf{k}_{12}, \mathbf{p}_3), \quad (1,40)$$

$$\Psi_1^{(1)}(\mathbf{k}, \mathbf{p}) = \Phi_1(\mathbf{k}, \mathbf{p}) + \left( Z - \frac{k^2}{2\mu_{23}} - \frac{p^2}{2\mu_1} \right)^{-1} \times \\ \times \int \left[ \langle \mathbf{k} | t_{23} \left( Z - \frac{p^2}{2\mu_1} \right) | \frac{m_2}{m_2+m_3} \mathbf{p} + \mathbf{p}' \rangle \Psi_1^{(2)} \left( -\mathbf{p} - \frac{m_1}{m_3+m_1} \mathbf{p}', \mathbf{p}' \right) + \right. \\ \left. + \langle \mathbf{k} | t_{23} \left( Z - \frac{p^2}{2\mu_1} \right) | -\frac{m_3}{m_2+m_3} \mathbf{p} - \mathbf{p}' \rangle \Psi_1^{(3)} \left( \mathbf{p} + \frac{m_1}{m_1+m_2} \mathbf{p}', \mathbf{p}' \right) \right] \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^3},$$

$$\Psi_1^{(2)}(\mathbf{k}, \mathbf{p}) = \left( Z - \frac{k^2}{2\mu_{31}} - \frac{p^2}{2\mu_2} \right)^{-1} \times \\ \times \int \left[ \langle \mathbf{k} | t_{31} \left( Z - \frac{p^2}{2\mu_2} \right) | \frac{m_3}{m_3+m_1} \mathbf{p} + \mathbf{p}' \rangle \Psi_1^{(3)} \left( -\mathbf{p} - \frac{m_2}{m_1+m_2} \mathbf{p}', \mathbf{p}' \right) + \right. \\ \left. + \langle \mathbf{k} | t_{31} \left( Z - \frac{p^2}{2\mu_2} \right) | -\frac{m_1}{m_3+m_1} \mathbf{p} - \mathbf{p}' \rangle \Psi_1^{(1)} \left( \mathbf{p} + \frac{m_2}{m_2+m_3} \mathbf{p}', \mathbf{p}' \right) \right] \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^3},$$

$$\Psi_1^{(3)}(\mathbf{k}, \mathbf{p}) = \left( Z - \frac{k^2}{2\mu_{12}} - \frac{p^2}{2\mu_3} \right)^{-1} \times \\ \times \int \left[ \langle \mathbf{k} | t_{12} \left( Z - \frac{p^2}{2\mu_3} \right) | \frac{m_1}{m_1+m_2} \mathbf{p} + \mathbf{p}' \rangle \Psi_1^{(1)} \left( -\mathbf{p} - \frac{m_3}{m_2+m_3} \mathbf{p}', \mathbf{p}' \right) + \right. \\ \left. + \langle \mathbf{k} | t_{12} \left( Z - \frac{p^2}{2\mu_3} \right) | -\frac{m_2}{m_1+m_2} \mathbf{p} - \mathbf{p}' \rangle \Psi_1^{(2)} \left( \mathbf{p} + \frac{m_3}{m_3+m_1} \mathbf{p}', \mathbf{p}' \right) \right] \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^3},$$

$$Z \equiv \frac{p_1^2}{2\mu_1} - \frac{\kappa_{23}^2}{2\mu_{23}} + i0.$$

Функция  $\Phi_1(\mathbf{k}_{23}, \mathbf{p}_1)$  согласно (1,31) равна

$$\Phi_1(\mathbf{k}_{23}, \mathbf{p}_1) \equiv (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1^0) \varphi_{\kappa_{23}}(\mathbf{k}_{23}), \quad (1,41)$$

где  $\varphi_{\kappa_{23}}(\mathbf{k}_{23})$  — волновая функция связанного состояния двух частиц с энергией связи  $\kappa_{23}^2/2\mu_{23}$  и  $\mathbf{p}_1^0$  — импульс относительного движения системы в начальном состоянии.

Если все три частицы одинаковы и имеют равные нулю спин и изотопический спин, то полная волновая функция системы  $\Psi$  должна быть симметричной относительно перестановки любой пары частиц; в этом случае

$$\Psi^{(1)}(\mathbf{k}, \mathbf{p}) = \Psi^{(2)}(\mathbf{k}, \mathbf{p}) = \Psi^{(3)}(\mathbf{k}, \mathbf{p}) \equiv \psi(\mathbf{k}, \mathbf{p}).$$

Поэтому волновая функция может быть представлена в виде

$$\Psi = \psi(\mathbf{k}_{23}, \mathbf{p}_1) + \psi(\mathbf{k}_{31}, \mathbf{p}_2) + \psi(\mathbf{k}_{12}, \mathbf{p}_3), \quad (1,42)$$

где  $\psi(-\mathbf{k}, \mathbf{p}) = \psi(\mathbf{k}, \mathbf{p})$ . Взамен системы уравнений (1,40) в этом случае мы получим одно интегральное уравнение для функции  $\psi(\mathbf{k}, \mathbf{p})$ :

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{k}, \mathbf{p}) = & \varphi(\mathbf{k}, \mathbf{p}) + \left( Z - \frac{k^2}{m} - \frac{3}{4} \frac{p^2}{m} \right)^{-1} \int \left\{ \langle \mathbf{k} | t \left( Z - \frac{3}{4} \frac{p^2}{m} \right) \left| \frac{\mathbf{p}}{2} + \mathbf{p}' \right\rangle + \right. \\ & \left. + \langle \mathbf{k} | t \left( Z - \frac{3}{4} \frac{p^2}{m} \right) \left| -\frac{\mathbf{p}}{2} - \mathbf{p}' \right\rangle \right\} \psi \left( \mathbf{p} + \frac{\mathbf{p}'}{2}, \mathbf{p}' \right) \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^3}, \quad (1,43) \end{aligned}$$

где  $\varphi(\mathbf{k}, \mathbf{p})$  — функция, через которую путем симметризации выражается начальная волновая функция системы:

$$\Phi = \varphi(\mathbf{k}_{23}, \mathbf{p}_1) + \varphi(\mathbf{k}_{31}, \mathbf{p}_2) + \varphi(\mathbf{k}_{12}, \mathbf{p}_3).$$

В случае связанного состояния трех частиц  $\varphi = 0$ ,  $Z = E < 0$ ; в случае рассеяния частицы на двух других частицах, находящихся в связанном состоянии, функция  $\varphi(\mathbf{k}, \mathbf{p})$  определяется выражением вида (1,41).

Интегральное уравнение (1,43) определяет волновую функцию системы, зависящую в общем случае от шести переменных (двух относительных векторов). Путем разложения волновой функции по угловым функциям и отделения угловых переменных трехмерное интегральное уравнение (1,43) в случае центрального взаимодействия между частицами может быть сведено к системе двумерных интегральных уравнений <sup>44, 99, 114</sup>.

### 1.5. Разложение по парциальным волнам

Предполагая, что взаимодействие между частицами является центральным, двухчастичный потенциал удобно разложить по парциальным составляющим,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k} | V | \mathbf{k}' \rangle = & \sum_l (2l+1) V_l(k, k') P_l(\cos \theta) = \\ = & 4\pi \sum_{lm} V_l(k, k') Y_{lm}(\hat{k}) Y_{lm}^*(\hat{k}'), \quad (1,44) \end{aligned}$$

где  $Y_{lm}(\hat{k})$  и  $Y_{lm}(\hat{k}')$  — сферические функции от углов, характеризующих направления векторов  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}'$ ;  $\theta$  — угол между векторами  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}'$ . Отдельные слагаемые в (1,44) описывают взаимодействие между частицами в состояниях с определенными значениями орбитального момента  $l$ . Аналогичные разложения удобно провести также в выражениях для  $t$ -матрицы и для амплитуды рассеяния

$$\langle \mathbf{k} | t(z) | \mathbf{k}' \rangle = \sum_l (2l+1) t_l(k, k'; z) P_l(\cos \theta), \quad (1,45)$$

$$f(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \sum_l (2l+1) f_l(k) P_l(\cos \theta). \quad (1,46)$$

Из (1,37) нетрудно получить следующее интегральное уравнение для нахождения парциальной составляющей  $t$ -матрицы:

$$t_l(z) = V_l + V_l(z - H_0)^{-1} t_l(z) \quad (1,47)$$

или

$$t_l(k, k'; z) = V_l(k, k') + \frac{1}{2\pi^2} \int dq q^2 V_l(k, q) \frac{1}{z - (q^2/2\mu)} t_l(q, k'; z). \quad (1,48)$$

Парциальная амплитуда рассеяния  $f_l(k) = (1/k) e^{i\delta_l} \sin \delta_l$  ( $\delta_l$  — фаза рассеяния на бесконечности) связана с парциальной составляющей  $t$ -матрицы соотношением

$$f_l(k) = -\frac{\mu}{2\pi} t_l\left(k, k; \frac{k^2}{2\mu} + i0\right). \quad (1,49)$$

В случае системы трех одинаковых частиц введем орбитальный момент относительного движения двух частиц  $\mathbf{l}$  и орбитальный момент относительного движения третьей частицы и центра масс двух других частиц  $\lambda$ . Очевидно, полный момент системы  $\mathbf{L}$  равен векторной сумме  $\mathbf{l}$  и  $\lambda$ :

$$\mathbf{L} = \mathbf{l} + \lambda.$$

Соответствующая волновая функция, описывающая состояние системы с полным моментом  $\mathbf{L}$ , может быть выбрана в виде

$$Y_{l\lambda LM}(\hat{k}, \hat{p}) = \sum_{m\mu} (l\lambda m\mu | LM) Y_{lm}(\hat{k}) Y_{\lambda\mu}(\hat{p}). \quad (1,50)$$

Функции  $Y_{l\lambda LM}$  образуют полную систему ортонормированных функций.

Волновая функция системы трех частиц  $\psi(\mathbf{k}, \mathbf{p})$  зависит не только от векторов  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{p}$ , но и от вектора относительного импульса системы в начальном состоянии  $\mathbf{p}_0$ . Предположим, что момент количества движения связанного состояния системы двух частиц, на которой рассеивается третья частица, равен нулю ( $l_0 = 0$ ). Тогда в силу скалярного характера волновой функции  $\psi(\mathbf{k}, \mathbf{p})$  разложение этой функции по функциям (1,50) имеет вид

$$\psi(\mathbf{k}, \mathbf{p}) \equiv \psi(\mathbf{k}, \mathbf{p}; \mathbf{p}_0) = \sum_{l\lambda LM} \psi_{l\lambda L}(k, p; p_0) Y_{l\lambda LM}(\hat{k}, \hat{p}) Y_{LM}^*(\hat{p}_0). \quad (1,51)$$

Подставляя разложения (1,51) и (1,45) в (1,43) и используя ортонормировку функций (1,50), для коэффициентов разложения  $\psi_{l\lambda L}$  получим следующую систему интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} \psi_{l\lambda L}(k, p; p_0) &= (2\pi)^3 \varphi_{l_0}(k) \delta_{l_0} \delta_{\lambda L} \frac{\delta(p - p_0)}{p^2} + \\ &+ 2\Delta_l \left(Z_p - \frac{k^2}{m}\right)^{-1} \sum_{l'\lambda'} \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dp' \int_{\left|p - \frac{p'}{2}\right|}^{p + \frac{p'}{2}} dk' \frac{k' p'}{p} \times \\ &\times t_l(k, Q; Z_p) K_{l\lambda, l'\lambda'}^{(L)}(p, p'; k') \psi_{l'\lambda' L}(k', p'; p_0), \end{aligned} \quad (1,52)$$

где  $\Delta_l = \frac{1}{2} \{1 + (-1)^l\}$ ,  $Q^2 = k^2 + \frac{3}{4} p'^2 - \frac{3}{4} p^2$  и

$$\begin{aligned} K_{l\lambda, l'\lambda'}^{(L)}(p, p'; k') &\equiv 2 \int d\mathbf{o}_p d\mathbf{o}_{p'} Y_{l\lambda L_0}^* \left(\widehat{\frac{p}{2} + p', \hat{p}}\right) \times \\ &\times \delta \left\{ \cos \theta - \frac{k'^2 - p^2 - \frac{1}{4} p'^2}{pp'} \right\} Y_{l'\lambda' L_0} \left(\widehat{p + \frac{p'}{2}, \hat{p}'}\right). \end{aligned} \quad (1,53)$$

Таким образом, интегральное уравнение (1,43) для функции  $\psi(k, p)$  мы свели к бесконечной системе двумерных интегральных уравнений для коэффициентов разложения  $\psi_{l\lambda L}(k, p)$ .

Подставляя в (1,53) явный вид функций  $Y_{l\lambda L 0}$  и выполняя интегрирование по углам, ядра интегральных уравнений  $K_{l\lambda, l'\lambda'}^{(L)}(p, p'; k')$  можно получить в виде

$$K_{l\lambda, l'\lambda'}^{(L)}(p, p'; k') = (4\pi)^{\frac{3}{2}} (2\lambda' + 1)^{-\frac{1}{2}} \sum_{mm'} (-1)^{l+l'-m-m'} (lLm, -m | \lambda 0) \times \\ \times (l' L m', -m | \lambda' m' - m) Y_{lm}^*(\vartheta, 0) Y_{l'm'}(\vartheta', 0) Y_{\lambda' m - m'}(\theta, 0), \quad (1,54) \\ \left| p - \frac{p'}{2} \right| \leq k' \leq p + \frac{p'}{2},$$

где углы  $\theta$ ,  $\vartheta$  и  $\vartheta'$  определяются выражениями

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta &= \frac{k'^2 - p^2 - \frac{1}{4} p'^2}{pp'}, & \cos \vartheta &= \frac{k'^2 - \frac{1}{2} p^2 - \frac{1}{4} p'^2}{p \sqrt{k'^2 + \frac{3}{4} (p'^2 - p^2)}}, \\ \cos \vartheta' &= \frac{k'^2 + p^2 - \frac{1}{4} p'^2}{2pk'}. \end{aligned} \right\} \quad (1,55)$$

Заметим, что

$$K_{00, 00}^{(0)} = 1. \quad (1,56)$$

В случае связанного состояния системы трех частиц волновая функция также может быть разложена по угловым функциям (1,50). Если в связанном состоянии система характеризуется полным моментом количества движения  $L$  и проекцией  $M$ , то это разложение имеет вид

$$\psi_{LM}(\mathbf{k}, \mathbf{p}) = \sum_{l\lambda} \psi_{l\lambda L}(k, p) Y_{l\lambda LM}(\hat{k}, \hat{p}). \quad (1,57)$$

Коэффициенты разложения  $\psi_{l\lambda L}(k, p)$  определяются системой интегральных уравнений (1,52), если в последней неоднородное слагаемое положить равным нулю.

Вследствие наличия множителя  $\Delta_l$  в уравнениях (1,52) компоненты  $\psi_{l\lambda L}$  с нечетными  $l$  равны нулю, что обусловлено симметричностью волновой функции  $\Psi$  относительно перестановок любой пары частиц.

Для короткодействующих ядерных потенциалов элементы двухчастичной  $t$ -матрицы  $t_l(k, k'; z)$  быстро убывают с увеличением  $l$  (при малых  $k$  или  $k'$  элементы  $t_l(k, k'; z)$  пропорциональны  $k^l k'^l$ , при больших  $k$  компоненты  $t_l$  малы для всех  $l$ ; кроме того, вклад больших  $k$  в уравнениях подавляется множителем  $(Z_p - \frac{k^2}{m})^{-1}$ ). Поэтому в полученных уравнениях суммирование по  $l$  (и, значит, при заданном  $L$  по  $\lambda$ ) может быть ограничено конечным числом слагаемых, и, следовательно, системы интегральных уравнений становятся конечными.

Системы уравнений (1,52) существенно упрощаются, если двухчастичная  $t$ -матрица имеет сепарабельный вид. В этом случае системы (1,52) могут быть сведены к системам одномерных интегральных уравнений, допускающим численное решение.



### 1.6. Метод гармонических полиномов в задаче трех тел

Другой подход при решении задачи о связанном состоянии системы трех частиц, основанный на введении гармонических полиномов, был развит в работах Симонова и Бадалян<sup>23, 7, 25</sup>. В этом случае дифференциальное уравнение Шрёдингера, определяющее волновую функцию системы, зависящую от шести относительных координат, сводится к бесконечной системе уравнений для функций от одной переменной.

Для иллюстрации метода гармонических полиномов рассмотрим простейший случай трех одинаковых бесспиновых частиц. В системе центра масс компоненты векторов  $\frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{r}_{23}$  и  $\sqrt{\frac{2}{3}} \boldsymbol{\rho}_1$ , описывающих относительное движение трех частиц, удобно рассматривать как компоненты некоторого одного вектора в шестимерном пространстве, квадрат модуля которого равен

$$\rho^2 = \frac{1}{2} r_{23}^2 + \frac{2}{3} \rho_1^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = \frac{1}{3} (r_{23}^2 + r_{31}^2 + r_{12}^2). \quad (1,58)$$

В сферической системе координат шестимерного пространства кинетическая энергия системы (1,28) имеет вид

$$H_0 = -\frac{1}{2m} \left[ \frac{1}{\rho^5} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho^5 \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \Delta_\Omega \right], \quad (1,59)$$

где  $\Delta_\Omega$  — угловая часть шестимерного оператора Лапласа. (Буквой  $\Omega$  обозначены все угловые переменные шестимерного вектора  $\frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{r}_{23}$ ,  $\sqrt{\frac{2}{3}} \boldsymbol{\rho}_1$ .)

Волновую функцию  $\Psi$ , являющуюся решением уравнения Шрёдингера, представим в виде разложения по полной системе ортонормированных собственных функций  $u_{Kn}(\Omega)$  оператора  $\Delta_\Omega$ , называемых гармоническими полиномами:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_\Omega u_{Kn}(\Omega) &= -K(K+4) u_{Kn}(\Omega), \\ \int u_{Kn}^*(\Omega) u_{K'n'}(\Omega) d\Omega &= \delta_{KK'} \delta_{nn'}. \end{aligned} \right\} \quad (1,60)$$

Это разложение имеет вид

$$\Psi = \sum_{Kn} \varphi_{Kn}(\rho) u_{Kn}(\Omega). \quad (1,61)$$

Квантовое число  $K$  характеризует величину полного момента в шестимерном пространстве и может принимать любые положительные целочисленные значения. Остальные квантовые числа обозначены буквой  $n$ . Совокупность  $n$  содержит  $L$  — полный орбитальный момент относительного движения частиц,  $M$  — проекцию полного момента,  $\nu$  — квантовое число, характеризующее симметрию полинома относительно перестановки координат частиц и добавочное квантовое число, необходимое в случае высших значений  $L$  и  $K$ . Если полный орбитальный момент системы равен нулю,  $L = 0$ , то квантовые числа  $K$  и  $\nu$  полностью определяют набор ортонормированных функций. Гармонические полиномы для системы трех частиц были построены в работах<sup>23, 21</sup>.

Подставляя функцию  $\Psi$  в виде (1,61) в уравнение Шрёдингера для трех частиц с взаимодействием в виде (1,14) и используя соотношения (1,59), (1,60), получим для коэффициентов разложения (1,61) следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left[ \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{5}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{K(K+4)}{\rho^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \right] \varphi_{Kn}(\rho) = \sum_{\tilde{K}\tilde{n}} v_{K\tilde{n}, \tilde{K}\tilde{n}}(\rho) \varphi_{\tilde{K}\tilde{n}}(\rho), \quad (1,62)$$

где

$$v_{K_n, \tilde{K}_n}(\rho) = \frac{2m}{\hbar^2} \int d\Omega u_{K_n}^* (V_{12} + V_{23} + V_{31}) u_{\tilde{K}_n}. \quad (1,63)$$

Система (1,62) состоит из бесконечного числа зацепляющихся дифференциальных уравнений и является точной.

Легко видеть, что для парных осцилляторных потенциалов вида

$$V_{ij} = \gamma r_{ij}^2 \quad (1,64)$$

матричные элементы (1,63) имеют диагональный вид:

$$v_{K_n, \tilde{K}_n}(\rho) = \frac{6m}{\hbar^2} \gamma \rho^2 \delta_{K_n \tilde{K}_n} \delta_{n \tilde{n}}, \quad (1,65)$$

и система (1,62) расщепляется на независимые дифференциальные уравнения для каждой из функций  $\varphi_{K_n}(\rho)$ . В этом случае  $K$  является точным квантовым числом.

В общем случае недиагональные матричные элементы (1,63) отличны от нуля и  $K$  не является интегралом движения. Однако, как показано в работах <sup>5, 7, 25</sup>, в случае короткодействующих парных потенциалов основной вклад в энергию связи и волновую функцию тритона вносит член разложения (1,61) с минимальным значением  $K = 0$ . Роль высших значений  $K$  в системе (1,62) незначительна как вследствие малости недиагональных матричных элементов по сравнению с диагональными, так и потому, что с увеличением  $K$  эффективные притягивающие потенциалы  $v_{K_n, \tilde{K}_n}(\rho)$  компенсируются членами центробежной потенциальной энергии  $K(K+4)/\rho^2$ .

Собственное значение энергии системы, рассчитанное методом гармонических полиномов, обладает вариационным свойством: оно является верхним пределом для точного значения энергии. В этом легко убедиться, если в качестве пробной функции выбрать приближенную волновую функцию в виде (1,61), удовлетворяющую системе (1,62) при учете конечного числа слагаемых в (1,61) и (1,62).

Обобщение метода гармонических полиномов на случай четырех и большего числа частиц рассмотрено в работах <sup>6, 29, 24, 8, 10</sup>.

## 2. СЕПАРАБЕЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДВУХЧАСТИЧНОЙ $t$ -МАТРИЦЫ

### 2.1. Сепарабельное представление двухчастичной $t$ -матрицы

и сведение интегральных уравнений  
для системы трех частиц к одномерному виду

Двухчастичная  $t$ -матрица  $t_l(k, k'; z)$  называется сепарабельной, если она представляется в виде суммы конечного числа слагаемых, каждое из которых есть произведение функции от  $k$  на функцию от  $k'$ . Такой вид  $t$ -матрица принимает в случае сепарабельного двухчастичного потенциала

$$V_l^{[N]}(k, k') = - \sum_{n=1}^N g_{nl}(k) g_{nl}(k'). \quad (2,1)$$

Явный вид двухчастичной  $t$ -матрицы нетрудно получить путем решения уравнения (1,48). В случае одного ( $N = 1$ ) слагаемого в (2,1)  $t$ -матрица определяется выражением

$$t_l(k, k'; z) = - g_l(k) g_l(k') \left( 1 + \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dq q^2 \frac{g_l^2(q)}{z - (q^2/2\mu)} \right)^{-1}. \quad (2,2)$$

Потенциал (2,1) в общем случае является нелокальным. Использование нелокальных потенциалов вида (2,1) в трехчастичных задачах позволило разработать методику расчетов для трехчастичных систем<sup>107, 27</sup>. Заметим, что потенциал нулевого радиуса, использованный в<sup>28</sup>, можно рассматривать как сепарабельный (2,1) с  $l = 0$ , в котором функции  $g$  не зависят от  $k$ .

В общем случае реальные физические потенциалы являются локальными и не имеют вида (2,1). Однако короткодействующие потенциалы, которые обычно используются для феноменологического описания взаимодействия между нуклонами, могут быть равномерно аппроксимированы сепарабельными выражениями вида (2,1), что приводит к сепарабельному представлению и для двухчастичной  $t$ -матрицы. Действительно, используя разложение (2,1), решение уравнения Липпмана — Швингера можно получить в виде

$$t_l(k, k'; z) = - \sum_{nn'} g_{nl}(k) \tau_{nn', l}(z) g_{n'l}(k'), \quad (2,3)$$

где  $\tau_{nn', l}$  представляет элементы матрицы, обратной к матрице

$$(\tau^{-1})_{nn', l} \equiv \delta_{nn'} + \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dq q^2 \frac{g_{nl}(q) g_{n'l}(q)}{z - (q^2/2\mu)}. \quad (2,4)$$

С помощью сепарабельного представления двухчастичной  $t$ -матрицы (2,3) система двумерных интегральных уравнений для трех частиц может быть сведена к системе одномерных уравнений. Например, в случае трех одинаковых бесспиновых частиц подстановка выражения для  $t$ -матрицы (2,3) в (1,52) позволяет представить функцию  $\psi_{l\lambda L}$  в виде

$$\psi_{l\lambda L}(k, p; p_0) = (2\pi)^3 \left\{ \varphi_{l0}(k) p^{-2} \delta(p - p_0) \delta_{l0} \delta_{\lambda L} - \Delta_l \left( Z_p - \frac{k^2}{m} \right)^{-1} \sum_{nn'} g_{nl}(k) \tau_{nn', l}(Z_p) A_{n'l\lambda L}(p, p_0) \right\} \quad (2,5)$$

и получить для нахождения функций  $A_{n'l\lambda L}$  следующую систему одномерных интегральных уравнений:

$$A_{n'l\lambda L}(p, p_0) = W_{n'l\lambda L, 10LL}^0(p, p_0) + \sum_{n''n'''} \int_0^\infty dp' p'^2 W_{n'l\lambda L, n''l'\lambda'L}(p, p') \tau_{n''n''', l'}(Z_{p'}) A_{n''l'\lambda'L}(p', p_0), \quad (2,6)$$

где введены обозначения

$$W_{n'l\lambda L, 10LL}^0(p, p_0) = \frac{\Delta_l}{\pi^2} \int_{\left| p - \frac{1}{2} p_0 \right|}^{p + \frac{1}{2} p_0} dk' \frac{k'}{pp_0} K_{l\lambda, 0l}^{(L)}(p, p_0; k') g_{nl} \left( \sqrt{k'^2 + \frac{3}{4} p_0^2 - \frac{3}{4} p^2} \right) \varphi_{l0}(k'). \quad (2,7)$$

$$W_{n'l\lambda L, n''l'\lambda'L}(p, p') = \frac{\Delta_l \Delta_{l'}}{\pi^2} \int_{\left| p - \frac{1}{2} p' \right|}^{p + \frac{1}{2} p'} dk' \frac{k'}{pp'} K_{l\lambda, l'\lambda'}^{(L)}(p, p'; k') \frac{g_{nl}(Q) g_{n'l'}(k')}{(k'^2/m) - Z_{p'}}.$$

Возможны различные способы приближенной факторизации потенциала, а следовательно, и двухчастичной  $t$ -матрицы. В методе Бубнова — Галеркина приближенная факторизация достигается путем выбора решения уравнения Липпмана — Швингера в виде линейной комбинации некоторой системы линейно независимых функций<sup>15</sup>. В методе Бейтмана<sup>52, 16, 11</sup> потенциал  $V_l(k, k')$  непосредственно аппроксимируется сепарабельным потенциалом  $V_l^{[N]}(k, k')$ , который выбирается таким образом, чтобы на  $2N$  прямых ( $k = q_i, k' = q_j, i, j = 1, 2, \dots, N$ ) функции  $V_l$  и  $V_l^{[N]}$  совпадали. Бейтмановское сепарабельное приближение для потенциала  $V_l(k, k')$  можно представить<sup>77</sup> в виде (2,1), где

$$g_{nl}(k) = \frac{G_{nl}(k, q_n)}{\sqrt{-G_{nl}(q_n, q_n)}}, \quad (2,8)$$

$$G_{il}(k, k') = V_l(k, k'), \quad G_{nl}(k, k') = G_{n-1l}(k, k') - \frac{G_{n-1l}(k, q_{n-1})G_{n-1l}(q_{n-1}, k')}{G_{n-1l}(q_{n-1}, q_{n-1})}.$$

Заметим, что сепарабельное приближение Нойеса — Ковальского<sup>86, 86</sup> для двухчастичной  $t$ -матрицы

$$\left. \begin{aligned} t_l(k, k'; z) &\approx F_l(k, q) t_l(q, q; z) F_l(k', q), \\ F_l(k, q) &\equiv \frac{t_l(k, q; z)}{t_l(q, q; z)}, \quad q \equiv \sqrt{2\mu z} \end{aligned} \right\} \quad (2,9)$$

представляет по сути бейтмановскую аппроксимацию  $t$ -матрицы одним слагаемым. Для значений переменных импульсов на энергетической поверхности  $k = q$  или  $k' = q$  ( $z = E + i0, E > 0$ ) приближенное выражение для  $t$ -матрицы (2,9) совпадает с точным. Приближение вида (2,9) для отрицательных энергий рассмотрено Ковальским<sup>86</sup>.

В случае, если решение задачи о связанном состоянии двух частиц можно найти в явном виде, для аппроксимации двухчастичной  $t$ -матрицы сепарабельным выражением удобно использовать метод, основанный на применении теоремы Гильберта — Шмидта для решения симметричных интегральных уравнений, который мы в дальнейшем будем называть методом Гильберта — Шмидта<sup>61, 50, 65, 109, 76, 81, 49, 84, 19</sup>.

Сопоставление различных сепарабельных представлений для двухчастичной  $t$ -матрицы при положительных и отрицательных значениях энергии  $z$  проведено в работах<sup>103, 87</sup>.

## 2.2. Разложение Гильберта — Шмидта для двухчастичной $t$ -матрицы

Интегральное уравнение Липпмана — Швингера (1,48), определяющее двухчастичную  $t$ -матрицу, с помощью преобразования подобия можно привести к симметричному виду

$$\bar{t}_l(z) = \bar{V}_l(z) + \bar{V}_l(z) \bar{t}_l(z), \quad (2,10)$$

где введены обозначения

$$\bar{V}_l(z) = -(H_0 - z)^{-\frac{1}{2}} V_l (H_0 - z)^{-\frac{1}{2}}, \quad \bar{t}_l(z) = -(H_0 - z)^{-\frac{1}{2}} t_l(z) (H_0 - z)^{-\frac{1}{2}}. \quad (2,11)$$

Идея метода Гильберта — Шмидта заключается в использовании собственных функций ядра интегрального уравнения (2,10), т. е. решений

уравнения

$$\bar{V}_l(z) \bar{g}_{nl}(z) = \eta_{nl}(z) \bar{g}_{nl}(z). \quad (2,12)$$

Собственные значения  $\eta_{nl}(z)$  ( $n$  — квантовые числа, характеризующие собственные значения в порядке убывания их абсолютных величин) и собственные функции  $\bar{g}_{nl}(z)$  зависят от  $z$  как от параметра. Собственные функции  $\bar{g}_{nl}(z)$  выбираются в гильбертовом пространстве, т. е. предполагается, что они имеют конечную норму

$$(\bar{g}_{nl}(z), \bar{g}_{n'l}(z)) = \delta_{nn'}. \quad (2,13)$$

При конкретных расчетах удобнее использовать собственные функции  $g_{nl}(z)$  ядра несимметризованного интегрального уравнения (1,47), т. е. собственные функции оператора  $V_l G_0(z)$ :

$$V_l G_0(z) g_{nl}(z) = \eta_{nl}(z) g_{nl}(z). \quad (2,14)$$

Так как операторы  $V_l G_0(z)$  и  $\bar{V}_l(z)$  связаны преобразованием подобия, их собственные значения совпадают, а собственные функции  $g_{nl}(z)$  и  $\bar{g}_{nl}(z)$  связаны между собой соотношением

$$g_{nl}(z) = (H_0 - z)^{\frac{1}{2}} \bar{g}_{nl}(z). \quad (2,15)$$

В импульсном представлении уравнение (2,14) можно записать в виде

$$\int_0^\infty V_l(k, k') \left(z - \frac{k'^2}{2\mu}\right)^{-1} g_{nl}(k', z) \frac{k'^2 dk'}{2\pi^2} = \eta_{nl}(z) g_{nl}(k, z). \quad (2,16)$$

При этом условии ортонормировки собственных функций  $g_{nl}(k, z)$  принимает вид

$$\int_0^\infty g_{n'l}^*(k, z^*) g_{nl}(k, z) \left(\frac{k^2}{2\mu} - z\right)^{-1} \frac{k^2 dk}{2\pi^2} = \delta_{nn'}. \quad (2,17)$$

Хотя система собственных функций  $g_{nl}(z)$  ядра интегрального уравнения Липпмана — Швингера (1,47) и не является полной, тем не менее решение  $t_l(z)$  и свободный член интегрального уравнения  $V_l$  всегда можно представить в виде разложений по этим функциям.

Запишем решение интегрального уравнения (1,48) в импульсном представлении в виде ряда

$$t_l(k, k'; z) = \sum_n a_{nl}(k', z) g_{nl}(k, z). \quad (2,18)$$

Коэффициенты  $a_{nl}$  нетрудно найти, подставив (2,18) в (1,48) и воспользовавшись уравнением (2,16) и условием ортонормировки (2,17). В результате получим следующее сепарабельное представление для двухчастичной  $t$ -матрицы:

$$t_l(k, k'; z) = - \sum_n \frac{\eta_{nl}(z)}{1 - \eta_{nl}(z)} g_{nl}(k, z) g_{nl}^*(k', z^*). \quad (2,19)$$

Аналогичным образом с помощью формул (2,16) и (2,17) нетрудно найти сепарабельное представление для потенциала взаимодействия

$$V_l(k, k') = - \sum_n \eta_{nl}(z) g_{nl}(k, z) g_{nl}^*(k', z^*). \quad (2,20)$$

Разложение для  $t$ -матрицы (2,19) может быть получено непосредственным решением уравнения Липпмана — Швингера (1,48) при использовании

разложения для потенциала (2,20), в котором значение параметра  $z$  выбрано равным значению  $z$  в уравнении (1,48).

В разложениях (2,19) и (2,20) скорость убывания слагаемых с увеличением  $n$  определяется скоростью убывания с  $n$  собственных значений  $\eta_{nl}(z)$  [собственные функции  $g_{nl}(k, z)$  являются ограниченными функциями  $n$ ]. Если в разложении (2,19) выделить потенциал взаимодействия в виде (2,20), то для двухчастичной  $t$ -матрицы получим следующую формулу:

$$t_l(k, k'; z) = V_l(k, k') - \sum_n \frac{\eta_{nl}^2(z)}{1 - \eta_{nl}(z)} g_{nl}(k, z) g_{nl}^*(k', z^*). \quad (2,21)$$

Ряд в полученном разложении сходится быстрее по сравнению с (2,19), так как убывающие с  $n$  собственные значения  $\eta_{nl}$  в (2,21) входят квадратично. Расчеты, выполненные в работах <sup>105, 66</sup>, показали, что учет борновского слагаемого  $V_l$  и первого слагаемого из суммы (2,21) (так называемое квазиборновское приближение) является очень хорошим приближением как при рассмотрении связанных состояний, так и при рассмотрении рассеяния двух частиц (даже при достаточно малых энергиях). Выражение (2,21), однако, не является сепарабельным. Поэтому при рассмотрении трехчастичных систем мы будем пользоваться разложением для  $t$ -матрицы в виде (2,19), ограничиваясь учетом нескольких первых слагаемых.

Разложение (2,19) легко обобщить на случай, если потенциал содержит отталкивание на малых расстояниях <sup>80, 64</sup>. В этом случае для оператора  $V_l G_0(z)$  существуют собственные функции  $g_{n_a l}^a$ , которые при  $z < 0$  отвечают положительным собственным значениям  $\eta_{n_a l}^a > 0$ , и собственные функции  $g_{n_c l}^c$ , которые при  $z < 0$  отвечают отрицательным собственным значениям,  $\eta_{n_c l}^c < 0$  ( $n_a, n_c = 1, 2, 3, \dots, |\eta_{1l}^c| > |\eta_{2l}^c| > |\eta_{3l}^c| > \dots$ ). Функции  $g_{n_a l}^a$  и  $g_{n_c l}^c$  образуют ортонормированную систему. В случае потенциала с отталкиванием сепарабельное разложение для  $t$ -матрицы имеет вид <sup>80</sup>

$$t_l(k, k'; z) = - \sum_{n_a=1}^{\infty} \frac{\eta_{n_a l}^a(z)}{1 - \eta_{n_a l}^a(z)} g_{n_a l}^a(k, z) g_{n_a l}^{a*}(k', z^*) - \\ - \sum_{n_c=1}^{\infty} \frac{\eta_{n_c l}^c(z)}{1 - \eta_{n_c l}^c(z)} g_{n_c l}^c(k, z) g_{n_c l}^{c*}(k', z^*). \quad (2,22)$$

Функции  $g_{n_c l}^c$  можно рассматривать как собственные функции оператора  $-V_l G_0(z)$ , отвечающие положительным собственным значениям  $-\eta_{n_c l}^c(z)$ .

Разложение (2,20) для потенциала  $V_l(k, k')$  имеет место при произвольном значении  $z$ ; при этом полная сумма в (2,20), естественно, не зависит от  $z$ . От величины параметра  $z$  зависит, однако, скорость сходимости суммы в (2,20). При увеличении  $z$  сходимость разложения (2,20) [как и разложения для  $t$ -матрицы (2,19)] ухудшается. Действительно, при  $|z| \rightarrow \infty$  собственные значения  $\eta_{nl}(z) \rightarrow 0$  и каждое слагаемое в разложениях (2,19) и (2,20) стремится к нулю. Однако суммы рядов (2,19) и (2,20) при этом остаются конечными ( $t_l(k, k'; z) \rightarrow V_l(k, k')$ ).

Для двухчастичной  $t$ -матрицы можно получить сепарабельное разложение с улучшенной сходимостью по сравнению со сходимостью разложения (2,19), если исходить из разложения для потенциала (2,20) с фиксированным значением параметра  $z = z_0$ , не приравнивая его переменной  $z$  в уравнении Липпмана — Швингера (1,48). Значение параметра  $z_0$  удобно

выбрать отрицательным,  $z_0 \leq 0$ , поскольку в этом случае собственные значения  $\eta_{nl}(z_0)$  и собственные функции  $g_{nl}(k, z_0)$  вещественны. Таким образом, выберем

$$V_l(k, k') = - \sum_n \eta_{nl}(z_0) g_{nl}(k, z_0) g_{nl}(k', z_0). \quad (2,23)$$

При  $z_0 \leq 0$  каждое слагаемое в (2,23) является вещественным и симметричным оператором. Сумма (2,23) с конечным числом слагаемых ( $N$  членов) представляет сепарабельный потенциал  $N$ -го ранга. Соответствующая двухчастичная  $t$ -матрица имеет вид (2,3) с формфакторами

$$g_{nl}(k) = V \overline{\eta_{nl}(z_0)} g_{nl}(k, z_0). \quad (2,24)$$

Эрмитовость сепарабельного потенциала (2,23) при учете любого числа слагаемых обеспечивает унитарность для соответствующей  $t$ -матрицы во всех порядках приближения. [Разложение Гильберта — Шмидта (2,19) унитарно только при учете в сумме бесконечно большого числа членов.]

В случае, если система двух частиц может находиться в связанном состоянии с энергией связи  $\epsilon$ , оказывается удобным положить параметр  $z_0$  равным энергии связанного состояния  $z_0 = -\epsilon$ . При таком выборе  $z_0$  энергия связи и волновая функция совпадают с точными уже в первом приближении и не изменяются при учете в разложении (2,23) последующих членов.

Разложение (2,23) обосновывает использование сепарабельных потенциалов. Так, первый член в разложении (2,23) с формфактором в виде  $g_{10}(k, -\epsilon)$  эквивалентен сепарабельному потенциалу Ямагучи<sup>116</sup>, параметры которого зафиксированы выбором параметров для исходного локального потенциала  $V(r)$ . Введение последующих членов в разложении (2,23) позволяет получить дальнейшее улучшение аппроксимации локального потенциала суммой сепарабельных.

Впервые сепарабельные разложения для потенциала (2,23) и  $t$ -матрицы (2,3) с  $g_{nl}(k)$  в виде (2,24) были рассмотрены Хармсом<sup>69</sup> под названием унитарного полюсного разложения. Точность аппроксимации двухчастичной  $t$ -матрицы одним членом этого разложения исследовалась для различных потенциалов в работах Левинджера и др.<sup>87, 55, 70</sup>.

### 2.3. Свойства собственных значений и собственных функций

Рассмотрим основные свойства собственных значений и собственных функций, используемых в методе Гильберта — Шмидта. Заметим прежде всего, что ядро симметризованного интегрального уравнения (2,11) эрмитово только при вещественных отрицательных значениях  $z$ . Из эрмитовости ядра  $\bar{V}_l(z)$  в этом случае следует, что собственные значения  $\eta_{nl}(z)$  при  $z < 0$  всегда вещественны. В остальных случаях оператор  $\bar{V}_l(z)$  не является эрмитовым (хотя по-прежнему является симметричным), и его собственные значения  $\eta_{nl}(z)$  комплексны.

Взамен собственных функций  $g(z)$  удобно использовать функции  $\psi(z)$ , связанные с функциями  $g(z)$  соотношением

$$\psi(z) = G_0(z) g(z) \quad (2,25)$$

и удовлетворяющие уравнению

$$G_0(z) V \psi(z) = \eta(z) \psi(z). \quad (2,26)$$

[Операторы  $G_0(z) V$  и  $V G_0(z)$  связаны между собой преобразованием подобия.] Решения уравнения (2,26) должны быть квадратично интегри-

руемыми. Из условия существования таких решений при произвольных значениях  $z$  (за исключением значений, лежащих на вещественной положительной оси) и определяются собственные значения  $\eta(z)$ .

Уравнение (2,26) можно переписать в форме уравнения Шрёдингера

$$\left\{ H_0 + \frac{V}{\eta(z)} - z \right\} \psi(z) = 0, \quad (2,27)$$

содержащего обобщенный потенциал  $V/\eta(z)$ , зависящий от  $z$ . При вещественных отрицательных значениях  $z$  этот обобщенный потенциал эрмитов, и решение уравнения (2,27)  $\psi(z)$  можно рассматривать как волновую функцию связанного состояния системы с энергией связи  $-z$ . Следовательно, при  $z < 0$  собственное значение  $\eta(z)$  определяет то число, на которое нужно разделить потенциал  $V$  для того, чтобы система имела связанное состояние с заданной энергией связи  $-z$ . При  $\eta(z) = 1$  уравнение (2,27) переходит в обычное уравнение Шрёдингера, допускающее решения, убывающие на бесконечности, только при определенных отрицательных значениях энергии  $z = -\varepsilon$ . Очевидно, эти значения отвечают связанным состояниям системы и определяются из условия

$$\eta(-\varepsilon) = 1. \quad (2,28)$$

Волновая функция связанного состояния системы в импульсном представлении может быть записана в виде

$$\varphi_{nl}(k) = N_{nl} \frac{g_{nl}(k, -\varepsilon_{nl})}{(k^2/2\mu) + \varepsilon_{nl}}, \quad (2,29)$$

где  $N_{nl}$  — нормировочная постоянная и  $g_{nl}(k, -\varepsilon_{nl})$  — собственная функция уравнения (2,14). Таким образом, из всего набора волновых функций  $\psi_{nl}(z)$  при  $z < 0$  физическими волновыми функциями, описывающими связанные состояния системы, являются только функции с такими значениями  $n$  и  $z = -\varepsilon_{nl}$ , при которых собственные значения  $\eta_{nl}(z)$  обращаются в единицу. В случае потенциалов с определенным знаком собственные значения  $\eta(z)$  при вещественных отрицательных значениях  $z$  являются знакоопределенными, а именно, для потенциалов притяжения ( $V < 0$ ) собственные значения положительны,  $\eta(z) > 0$ , и являются возрастающими функциями  $z$ ; для потенциалов отталкивания ( $V > 0$ ) собственные значения отрицательны,  $\eta(z) < 0$ , и являются убывающими функциями  $z$  ( $\frac{1}{\eta_{nl}(z)} \frac{d\eta_{nl}(z)}{dz} > 0$  при  $z < 0$ ). Согласно (2,28) отсюда следует, что связанное состояние с отрицательной энергией  $z = -\varepsilon_{nl}$  возможно только при условии

$$\eta_{nl}(0) \geq 1. \quad (2,30)$$

В случае комплексных значений  $z$  решения уравнения (2,26) возможны только при комплексных значениях  $\eta(z)$ . Если собственное значение  $\eta_{nl}(z)$  при комплексной энергии  $z_0$  с малой положительной мнимой частью таково, что

$$\operatorname{Re} \eta_{nl}(z_0) \approx 1 \quad \text{и} \quad \operatorname{Im} \eta_{nl}(z_0) \ll 1, \quad (2,31)$$

то соответствующая волновая функция описывает квазидискретное резонансное или же виртуальное состояние системы.

В координатном представлении нахождение собственных функций  $\psi_{nl}(r, z) \equiv u_{nl}(r, z)/r$  и собственных значений  $\eta_{nl}(z)$  сводится к решению дифференциального уравнения

$$\left\{ -\frac{1}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{2\mu r^2} + \frac{V(r)}{\eta_{nl}(z)} - z \right\} u_{nl}(r, z) = 0, \quad (2,32)$$



с граничными условиями

$$u_{nl}(r, z) \sim r^{l+1}, \quad r \rightarrow 0, \quad (2,33)$$

$$u_{nl}(r, z) \sim e^{iqr}, \quad r \rightarrow \infty, \quad (2,34)$$

где величина  $q$  определена равенством

$$q = \sqrt{2\mu z}, \quad \text{Im } q > 0.$$

Рассмотрим уравнение Шрёдингера с потенциалом  $gV(r)$ , в котором для удобства выделена константа связи. Решение такого уравнения  $\varphi_l(r, q, g)$  при энергии  $z = q^2/2\mu$ , удовлетворяющее граничному условию (2,33), может быть представлено в виде

$$\varphi_l(r, q, g) \sim f_l(-q, g) f_l(r, q, g) - f_l(q, g) f_l(r, -q, g), \quad (2,35)$$

где  $f_l(\pm q, g)$  — функции Иоста и  $f_l(r, \pm q, g)$  — решения уравнения Шрёдингера с граничными условиями на бесконечности

$$\lim_{r \rightarrow \infty} e^{\pm iqr} f_l(r, \pm q, g) = 1. \quad (2,36)$$

Напомним, что функция Иоста  $f_l(q, g)$  связана с соответствующим решением  $f_l(r, q, g)$  посредством соотношения

$$f_l(q, g) \equiv \lim_{r \rightarrow 0} (2l+1) r^l f_l(r, q, g). \quad (2,37)$$

Очевидно, решение уравнения (2,32) можно записать в виде (2,35), где под  $g$  следует подразумевать обобщенную константу связи  $g/\eta(z)$ . Поскольку собственное решение уравнения (2,32), в отличие от (2,35), должно на бесконечности содержать только расходящуюся волну, зависимость  $\eta$  от  $z$  может быть найдена из условия обращения в нуль коэффициента при сходящейся волне

$$f_l\left(-q, \frac{g}{\eta}\right) = 0. \quad (2,38)$$

Корни этого уравнения и определяют собственные значения  $\eta_{nl}(z)$ .

Как известно <sup>75</sup>, функция Иоста  $f_l(-q, g)$  совпадает с фредгольмовским детерминантом  $D_l(z, g)$  интегрального уравнения (2,10). Замечая, что фредгольмовский детерминант  $D_l(z, g)$  представляется через ядро уравнения  $\bar{V}_l(z)$  в виде бесконечного ряда

$$D_l(z, g) \equiv 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \int_0^{\infty} dk_1 \dots \int_0^{\infty} dk_m \begin{vmatrix} \bar{V}_l(k_1, k_1; z) \bar{V}_l(k_1, k_2; z) \dots \bar{V}_l(k_1, k_m; z) \\ \bar{V}_l(k_2, k_1; z) \bar{V}_l(k_2, k_2; z) \dots \bar{V}_l(k_2, k_m; z) \\ \dots \\ \bar{V}_l(k_m, k_1; z) \bar{V}_l(k_m, k_2; z) \dots \bar{V}_l(k_m, k_m; z) \end{vmatrix}, \quad (2,39)$$

и используя разложение (2,20), найдем

$$D_l(z, g) = \prod_n (1 - \eta_{nl}(z)). \quad (2,40)$$

Таким образом, функция Иоста  $f_l(-q, g)$  непосредственно выражается через собственные значения  $\eta_{nl}(z)$ :

$$f_l(-q, g) = \prod_n (1 - \eta_{nl}(z)). \quad (2,41)$$

Замечая, что соотношение (2,20) линейно по  $g$  и  $\eta_{nl}(z)$ , нетрудно убедиться, что

$$f_l\left(-q, \frac{g}{\eta}\right) = \prod_n \left(1 - \frac{\eta_{nl}(z)}{\eta}\right), \quad (2,42)$$

где  $\eta$  — произвольный параметр. Приравнивая левую часть равенства (2,42) нулю в соответствии с (2,38), мы действительно получаем уравнение для нахождения собственных значений  $\eta_{nl}(z)$ .

Соотношение (2,41) позволяет найти связь между фазой рассеяния двух частиц  $\delta_l(q)$ , через которую выражается составляющая двухчастичной  $t$ -матрицы на энергетической поверхности, и собственными значениями  $\eta_{nl}(E + i0)$  при  $E = q^2/2\mu > 0$ . Действительно, фаза рассеяния  $\delta_l(q)$  является аргументом функции Иоста  $f_l(q, g)$ . Поэтому, учитывая, что  $\delta_l(q)$  — нечетная функция  $q$ , и используя (2,41), найдем

$$\delta_l(q) = - \sum_n \arg(1 - \eta_{nl}(E + i0)). \quad (2,43)$$

Функция Иоста  $f_l(-q, g)$  при комплексных значениях  $g$  является целой функцией от  $g$  при любом значении  $q$  или  $z$ . Поэтому собственные значения  $\eta_{nl}(z)$  при фиксированном значении энергии  $z$ , определяемые нулями функции Иоста (2,38), образуют дискретный набор; при этом вне круга конечного радиуса будет лежать лишь конечное число собственных значений  $\eta_{nl}(z)$ . Вследствие дискретности собственных значений  $\eta_{nl}(z)$  их можно перенумеровать с помощью целого числа  $n$  (в порядке убывания абсолютной величины  $\eta_{nl}$ ), что неявно и предполагалось до сих пор.

Аналитические свойства функции Иоста  $f_l(-q, g)$  в плоскости комплексных энергий  $z$  определяются поведением потенциала  $V(r)$ . Будем предполагать, что сингулярность потенциала в точке  $r = 0$  слабее  $r^{-2}$ , а на бесконечности потенциал спадает достаточно быстро (например, быстрее  $r^{-3}$ ). В этом случае функция Иоста  $f_l(-q, g)$  аналитична и не имеет особенностей на физическом листе римановой поверхности комплексных  $z$ , т. е. на всей комплексной плоскости  $z$ , за исключением разреза вдоль вещественной положительной оси. Аналитические свойства собственных значений  $\eta_{nl}(z)$  вытекают из аналитических свойств функции Иоста  $f_l(-q, g)$ . Так как функция Иоста  $f_l(-q, g)$  аналитична по обоим переменным и в общем случае  $\frac{\partial f_l}{\partial g} \neq 0$ , уравнение (2,38) имеет единственное решение  $\eta_{nl}(z)$ , являющееся аналитической функцией от  $z$  в области аналитичности функции  $f_l(-q, g)$ . Таким образом, собственные значения оператора Гильберта — Шмидта  $\eta_{nl}(z)$  являются, так же как и функция Иоста  $f_l(-q, g)$ , аналитическими функциями без особенностей на всей комплексной плоскости  $z$ , за исключением разреза вдоль вещественной положительной оси.

Из вещественности  $\eta_{nl}(z)$  при  $z < 0$  следует, что для комплексных  $z$  имеет место принцип отражения Шварца

$$\eta_{nl}^*(z) = \eta_{nl}(z^*). \quad (2,44)$$

Заметим, что при вещественных отрицательных значениях  $z$  надлежащим выбором фазового множителя функции  $g_{nl}(k, z)$  можно сделать вещественными. В этом случае принцип отражения имеет место и для собственных функций

$$g_{nl}^*(k, z) = g_{nl}(k, z^*). \quad (2,45)$$

Как отмечалось выше, собственные значения  $\eta_{nl}(z)$  вещественны только на вещественной отрицательной оси. Поэтому, учитывая знако-

определенный характер мнимой части  $\eta_{nl}(z)$  в верхней и нижней полуплоскостях  $z$  и учитывая неравенство  $\eta_{nl}(z) \frac{d\eta_{nl}(z)}{dz} > 0$ , имеющее место при вещественных отрицательных значениях  $z$ , найдем, что в верхней полуплоскости  $z$

$$\text{Im } \eta_{nl}(z) > 0 \text{ при } V < 0 \text{ и } \text{Im } \eta_{nl}(z) < 0 \text{ при } V > 0. \quad (2,46)$$

В нижней полуплоскости  $z$  мнимая часть  $\eta_{nl}(z)$  имеет противоположный знак.

Используя независимость шпура оператора от выбора представления, находим

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\eta_{nl}(z))^n = \text{Sp} (G_{0l}(z) V)^n, \quad p = 1, 2, 3, \dots \quad (2,47)$$

При  $p = 1$  имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \eta_{nl}(z) = -2i\mu q \int_0^{\infty} j_l(qr) V(r) h_l^{(+)}(qr) r^2 dr, \quad q = \sqrt{2\mu z}. \quad (2,48)$$

Интеграл в правой части (2,48) сходится, если потенциал характеризуется конечным радиусом действия и сингулярность потенциала в точке  $r = 0$  слабее  $r^{-2}$ . Для обеспечения сходимости ряда в левой части (2,48) в этом случае собственные значения  $\eta_{nl}(z)$  должны убывать с ростом  $n$  как  $n^{-\gamma}$ , где  $\gamma > 1$ . При  $z < 0$  зависимость  $\eta_{n0}(z)$  от  $n$  для больших значений  $n$  легко определить в квазиклассическом приближении, воспользовавшись правилом квантования Бора — Зоммерфельда:

$$\sqrt{2\mu} \int_0^{\rho} \sqrt{-\frac{V(r)}{\eta_{n0}(z)} + z} dr = \pi n, \quad (2,49)$$

где величина  $\rho$  определяется из условия  $V(\rho) = z\eta_{n0}(z)$ . Для достаточно больших  $n$

$$|z| \eta_{n0}(z) \ll V_0 \quad (2,50)$$

( $V_0$  — глубина потенциала), поэтому интегрирование в (2,49) можно продолжить до бесконечности; при этом под знаком корня можно пренебречь вторым слагаемым. В результате получим

$$\eta_{n0}(z) \approx \frac{2\mu V_0 \tilde{R}^2}{\pi^2 n^2}, \quad (2,51)$$

где  $\tilde{R} = \int_0^{\infty} \sqrt{-V(r)/V_0} dr$  — эффективный радиус действия потенциала.

Используя (2,51), условие (2,50) можно переписать в виде

$$\sqrt{-2\mu z} \tilde{R} \ll \pi n. \quad (2,52)$$

#### 2.4. Собственные значения и собственные функции для потенциала Хюльтена и прямоугольной ямы

В качестве иллюстрации приведем явные выражения для собственных значений и собственных функций в случае потенциала Хюльтена и прямоугольной потенциальной ямы.

а) Потенциал Хюльтена

$$V(r) = -V_0(e^{r/R} - 1)^{-1}, \quad V_0 \equiv \frac{g}{2\mu R^2}. \quad (2,53)$$

На малых расстояниях ( $r \ll R$ ) потенциал (2,53) характеризуется сингулярностью вида  $r^{-1}$ , на больших расстояниях ( $r \gg R$ ) — убывает по экспоненциальному закону.

Ограничимся рассмотрением сферически-симметричных состояний ( $l = 0$ , индекс  $l$  опускаем). Для потенциала Хюльгена функция Иоста имеет вид

$$f(-q, g) = \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{g}{n(n-2iqR)} \right). \quad (2,54)$$

Нули функции Иоста (2,54) определяют энергии связанных состояний;

$$E_n = -\frac{\kappa_n^2}{2\mu}, \quad \kappa_n = \frac{1}{2R} \left( \frac{g}{n} - n \right), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2,55)$$

Соответствующие функции связанных состояний равны

$$\varphi_n(k) = \frac{N_n}{k^2 + \kappa_n^2} \sum_{\nu=1}^n a_{n\nu} \frac{\nu(\nu + 2\kappa_n R)}{(kR)^2 + (\nu + \kappa_n R)^2},$$

$$a_{n\nu} = (-1)^{\nu+1} \frac{n!}{\nu!(n-\nu)!} \frac{\Gamma\left(\frac{g}{n} + \nu\right) \Gamma\left(\frac{g}{n} - n + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{g}{n}\right) \Gamma\left(\frac{g}{n} - n + \nu + 1\right)}. \quad (2,56)$$

Зная функцию Иоста, согласно (2,38) нетрудно найти собственные значения ядра уравнения Липпмана — Швингера:

$$\eta_n(z) = \frac{g}{n(n-2i\sqrt{2\mu z}R)}, \quad \text{Im} \sqrt{z} \geq 0. \quad (2,57)$$

Соответствующие собственные функции, являющиеся решениями уравнения (2,16), имеют вид

$$\left. \begin{aligned} g_n(k, z) &= C_n(z) \sum_{\nu=1}^n A_{n\nu}(z) \frac{g}{\eta_\nu(z)} \frac{1}{k^2 R^2 - 2\mu z R^2 + \frac{g}{\eta_\nu(z)}}, \\ A_{n\nu}(z) &= (-1)^{\nu+1} \prod_{\sigma=1}^n \frac{n-\sigma+1}{n+\sigma-1} \frac{\eta_\sigma(z)}{\eta_{n+\sigma-1}(z)}, \\ C_1^2(z) &= \frac{\pi g R}{\mu \eta_2(z)}, \quad C_n^2(z) = \frac{\pi g^{2n-1} R n}{\mu (n!)^4} \left[ \eta_{2n}(z) \prod_{\nu=1}^{n-1} \eta_\nu^2(z) \right]^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (2,58)$$

Функции (2,58) нормированы согласно условию (2,17).

При изменении параметра  $z$  от  $-\infty$  до 0 собственные значения  $\eta_n(z)$  вещественны и изменяются от 0 до  $g/n^2$ . Связанным состояниям отвечают значения  $z$ , для которых  $\eta_n(z) = 1$ . При дальнейшем изменении  $z$  от 0 до  $\infty + i0$  (вдоль верхнего края разреза) собственные значения  $\eta_n(z)$  становятся комплексными и описывают на комплексной плоскости полуокружности радиуса  $g/2n^2$  с центрами, лежащими на вещественной оси в точках  $g/2n^2$ . Вещественные и мнимые части собственных значений  $\eta_n(z)$  при изменении параметра энергии  $z$  от  $-\infty$  до  $+\infty + i0$  для случая  $g = 1,4$  (отвечающему взаимодействию нуклонов в триплетном спиновом состоянии) показаны на рис. 1.

б) Прямоугольная потенциальная яма

$$V(r) = \begin{cases} -V_0, & r < R, \\ 0, & r > R, \end{cases} \quad V_0 \equiv \frac{g}{2\mu R^2}. \quad (2,59)$$

В случае прямоугольной ямы функция Иоста  $f(-q, g)$  имеет вид

$$f(-q, g) = e^{iqR} \left\{ \cos \sqrt{g + q^2 R^2} - i \frac{qR}{\sqrt{g + q^2 R^2}} \sin \sqrt{g + q^2 R^2} \right\}. \quad (2,60)$$

Энергии связанных состояний определяются корнями трансцендентного уравнения

$$\sqrt{g - \kappa^2 R^2} \operatorname{ctg} \sqrt{g - \kappa^2 R^2} = -\kappa R. \quad (2,61)$$

Соответствующие волновые функции связанных состояний равны

$$\Phi_n(k) = \frac{N_n}{k^2 + \kappa_n^2} \frac{\cos kR + (\kappa_n/k) \sin kR}{g - (\kappa_n^2 + k^2) R^2}. \quad (2,62)$$

Собственные значения  $\eta_n(z)$  в случае прямоугольной потенциальной

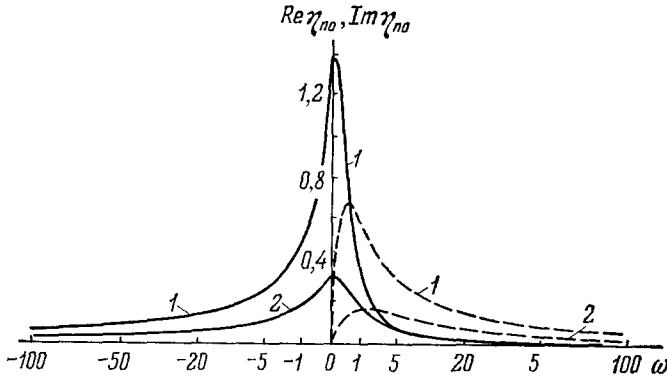


Рис. 1. Зависимости  $\operatorname{Re} \eta_{n0}$  (сплошные кривые) и  $\operatorname{Im} \eta_{n0}$  (штриховые кривые) от параметра  $\omega \equiv 2\mu z R^2$  для потенциала Хюльтена ( $g = 1,403$ ). Цифры возле кривых указывают значение  $n$ .

ямы можно найти, решая трансцендентное уравнение

$$\sqrt{\frac{g}{\eta} + q^2 R^2} \operatorname{ctg} \sqrt{\frac{g}{\eta} + q^2 R^2} = iqR. \quad (2,63)$$

При малых  $z$  собственные значения  $\eta_n(z)$  можно получить в явном виде:

$$\eta_n(z) \approx \frac{4g}{(2n-1)^2 \pi^2} \left\{ 1 + \frac{8i}{(2n-1)^2 \pi^2} qR + \frac{4}{(2n-1)^2 \pi^2} \left( 1 - \frac{20}{(2n-1)^2 \pi^2} \right) (qR)^2 \right\}, \quad (2,64)$$

$$q \equiv \sqrt{2\mu z}, \quad |q| R \ll 1.$$

Собственные функции  $g_n(k, z)$  для прямоугольной ямы определяются формулой

$$\left. \begin{aligned} g_n(k, z) &= C_n(z) \frac{g}{\eta_n(z)} \frac{\cos kR - i(q/k) \sin kR}{(g/\eta_n(z)) + (q^2 - k^2) R^2}, \\ C_n^2(z) &= \frac{4\pi R}{\mu} \frac{1 + q^2 R^2 (\eta_n(z)/g)}{(g/\eta_n(z)) - iqR}. \end{aligned} \right\} \quad (2,65)$$

Вещественные и мнимые части собственных значений  $\eta_n(z)$  для прямоугольной ямы при изменении  $z$  вдоль вещественной оси от  $-\infty$  до  $+\infty + i0$  представлены на рис. 2.

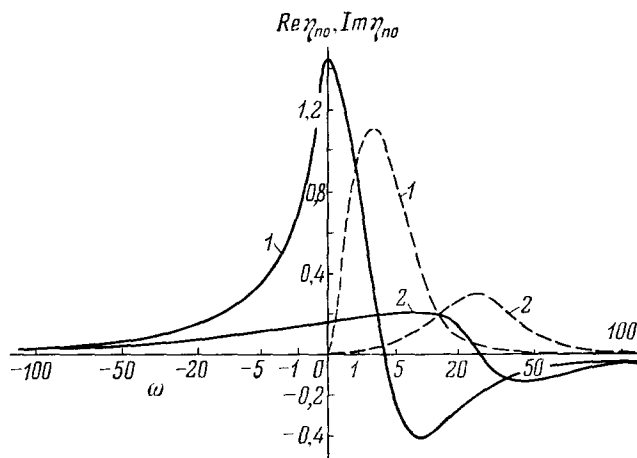


Рис. 2. Зависимости  $\text{Re } \eta_{n0}$  (сплошные кривые) и  $\text{Im } \eta_{n0}$  (штриховые кривые) от параметра  $\omega \equiv 2\mu z R^2$  для прямоугольной ямы ( $g = 3,608$ ).  
Цифры возле кривых указывают значение  $n$ .

## 2.5. Сходимость сепарабельного разложения Гильберта — Шмидта

Исследуем сходимость разложения Гильберта — Шмидта для двухчастичной  $t$ -матрицы на примере отрицательных значений  $z$ . Если  $z < 0$ , то ядро интегрального уравнения (2,10)  $\bar{V}_l(k, k'; z)$  симметрично и вещественно. Для короткодействующих потенциалов, имеющих сингулярность при  $r \rightarrow 0$  слабее  $r^{-2}$ , ядро и свободный член интегрального уравнения (2,10) квадратично интегрируемы:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty dk dk' |\bar{V}_l(k, k', z)|^2 < \infty. \quad (2,66)$$

В этом случае можно показать, что при переходе к конечному интервалу интегрирования в уравнении Лишмана — Швингера путем соответствующей замены переменных ядро получаемого симметризованного уравнения является непрерывным и ограниченным в выбранном интервале. В случае положительных собственных значений  $\eta_{nl} > 0$  (притягивающие потенциалы) ряд (2,20) для такого ядра [а следовательно, и ряд для  $t$ -матрицы (2,19)] сходится абсолютно и равномерно по обоим переменным  $k$  и  $k'$  (теорема Мерсера<sup>18</sup>).

Для притягивающих потенциалов  $V(r) < 0$  каждый член разложения (2,20) представляет сепарабельный потенциал притяжения. Поэтому дальнейшее уточнение разложения, т. е. использование в разложении Гильберта — Шмидта большего числа членов, соответствует введению более сильного притяжения.

В разложении  $t$ -матрицы (2,19) скорость убывания членов с увеличением  $n$  определяется скоростью убывания с  $n$  собственных значений  $\eta_{nl}(z)$  (собственные функции являются ограниченными функциями  $n$ ). Поэтому сходимость разложения Гильберта — Шмидта улучшается с ос-

лаблением сингулярности потенциала и уменьшением его протяженности. При  $z = 0$  отношения собственных значений  $\eta_{n0}(0)$  для  $n = 1, 2, 3$  и  $4$  равны  $1 : 1/4 : 1/9 : 1/16$  в случае потенциала Хюльтена и  $1 : 1/9 : 1/25 : 1/49$  — в случае прямоугольной ямы. [При больших  $n$  собственные значения  $\eta_{n0}(0)$  для всех короткодействующих потенциалов убывают как  $n^{-2}$ .]

В случае прямоугольной ямы зависимость собственных значений  $\eta_{nl}(0)$  с  $l > 0$  от  $n$  и  $l$  легко получить в явном виде, воспользовавшись условием появления уровней с нулевой энергией

$$j_{l-1}\left(\sqrt{\frac{g}{\eta_{nl}(0)}}\right) = 0$$

и асимптотическим разложением сферической функции Бесселя. В результате имеем

$$\eta_{nl}(0) \approx \frac{4g}{\pi^2 (2n+l-1)^2}, \quad (l-1)(l-\pi) < 2\pi n. \quad (2,67)$$

В системе двух нуклонов вследствие их тождественности возможны только четные триплет-синглетные и синглет-триплетные спин-изоспиновые состояния. Для таких состояний в сепарабельное разложение  $t$ -матрицы наибольший вклад вносят слагаемые с  $n = 1, l = 0; n = 2, l = 0; n = 1, l = 2$  и т. д.; соответствующие собственные значения в порядке

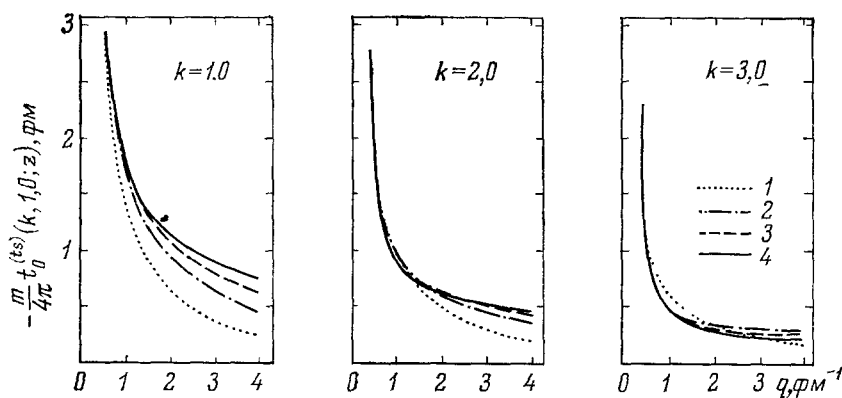


Рис 3. Зависимость частичной двухчастичной  $t$ -матрицы ( $l = 0$ ) от параметра  $q \equiv \sqrt{m|z|}$  ( $z < 0$ ) для трех значений импульса  $k$  ( $k' = 1,0 \text{ фм}^{-1}$ ) в случае потенциала Хюльтена.

Цифры возле кривых указывают порядок приближения (число членов в сепарабельном разложении (2,19), учитываемых при расчете). Использованы значения параметров (а) табл. II для триплет-синглетного спин-изоспинового состояния.

их убывания равны  $\eta_{10}(0) \sim 1; \eta_{20}(0), \eta_{12}(0) \sim 1/9; \eta_{30}(0), \eta_{22}(0), \eta_{14}(0) \sim 1/25$  и т. д. Несмотря на то, что собственные значения  $\eta_{20}$  и  $\eta_{12}$  по величине одного порядка, вклад слагаемого с  $n = 1, l = 2$  в разложении двухчастичной  $t$ -матрицы  $t_l(k, k'; z)$  при малых  $k$  или  $k'$  значительно меньше вклада слагаемого с  $n = 2, l = 0$ . [Вследствие конечности радиуса действия сил функции  $g_{nl}(k, z)$ , а следовательно, и частичные компоненты  $t_l(k, k'; z)$  при малых  $k$  или  $k'$  быстро убывают с ростом  $l$ ,  $g_{nl}(k, z) \sim k^l$ .]

Сходимость разложений двухчастичной  $t$ -матрицы (2,19) при различных значениях импульса  $k$  и отрицательных значений  $z$  ( $q \equiv \sqrt{m|z|}$ ) в случае  $l = 0$  показана для потенциала Хюльтена на рис. 3 и для

прямоугольной ямы — на рис. 4. Как следует из рис. 4, в случае прямоугольной ямы значения двухчастичной  $t$ -матрицы, рассчитанные

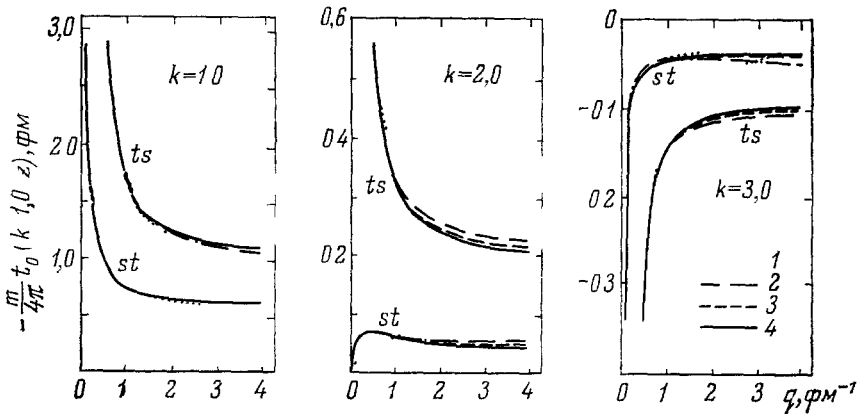


Рис. 4 Зависимость парциальной двухчастичной  $t$ -матрицы ( $l = 0$ ) от параметра  $q \equiv \sqrt{m|z|}$  ( $z < 0$ ) в случае потенциала прямоугольной формы. Использованы значения параметров (а) для триплет-синглетного состояния (кривые  $ts$ ) и синглет-триплетного состояния (кривые  $st$ ). См подпись к рис. 2.

при помощи (2,19) с учетом двух слагаемых, оказываются очень близкими к точным значениям.

### 3. СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ И РАССЕЯНИЕ В СИСТЕМЕ ТРЕХ ОДИНАКОВЫХ БЕСПИНОВЫХ ЧАСТИЦ

#### 3.1. Сепарабельное разложение двухчастичной $t$ -матрицы и одномерные интегральные уравнения для системы трех одинаковых бесспиновых частиц

Воспользуемся теперь введенным сепарабельным разложением двухчастичной  $t$ -матрицы для решения задачи трех частиц. Остановимся вначале на простейшем случае трех одинаковых бесспиновых частиц. Будем исходить из системы двумерных интегральных уравнений (1,52). С помощью разложения Гильберта — Шмидта для двухчастичной  $t$ -матрицы (2,19) систему (1,52) можно свести к системе одномерных интегральных уравнений. Действительно, подставляя (2,19) в (1,52) и используя выражение (2,29) для волновой функции двух частиц в связанном состоянии, функцию  $\psi_{l\lambda L}$  можно представить в виде

$$\psi_{l\lambda L}(k, p; p_0) = (2\pi)^3 \sum_n N_{10} \frac{g_{nl}(k, Z_p)}{k^2 - Z_p} \left\{ \delta_{n1} \delta_{l0} \delta_{\lambda L} \frac{\delta(p-p_0)}{p^2} + \tau_{nl}(Z_p) a_{nl\lambda L}(p, p_0) \right\}, \quad (3,1)$$

где функции  $a_{nl\lambda L}(p, p_0)$  удовлетворяют следующей системе интегральных уравнений.

$$a_{nl\lambda L}(p, p_0) = U_{nl\lambda l, 10LL}(p, p_0; Z) + \sum_{n'l'\lambda'} \int_0^\infty U_{nl\lambda l, n'l'\lambda'}(p, p'; Z) \tau_{n'l'}(Z) a_{n'l'\lambda L}(p', p_0) p'^2 dp', \quad (3,2)$$



$$U_{n\lambda L, n'l'\lambda'L}(p, p'; Z) \equiv \frac{\Delta_l \Delta_{l'}}{2\pi^2} \int_{-1}^1 dy K_{l\lambda, l'\lambda'}^{(L)}(p, p'; y) \frac{g_{nl}(Q, Z_p) g_{n'l'}(Q', Z_{p'})}{\frac{1}{m}(p^2 + p'^2 + pp'y) - Z}, \quad (3,3)$$

$$Q = \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + p'^2 + pp'y}, \quad Q' = \sqrt{p^2 + \frac{1}{4}p'^2 + pp'y}.$$

(При определении величин  $U_{n\lambda L, n'l'\lambda'L}$  мы использовали свойство  $\Delta_l^2 = \Delta_l$ .) Множитель  $\Delta_l$  обращается в нуль при нечетных значениях  $l$ , поэтому обращаются в нуль и все составляющие  $a_{n\lambda L}$  с нечетными  $l$ . Функция  $K_{l\lambda, l'\lambda'}^{(L)}(p, p'; y)$ , входящая в (3,3), определяется выражением (1,54), в котором углы  $\theta$ ,  $\vartheta$  и  $\vartheta'$  выражаются через переменную  $y$  посредством соотношений

$$\cos \theta = y, \quad \cos \vartheta = \frac{\frac{1}{2}p + p'y}{\sqrt{\frac{1}{4}p^2 + p'^2 + pp'y}}, \quad \cos \vartheta' = \frac{p + \frac{1}{2}p'y}{\sqrt{p^2 + \frac{1}{4}p'^2 + pp'y}}. \quad (3,4)$$

Амплитуда упругого рассеяния частицы системой двух частиц, находящихся в связанном состоянии, равна

$$f(p, p_0) = \left[ \frac{p^2 - p_0^2}{4\pi} \int \varphi(\mathbf{k}) \Psi_1(\mathbf{k}, \mathbf{p}; \mathbf{p}_0) \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \right]_{p=p_0}. \quad (3,5)$$

Используя формулы (1,42), (1,51) и (3,1), можно показать, что парциальная амплитуда  $f_L(p_0, p_0)$  непосредственно выражается через величину  $a_{10LL}$  при  $p = p_0$ :

$$f_L(p_0, p_0) = \frac{2\pi m}{3} \left[ \frac{d\eta_{10}(z)}{dz} \right]_{z=-\varepsilon_{10}}^{-1} a_{10LL}(p_0, p_0). \quad (3,6)$$

Итак, волновая функция системы трех частиц  $\Psi_{l\lambda L}$  представляется через функции  $a_{n\lambda L}(p, p_0)$ , которые являются, по сути, амплитудами рассеяния частицы вне энергетической поверхности на системе двух других частиц в связанном состоянии с квантовыми числами  $n_0 = 1$ ,  $l_0 = 0$  (конечное состояние описывается числами  $nl$ ). При этом функции  $U_{n\lambda L, n'l'\lambda'L}$  играют роль матричных элементов эффективного потенциала взаимодействия частицы с системой из двух частиц в связанном состоянии, а функции  $\tau_{nl}(Z_p)$  являются функциями распространения свободной частицы и пары взаимодействующих между собой частиц в связанном состоянии с квантовыми числами  $nl$ . Эффективный потенциал оказывается зависящим от энергии и является нелокальным.

В случае нулевой энергии падающей частицы ( $p_0 = 0$ ) свободный член уравнения (3,2) согласно (3,3) и (1,54) равен

$$U_{n\lambda L, 10LL}(p, 0; -\varepsilon_{10}) = \delta_{L0} \delta_{l\lambda} U_{n1l0, 1000}(p, 0; -\varepsilon_{10}), \quad (3,7)$$

и, следовательно, отличны от нуля только амплитуды  $a_{n\lambda L}(p, 0)$  с равным нулю суммарным орбитальным моментом  $L = 0$  и с  $l = \lambda$ :

$$a_{n\lambda L}(p, 0) = \delta_{L0} \delta_{l\lambda} a_{n1l0}(p, 0). \quad (3,8)$$

Интегральные уравнения, определяющие функции  $a_{n1l0}(p, 0) \equiv a_{nl}(p, 0)$ , имеют вид

$$a_{nl}(p, 0) = U_{nl, 10}(p, 0; -\varepsilon_{10}) + \sum_{n'l'} \int_0^\infty U_{nl, n'l'}(p, p'; -\varepsilon_{10}) \tau_{n'l'} \left( -\varepsilon_{10} - \frac{3}{4} \frac{p'^2}{m} \right) a_{n'l'}(p', 0) p'^2 dp', \quad (3,9)$$

где

$$U_{nl, n'l'}(p, p'; Z) \equiv U_{nl_0, n'l'_0}(p, p'; Z) = \\ = \frac{\Delta_l \Delta_{l'}}{2\pi^2} (2l+1)^{1/2} (2l'+1)^{1/2} (-1)^{l+l'} \int_{-1}^1 P_l(\cos \vartheta) \frac{g_{nl}(Q, Z_p) g_{n'l'}(Q', Z_{p'})}{\frac{1}{m}(p^2 + p'^2 + pp'y) - Z} \times \\ \times P_{l'}(\cos \vartheta') dy. \quad (3,10)$$

Длина рассеяния, т. е. амплитуда упругого рассеяния при нулевой энергии со знаком минус, определяется выражением

$$A = -\frac{2\pi}{3} m \left[ \frac{d\eta_{l0}}{dz} \right]_{z=-\varepsilon_{l0}}^{-1} a_{l0}(0, 0).$$

Запишем также интегральные уравнения для связанного состояния системы трех частиц с полным орбитальным моментом  $L$  и проекцией  $M$ . Используя сепарабельное разложение двухчастичной  $t$ -матрицы (2,19), функции  $\psi_{l\lambda L}$ , удовлетворяющие однородной системе уравнений, соответствующей (1,52), можно представить в виде

$$\psi_{l\lambda L}(k, p) = \sum_n \frac{g_{nl}(k, Z_p)}{\frac{k^2}{m} - Z_p} \tau_{nl}(Z_p) a_{n l \lambda L}(p). \quad (3,11)$$

При этом для парциальных амплитуд  $a_{n l \lambda L}(p)$  получим однородную систему одномерных интегральных уравнений

$$a_{n l \lambda L}(p) = \sum_{n'l'\lambda'} \int_0^\infty U_{n l \lambda L, n'l'\lambda'L}(p, p'; Z) \tau_{n'l'}(Z_{p'}) a_{n'l'\lambda'L}(p') p'^2 dp'. \quad (3,12)$$

Если полный орбитальный момент системы равен нулю,  $L=0$ , то

$$\left. \begin{aligned} U_{n l \lambda 0, n'l'\lambda'0}(p, p'; Z) &= \delta_{il} \delta_{i'l'} U_{nl, n'l'}(p, p'; Z), \\ a_{n l \lambda 0}(p) &= \delta_{il} a_{nl}(p), \end{aligned} \right\} \quad (3,13)$$

и уравнения (3,12) приводятся к виду

$$a_{nl}(p) = \sum_{n'l'} \int_0^\infty U_{nl, n'l'}(p, p'; Z) \tau_{n'l'}(Z_{p'}) a_{n'l'}(p') p'^2 dp'. \quad (3,14)$$

Системы одномерных интегральных уравнений (3,9) и (3,14) допускают численное решение.

### 3.2. Энергии связи и длина рассеяния

Приведем результаты численного решения полученных систем интегральных уравнений (3,9) и (3,14) в случае, если взаимодействие между частицами описывается потенциалом Хюльтена<sup>109, 76</sup> или потенциалом прямоугольной формы<sup>81, 37</sup>. Были рассчитаны энергии связи для систем трех одинаковых частиц в основном и первом возбужденном состоянии с полным моментом, равным нулю ( $L=0$ ),  $E_0$  и  $E_1$  и длина рассеяния одной частицы на системе двух частиц в связанном состоянии  $A$ . С целью изучения сходимости решения при использовании сепарабельного разложения для двухчастичной  $t$ -матрицы в разложении  $t$ -матрицы учитывалось различное число слагаемых.

На рис. 5 и 6 показаны зависимости величин  $\sqrt{mE_0}R$  и  $\sqrt{mE_1}R$  от эффективной глубины двухчастичного взаимодействия  $g$  для потенциала Хюльтена

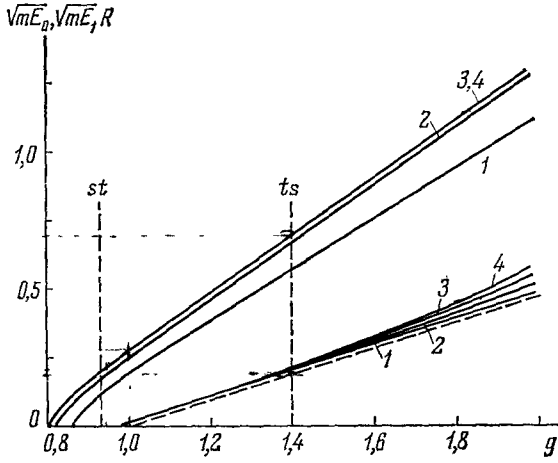


Рис. 5. Зависимость величин  $\sqrt{mE_0}R$  и  $\sqrt{mE_1}R$  ( $E_0$  и  $E_1$  — энергии связи системы трех одинаковых бесспиновых частиц в основном и первом возбужденном состояниях с  $L = 0$ ) от эффективной глубины двухчастичного взаимодействия  $g$  в случае потенциала Хюльтена.

Цифры возле кривых указывают порядок приближения. Штриховая кривая относится к системе двух частиц (зависимость  $\sqrt{m\varepsilon}R$  от  $g$ ,  $\varepsilon$  — энергия связи двух частиц в основном состоянии с  $l = 0$ ). Отмечены значения  $g$  для триплет-синглетного ( $ts$ ) и синглет-триплетного ( $st$ ) состояния двух нуклонов.

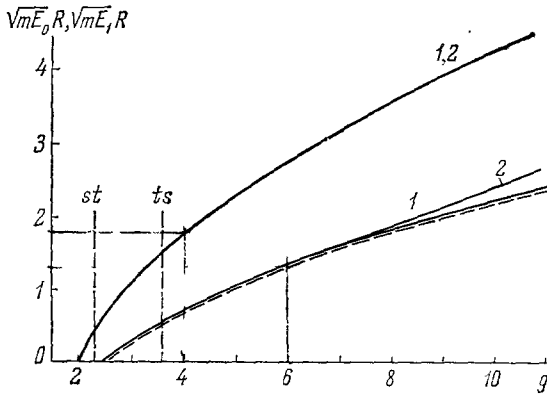


Рис. 6. Зависимость величин  $\sqrt{mE_0}R$  и  $\sqrt{mE_1}R$  от эффективной глубины двухчастичного взаимодействия  $g$  в случае потенциала прямоугольной формы.

См. подпись к рис. 5.

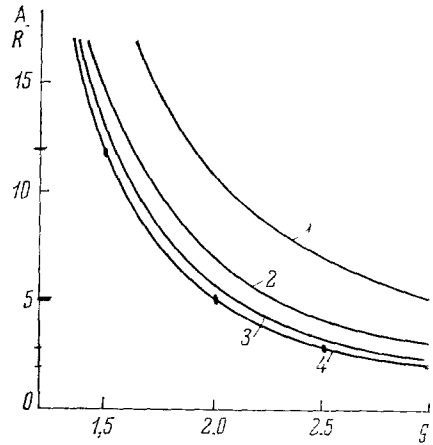


Рис. 7. Зависимость длины рассеяния одной частицы на системе двух частиц в связанном состоянии  $A$  от  $g$  в случае трех одинаковых бесспиновых частиц для потенциала Хюльтена. Цифры возле кривых указывают порядок приближения.

Хюльтена и прямоугольной ямы. Зависимость длины рассеяния  $A$  от  $g$  для потенциала Хюльтена показана на рис. 7. При расчете зависимостей, представленных на рис. 5—7, учитывалось взаимодействие между парами

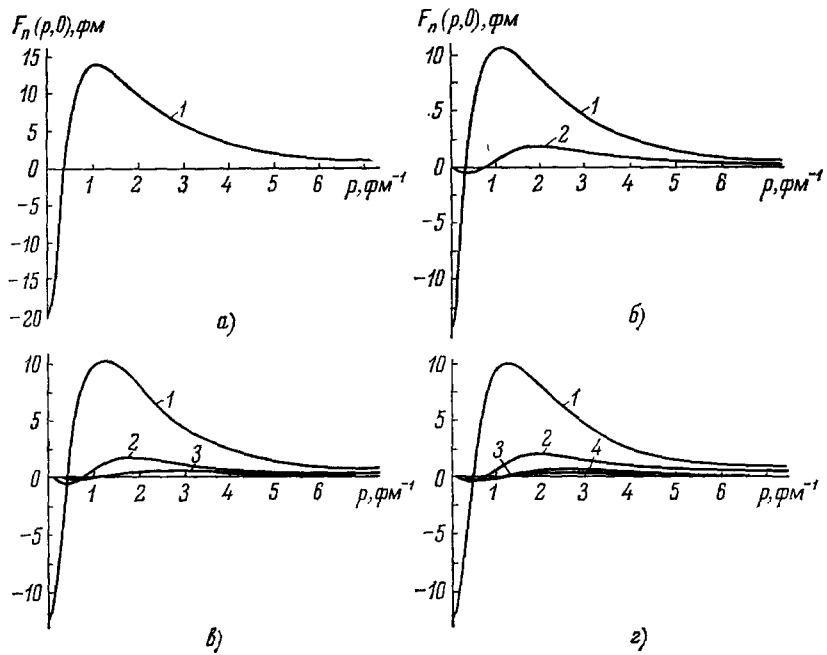


Рис. 8. Функции  $F_n(r, 0)$ , найденные в <sup>76</sup> численном интегрировании системы (3,12) ( $l = 0$ ) в случае потенциала Хюльтена при учете одного (а), двух (б), трех (в) и четырех (г) слагаемых в разложении  $t$ -матрицы (2,19).

Цифры возле кривых указывают значения  $n$ . Используются параметры (а) табл. II для триплет-синглетного состояния двух нуклонов.

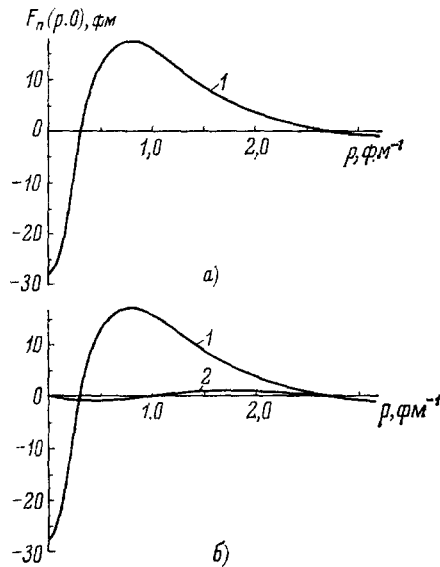


Рис. 9. Функции  $F_n(r, 0)$ , найденные в <sup>37</sup> численном интегрировании системы (3,12) ( $l = 0$ ) в случае прямоугольной ямы при учете одного (а) и двух (б) слагаемых в разложении (2,19).

Цифры возле кривых указывают значения  $n$ . Используются значения параметров (с) табл. II для триплет-синглетного состояния двух нуклонов.

частиц только в  $S$ -состояниях ( $l = 0$ ). Различные кривые получены с учетом различного числа слагаемых в сепарабельном разложении (2,19) [цифры возле кривых указывают порядок приближения, т. е. число слагаемых в разложении (2,19), учитываемых при расчете].

В случае потенциала Хюльтена кривые 3 и 4 для энергии связи основного состояния системы трех частиц практически совпадают; следовательно, при расчете можно ограничиться учетом только трех слагаемых в сепарабельном разложении (2,19). При больших значениях эффективной глубины  $g$  кривая 4 асимптотически переходит в прямую линию, т. е. рассчитанная зависимость  $\sqrt{E_0}$  от  $g$  согласуется с линейной зависимостью

$$\sqrt{mE_0} R = Cg - \frac{3}{4} C^{-1}, \tag{3,15}$$

найденной для потенциала Хюльтена в приближении сильной связи в работе <sup>22</sup>, при значении  $C = 1,03$ . В случае прямоугольной ямы сходимость решения при использовании сепарабельного разложения (2,19) еще лучше, чем в случае потенциала Хюльтена. Как следует из рис. 6, значения энергии связи трех частиц  $E_0$ , рассчитанные с учетом одного и двух слагаемых в разложении (2,19), очень близки.

Расчеты указывают на существование, кроме связанного основного  $S$ -состояния системы трех частиц, еще и возбужденного  $S$ -состояния для всех значений параметра  $g$ , при которых возможно образование связанного основного  $S$ -состояния двух частиц. Для большого интервала параметра  $g$  энергия связи первого возбужденного трехчастичного состояния  $E_1$  незначительно превышает энергию связи основного состояния двух частиц  $\epsilon$ . Возбужденное трехчастичное состояние возможно в случае парных потенциалов различной формы (сепарабельный потенциал Ямагучи <sup>41, 77</sup>, экспоненциальный потенциал <sup>72</sup>, потенциал Хюльтена <sup>76, 84</sup>, прямоугольная яма <sup>37</sup>).

Значения энергии связи и длины рассеяния  $E_0$  и  $A$ , отвечающие параметрам потенциала взаимодействия двух одинаковых бесспиновых частиц, совпадающим с параметрами взаимодействия двух нуклонов в триплет-синглетном спин-изоспиновом состоянии, приведены в табл. I.

Таблица I

Энергия связи трех частиц и длина рассеяния частицы на системе двух частиц в связанном состоянии в случае, если частицы одинаковые и бесспиновые

	Потенциал Хюльтена (триплет-синглетные параметры (a))				Потенциал прямоугольной формы (триплет-синглетные параметры (c))		
	$l = 0$				$l = 0$		$l = 0, 2$
	1	2	3	4	1	2	1
$E_0, \text{ Мэв}$	18,37	25,74	27,13	27,41	20,42	20,64	20,44
$A, \text{ ф.м}$	20,68	14,92	13,53	12,85	29,23	28,34	29,14

Цифры 1, 2, 3 и 4, обозначающие столбцы таблицы, указывают число слагаемых в разложении (2,19), учитываемых при расчете. (Двухнуклонные параметры приведены в табл. II.)

На рис. 8 и 9 показаны составляющие последующих приближений амплитуды

$$F_n(p, 0) \equiv \frac{\pi}{2} p^2 \tau_{n0} \left( -\frac{\kappa^2}{m} - \frac{3}{4} \frac{p^2}{m} \right) a_{n0}(p, 0)$$

Таблица II

Параметры для потенциала Хюльтена и прямоугольной ямы, найденные из данных по взаимодействию двух нуклонов при малых энергиях ( $v_0 \equiv mV_0/\hbar^2$ )

	$v_{0ts}, \text{ фм}^{-2}$	$R_{ts}, \text{ фм}$	$v_{0st}, \text{ фм}^{-2}$	$R_{st}, \text{ фм}$	Двухнуклонные параметры
Потенциал Хюльтена . . . . .	1,8509	0,8708	1,3493	0,8317	(а)
Потенциал прямоугольной формы . . . . .	0,8513	2,043	0,3390	2,586	(а)
	0,8178	2,093	0,3770	2,457	(b)
	0,7945	2,131	0,3380	2,590	(с)

для потенциала Хюльтена (четыре приближения) и для прямоугольной ямы (два приближения). Приведенные зависимости свидетельствуют о хорошей сходимости метода.

Для оценки вклада взаимодействий в состояниях с  $l \neq 0$  в работе <sup>37</sup> были выполнены расчеты энергии связи  $E_0$  и длины рассеяния  $A$  для потенциала прямоугольной формы с учетом взаимодействия в состояниях с  $l = 0$  и  $l = 2$ . [Для упрощения расчетов в сепарабельном разложении (2,19) учитывалось только первое слагаемое  $n = 1$ .] Результаты расчета приведены в табл. I в столбце, отмеченном  $l = 0, 2$ . Как и следовало ожидать, вклад взаимодействия в состоянии с  $l = 2$  оказался незначительным.

Результаты, представленные на рис. 5—7, подтверждают высказанное ранее утверждение, что уточнение сепарабельного разложения, т. е. учет большего числа слагаемых в (2,19) (как и учет взаимодействий в состояниях с высшими орбитальными моментами), приводит только к увеличению притяжения и, следовательно, к увеличению энергий связи трех частиц  $E_0$  и  $E_1$  и уменьшению длины рассеяния частицы на двух других в связанном состоянии  $A$ . Поэтому учет дальнейших поправок в разложении может изменить результаты только в одном направлении.

Проведенные расчеты указывают на сильную зависимость свойств трехчастичной системы от формы двухчастичного взаимодействия даже в случае достаточно короткодействующих сил, в отличие от двухчастичной системы, свойства которой практически не чувствительны к форме двухчастичного взаимодействия. Так, мы видим, что для двухчастичного взаимодействия, описываемого потенциалом Хюльтена и прямоугольной ямой, параметры которых выбраны так, чтобы энергия связи двухчастичной системы, длина рассеяния и радиус эффективного взаимодействия были одинаковыми, в случае трехчастичной системы энергия связи и длина рассеяния одной частицы на двух других частицах в связанном состоянии могут значительно различаться.

#### 4. СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ И РАССЕЯНИЕ В СИСТЕМЕ ТРЕХ НУКЛОНОВ

##### 4.1. Симметрия волновой функции системы трех нуклонов

Полная волновая функция системы трех нуклонов должна быть антисимметричной относительно перестановки пространственных, спиновых и изоспиновых координат любой пары нуклонов. В случае центральных сил ядерное взаимодействие между нуклонами ( $i$  и  $j$ ) характеризуется

потенциалом

$$V_{ij} = \sum_{\nu=1}^4 V^{(\nu)}(r_{ij}) P_{ij}^{(\nu)}(\sigma, \tau), \quad (4,1)$$

где  $P_{ij}^{(\nu)}(\sigma, \tau)$  — оператор проектирования в  $\nu$ -спин-изоспиновое состояние. (Значения  $\nu = 1, 2, 3$  и  $4$  обозначают соответственно триплет-синглетное  $ts$ , триплет-триплетное  $tt$ , синглет-триплетное  $st$  и синглет-синглетное  $ss$  спин-изоспиновые состояния двух нуклонов.)

В системе трех нуклонов, взаимодействие между которыми описывается (4,1), полный спин системы  $S$ , полный изотопический спин  $T$  и их проекции  $M_S$  и  $M_T$  являются сохраняющимися величинами. Полный спин и полный изотопический спин системы трех нуклонов  $S$  и  $T$  могут принимать два значения  $1/2$  и  $3/2$ . Согласно <sup>12</sup> в случае центральных сил (4,1) волновая функция  $\Psi^{ST}$  в зависимости от значений  $S$  и  $T$  может быть представлена в виде

$$\left. \begin{aligned} \Psi^{\frac{1}{2} \frac{1}{2}} &= \Psi^a \xi^s - \Psi^s \xi^a + \Psi' \xi'' - \Psi'' \xi', \\ \Psi^{\frac{3}{2} \frac{1}{2}} &= \Psi' \chi^s \xi'' - \Psi'' \chi^s \xi', \\ \Psi^{\frac{1}{2} \frac{3}{2}} &= \Psi' \chi'' \xi^s - \Psi'' \chi' \xi^s, \\ \Psi^{\frac{3}{2} \frac{3}{2}} &= \Psi^a \chi^s \xi^s; \end{aligned} \right\} \quad (4,2)$$

здесь  $\Psi^a$  и  $\Psi^s$  — симметричная и антисимметричная пространственные функции; функции  $\Psi'$  и  $\Psi''$  при перестановке пространственных координат преобразуются по двумерному неприводимому представлению группы перестановок  $S_3$  <sup>12</sup>. Спиновая функция  $\chi^s$  (изоспиновая функция  $\xi^s$ ) симметрична относительно перестановки спинов (изотопических спинов) трех нуклонов. Спиновые функции  $\chi', \chi''$  (изоспиновые функции  $\xi', \xi''$ ) преобразуются при перестановке спиновых (изоспиновых) координат нуклонов, подобно  $\Psi'$  и  $\Psi''$ . Спин-изоспиновые функции  $\xi^a, \xi^s, \xi'$  и  $\xi''$  равны

$$\left. \begin{aligned} \xi^a &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\chi' \xi'' - \chi'' \xi'), & \xi^s &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\chi' \xi' + \chi'' \xi''), \\ \xi' &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\chi' \xi'' - \chi'' \xi'), & \xi'' &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\chi' \xi' - \chi'' \xi''). \end{aligned} \right\} \quad (4,3)$$

Если проекция полного спина системы  $M_S$  равна  $1/2$ , то спиновые функции определяются выражениями

$$S = \frac{1}{2} : \left\{ \begin{aligned} \chi' &= \frac{1}{\sqrt{2}} \alpha(1) \{ \alpha(2) \beta(3) - \beta(2) \alpha(3) \}, \\ \chi'' &= \frac{1}{\sqrt{6}} \alpha(1) \{ \alpha(2) \beta(3) + \beta(2) \alpha(3) \} - \sqrt{\frac{2}{3}} \beta(1) \alpha(2) \alpha(3); \end{aligned} \right. \quad (4,4)$$

$$S = \frac{3}{2} : \chi^s = \frac{1}{\sqrt{3}} \{ \alpha(1) \alpha(2) \beta(3) + \alpha(1) \beta(2) \alpha(3) + \beta(1) \alpha(2) \alpha(3) \}, \quad (4,5)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — спиновые волновые функции отдельного нуклона, отвечающие проекции спина, равной  $1/2$  и  $-1/2$ . Отметим, что функция  $\chi^s$  соответствует синглетному спиновому состоянию пары нуклонов 2 и 3, а функция  $\chi''$  — триплетному состоянию той же пары нуклонов. Аналогичный вид имеют изоспиновые функции  $\xi'$  и  $\xi''$ .

Волновые функции  $\Psi^{ST}$  при  $T = 1/2$  описывают связанное состояние системы двух нейтронов и протона (тритон  $\text{H}^3$ ) или рассеяние нейтрона на дейтроне ( $n - d$ -рассеяние). При исследовании возможности связанного состояния в системе трех нейтронов  $n^3$  необходимо рассматривать волновые функции  $\Psi^{ST}$  с  $T = 3/2$ . Если система состоит из двух протонов и одного нейтрона (ядро  $\text{He}^3$ ,  $p - d$ -рассеяние), то сохраняющимися величинами являются  $S$ ,  $M_S$  и  $M_T$  (кулоновское взаимодействие между протонами нарушает сохранение полного изотопического спина  $T$ ). В этом случае волновая функция системы может быть представлена в виде суперпозиции функций с  $T = 1/2$  и  $T = 3/2$ .

В дальнейшем будем считать, что пространственные функции  $\Psi^1$ ,  $\Psi^s$ ,  $\Psi'$  и  $\Psi''$  зависят от импульсов, т. е. по всем пространственным координатам произведено преобразование Фурье. Свойства симметрии функций относительно перестановок при этом не изменяются.

#### 4.2. Электромагнитные формфакторы ядер $\text{H}^3$ и $\text{He}^3$

Анализ экспериментальных данных по рассеянию электронов на ядрах удобно проводить на основе введения двух функций переданного импульса — зарядового и магнитного формфакторов, которые представляют собой преобразования Фурье от пространственных распределений электрического заряда и магнитного момента ядра. В случае ядер  $\text{H}^3$  и  $\text{He}^3$  зарядовый и магнитный формфакторы  $F_c(q)$  и  $F_m(q)$  определяются выражениями <sup>106</sup>

$$zF_c(q) = \int e^{iqr} (\Psi, \rho_c \Psi) d\mathbf{r}, \quad \mu F_m(q) = \int e^{iqr} (\Psi, \rho_m \Psi) d\mathbf{r}, \quad (4,6)$$

где  $z$  и  $\mu$  — заряд и магнитный момент соответствующего ядра. [Скобки в (4,6) означают интегрирование по внутренним относительным координатам.] Операторы плотности заряда и магнитного момента  $\rho_c$  и  $\rho_m$  имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \rho_c &= \sum_{i=1}^3 \left[ \frac{1}{2} (1 + \tau_{iz}) \varphi_c^p(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) + \frac{1}{2} (1 - \tau_{iz}) \varphi_c^n(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \right], \\ \rho_m &= \sum_{i=1}^3 \left[ \frac{1}{2} (1 + \tau_{iz}) \mu_p \varphi_m^p(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) + \frac{1}{2} (1 - \tau_{iz}) \mu_n \varphi_m^n(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \right] \sigma_{iz}, \end{aligned} \right\} (4,7)$$

где функции  $\varphi_c$  и  $\varphi_m$  описывают пространственное распределение зарядов и магнитных моментов отдельных нуклонов. Преобразование Фурье от функций  $\varphi_c(r)$  и  $\varphi_m(r)$  обычно называют формфакторами нуклонов

$$f_c(q) = \int e^{iqr} \varphi_c(r) d\mathbf{r}, \quad f_m(q) = \int e^{iqr} \varphi_m(r) d\mathbf{r}. \quad (4,8)$$

Для протона и нейтрона эти формфакторы нормированы следующим образом: 168

$$f_c^p(0) = 1, \quad f_c^n(0) = 0, \quad f_m^p(0) = f_m^n(0) = 1. \quad (4,9)$$

Подставляя в (4,7) волновые функции для ядер  $\text{H}^3$  и  $\text{He}^3$  в виде

$$\Psi^{\text{H}^3} \equiv \Psi^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \quad \text{и} \quad \Psi^{\text{He}^3} \equiv \Psi^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + \Psi^{\frac{1}{2}\frac{3}{2}}$$

и используя формулы (4,7) для операторов плотности заряда и магнитного момента, нетрудно получить явные выражения для формфакто-



ров  $H^3$  и  $He^3$ . В случае ядра  $H^3$  имеем

$$\begin{aligned} F_c^{H^3}(q) &= f_c^p(q) F_0^{H^3}(q) + 2f_c^n(q) F_L^{H^3}(q), \\ \mu_{H^3} F_m^{H^3}(q) &= \mu_p f_m^p(q) G_0^{H^3}(q) + \frac{2}{3} \mu_n f_m^n(q) [G_0^{H^3}(q) - G_L^{H^3}(q)], \end{aligned} \quad (4,10)$$

где

$$\left. \begin{aligned} F_0^{H^3}(q) &= \int e^{iqr_1} [(\Psi^s + \Psi'')^2 + (\Psi' - \Psi^a)^2] d\tau, \\ F_L^{H^3}(q) &= F_0^{H^3}(q) - 3 \int e^{iqr_1} (\Psi^s \Psi'' - \Psi^a \Psi') d\tau, \\ G_0^{H^3}(q) &= F_0^{H^3}(q) - \frac{4}{3} \int e^{iqr_1} (\Psi' - \Psi^a)^2 d\tau, \\ G_L^{H^3}(q) &= F_L^{H^3}(q) - \frac{10}{3} \int e^{iqr_1} \left( \Psi'^2 + \frac{8}{5} \Psi' \Psi^a + \Psi^{a2} \right) d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (4,11)$$

Формулы (4,10) выражают зарядовый и магнитный формфакторы ядра  $H^3$  через формфакторы нуклонов  $f_c(q)$  и  $f_m(q)$  и структурные формфакторы (4,11), которые полностью определяются волновой функцией ядра. Формфакторы  $F_0(q)$  и  $F_L(q)$  описывают пространственное распределение нуклонов в ядре в протонном (непарном) и нейтронном (парном) состояниях, а функции  $G_0(q)$  и  $G_L(q)$  характеризуют распределение среднего значения проекции протонного и нейтронного спина на ось  $z$ . Нормировка структурных формфакторов определяется нормировкой волновой функции ядра. Если полная волновая функция нормирована на единицу, то

$$F_0^{H^3}(0) = F_L^{H^3}(0) = 1, \quad (4,12)$$

и с учетом условий нормировки формфакторов нуклонов (4,9) имеем также  $F_c^{H^3}(0) = 1$ . Заметим, что магнитные формфакторы  $G_0^{H^3}(q)$  и  $G_L^{H^3}(q)$  не нормированы на единицу. Обозначим веса симметричного и антисимметричного состояний и состояния с промежуточной симметрией через  $P^s$ ,  $P^a$  и  $P'$ . Тогда

$$G_0^{H^3}(0) = 1 - \frac{2}{3} (P' + 2P^a), \quad G_L^{H^3}(0) = 1 - \frac{5}{3} (P' + 2P^a). \quad (4,13)$$

Из формулы (4,10) при  $q=0$  с учетом условий нормировки (4,9), (4,13) и условия  $F_m^{H^3}(0) = 1$  нетрудно получить следующее выражение для магнитного момента тритона:

$$\mu_{H^3} = \mu_p + \frac{2}{3} (\mu_n - \mu_p) (P' + 2P^a). \quad (4,14)$$

Аналогичным образом, в случае ядра  $He^3$  для электромагнитных формфакторов получим следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} 2F_c^{He^3}(q) &= f_c^n(q) F_0^{He^3}(q) + 2f_c^p(q) F_L^{He^3}(q), \\ \mu_{He^3} F_m^{He^3}(q) &= \mu_n f_m^n(q) G_0^{He^3}(q) + \frac{2}{3} \mu_p f_m^p(q) [G_0^{He^3}(q) - G_L^{He^3}(q)], \end{aligned} \right\} \quad (4,15)$$

где

$$\left. \begin{aligned}
 F_0^{\text{He}^3}(q) &= \int e^{iqr_1} [(\Psi^s + \Psi'' - \bar{\Psi}'')^2 + (\Psi' + \bar{\Psi}' - \Psi^a)^2] d\tau, \\
 F_L^{\text{He}^3}(q) &= F_0^{\text{He}^3}(q) - 3 \int e^{iqr_1} [\Psi^s (\Psi'' - \bar{\Psi}'') + (\Psi' \bar{\Psi}' - \Psi'' \bar{\Psi}'') - \\
 &\quad - \Psi^a (\Psi' + \bar{\Psi}')] d\tau, \\
 G_0^{\text{He}^3}(q) &= F_0^{\text{He}^3}(q) - \frac{4}{3} \int e^{iqr_1} (\Psi' + \bar{\Psi}' - \Psi^a)^2 d\tau, \\
 G_L^{\text{He}^3}(q) &= F_L^{\text{He}^3}(q) - \frac{10}{3} \int e^{iqr_1} (\Psi' + \bar{\Psi}' - \Psi^a)^2 d\tau - \\
 &\quad - 3 \int e^{iqr_1} [2\Psi^s \bar{\Psi}'' - 2(\Psi' \bar{\Psi}' - \Psi'' \bar{\Psi}'') - \\
 &\quad - (\bar{\Psi}'^2 - \bar{\Psi}''^2) + 2\Psi^a (2\Psi' + \bar{\Psi}')] d\tau.
 \end{aligned} \right\} (4,16)$$

В формулах (4,16) функции  $\Psi^s$ ,  $\Psi'$ ,  $\Psi''$  и  $\Psi^a$  относятся к состоянию с полным изотопическим спином  $T = 1/2$ , а функции  $\bar{\Psi}'$  и  $\bar{\Psi}''$  — к состоянию  $T = 3/2$ . Формфакторы (4,16) нормированы следующим образом:

$$\left. \begin{aligned}
 F_0^{\text{He}^3}(0) &= F_L^{\text{He}^3}(0) = 1, \\
 G_0^{\text{He}^3}(0) &= 1 - \frac{2}{3} \left( P' + 2P^a + \bar{P}' + 4 \int \Psi' \bar{\Psi}' d\tau \right), \\
 G_L^{\text{He}^3}(0) &= 1 - \frac{5}{3} \left( P' + 2P^a + \bar{P}' + 4 \int \Psi' \bar{\Psi}' d\tau \right);
 \end{aligned} \right\} (4,17)$$

$\bar{P}'$  — вес состояния с  $T = 3/2$ . Магнитный момент  $\text{He}^3$  определяется выражением

$$\mu_{\text{He}^3} = \mu_n + \frac{2}{3} (\mu_p - \mu_n) \left( P' + 2P^a + \bar{P}' + 4 \int \Psi' \bar{\Psi}' d\tau \right). \quad (4,18)$$

Если пренебречь в волновой функции  $\text{He}^3$  примесью состояния с  $T = 3/2$  ( $\bar{\Psi}' = \bar{\Psi}'' = 0$ ), то формулы для структурных формфакторов (4,16) совпадают с соответствующими формулами (4,11) для ядра  $\text{H}^3$ .

Раскладывая формфакторы в формулах (4,10) и (4,15) в ряды по  $q^2$ , выразим среднеквадратичные радиусы распределений заряда для ядер  $\text{H}^3$  и  $\text{He}^3$  через среднеквадратичные радиусы распределений для непарного и парного нуклонов  $R_0$  и  $R_L$  и среднеквадратичные радиусы распределений заряда для протона  $r_c(p)$  и нейтрона  $r_c(n)$ :

$$\left. \begin{aligned}
 R_c^2(\text{H}^3) &= R_0^2(\text{H}^3) + r_c^2(p) + 2r_c^2(n), \\
 R_c^2(\text{He}^3) &= R_L^2(\text{He}^3) + r_c^2(p) + \frac{1}{2} r_c^2(n).
 \end{aligned} \right\} (4,19)$$

Подобным образом можно получить также выражения для среднеквадратичных радиусов распределений магнитных моментов ядер  $\text{H}^3$  и  $\text{He}^3$ .

#### 4.3. Интегральные уравнения для системы трех нуклонов

Уравнения Фаддеева нетрудно обобщить на случай системы трех нуклонов с учетом спиновой зависимости взаимодействия между ними<sup>34, 107</sup>. Для этого в уравнениях (1,40), описывающих произвольную систему трех частиц, необходимо учесть операторный характер двухчастичной  $t$ -матрицы в спин-изоспиновом пространстве нуклонов и учесть зависимость волновой функции системы от спиновых и изоспиновых переменных.

При этом вследствие тождественности нуклонов система уравнений (1,40) сводится к одному уравнению:

$$\Psi(\mathbf{k}, \mathbf{p}) = \Phi(\mathbf{k}, \mathbf{p}) + \left(Z_p - \frac{k^2}{m}\right)^{-1} \int \left\{ \langle \mathbf{k} | t_{23}(Z_p) | -\frac{1}{2}\mathbf{p} + \mathbf{p}' \rangle \Psi^{(2)}\left(-\mathbf{p} - \frac{1}{2}\mathbf{p}', \mathbf{p}'\right) + \langle \mathbf{k} | t_{23}(Z_p) | -\frac{1}{2}\mathbf{p} - \mathbf{p}' \rangle \Psi^{(3)}\left(\mathbf{p} + \frac{1}{2}\mathbf{p}', \mathbf{p}'\right) \right\} \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^3}, \quad (4,20)$$

где функции  $\Psi^{(2)}$  и  $\Psi^{(3)}$  отличаются от функции  $\Psi \equiv \Psi^{(1)}$  циклической перестановкой пространственных, спиновых и изоспиновых координат нуклонов.

В случае центрального взаимодействия (4,1) двухнуклонная  $t$ -матрица, входящая в (4,20), может быть представлена в виде

$$\langle \mathbf{k} | t_{ij}(z) | \mathbf{k}' \rangle = \sum_{\nu=1}^4 \langle \mathbf{k} | t^{(\nu)}(z) | \mathbf{k}' \rangle P_{ij}^{(\nu)}(\sigma, \tau), \quad (4,21)$$

где  $t^{(\nu)}(z)$  — собственное значение  $t$ -матрицы в определенном спин-изоспиновом состоянии  $\nu$ . Проектируя уравнение (4,20) на возможные спин-изоспиновые состояния системы трех нуклонов, можно получить систему интегральных уравнений для пространственных функций  $\Psi^a, \Psi^s, \Psi'$  и  $\Psi''$ .

Взамен функций  $\Psi^a, \Psi^s, \Psi'$  и  $\Psi''$ , преобразующихся при перестановке любой пары частиц по неприводимым представлениям группы перестановок  $S_3$ , удобно перейти к функциям  $\psi_\nu(\mathbf{k}_{ij}, \mathbf{p}_k)$ , соответствующим определенным спин-изоспиновым состояниям  $\nu = 1, 2, 3$  и  $4$  пары частиц  $ij$ . Функции  $\psi_\nu(\mathbf{k}_{ij}, \mathbf{p}_k)$  при  $\nu = 1, 3$  являются четными, а при  $\nu = 2, 4$  — нечетными относительно перестановки частиц  $i$  и  $j$  ( $\mathbf{k}_{ij} \rightarrow \mathbf{k}_{ji} = -\mathbf{k}_{ij}$ ):

$$\psi_\nu(-\mathbf{k}, \mathbf{p}) = (-1)^{\nu+1} \psi_\nu(\mathbf{k}, \mathbf{p}). \quad (4,22)$$

В случае  $S = 1/2, T = 1/2$  пространственные функции  $\Psi^a, \Psi^s, \Psi'$  и  $\Psi''$  выражаются через четыре функции  $\psi_\nu$  с  $\nu = 1, 2, 3$  и  $4$ ; в случае  $S = 1/2, T = 3/2$  пространственные функции  $\Psi'$  и  $\Psi''$  выражаются через две функции,  $\psi_2$  и  $\psi_3$ ; в случае  $S = 3/2, T = 1/2$  пространственные функции  $\Psi'$  и  $\Psi''$  выражаются через две функции,  $\psi_1$  и  $\psi_2$ ; наконец, в случае  $S = 3/2, T = 3/2$  пространственная функция  $\Psi^a$  выражается через одну функцию  $\psi_2$ :

$$\left. \begin{aligned} S = \frac{1}{2}, \quad T = \frac{1}{2}: \quad & \Psi^a = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \psi_2(1) + \psi_4(1) + \\ & + \psi_2(2) + \psi_4(2) + \psi_2(3) + \psi_4(3) \}, \\ \Psi^s = & \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \psi_1(1) + \psi_3(1) + \psi_1(2) + \psi_3(2) + \psi_1(3) + \psi_3(3) \}, \\ \Psi' = & -\frac{1}{\sqrt{2}} \{ \psi_2(1) - \psi_4(1) - \\ & - \frac{1}{2} [\psi_2(2) - \psi_4(2) + \psi_2(3) - \psi_4(3)] + \\ & + \frac{\sqrt{3}}{2} [\psi_1(2) - \psi_3(2) - \psi_1(3) + \psi_3(3)] \}, \\ \Psi'' = & -\frac{1}{\sqrt{2}} \{ \psi_1(1) - \psi_3(1) - \\ & - \frac{1}{2} [\psi_1(2) - \psi_3(2) + \psi_1(3) - \psi_3(3)] - \\ & - \frac{\sqrt{3}}{2} [\psi_2(2) - \psi_4(2) - \psi_2(3) + \psi_4(3)] \}; \end{aligned} \right\} \quad (4,23)$$

$$\left. \begin{aligned} S = \frac{1}{2}, T = \frac{3}{2}: \Psi' &= \psi_2(1) - \frac{1}{2} [\psi_2(2) + \psi_2(3)] - \\ &\quad - \frac{\sqrt{3}}{2} [\psi_3(2) - \psi_3(3)], \\ \Psi'' &= -\psi_3(1) - \frac{\sqrt{3}}{2} [\psi_2(2) - \psi_2(3)] + \\ &\quad + \frac{1}{2} [\psi_3(2) + \psi_3(3)]; \end{aligned} \right\} (4,24)$$

$$\left. \begin{aligned} S = \frac{3}{2}, T = \frac{1}{2}: \Psi' &= \psi_2(1) - \frac{\sqrt{3}}{2} [\psi_1(2) - \psi_1(3)] - \\ &\quad - \frac{1}{2} [\psi_2(2) + \psi_2(3)], \\ \Psi'' &= -\psi_1(1) + \frac{1}{2} [\psi_1(2) + \psi_1(3)] - \\ &\quad - \frac{\sqrt{3}}{2} [\psi_2(2) - \psi_2(3)]; \end{aligned} \right\} (4,25)$$

$$S = \frac{3}{2}, T = \frac{3}{2}: \Psi^a = \psi_2(1) + \psi_2(2) + \psi_2(3). \quad (4,26)$$

Для сокращения записи мы использовали обозначение

$$\psi_\nu(k) \equiv \psi_\nu(\mathbf{k}_{ij}, \mathbf{p}_k), \quad ijk = 123, 231, 312.$$

Системы функций  $\psi_\nu$ , вообще говоря, различаются для различных спин-изоспиновых состояний системы трех нуклонов, т. е. для различных значений  $S$  и  $T$ .

Система интегральных уравнений для функций  $\psi_\nu(\mathbf{k}, \mathbf{p})$  при произвольных значениях спина и изоспина системы трех нуклонов может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \psi_\nu(\mathbf{k}, \mathbf{p}) &= \varphi_\nu(\mathbf{k}, \mathbf{p}) + (Z_p - \frac{k^2}{m})^{-1} \sum_{\nu'=1}^4 \left\{ \langle \mathbf{k} | t^{(\nu)}(Z_p) | -\frac{1}{2} \mathbf{p} + \mathbf{p}' \rangle + \right. \\ &+ (-1)^{\nu+1} \langle \mathbf{k} | t^{(\nu)}(Z_p) | -\frac{1}{2} \mathbf{p} - \mathbf{p}' \rangle \left. \right\} c_{\nu\nu'} \psi_{\nu'}(\mathbf{p} + \frac{1}{2} \mathbf{p}', \mathbf{p}') \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^3}, \quad (4,27) \\ &\nu = 1, 2, 3, 4, \end{aligned}$$

где матрицы  $c_{\nu\nu'}^{(ST)}$  для различных спин-изоспиновых состояний системы трех нуклонов определяются выражениями

$$\left. \begin{aligned} c_{\nu\nu'}^{(\frac{1}{2} \frac{1}{2})} &= \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} 1 & \sqrt{3} & 3 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 & -\sqrt{3} & -3 \\ 3 & -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -3 & \sqrt{3} & -1 \end{Bmatrix}, \\ c_{\nu\nu'}^{(\frac{1}{2} \frac{3}{2})} &= \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}, \\ c_{\nu\nu'}^{(\frac{3}{2} \frac{1}{2})} &= \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} -1 & -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ -\sqrt{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}, \quad c_{\nu\nu'}^{(\frac{3}{2} \frac{3}{2})} = -\delta_{\nu 2} \delta_{\nu' 2}. \end{aligned} \right\} (4,28)$$

При рассмотрении связанных состояний системы трех нуклонов свободный член в (4,27) следует положить равным нулю. Отметим, что интегральное уравнение для системы трех одинаковых бесспиновых частиц (1,43) совпадает с (4,27), если в последнем положить

$$c_{\nu\nu'} = \delta_{\nu 1} \delta_{\nu' 1}. \quad (4,29)$$

При выводе (4,27) мы пренебрегали кулоновским взаимодействием, поэтому уравнения (4,27) пригодны только для описания системы, состоящей из трех нейтронов или же из двух нейтронов и одного протона \*). В системе, состоящей из двух нейтронов и протона, возможно связанное состояние (тритон), а также возможно рассеяние нейтрона на двух других частицах в связанном состоянии. В последнем случае свободный член в уравнении (4,27) следует выбрать в виде

$$\varphi_{\nu}(\mathbf{k}, \mathbf{p}) = (2\pi)^3 \varphi(\mathbf{k}) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) \delta_{\nu 1}, \quad (4,30)$$

где  $\varphi(\mathbf{k})$  — волновая функция основного состояния дейтрона. Так как два нейтрона не образуют связанной системы, в случае трех нейтронов можно рассматривать только задачу о связанном состоянии.

#### 4.4. Рассеяние нейтрона на дейтроне

Остановимся подробнее на рассмотрении задачи о рассеянии нейтрона на дейтроне. Так как изотопический спин дейтрона равен нулю, полный изотопический спин системы  $T$  равен  $1/2$ , а обычный спин может принимать два значения  $1/2$  и  $3/2$  (дублетное и квинтетное состояния). Учитывая инвариантный характер пространственных функций  $\varphi_{\nu}(\mathbf{k}, \mathbf{p})$  относительно поворотов, разложим функции  $\varphi_{\nu}(\mathbf{k}, \mathbf{p})$  по угловым функциям в виде (1,51). Для коэффициентов такого разложения — функций  $\psi_{i\lambda L}^{(\nu)}(k, p; p_0)$ , так же как и в случае трех бесспиновых частиц, получим систему двумерных интегральных уравнений

$$\begin{aligned} \psi_{i\lambda L}^{(\nu)}(k, p; p_0) = & (2\pi)^3 \varphi_{10}(k) \frac{\delta(p-p_0)}{p^2} \delta_{i0} \delta_{\lambda L} \delta_{\nu 1} + \\ & + \frac{\Delta_i^{(\nu)}}{\pi^2 \left( Z_p - \frac{k^2}{m} \right)} \sum_{\nu' i' \lambda'} c_{\nu\nu'} \int_0^{\infty} dp' \int_{|p-p'/2|}^{p+p'/2} dk' \frac{k' p'}{p} t_{i'}^{(\nu)}(k, Q; Z_p) \times \\ & \times K_{i\lambda, i' \lambda'}^{(L)}(p, p'; k') \psi_{i' \lambda' L}^{(\nu')}(k', p'; p_0), \end{aligned} \quad (4,31)$$

где функции  $K_{i\lambda, i' \lambda'}^{(L)}$  по-прежнему определяются выражением (1,54) и

$$\Delta_i^{(\nu)} \equiv \frac{1}{2} [1 + (-1)^{l+\nu+1}] \quad (4,32)$$

( $p_0$  — относительный импульс нейтрона и дейтрона в начальном состоянии).

Используя сепарабельное разложение для двухчастичной  $t$ -матрицы (2,19) и выражение (2,29) для волновой функции дейтрона, функцию  $\psi_{i\lambda L}^{(\nu)}$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} \psi_{i\lambda L}^{(\nu)}(k, p; p_0) = \\ = N_{10} (2\pi)^3 \sum_n \frac{g_{ni}^{(\nu)}(k, Z_p)}{k^2 - Z_p} \left\{ \frac{\delta(p-p_0)}{p^2} \delta_{n1} \delta_{i0} \delta_{\lambda L} \delta_{\nu 1} + \tau_{ni}^{(\nu)}(Z_p) a_{ni\lambda L}^{(\nu)}(p, p_0) \right\}, \end{aligned} \quad (4,33)$$

\*) Интегральные уравнения для системы из двух протонов и одного нейтрона в связанном состоянии (ядро  $\text{He}^3$ ) получены в работе <sup>36</sup>. В работе Веселовой <sup>113</sup> предложен метод получения интегральных уравнений для волновой функции, описывающей рассеяние заряженной частицы на связанном состоянии двух других заряженных частиц.

где введено обозначение

$$\tau_{nl}^{(v)}(z) = \eta_{nl}^{(v)}(z) [1 - \eta_{nl}^{(v)}(z)]^{-1}. \quad (4,34)$$

Функции  $a_{nl\lambda L}^{(v)}(p, p_0)$  определяются следующей системой одномерных интегральных уравнений:

$$a_{nl\lambda L}^{(v)}(p, p_0) = c_{v1} U_{nl\lambda L, 10LL}^{(v, 1)}(p; p_0; Z) + \\ + \sum_{v'n'\lambda'} c_{vv'} \int_0^\infty dp' p'^2 U_{nl\lambda L, n'l'\lambda'L}^{(vv')}(p, p'; Z) \tau_{n'l'}^{(v')}(Z_{p'}) a_{n'l'\lambda'L}^{(v')}(p', p_0), \quad (4,35)$$

где эффективный потенциал  $U$  определяется выражением

$$U_{nl\lambda L, n'l'\lambda'L}^{(v, v')}(p, p'; Z) = \\ = \frac{\Delta_l^{(v)} \Delta_{l'}^{(v')}}{2\pi^2} \int_{-1}^1 dy K_{l\lambda, l'\lambda'}^{(L)}(p, p'; y) \frac{g_{nl}^{(v)}(Q, Z_p) g_{n'l'}^{(v')}(Q', Z_{p'})}{\frac{1}{m}(p^2 + p'^2 + pp'y) - Z}. \quad (4,36)$$

Из (4,34) — (4,36) следует, что составляющие  $a_{nl\lambda L}^{(v)}$  с  $v$  и  $l$  одинаковой четности равны нулю. Это непосредственно связано с принципом Паули, в силу которого для пары нуклонов триплет-синглетное и синглет-триплетное спин-изоспиновые состояния ( $v=1$  и  $3$ ) с нечетными  $l$  и триплет-триплетное и синглет-синглетное состояния ( $v=2$  и  $4$ ) с четными  $l$  запрещены.

Амплитуды упругого рассеяния нейтрона на дейтроне в квартетном и дублетном спиновых состояниях  $f^{3/2}$  и  $f^{1/2}$  определяются формулами

$$\left. \begin{aligned} f^{3/2}(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) &= -\frac{m}{3\pi} \int e^{-i\mathbf{p}\boldsymbol{\rho}} \left( \varphi(\mathbf{r}) \chi^s \zeta', \left[ V_{31} \left( -\frac{1}{2} \mathbf{r} - \boldsymbol{\rho} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + V_{12} \left( -\frac{1}{2} \mathbf{r} + \boldsymbol{\rho} \right) \right] \Psi^{2\frac{1}{2}}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}; \mathbf{p}_0) \right) d\mathbf{r} d\boldsymbol{\rho}, \\ f^{1/2}(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) &= -\frac{m}{3\pi} \int e^{-i\mathbf{p}\boldsymbol{\rho}} \left( \varphi(\mathbf{r}) \chi^s \zeta', \left[ V_{31} \left( -\frac{1}{2} \mathbf{r} - \boldsymbol{\rho} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + V_{12} \left( -\frac{1}{2} \mathbf{r} + \boldsymbol{\rho} \right) \right] \Psi^{1\frac{1}{2}}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}; \mathbf{p}_0) \right) d\mathbf{r} d\boldsymbol{\rho}. \end{aligned} \right\} \quad (4,37)$$

[Индексы 23, 31 и 12 в правой части (4,37) нумеруют частицы.] Парциальные амплитуды  $f_L^{\frac{3}{2}}$  и  $f_L^{\frac{1}{2}}$  непосредственно выражаются через функции  $a_{10LL}^{(1)}(p_0, p_0)$  для соответствующих спиновых состояний:

$$f_L(p_0, p_0) = \frac{2\pi}{3} m \left( \frac{d\eta_{10}^{(1)}(z)}{dz} \right)_{z=-\varepsilon_{10}}^{-1} a_{10LL}^{(1)}(p_0, p_0). \quad (4,38)$$

Длина рассеяния нейтрона на дейтроне в определенном спиновом состоянии определяется выражением

$${}^{2S+1}A = -f_0^S(0, 0). \quad (4,39)$$

#### 4.5. Связанное состояние системы трех нуклонов

Рассмотрим теперь систему трех нуклонов, находящихся в связанном состоянии с полным орбитальным моментом  $L$  и проекцией  $M$ . Выделим в волновой функции системы угловую часть

$$\Psi_{vLM}(\mathbf{k}, \mathbf{p}) = \sum_{l\lambda} \psi_{l\lambda}^{(v)}(k, p) Y_{lLM}(\hat{k}, \hat{p}). \quad (4,40)$$

Подставляя (4,40) в (4,27), получим для  $\psi_{i\lambda L}^{(v)}$  однородную систему двумерных интегральных уравнений, имеющую вид системы (1,52) без неоднородного слагаемого. Используя сепарабельное разложение для  $t_i^{(v)}(k, Q; Z_p)$ , функции  $\psi_{i\lambda L}^{(v)}$  можно представить в виде

$$\psi_{i\lambda L}^{(v)}(k, p) = \sum_n \frac{g_{nl}^{(v)}(k, Z_p)}{k^2 - Z_p} \tau_{nl}^{(v)}(Z_p) a_{nl\lambda L}^{(v)}(p). \quad (4,41)$$

Парциальные составляющие  $a_{nl\lambda L}^{(v)}$  определяются однородной системой одномерных интегральных уравнений

$$a_{nl\lambda L}^{(v)}(p) = \sum_{v'n'l'\lambda'} c_{vv'} \int_0^\infty dp' p'^2 U_{nl\lambda L, n'l'\lambda'L}^{(v, v')}(p, p'; Z) \tau_{n'l'}^{(v')}(Z_p) a_{n'l'\lambda'L}^{(v')}(p'). \quad (4,42)$$

Эта система интегральных уравнений допускает решения при строго определенных значениях  $Z$ , которые и определяют энергии связанных состояний системы.

#### 4.6. Энергия связи ядер $H^3$ и $He^3$

Рассмотрим вначале результаты расчетов энергии связи трехнуклонных ядер, которые были проведены в предположении, что взаимодействие между нуклонами описывается парными центральными потенциалами, характеризующимися двумя параметрами, которые определяют величину и радиус действия сил. Значения параметров двухнуклонных потенциалов в триплет-синглетном и синглет-триплетном спин-изоспиновых состояниях можно определить, если воспользоваться экспериментальными данными по рассеянию нуклонов на нуклонах при низких энергиях и энергии связи системы нейтрон — протон. В случае центрального взаимодействия значения триплет-синглетных параметров определяются по длине рассеяния нейтрона на протоне  $a_{ts}$  и энергии связи дейтрона  $\epsilon_d$ . Так как синглетное связанное состояние системы двух нуклонов отсутствует, синглет-триплетные параметры определяются по длине рассеяния  $a_{st}$  и величине эффективного радиуса  $r_{ost}$ . Отметим, что параметры  $a_{st}$  и  $r_{ost}$  для синглет-триплетного спин-изоспинового состояния известны с меньшей точностью, чем триплет-синглетные параметры. О взаимодействии между нуклонами в нечетных состояниях (в триплет-триплетном и синглет-синглетном спин-изоспиновых состояниях) известно еще меньше, чем о взаимодействии в четных состояниях. При достаточно малых энергиях относительного движения двух нуклонов потенциалами взаимодействия  $V_{tt}$  и  $V_{ss}$  можно пренебречь по сравнению с потенциалами  $V_{ts}$  и  $V_{st}$ .

Имеющиеся данные о двухнуклонном взаимодействии обсуждаются в обзоре Нойеса<sup>97</sup>.

Приведем несколько наборов значений двухнуклонных параметров, которые использовались в работах<sup>109, 76, 81, 79, 37</sup> при расчетах трехчастичных энергий связи и длин рассеяния. Согласно<sup>38</sup>

$$a_{ts} = 5,378 \text{ фм}, \quad \epsilon_d = 2,225 \text{ Мэв}, \quad a_{st} = -23,69 \text{ фм}, \quad r_{ost} = 2,7 \text{ фм}. \quad (a)$$

Параметры, полученные на основании измерений Хоука и Вильсона<sup>71</sup>, равны

$$\begin{aligned} a_{ts} &= 5,405 \pm 0,006 \text{ фм}, & a_{st} &= -23,728 \pm 0,013 \text{ фм}, \\ \epsilon_d &= 2,225 \text{ Мэв}, & r_{ost} &= 2,56 \pm 0,10 \text{ фм}. \end{aligned} \quad (b)$$

Результаты измерений Хоука и Вильсона <sup>71</sup> и Костера <sup>82</sup> приводят к значениям

$$\begin{aligned} a_{ts} &= 5,425 \pm 0,004 \text{ фм}, & a_{st} &= -23,714 \pm 0,013 \text{ фм}, \\ \varepsilon_d &= 2,225 \text{ Мэв}, & r_{ost} &= 2,704 \pm 0,095 \text{ фм}. \end{aligned} \quad (\text{с})$$

Основным состоянием системы, состоящей из двух нейтронов и одного протона, в случае центральных сил является состояние с полным орбитальным моментом, равным нулю,  $L = 0$  (тритон  $\text{H}^3$ ,  $S = 1/2$ ,  $T = 1/2$ ). Значения энергии связи тритона  $E_T$ , рассчитанные методом сепарабельного разложения для потенциала Хюльтена <sup>109, 76</sup> и прямоугольной ямы <sup>81, 37</sup>, приведены в табл. III (обозначения такие же, как в табл. I). Значения параметров двухнуклонных потенциалов, использованные в этих расчетах, даны в табл. II.

Таблица III  
Энергия связи тритона и длины рассеяния нейтрона на дейтроне

	Потенциал Хюльтена		Потенциал прямоугольной формы			Двухнуклонные параметры
	$l = 0$		$l = 0$		$l = 0, 2$	
	1	2	1	2	1	
$E_T, \text{ Мэв}$	7,91	11,46	9,07	9,20	—	(а)
	—	—	9,39	9,53	—	(б)
	—	—	8,95	9,08	8,97	(с)
$^2A, \text{ фм}$	-0,19	-2,88	0,512	0,451	—	(а)
	—	—	0,204	0,145	—	(б)
	—	—	0,545	0,487	0,542	(с)
$^4A, \text{ фм}$	6,403	6,361	6,284	6,279	—	(а)
	—	—	6,315	6,310	—	(б)
	—	—	6,338	6,333	6,338	(с)

В случае потенциала Юкавы значения  $E_T$ , рассчитанные Ефимовым <sup>15</sup> на основе метода Бубнова — Галеркина с параметрами (а) для  $a_{ts}$ ,  $\varepsilon_d$  и  $a_{st}$ , но с другими значениями  $r_{ost}$ , оказались равными  $E_T = 11,65 \text{ Мэв}$  ( $r_{ost} = 2,21 \text{ фм}$ ) и  $E_T = 10,83 \text{ Мэв}$  ( $r_{ost} = 2,5 \text{ фм}$ ).

В работе <sup>5</sup> энергия связи тритона была рассчитана в случае прямоугольной ямы на основе метода гармонических полиномов. Для сравнения с результатами <sup>5</sup> в работе <sup>81</sup> методом сепарабельного разложения было вычислено значение  $E_T$  при тех же параметрах, что и в работе <sup>5</sup>. (Использованные в <sup>5</sup> триплетные параметры совпадают со значениями  $a_{ts}$  и  $\varepsilon_d$  набора (а), а синглетные параметры взяты из данных  $pp$ -рассеяния <sup>38</sup>:  $a_{st} = 16,83 \text{ фм}$ ,  $r_{ost} = 2,74 \text{ фм}$ .) Значение  $E_T$ , рассчитанное для указанного набора параметров, оказалось равным  $E_T = 8,71 \text{ Мэв}$  при учете в разложении (2,19) только первого слагаемого и  $E_T = 8,84 \text{ Мэв}$  при учете в (2,19) двух слагаемых ( $n = 1$  и  $2$ ,  $l = 0$ ). Сравнение величины  $E_T = 8,84 \text{ Мэв}$ , полученной в работе <sup>81</sup>, со значением  $E_T = 8,43 \text{ Мэв}$  работы <sup>5</sup>, указывает на лучшую сходимость метода сепарабельного разложения по сравнению со сходимостью метода гармонических полиномов. (При использовании обоих методов дальнейшие поправки к энергии связи могут только увеличить значение  $E_T$ .)



Центральные притягивающие потенциалы, согласованные с данными по взаимодействию двух нуклонов при малых энергиях, приводят к завышенным значениям энергии связи тритона по сравнению с экспериментальным значением  $E_T = 8,482 \text{ Мэв}$ . Значения  $E_T$ , найденные для потенциалов различной формы, значительно различаются между собой. Энергия связи  $E_T$  принимает меньшие значения для потенциалов менее протяженных и менее сингулярных. Энергия связи тритона для потенциала прямоугольной формы (изменяющаяся для различных значений двухнуклонных параметров в интервале от 8,84 до 9,53 Мэв) согласуется с экспериментальным значением лучше по сравнению с энергиями для других потенциалов. Энергия связи  $E_T$  весьма сильно уменьшается с увеличением синглетного эффективного радиуса  $r_{ost}$ . Зависимость  $E_T$  от двухчастичной длины  $a_{st}$  довольно слабая<sup>108, 78</sup>.

Разность энергий связи тритона и ядра  $\text{He}^3$  (экспериментальное значение энергии связи  $\text{He}^3$  равно  $E_{\text{He}^3} = 7,718 \text{ Мэв}$ ,  $\Delta E \equiv E_T - E_{\text{He}^3} = 0,764 \text{ Мэв}$ ) хорошо объясняется учетом кулоновского взаимодействия между протонами в ядре  $\text{He}^3$ . В работе<sup>5</sup> кулоновская энергия для ядра  $\text{He}^3$  рассчитывалась в случае потенциала прямоугольной формы на основе метода гармонических полиномов в первом порядке по теории возмущений. При использовании указанных выше параметров для двухнуклонного взаимодействия значение  $\Delta E$  оказалось равным 0,789 Мэв. Как мы уже отмечали, кулоновское взаимодействие между нуклонами приводит к примеси в волновой функции  $\text{He}^3$  состояния с  $T = 3/2$ . Непосредственное решение системы дифференциальных уравнений при учете гармоник с  $K = 0$  и  $K = 2$  приводит<sup>35</sup> в этом случае для потенциала прямоугольной формы к близкому значению разности  $\Delta E$  [ $\Delta E = 0,777 \text{ Мэв}$  в случае параметров (b) и  $\Delta E = 0,751 \text{ Мэв}$  в случае параметров (c)].

Правильное поведение амплитуды рассеяния двух нуклонов на энергетической поверхности при малых энергиях можно обеспечить, описывая взаимодействие между нуклонами потенциалом, содержащим два параметра, которые определяются заданием двух экспериментальных величин — длины рассеяния и эффективного радиуса. Для нахождения двухчастичной амплитуды рассеяния на энергетической поверхности в большем интервале энергий необходимо использовать более сложные потенциалы, характеризуемые большим числом параметров. Как известно, данные по рассеянию нуклона на нуклоне в области больших энергий указывают на существование сильного отталкивания между нуклонами на малых расстояниях. Введение отталкивающей сердцевин в двухнуклонном потенциале позволяет объяснить изменение знака  $S$ -фазы рассеяния при больших энергиях. Потенциал с отталкиванием на малых расстояниях и с последующим короткодействующим притяжением должен содержать по крайней мере три параметра. Введение радиуса отталкивающей сердцевин — добавочного параметра, характеризующего отталкивание, позволяет правильно описать амплитуду рассеяния не только при малых, но и при больших энергиях. Для того чтобы потенциал с отталкиванием описывал данные по взаимодействию двух нуклонов при малых энергиях, притягивающая часть этого потенциала должна быть глубже, а ее радиус меньше по сравнению с соответствующими величинами для чисто притягивающего потенциала<sup>38</sup>.

Влияние короткодействующего отталкивания на величину энергии связи трех нуклонов изучалось в ряде работ как для сепарабельных<sup>110, 53, 74</sup>, так и для локальных<sup>91, 3, 11, 48, 80</sup> потенциалов. В работе<sup>80</sup> энергия связи тритона была рассчитана на основании сепарабельного разложения (2,22) для локального потенциала с бесконечным отталкиванием и с притяжением в виде прямоугольной ямы. Параметры потенциала

определялись из низкоэнергетичных данных (с) и зависимости  $S$ -фазы от энергии в интервале от 0 до 400 Мэв<sup>90</sup>. Значения радиусов отталкивающей сердцевины оказались равными 0,186 фм в случае триплетного спинового состояния и 0,180 фм в случае синглетного состояния. Рассчитанная энергия связи тритона равна  $E_T = 8,8$  Мэв<sup>90</sup>. Это значение очень мало отличается от значения  $E_T = 9,1$  Мэв, полученного для чисто притягивающей прямоугольной ямы<sup>81</sup>.

Расчеты, выполненные на основе сепарабельного разложения Бейтмана<sup>11, 2, 3</sup>, привели в случае потенциала Морзе<sup>57</sup>

$$V(r) = -V_0 \left( 2e^{-\frac{r-c}{R}} - e^{-2\frac{r-c}{R}} \right) \quad (4,43)$$

к следующим значениям энергии связи тритона:  $E_T = 9,12$  Мэв ( $a_{st} = -23,68$  фм,  $r_{ost} = 2,44$  фм),  $E_T = 8,10$  Мэв ( $a_{st} = -17$  фм,  $r_{ost} = 2,80$  фм). В случае суперпозиции юкавских потенциалов притяжения и отталкивания<sup>91</sup>

$$V(r) = -V_{01} \frac{e^{-\frac{r}{R_1}}}{r} + V_{02} \frac{e^{-\frac{r}{R_2}}}{r} \quad (4,44)$$

непосредственное решение однородной системы двумерных интегральных уравнений (4,31) приводит к значению  $E_T = 8,3$  Мэв<sup>91</sup>, а решение на основе бейтмановского разложения ( $N = 4$ ) — к значению  $E_T = 8,56$  Мэв<sup>3</sup> ( $a_{ts} = 5,45$  фм,  $r_{ots} = 1,8$  фм,  $a_{st} = -23,3$  фм,  $r_{ost} = 2,8$  фм). [В случае чисто притягивающего юкавского потенциала ( $V_{02} = 0$ ), соответствующего тем же значениям двухнуклонных параметров,  $E_T = -12,1$  Мэв<sup>91</sup>.] Отметим, что значения энергии связи тритона для различных потенциалов, правильно описывающих фазы двухнуклонного рассеяния в большом интервале энергий, довольно близки между собой. Учет тензорных сил в двухнуклонном взаимодействии может существенно сказаться на результатах. Так, в случае сепарабельного потенциала<sup>26, 108, 78, 54, 94, 102</sup> введение тензорных сил, для которых вес  $D$ -волны в основном состоянии дейтрона составляет 4%, приводит к уменьшению энергии связи тритона на 15—20%. Как уже отмечалось, в случае двухчастичных сил, не зависящих от спинов и приводящих к существованию связанного  $S$ -состояния двух частиц, для системы трех частиц возможно, кроме основного связанного состояния ( $L = 0$ ), еще и возбужденное состояние ( $L = 0$ ). Учет спиновой зависимости сил и принципа Паули ослабляет двухчастичное взаимодействие, в результате чего возбужденное состояние системы трех нуклонов ( $S = 1/2$ ,  $T = 1/2$ ,  $L = 0$ ) оказывается невозможным. Как показано в работе<sup>5</sup>, отсутствуют возбужденные состояния тритона и с другими квантовыми числами. Ряд теоретических и экспериментальных работ указывает на отсутствие связанного состояния системы трех нейтронов<sup>5, 27, 47, 59</sup>.

#### 4.7. Волновые функции $\text{H}^3$ и $\text{He}^3$

Вследствие зависимости двухнуклонного взаимодействия от спина и изотопического спина волновая функция основного состояния тритона ( $L = 0$ ,  $S = 1/2$ ,  $T = 1/2$ ) представляется в виде суперпозиции пространственных функций, имеющих различную симметрию относительно перестановок координат частиц  $\Psi$ ,  $\Psi'$  и  $\Psi''$ ,  $\Psi^a$ . Так как в основном состоянии суммарный орбитальный момент равен нулю, вес симметричного состояния  $\Psi$  ( $S$ -состояния) близок к единице. Величина примеси состояния промежуточной симметрии ( $S'$ -состояния) определяется разностью

взаимодействий в триплет-синглетном и синглет-триплетном спин-изоспиновых состояниях. Расчеты приводят к следующим величинам примеси  $S'$ -состояния:  $P' = 1,28\%$  (прямоугольная яма <sup>5</sup>),  $P' = 4,7\%$  (потенциал Морзе <sup>3</sup>,  $r_{0\ st} = 2,44$  фм) и  $P' = 2\%$  (суперпозиция потенциалов Юкавы <sup>3, 31</sup>). Величина примеси антисимметричного состояния  $P^a$  определяется разностью потенциалов, действующих в нечетных состояниях  $\frac{1}{2}(V_{ss} - V_{tt})$ , и является очень малой ( $P^a = 0,003\%$  <sup>58</sup>).

В случае ядра  $He^3$  вес добавочного  $S'$ -состояния при  $T = 3/2$  составляет  $\bar{P}' = 0,001\%$  (прямоугольная яма <sup>5, 35</sup>).

Волновые функции ядер  $H^3$  и  $He^3$  незначительно различаются между собой. В табл. IV приведены значения компонент волновых функций  $H^3$

Таблица IV

Волновые функции ядер  $H^3$  и  $He^3$ , рассчитанные в работе <sup>35</sup> на основе метода гармонических полиномов с учетом  $K=0$  и 2 (прямоугольная яма, параметры (с))

$\rho, \text{ фм}$	$H^3$		$He^3$		
	$\rho \frac{1}{2} \chi_{00}(\frac{1}{2}) (\rho)$	$10 \rho \frac{1}{2} \chi_{21}(\frac{1}{2}) (\rho)$	$\rho \frac{1}{2} \chi_{00}(\frac{1}{2}) (\rho)$	$10 \rho \frac{1}{2} \chi_{21}(\frac{1}{2}) (\rho)$	$100 \rho \frac{1}{2} \chi_{21}(\frac{3}{2}) (\rho)$
0,125	0,00224	$0,424 \cdot 10^{-5}$	0,00217	$0,110 \cdot 10^{-4}$	$-0,670 \cdot 10^{-4}$
0,525	0,0711	0,00199	0,0693	0,00259	-0,00606
1,025	0,309	0,0383	0,303	0,0421	-0,0389
1,525	0,584	0,210	0,576	0,218	-0,0885
2,025	0,693	0,481	0,688	0,492	-0,125
2,525	0,639	0,519	0,638	0,534	-0,140
3,025	0,525	0,445	0,528	0,464	-0,139
4,025	0,308	0,261	0,314	0,279	-0,113
5,025	0,168	0,137	0,174	0,151	-0,0778
6,025	0,0891	0,0696	0,0942	0,0790	-0,0496
8,025	0,0247	0,0175	0,0269	0,0211	-0,0177
10,025	0,00726	0,00405	0,00731	0,00515	-0,00503

и  $He^3$  в случае двухнуклонного ядерного потенциала прямоугольной формы (параметры (с)) с учетом кулоновского взаимодействия между протонами, рассчитанные в работе <sup>35</sup> на основе метода гармонических полиномов с учетом гармоник  $K = 0$  и 2 (соответствующие значения энергий связи ядер  $H^3$  и  $He^3$  оказались равными  $E_T = 8,45$  Мэв и  $E_{He^3} = 7,70$  Мэв). Веса состояний с промежуточной симметрией для функций табл. IV оказались равными

$$H^3: P' = 1,01\%; \quad He^3: P' = 1,1\%, \quad \bar{P}' = 0,001\%.$$

Согласно (4,19) зарядовые среднеквадратичные радиусы ядер  $H^3$  и  $He^3$  непосредственно выражаются через среднеквадратичные радиусы распределений нуклонов в ядрах и среднеквадратичные радиусы распределений заряда в нуклонах. Полагая зарядовые среднеквадратичные радиусы нуклонов равными  $r_c(p) = (0,84 \pm 0,04)$  фм и  $r_c(n) = 0$ , в работе <sup>4</sup> найдены следующие значения для зарядовых среднеквадратичных радиусов ядер  $H^3$  и  $He^3$  (потенциал выбран в виде прямоугольной ямы):

$$R_c(H^3) = (1,7 \pm 0,04) \text{ фм}, \quad R_c(He^3) = (1,8 \pm 0,04) \text{ фм}.$$

Соответствующие экспериментальные значения равны <sup>56</sup>

$$R_c(\text{H}^3) = (1,70 \pm 0,05) \text{ фм}, \quad R_c(\text{He}^3) = (1,87 \pm 0,05) \text{ фм}.$$

Влияние кулоновского взаимодействия между протонами на величину  $R_c(\text{He}^3)$  очень мало. При использовании волновой функции  $\text{He}^3$ , рассчитанной без учета кулоновского отталкивания между протонами, среднеквадратичный радиус  $R_c(\text{He}^3)$  уменьшается примерно на 1% по сравнению с радиусом, рассчитанным на основе функции, полученной с учетом кулоновского взаимодействия <sup>35</sup>. Разница в значениях  $R_c(\text{H}^3)$

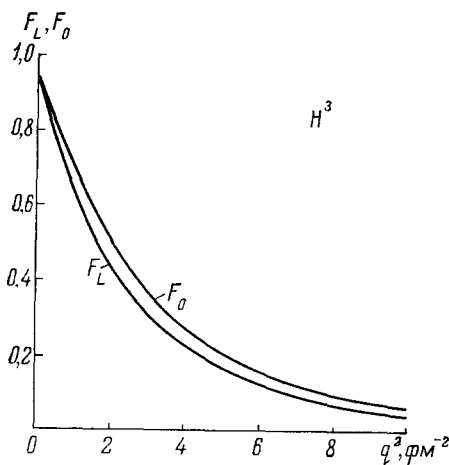


Рис. 10. Формфакторы распределений парного и непарного нуклонов в ядре  $\text{H}^3$ , рассчитанные в случае потенциала прямоугольной формы <sup>35</sup>.

удовлетворительно согласуются с экспериментальными значениями <sup>56</sup>, однако теоретические значения несколько превышают экспериментальные.

В заключение этого раздела остановимся на магнитных моментах ядер  $\text{H}^3$  и  $\text{He}^3$ . Согласно (4,14) и (4,18) магнитные моменты ядер  $\text{H}^3$  и  $\text{He}^3$  в случае центральных сил удовлетворяют неравенствам  $\mu_{\text{H}^3} < \mu_p$ ,  $\mu_{\text{He}^3} > \mu_n$ . Учет тензорных сил еще больше усиливает эти неравенства <sup>12</sup>. Однако из экспериментальных данных следует обратный знак неравенств. Это указывает на то, что величины магнитных моментов и магнитные формфакторы трехнуклонных ядер существенным образом зависят от структуры нуклонов, обусловленной существованием обменных мезонных токов.

#### 4.8. Длины рассеяния нейтрона на дейтроне

Рассеяние нейтрона на дейтроне в предельном случае нулевой энергии характеризуется двумя параметрами — квартетной и дублетной длинами рассеяния  ${}^4A$  и  ${}^2A$ , соответствующими двум возможным значениям полного спина системы  $S = 3/2$  и  $S = 1/2$  ( $T = 1/2$ ). Путем численного решения одномерных интегральных уравнений (4,35) в случае нулевой энергии падающего нейтрона ( $p_0 = 0$ ) удалось рассчитать значения длин  ${}^4A$  и  ${}^2A$  для ряда двухнуклонных потенциалов. Результаты расчета длин  $n-d$ -рассеяния для потенциала Хьюлтена <sup>109, 76</sup> и прямоугольной ямы <sup>81, 37</sup> приведены в табл. III. Составляющие функции  $F_n^{(v)}(p, 0) = \frac{\pi}{2} p^2 \tau_{n_0}^{(v)} \left( -\varepsilon_{10} - \frac{3}{4} \frac{p^2}{m} \right) a_{n_0}^{(v)}(p, 0)$  для квартетного и дублетного состояний представлены на рис. 11 и 12.

[или  $R_c(\text{He}^3)$ ], полученная при использовании различных наборов двухчастичных параметров (b) и (c), составляет примерно 2,5% их величины <sup>35</sup> (зарядовые радиусы уменьшаются при увеличении  $r_0$  si).

Формфакторы распределений парного и непарного нуклонов в ядре  $\text{H}^3$   $F_L$  и  $F_0$ , рассчитанные на основе функций табл. IV, показаны на рис. 10. Различие формфакторов  $F_L$  и  $F_0$  обусловлено примесью  $S'$ -состояния ( $P' = 1,01\%$ ). Зарядовые формфакторы ядер  $F_c^{\text{H}^3}(q)$  и  $F_c^{\text{He}^3}(q)$  рассчитывались для потенциала в виде прямоугольной ямы в работе Бадалян <sup>4</sup> и для потенциалов Морзе и суперпозиции юкавских потенциалов, содержащих отталкивание на малых расстояниях, в работе Ахмаджджаева, Беляева и Вжеционко <sup>3</sup>. Рассчитанные формфакторы  $F_c^{\text{H}^3}$  и  $F_c^{\text{He}^3}$  экспериментальными значениями <sup>56</sup>,

Заметим, что система интегральных уравнений (4,35) с коэффициентами (4,28), описывающая рассеяние в квартетном состоянии, зависит только от триплет-синглетных спин-изоспиновых двухнуклонных параметров, значения которых хорошо определены. Квартетная длина  ${}^4A$  оказалась почти не зависящей от формы двухнуклонного взаимодействия. Для потенциала Хюльтена значение  ${}^4A$ , найденное с учетом четырех членов в (2,19), равно  $6,336 \text{ фм}^{109}$  [параметры (а)]. Для прямоугольной ямы квартетная длина  ${}^4A$  несколько меньше:  ${}^4A = 6,279 \text{ фм}$  (в случае параметров (а) с учетом двух членов в (2,19)). Учет отталкивания между нуклонами на малых расстояниях не приводит к существенному изменению квартетной длины. В случае прямоугольной ямы с бесконечным отталкиванием (при использовании в разложении (2,22) двух притягивающих и одного отталкивающего члена  $n_a = 1$  и  $2, n_c = 1$ ) квартетная длина

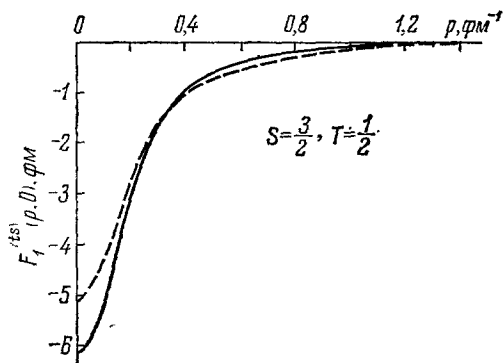


Рис. 11. Функции  $F_1^{(ts)}(p, 0)$ , найденные в работах <sup>76, 81</sup> численным интегрированием системы (4,35) ( $l = 0$ ) для  $n - d$ -рассеяния в квартетном состоянии ( $S = 3/2, T = 1/2$ ) в случае потенциалов Хюльтена и прямоугольной ямы при учете одного слагаемого в разложении (2,19).

Кривые для потенциалов Хюльтена и прямоугольной ямы практически совпадают и на рисунке показаны сплошной линией. Учет следующих слагаемых в (2,19) приводит к незначительным поправкам. Штриховая кривая соответствует функции  $F_1^{(ts)}$ , рассчитанной в приближении нулевого радиуса действия сил <sup>28</sup>. Использованы значения параметров (а) табл. II.

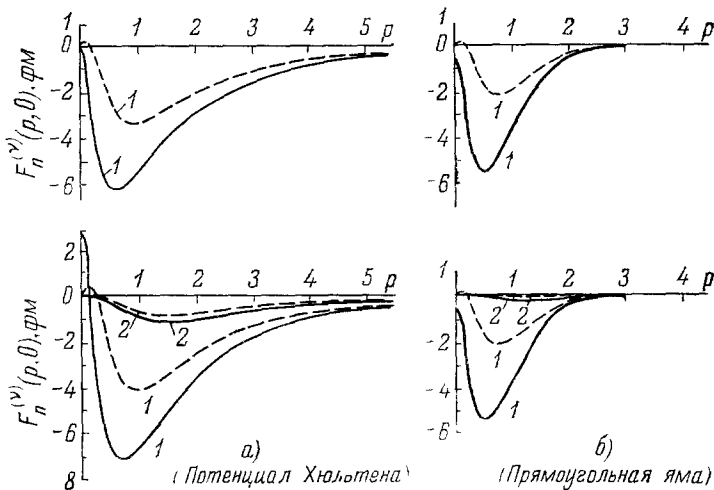


Рис. 12. Функции  $F_n^{(v)}(p, 0)$  ( $v = ts, st$ ) для  $n - d$ -рассеяния в дублетном состоянии ( $S = 1/2, T = 1/2$ , рассчитанные в работах <sup>76, 81</sup> в случае потенциалов Хюльтена (а) и прямоугольной ямы (б) с учетом одного и двух слагаемых в разложении (2,19) для каждого спинового состояния двух нуклонов ( $l = 0$ ).

Цифры возле кривых указывают значения  $n$ . Использованы значения параметров (а) табл. II.

оказалась равной  ${}^4A = 6,33 \text{ фм}^{80}$ . Квартетная длина рассеяния в случае потенциала Морзе (4,43) равна  ${}^4A = 6,35 \text{ фм}$ , в случае потенциала (4,44)

${}^4A = 6,37 \text{ фм}^{11}$ . Эта нечувствительность квартетной длины к изменению формы двухнуклонного взаимодействия обусловлена принципом Паули, вследствие которого падающий нейтрон не проникает внутрь дейтрона, если спины всех частиц направлены параллельно друг другу. Таким образом, взаимодействие нейтрона с дейтроном сводится к эффективному отталкиванию<sup>13</sup> [главный матричный элемент  $n-d$ -взаимодействия в (4,34) с  $\nu = \nu' = 1$  соответствует потенциалу отталкивания, поскольку для квартетного спинового состояния коэффициент  $c_{11}$  является отрицательным,  $c_{11} = -1/2$ ]. Поэтому даже в приближении нулевого радиуса действия сил для  ${}^4A$  получается довольно хорошее значение<sup>28</sup>  ${}^4A = 5,1 \text{ фм}$ , хотя для нахождения последнего используется лишь один двухчастичный параметр — триплетная длина рассеяния  $a_{ts} = 5,378 \text{ фм}$ .

Значения дублетной длины  ${}^2A$ , найденные для потенциала Хюльгена и прямоугольной ямы (см. табл. III), значительно различаются между собой. Как и энергия связи тритона  $E_T$ , дублетная длина  ${}^2A$  существенно зависит от формы двухнуклонного потенциала. Длина  ${}^2A$  чувствительна также к изменению синглетного эффективного радиуса  $r_{ost}$ . В случае потенциала с отталкиванием для дублетной длины рассеяния получены следующие значения:  ${}^2A = 0,76 \text{ фм}$  (прямоугольная яма с бесконечным отталкиванием<sup>80</sup>),  ${}^2A = 0,54 \text{ фм}$  и  $1,33 \text{ фм}$  (потенциал Морзе соответственно для случаев  $r_{ost} = 2,44 \text{ фм}$ ,  $a_{st} = -23,68 \text{ фм}$  и  $r_{ost} = 2,80 \text{ фм}$ ,  $a_{st} = -17 \text{ фм}^{11}$ ) и  ${}^2A = 1,15 \text{ фм}$  (суперпозиция потенциалов Юкавы,  $r_{ost} = 2,80 \text{ фм}$ ,  $a_{st} = -23,3 \text{ фм}^{11}$ ).

Расчеты длин  $n-d$ -рассеяния для локальных потенциалов, включающих тензорное взаимодействие между нуклонами, еще не проведены. В случае сепарабельных потенциалов учет тензорных сил приводит к значительному уменьшению дублетной длины<sup>108</sup>.

Сопоставим рассчитанные значения квартетной и дублетной длин рассеяния с экспериментальными значениями. В течение последних двадцати лет было поставлено несколько экспериментов по определению длин  ${}^2A$  и  ${}^4A$ . Впервые величина полного сечения рассеяния нейтрона нулевой энергии на дейтроне  $\sigma = \frac{4\pi}{3} [2({}^4A)^2 + ({}^2A)^2]$  была измерена Ферми и Маршаллом<sup>62</sup>:

$$\sigma = (3,44 \pm 0,06) \text{ барн}. \quad (4,45)$$

Хэрст и Олькок<sup>73</sup> из данных по рассеянию тепловых нейтронов в орто- и парадейтерии определили отношение дублетной и квартетной длин

$${}^2A/{}^4A = 0,12 \pm 0,04. \quad (4,46)$$

Используя значения (4,45) и (4,46), можно получить два набора возможных значений длин  $n-d$ -рассеяния<sup>73</sup>:

$${}^4A = (6,38 \pm 0,06) \text{ фм}, \quad {}^2A = (0,7 \pm 0,3) \text{ фм}, \quad (4,47)$$

$${}^4A = (2,6 \pm 0,2) \text{ фм}, \quad {}^2A = (8,26 \pm 0,12) \text{ фм}. \quad (4,48)$$

Эксперименты Шапиро и др. в Дубне<sup>45</sup> с использованием поляризованных нейтронов и поляризованных дейтронов показали, что

$${}^4A > {}^2A,$$

и следовательно, позволили отбросить второй набор длин рассеяния (4,48).

Измерение сечений рассеяния нейтронов на орто- и парадейтерии, выполненное Никитиным и др.<sup>95</sup>, привело к следующим значениям для длин рассеяния:

$${}^4A = (6,47 \pm 0,14) \text{ фм}, \quad {}^2A = (0,57 \pm 0,14) \text{ фм}. \quad (4,49)$$

Измерение сечения некогерентного рассеяния нейтрона на дейтерии, связанном в молекуле  $D_2O$ ,  $\sigma_{incoh} = 2\pi (^4A - ^2A)^2$ , выполненное Гисслером<sup>68</sup>, позволило определить разность квартетной и дублетной длин рассеяния

$$^4A - ^2A = 5,99 \pm 0,06 \text{ фм.} \quad (4,50)$$

Когерентная длина рассеяния  $A_{coh} = ^4A + \frac{^2A}{2}$  измерялась Бартолини и др.<sup>51</sup> (методом зеркального отражения нейтронов) и Костером и Унгерером<sup>83</sup> (по рассеянию нейтронов на малые углы смесью из порошкообразного твердого вещества и жидкости). Используя величину когерентной длины

$$A_{coh} = 6,21 \pm 0,04 \text{ фм,} \quad (4,51)$$

найденную Бартолини и др.<sup>51</sup>, и величину разности длин (4,50), можно получить для квартетной и дублетной длин следующие значения<sup>112, 51</sup>:

$$^4A = 6,13 \pm 0,04 \text{ фм,} \quad ^2A = 0,15 \pm 0,05 \text{ фм.} \quad (4,52)$$

Набор длин (4,52) соответствует значению полного сечения  $\sigma = 3,15 \pm \pm 0,04 \text{ барн}$ , которое согласуется со значением

$$\sigma = 3,2 \pm 0,1 \text{ барн,} \quad (4,53)$$

найденным путем экстраполяции к нулевой энергии экспериментальных значений полного сечения  $n - d$ -рассеяния<sup>112</sup>, но несколько меньше

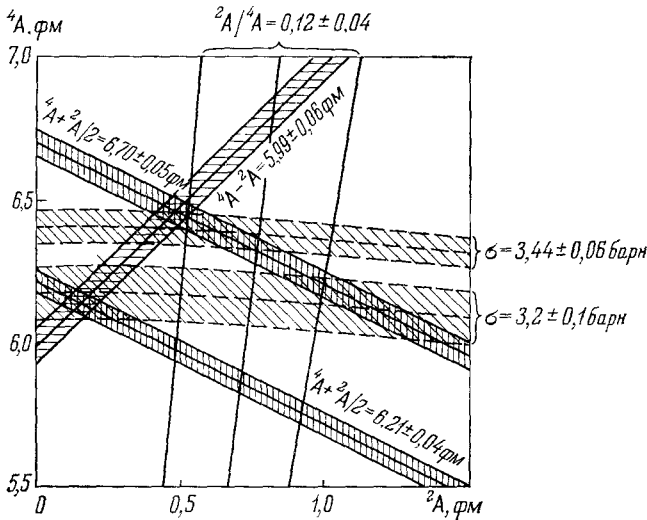


Рис. 13. Экспериментальные данные для определения квартетной и дублетной длин  $n - d$ -рассеяния.

величины полного сечения, полученного Ферми и Маршаллом<sup>62</sup>. Заметим также, что отношение длин из набора (4,52) ( $^2A/^4A = 0,024 \pm 0,009$ ) значительно отличается от отношения, измеренного Хэрстом и Олькоком<sup>73</sup>.

Костер и Унгерер<sup>83</sup> для когерентной длины получили значение

$$A_{coh} = 6,70 \pm 0,05 \text{ фм,} \quad (4,54)$$

которое превышает значение, найденное Бартолини и др.<sup>51</sup>. Величина (4,54) и значение (4,50) для разности длин приводят к следующим значениям для квартетной и дублетной длин  $n - d$ -рассеяния:

$$^4A = 6,46 \pm 0,05 \text{ фм,} \quad ^2A = 0,47 \pm 0,07 \text{ фм.} \quad (4,55)$$

Эти значения соответствуют  $\sigma = 3,51 \pm 0,06 \text{ барн}$  и  $^2A/^4A = 0,07 \pm 0,01$ .

На рис. 13 представлены зависимости  $^4A$  от  $^2A$ , полученные на основе экспериментальных данных по полному сечению (4,45) и (4,53), когерент-

ной длине (4,51) и (4,54), разности длин (4,50) и отношению длин (4,46). Пересечение любых двух кривых на рис. 13 определяет значения квартетной и дублетной длин. Имеющиеся два экспериментальных значения полного сечения  $\sigma$  и два экспериментальных значения когерентной длины  $A_{\text{coh}}$  приводят к двум возможным наборам длин  ${}^4A$  и  ${}^2A$ . Один из них соответствует значениям (4,52), полученным в работах Ван-Оэрса и Сигрейва<sup>112</sup> и Бартолини и др.<sup>51</sup>, а другой соответствует результатам Хэрста и Олькока (4,47), Никитина и др. (4,49), а также данным Гисслера и Костера и Унгерера (4,55). Значения (4,52) соответствуют полному сечению Ван-Оэрса и Сигрейва (4,53), но не согласуются с величиной отношения длин  ${}^2A/{}^4A$  Хэрста и Олькока (4,46). Значения  ${}^4A$  и  ${}^2A$  (4,47), (4,49) и (4,55) приводят к значению полного сечения Ферми и Маршалла (4,45), а их отношения близки к результату<sup>73</sup>. Для окончательного экспериментального определения длин  ${}^4A$  и  ${}^2A$  требуются дальнейшие более точные эксперименты. В частности, необходимо уточнить величину отношения длин  ${}^2A/{}^4A$ .

Сравним рассчитанные значения квартетной и дублетной длин с экспериментальными значениями. Прежде всего отметим, что квартетная длина  ${}^4A$  для всех рассмотренных потенциалов близка к экспериментальным значениям и лучше всего согласуется со значением  ${}^4A$  из второй системы экспериментальных длин (4,47), (4,49) и (4,55).

Экспериментальные данные о дублетной длине менее точны. Экспериментальные значения дублетной длины находятся в интервале значений от 0,1 до 1,0 фм. В этот интервал попадают значения  ${}^2A$ , рассчитанные как в случае прямоугольной ямы (см. табл. III), так и в случае потенциалов с отталкиванием<sup>11, 80</sup>. В связи с этим интересно произвести одно-временное сравнение с экспериментом дублетной длины  ${}^2A$  и энергии связи тритона  $E_T$ , величина которой хорошо известна ( $E_T = 8,482 \text{ Мэв}$ ). В случае потенциала Хюльтена и прямоугольной ямы энергия связи  $E_T$  завышена. Уменьшение  $E_T$ , которого можно добиться, увеличивая, например, синглетный эффективный радиус  $r_{\text{ost}}$ , соответствует увеличению  ${}^2A$ . В случае прямоугольной ямы с параметрами (с) значение  $E_T$ , равное экспериментальному, достигается при  $r_{\text{ost}} \sim 2,9 \text{ фм}$ . Дублетная длина  ${}^2A$  увеличится при этом примерно до 1 фм. Близкие значения были получены в работе<sup>11</sup> для потенциала (4,44), содержащего отталкивание:  $E_T = 8,56 \text{ Мэв}$ ,  ${}^2A = 1,15 \text{ фм}$  ( $r_{\text{ost}} = 2,80 \text{ фм}$ ,  $a_{st} = -23,3 \text{ фм}$ ). Как показывают расчеты с сепарабельными потенциалами<sup>26, 108, 78, 27</sup>, учет тензорного взаимодействия между нуклонами приводит к такому же эффекту для  $E_T$  и  ${}^2A$ , как и увеличение синглетного эффективного радиуса. Таким образом, рассчитанная дублетная длина, соответствующая экспериментальному значению энергии связи тритона, так же как и квартетная длина, лучше согласуется со значениями экспериментальных длин (4,47), (4,49) и (4,55).

Институт теоретической физики  
АН УССР, Киев

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Б. А. Ахмадходжаев, В. Б. Беляев, Е. Вжедионко, Письма ЖЭТФ 9, 692 (1969).
2. Б. А. Ахмадходжаев, В. Б. Беляев, Е. Вжедионко, Препринт ИТФ-69-49, Киев (1969).
3. Б. А. Ахмадходжаев, В. Б. Беляев, Е. Вжедионко, Препринт ОИЯИ Р4-4986, Дубна (1970).
4. А. М. Бадалян, Ядерная физика 8, 1128 (1968).
5. А. М. Бадалян, Е. С. Гальперн, В. Н. Ляховицкий, Ядерная физика 8, 313 (1968).



6. А. М. Бадалян, Е. С. Гальперн, В. Н. Ляховицкий, В. В. Пустовалов, Ю. А. Симонов, Е. Л. Сурков, *Ядерная физика* **6**, 473 (1967).
7. А. М. Бадалян, Ю. А. Симонов, *Ядерная физика* **3**, 1032 (1966).
8. А. М. Бадалян, Ю. А. Симонов, *Ядерная физика* **9**, 69 (1969).
9. А. И. Базь, В. Ф. Демин, И. И. Кузьмин, *Ядерная физика* **4**, 737, 1131 (1966).
10. А. И. Базь, М. В. Жуков, *Ядерная физика* **11**, 779 (1970).
11. В. Б. Беляев, Е. Вжеционко, Препринт ОИЯИ Р4-4144, Дубна (1968).  
В. Б. Беляев, Е. Вжеционко, А. Л. Зубарев, Препринт ОИЯИ Р4-5000, Дубна (1970).
12. М. Верде, *Строение атомного ядра*, М., ИЛ, 1959, стр. 167.
13. А. С. Давыдов, Г. Ф. Филиппов, *ЖЭТФ* **31**, 340 (1956).
14. Г. С. Данилов, *ЖЭТФ* **40**, 498 (1961); Г. С. Данилов, В. И. Лебедев, *ЖЭТФ* **44**, 1509 (1963).
15. В. Н. Ефимов, Препринт ОИЯИ Р-2546, Р-2890, Дубна (1966); Кандидатская диссертация (1966); *Comptes Rendus du Congrès International de physique nucléaire*, vol. II, Paris, 1964, стр. 258.
16. Л. В. Канторович, В. И. Крылов, *Приближенные методы высшего анализа*, М., Физматгиз, 1962, стр. 170.
17. В. В. Комаров, А. М. Попова, *ЖЭТФ* **45**, 214 (1963); *Вестн. МГУ, серия физика, астрономия*, № 6, 48 (1964).
18. Р. Курант, Д. Гильберт, *Методы математической физики*, т. 1, М., ГТТИ, 1933.
19. И. М. Народецкий, *Ядерная физика* **9**, 1086 (1969).
20. Ю. Нпри, Я. А. Смородинский, *Ядерная физика* **9**, 882 (1969); *Ядерная физика* **12**, 202 (1970).  
В. В. Пустовалов, Я. А. Смородинский, *Ядерная физика* **10**, 1287 (1969).
21. В. В. Пустовалов, Ю. А. Симонов, *ЖЭТФ* **51**, 345 (1966).
22. И. В. Сименюг, *Ядерная физика* **10**, 281 (1969).
23. Ю. А. Симонов, *Ядерная физика* **3**, 630 (1966).
24. Ю. А. Симонов, *Ядерная физика* **7**, 1210 (1968).
25. Ю. А. Симонов, А. М. Бадалян, *Ядерная физика* **5**, 88 (1967).
26. А. Г. Ситенко, В. Ф. Харченко, *Ядерная физика* **1**, 994 (1965); *Укр. физ. ж.* **10**, 469 (1965).
27. А. Г. Ситенко, В. Ф. Харченко, *Модель нелокального ядерного взаимодействия и задача трех тел*, Препринт ИТФ-68-11, Киев (1968).
28. Г. В. Скорняков, К. А. Тер-Мартirosян, *ЖЭТФ* **31**, 775 (1956).
29. Е. Л. Сурков, *Ядерная физика* **5**, 908 (1967).
30. Л. Д. Фаддеев, *ЖЭТФ* **39**, 1459 (1960).
31. Л. Д. Фаддеев, *Математические вопросы квантовой теории рассеяния для системы трех частиц*, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, том 69, М.-Л. (1963).
32. Л. Д. Фаддеев, *Труды проблемного симпозиума по физике ядра* (Тбилиси, 1967), т. 1, М., 1967, стр. 43.
33. Г. Ф. Филиппов, В. И. Овчаренко, *Ядерная физика* **6**, 1287 (1967).
34. В. Ф. Харченко, *Укр. физ. журнал* **7**, 573, 582 (1962).
35. В. Ф. Харченко, В. Е. Кузьмичев, Препринт ИТФ-70-51, Киев, (1970); *Укр. физ. ж.* **16** (1971).
36. В. Ф. Харченко, С. А. Стороженко, *Укр. физ. ж.* **13**, 1843 (1968).
37. В. Ф. Харченко, С. А. Стороженко, *Укр. физ. ж.* **15**, 1844 (1970).
38. Л. Хюльтен, М. Сугавара, в книге: «Строение атомного ядра», М., ИЛ, 1959, стр. 7.
39. О. А. Якубовский, *Ядерная физика* **5**, 1312 (1967).
40. R. Aarón, R. D. Amado, *Phys. Rev.* **150**, 857 (1966).
41. R. Aarón, R. D. Amado, Y. Y. Yam, *Phys. Rev.* **136**, B650 (1964).
42. R. Aarón, R. D. Amado, Y. Y. Yam, *Phys. Rev.* **140**, B1291 (1965).
43. R. Aarón, P. E. Shanley, *Phys. Rev.* **142**, 608 (1966); *Ann. of Phys.* **44**, 363 (1967).
44. A. Ahmadzadeh, J. A. Tjon, *Phys. Rev.* **139**, B 1085 (1965).
45. V. P. Alfimenkov, V. I. Lushchikov, V. G. Nikolenko, Yu. V. Taran, F. L. Shapiro, *Phys. Lett.* **24B**, 151 (1967).
46. R. D. Amado, *Ann. Rev. Nucl. Sci.* **19**, 61 (1969).
47. А. М. Бадалян, Препринт ИТФ, № 746, Moscow (1969).
48. А. М. Бадалян, Ю. А. Симонов, Препринт ИТФ, № 705, Moscow (1969).
49. J. S. Ball, J. C. Y. Chen, D. Y. Wong, *Phys. Rev.* **173**, 202 (1968).

50. J. S. Ball, D. Y. Wong, Phys. Rev. **169**, 1362 (1968).
51. W. Bartolini, R. E. Donaldson, D. J. Groves, Phys. Rev. **174**, 313 (1968).
52. H. Bateman, Proc. Roy. Soc. **A100**, 441 (1922).
53. J. Borysowicz, J. Dabrowski, Phys. Lett. **24B**, 125 (1967).
54. B. S. Bhakar, A. N. Mitra, Phys. Rev. Lett. **14**, 143 (1965).
55. T. Brady, M. Fuda, E. Harms, et al., Phys. Rev. **186**, 1069 (1969).
56. H. Collard, R. Hofstadter, E. B. Hughes, A. Johansson, M. R. Yearian, R. B. Day, R. T. Wagner, Phys. Rev. **138**, B 57 (1965).
57. G. Darewych, A. E. S. Green, Phys. Rev. **164**, 1324 (1967).
58. L. M. Delves, J. M. Blatt, I. Pask, B. Davies, Phys. Lett. **28B**, 472 (1969).
59. L. M. Delves, A. C. Phillips, Rev. Mod. Phys. **41**, 497 (1969).
60. I. Duck, Advances in Nuclear Physics, vol. 1, Eds. M. Baranger and E. Vogt, Plenum Press, New York, 1968, cрp. 343.
61. L. D. Faddeev, The Physics of Electronic and Atomic Collisions: Invited Paper from the Fifth International Conference (Leningrad, 1967). Ed. S. M. Branscomb, published by JILA, University of Colorado, Boulder, Colorado, 1968, cрp. 145.
62. E. Fermi, L. Marschall, Phys. Rev. **75**, 578 (1949).
63. L. L. Foldy, W. Tobocean, Phys. Rev. **105**, 1099 (1957).
64. M. G. Fuda, Phys. Rev. **178**, 1682 (1969); **174**, 1134 (1968).
65. J. R. Fulco, D. Y. Wong, Phys. Rev. **172**, 1062 (1968).
66. R. Gastmans, Nucl. Phys. **79**, 593 (1966).
67. J. Gillespie, Phys. Rev. **160**, 1432 (1967).
68. W. Gissler, Zeit. Krist. **118**, 149 (1963).
69. E. Harms, Phys. Rev. **C1**, 1667 (1970).
70. E. Harms, J. S. Levinger, Phys. Lett. **30B**, 449 (1970).
71. T. L. Houk, R. Wilson, Rev. Mod. Phys. **39**, 546 (1968); **40**, 672 (1968).
72. J. W. Humberston, R. L. Hall, T. A. Osborn, Phys. Lett. **27B**, 195 (1968); T. A. Osborn, SLAC-79, 1967.
73. D. G. Hurst, N. Z. Alcock, Canad. J. Phys. **29**, 36 (1951).
74. A. I. Jaffe, A. S. Reiner, Phys. Lett. **26B**, 719 (1968).
75. R. Jost, A. Pais, Phys. Rev. **82**, 840 (1951).
76. V. F. Kharchenko, N. M. Petrov, Nucl. Phys. **A137**, 417 (1969).
77. V. F. Kharchenko, N. M. Petrov, V. E. Kuzmichev, Phys. Lett. **32B**, 19 (1970).
78. V. F. Kharchenko, N. M. Petrov, S. A. Storozhenko, Nucl. Phys. **A106**, 464 (1968).
79. V. F. Kharchenko, N. M. Petrov, S. A. Storozhenko, Three Body Problem in Nuclear and Particle Physics, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1970, cрp. 301.
80. V. F. Kharchenko, S. A. Shadchin, Preprint ИТФ-70-92Е, Kiev, 1970; Укр. фіз. ж. **16** (1971).
81. V. F. Kharchenko, S. A. Storozhenko, Nucl. Phys. **A137**, 437 (1969).
82. L. Koester, Zs. Phys. **198**, 187 (1967).
83. L. Koester, H. Ungerer, Zeitschrift für Physik, **219**, 300 (1969).
84. L. P. Kok, Comparison between exact and variational three-body calculations using local potentials, Preprint, 1969; Factorability and the nuclear three-body problem, Thesis, Nova Press, Groningen (1969).
85. L. P. Kok, G. Erens, R. Van Wageningen, Nucl. Phys. **A122**, 684 (1968).
86. K. L. Kowalski, Phys. Rev. Lett. **15**, 798, 908 (1965); Nuovo Cimento **45**, 769 (1966).
87. J. S. Levinger, A. H. Lu, R. Stagat, Phys. Rev. **179**, 926 (1969).
88. B. A. Lippmann, J. Schwinger, Phys. Rev. **79**, 469 (1950).
89. C. Lovelace, Phys. Rev. **135**, B 1225 (1964).
90. M. N. MacGregor, R. A. Arndt, R. M. Wright, Phys. Rev. **169**, 1128 (1968); **173**, 1272 (1968).
91. R. A. Malfliet, J. A. Tjon, Nucl. Phys. **A127**, 161 (1969); Physics Letters **29B**, 391 (1969).
92. A. N. Mitra, Advances in Nuclear Physics, vol. 3, Eds. M. Baranger and E. Vogt, Plenum Press, New York, 1969.
93. A. N. Mitra, Nucl. Phys. **32**, 529 (1962); A. N. Mitra, V. S. Bhasin, Phys. Rev. **131**, 1265 (1963).
94. A. N. Mitra, G. L. Schrenk, V. S. Bhasin, Annals of Physics **40**, 357 (1966).
95. S. J. Nikitin, W. T. Smolyankin, W. Z. Kolganow, A. W. Lebedev, G. S. Lomkazy, The First International conference on

- Peaceful Uses of Atomic Energy (Geneva, 1955) The (United Nations, New York, 1956, vol. 2, стр. 81.
96. H. P. Noyes, *Phys. Rev. Lett.* **15**, 538 (1965).
  97. H. P. Noyes, *Progress in Nuclear Physics*, vol. **10**, Ed. D. M. Brink and J. H. Mulvey, Pergamon Press, 1969, срр. 357.
  98. H. P. Noyes, H. Fiedeldey, *Three-Particle Scattering in Quantum Mechanics (Proc. of the Texas Conf., 1968)*. Ed. J. Gillespie and J. Nuttall, W. A. Benjamin Inc., New York, 1968, срр. 195.
  99. T. Osborn, H. P. Noyes, *Phys. Rev. Lett.* **17**, 215 (1966).
  100. A. C. Phillips, *Phys. Rev.* **142**, 984 (1966).
  101. A. C. Phillips, *Phys. Lett.* **20**, 50 (1966).
  102. A. C. Phillips, *Nucl. Phys.* **A107**, 209 (1968).
  103. A. S. Reiner, *Nuovo Cimento*, **51A**, 1 (1967).
  104. A. S. Reiner, A. I. Jaffe, *Phys. Rev.* **161**, 935 (1967).
  105. M. Scadron, S. Weinberg, *Phys. Rev.* **133**, B 1539 (1964).
  106. L. I. Schiff, *Phys. Rev.* **133**, B 802 (1964).
  107. A. G. Sitenko, V. F. Kharchenko, *Nucl. Phys.* **49**, 15 (1963); *Изв. АН СССР, сер. физ.* **28**, 41 (1964).
  108. A. G. Sitenko, V. F. Kharchenko, N. M. Petrov, *Phys. Lett.* **21**, 54 (1966); *Proceedings of the Conference on Nuclear Reactions with Light Nuclei and Nuclear Structure (Rossendorf, 1966)*. Ed. J. Schintlmeister, ZfK-122, Zentralinstitut für Kernforschung, Rossendorf, 1966, срр. 119.
  109. A. G. Sitenko, V. F. Kharchenko, N. M. Petrov, *Phys. Lett.* **28B**, 308 (1968).
  110. F. Tabakin, *Phys. Rev.* **137**, B 75 (1965).
  111. L. H. Thomas, *Phys. Rev.* **47**, 903 (1935).
  112. W. T. H. Van Oers, J. D. Seagrave, *Phys. Lett.* **24B**, 562 (1967); J. D. Seagrave, W. T. H. Van Oers, *Proceedings of the Symposium on Light Nuclei, Brela (Yugoslavia, 1967)*; Gordon and Breach Science Publishers, London, 1968.
  113. A. M. Veselova, Preprint ITF-69-85, Kiev (1969).
  114. K. M. Watson, J. Nuttall, *Topics in Several Particle Dynamics*, Holden Day, San Francisco, 1967.
  115. S. Weinberg, *Phys. Rev.* **131**, 440 (1963).
  116. Y. Yamaguchi, *Phys. Rev.* **95**, 1628 (1954); Y. Yamaguchi, Y. Yamaguchi, *Phys. Rev.* **95**, 1635 (1954).
-