

## НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ПЛАЗМЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА И ГАЗОВОГО РАЗРЯДА

Ф. Г. Басс, Ю. Г. Гуревич

### СОДЕРЖАНИЕ

|                                       |     |
|---------------------------------------|-----|
| I. Основные уравнения . . . . .       | 448 |
| II. Нормальный скин-эффект . . . . .  | 454 |
| III. Аномальный скин-эффект . . . . . | 462 |
| Цитированная литература . . . . .     | 468 |

Нелинейные эффекты в полупроводниковой и газоразрядной плазме в настоящее время все более и более привлекают внимание теоретиков и экспериментаторов. Весьма интересны нелинейные эффекты, которые разыгрываются в области частот, где несущественны временная (частотная) и пространственная дисперсия, а также затухание (солитоны, ударные волны и т. д.). В этих условиях сильно взаимодействие гармоник, «размножающихся» вследствие нелинейности, из-за чего волна вдали от генератора, излучающего по синусоидальному закону, приобретает несинусоидальный вид<sup>1</sup>. При наличии неустойчивостей того или иного состояния плазмы могут возникнуть также турбулентности<sup>2</sup>.

В полупроводниковой и газоразрядной плазме имеется широкий частотный интервал, в котором большую роль играет временная дисперсия (подробнее см. ниже), вследствие чего временные гармоники взаимодействуют между собой слабо. Тем не менее, если затухание пренебрежимо мало, то и это взаимодействие может привести к ряду новых явлений, изучаемых нелинейной оптикой<sup>3</sup>. Перечисленные выше вопросы нашли широкое отражение в монографической и обзорной литературе (часть из которой нами приведена).

Особое место занимают нелинейности, связанные с диссипацией электромагнитных волн. Этим нелинейностям посвящен обзор В. Л. Гинзбурга и А. В. Гуревича<sup>4</sup>. Однако с момента его появления был получен ряд новых результатов, излагаемых в настоящей статье, которая может рассматриваться как продолжение обзора<sup>4</sup>.

В полупроводниковой и газоразрядной плазме уже при относительно малых электрических полях становятся существенными нелинейные эффекты, связанные с разогревом газа носителей тока. Функция распределения электронов, разогретых постоянным электрическим полем, была найдена довольно давно<sup>5</sup>.

При нагреве плазмы переменным электрическим полем возникают так называемые эффекты самовоздействия. Интерес к этим эффектам обусловлен применением в эксперименте электромагнитных полей большой мощности. Оказалось, что при изучении самовоздействия электромагнитных волн можно исследовать такие свойства плазмы, которые не проявляются в слабых полях.

Под самовоздействием будем понимать изменение диэлектрической проницаемости среды под влиянием распространяющихся в ней волн. Это связано с тем, что как плазма носителей тока в полупроводниках, так и газоразрядная плазма эффективно разогреваются относительно слабым электрическим полем<sup>4, 5</sup>. Диэлектрическая проницаемость зависит от температуры носителей тока и, следовательно, от распространяющегося поля. Математически задача о распространении электромагнитных волн в среде сводится к определению зависимости тока от поля, подстановке этого тока в уравнения Максвелла и их решению. Мы будем следовать этой схеме.

## 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

### 1. Кинетическое уравнение и уравнение баланса

Электроны в плазме \*) будем описывать с помощью функции распределения  $f(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$ , где  $\mathbf{p}$  — импульс (квазиимпульс) электрона,  $\mathbf{r}$  — его координата,  $t$  — время.

Если рассеяние энергии электронами на рассеивающих центрах квазиупругое (а только такое мы здесь и рассматриваем) и выполняется условие на неоднородность поля<sup>4</sup>

$$|\mathbf{E}| \gg \frac{\bar{v}}{\sqrt{\omega^2 + \nu^2}} |\nabla \mathbf{E}| \quad (1.1)$$

( $\mathbf{E}$  — амплитуда электрической волны,  $\omega$  — ее частота,  $\bar{v}$  — средняя тепловая скорость электронов,  $\nu$  — частота соударений электронов с рассеивающими центрами с передачей импульса), то функцию распределения можно представить в виде<sup>4-6</sup>

$$f(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = f_0(\epsilon, \mathbf{r}, t) + \chi(\epsilon, \mathbf{r}, t) \frac{\mathbf{p}}{p}, \quad (1.2)$$

причем  $|\chi| \ll f_0$  ( $\epsilon$  — энергия электрона).

Здесь и ниже считается, что закон дисперсии электронов квадратичный и изотропный, т. е.  $\epsilon = p^2/2m$ .

Для  $f_0$  и  $\chi$  известными методами (см. <sup>4-6</sup>) можно получить следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{p}{3m} \nabla_{\mathbf{r}} \chi + \frac{e}{3} \frac{1}{n(\epsilon)} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left\{ \frac{p}{m} n(\epsilon) \chi \mathbf{E} \right\} = \\ = \frac{1}{n(\epsilon)} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left\{ n(\epsilon) \epsilon^2 \nu_a(\epsilon) \left[ \frac{1}{T} f_0 (1 - f_0) + \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \right] \right\} + S_0 \{f_0, f_0\}, \\ \frac{\partial \chi}{\partial t} - \omega_H [\mathbf{h} \chi] + \nu(\epsilon) \chi = - \frac{p}{m} \left[ \nabla_{\mathbf{r}} f_0 + e \mathbf{E} \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \right], \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

где  $m$  — масса электрона,  $n(\epsilon) = 4 \sqrt{2} \pi m^{3/2} \epsilon^{1/2}$  — плотность состояний  $\mathbf{h} = \frac{\mathbf{H}}{H}$ ,  $\mathbf{H}$  — внешнее постоянное магнитное поле,  $\omega_H = eH/mc$ ,  $e$  — заряд электрона,  $c$  — скорость света в вакууме,  $\nu(\epsilon)$  — частота соударений электронов с рассеивающими центрами с передачей импульса,  $\nu_a(\epsilon)$  — с передачей энергии,  $S_0 \{f_0, f_0\}$  — интеграл столкновений, описывающий электрон-электронные соударения и имеющий порядок  $\nu_{ee}(\epsilon) f_0$ . Формулы для частоты межэлектронных соударений  $\nu_{ee}(\epsilon)$  для невырожденного электронного газа приведены в работе<sup>7</sup>, а для вырожденного — в работе<sup>8</sup>.

Выражения для  $\nu(\epsilon)$  и  $\nu_a(\epsilon)$  в полупроводниках вычислены в работах<sup>5, 9</sup>, а в плазме — в работе<sup>4</sup>.

\*) В дальнейшем рассматривается плазма с одним типом носителей (для определенности, — электроны).

Если соударения электронов с рассеивающими центрами квазиупругие, то  $v_0/v \sim \delta \ll 1$ , причем в плазме  $\delta \sim m/M^4$  (где  $M$  — масса иона или нейтральной молекулы), а в полупроводнике  $\delta \sim (\hbar\omega_n/\varepsilon)^2$  ( $\omega_n$  — частота фонона, на котором происходит релаксация энергии).

При наличии нескольких механизмов передачи энергии и импульса

$$v_0(\varepsilon) = \sum_k v_{0k}(\varepsilon), \quad v(\varepsilon) = \sum_l v_l(\varepsilon), \quad (1,4)$$

где суммирование по  $k$  ведется по всем механизмам передачи энергии, а по  $l$  — импульса.

Во втором уравнении (1,3) опущен член  $S_1\{f_0, \chi\}$ , описывающий электрон-электронные соударения в следующем по  $\delta$  приближении. Это справедливо, если выполняется неравенство \*)<sup>10</sup>

$$v_{ee} \ll \omega. \quad (1,5)$$

Если же, кроме неравенства (1,5), выполняется соотношение \*\*)

$$v_{ee} \gg v_0, \quad (1,6)$$

то, как следует из (1,3) (см. также<sup>4</sup>), симметричная часть функции распределения  $f_0$  будет фермиевской, с эффективной температурой  $\Theta$ . Из неравенств (1,5) и (1,6) вытекает, что

$$v_0 \ll \omega. \quad (1,7)$$

При этом  $f_0$  в нулевом приближении по  $v_0/\omega$  не будет зависеть от времени \*\*\*)<sup>13-15</sup>. Таким образом,

$$f_0(\varepsilon, \mathbf{r}) = \left\{ 1 + \exp \left[ \frac{\varepsilon - \mu(\mathbf{r})}{\Theta(\mathbf{r})} \right] \right\}^{-1}, \quad (1,8)$$

где  $\mu$  — химический потенциал.

Связь между химическим потенциалом  $\mu$ , температурой  $\Theta$  и электронной концентрацией  $N$  дается условием нормировки

$$\frac{2}{h^3} \int_0^\infty f_0(\varepsilon, \mathbf{r}) n(\varepsilon) d\varepsilon = N. \quad (1,9)$$

Условие (1,6) выполняется при достаточно больших концентрациях электронов. Если же соотношение (1,6) не имеет места (концентрация мала), для вычисления кинетических коэффициентов можно по-прежнему использовать фермиевскую функцию распределения с некоторой эффективной температурой  $\Theta$ . При этом кинетические коэффициенты отличаются от полученных при строгом кинетическом рассмотрении на множители порядка единицы. Это связано с тем, что кинетические коэффициенты, выражающиеся через моменты функции распределения, не чувствительны к ее явному виду<sup>16</sup>. В дальнейшем мы будем для расчетов использовать  $f_0$  в виде (1,8).

Подтверждение сделанного выше заключения вытекает из сравнения результатов работы<sup>17</sup> с работами<sup>18, 19</sup>.

Как будет показано ниже непосредственными вычислениями (см. также<sup>18</sup>), диэлектрическая проницаемость плазмы не зависит от времени, если  $f_0$  не зависит от времени. В этом допущении отсутствуют эффекты,

\*) Невыполнение этого условия приводит в кинетических коэффициентах к ошибке в численных множителях порядка единицы<sup>6</sup>.

\*\*) Для невырожденного электронного газа при рассеянии энергии на акустических фононах неравенство (1,6) переходит в критерий Фрëлиха и Паранджапы<sup>7</sup>.

\*\*\*) В том случае, когда волна имеет круговую поляризацию,  $f_0$  не зависит от времени при любом соотношении между  $\omega$  и  $v$ <sup>11, 12</sup>.

связанные с умножением частоты, и в среде могут распространяться монохроматические волны.

Так как греющая электромагнитная волна затухает, электронная температура  $\Theta$  будет уменьшаться в направлении распространения волны, т. е. возникнет градиент электронной температуры. Поэтому, помимо переменного, появится электростатическое поле (термоэффект), связанное с этим градиентом \*).

Таким образом, электрическое поле  $E$  можно представить в виде суммы постоянного поля  $E_c$ , связанного с градиентом электронной температуры, и переменного  $\sim e^{-i\omega t}$ . Амплитуду этого поля мы ниже будем обозначать буквой  $E$ . Соответственно  $\chi$  можно представить в виде суммы величин:  $\chi_c$ , не зависящей от времени, и  $\chi e^{-i\omega t}$ . С помощью  $\chi$  электрический ток  $j$  и тепловой поток  $Q$  определяются следующими формулами <sup>22, 23</sup>:

$$j = \frac{16\pi me}{3h^3} \int_0^\infty \epsilon \chi(\epsilon) d\epsilon, \quad Q = \frac{16\pi m}{3h^3} \int_0^\infty \epsilon^2 \chi(\epsilon) d\epsilon. \quad (1,10)$$

Найдем  $\chi$  из второго уравнения системы (1,3), подставим его в первое уравнение этой же системы и проинтегрируем получившееся уравнение по импульсам, домножив его на 1 и  $\epsilon$ . Считая, что магнитное поле направлено вдоль направления распространения электромагнитной волны \*\*), удобно перейти (см. <sup>17</sup>) к нормальным волнам, имеющим круговую поляризацию,  $E = E_x \pm iE_y$ . Ниже всюду предполагается, что в плазме распространяется волна  $E = E_x - iE_y$ . Тогда мы получим систему из двух уравнений переноса (заметим, что полученная таким образом система следует из условия разрешимости системы (1,3) <sup>16</sup>):

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} j_c &= 0, \\ \operatorname{div} Q_c + NT v_g(\vartheta) (\vartheta - 1) &= \sigma(\vartheta) u^2; \end{aligned} \right\} \quad (1,11)$$

здесь введены следующие обозначения (см. <sup>23</sup>):  $j_c$  и  $Q_c$  — плотности электрического тока и теплового потока, связанные с термо-э. д. с., причем

$$\left. \begin{aligned} j_c &= e^2 J_{10} E'_c - e J_{11} \nabla \ln \vartheta + h (e^2 J_{30} E'_c - J_{31} \nabla \ln \vartheta, h), \\ Q_c &= e J_{11} E'_c - J_{12} \nabla \ln \vartheta + h (e J_{31} E'_c - J_{32} \nabla \ln \vartheta, h), \\ E'_c &= E_c - \frac{\vartheta}{e} \nabla \frac{\mu}{\vartheta}, \\ J_{lj} &= - \frac{16 \sqrt{2} \pi \omega_H^{l-1} m^{\frac{1}{2}} T^{j+\frac{3}{2}}}{3h^3} \int_0^\infty \frac{dx x^{j+\frac{3}{2}}}{v^l \left[ 1 + \left( \frac{\omega_H}{v} \right)^2 \right]} \frac{df_0}{dx}, \end{aligned} \right\} \quad (1,12)$$

$\vartheta = \Theta/T'$  — безразмерная электронная температура,

$$\sigma(\vartheta) = - \frac{8 \sqrt{2} m^{\frac{3}{2}} T^{\frac{3}{2}} \omega_0^2}{3N} \int_0^\infty \frac{v(x) x^{\frac{3}{2}}}{(\omega_H - \omega)^2 + v^2(x)} \frac{df_0}{dx} dx \quad (1,13)$$

— высокочастотная проводимость,  $\omega_0^2 = 4\pi e^2 N/m$  — лэнгмюровская частота,  $x = \epsilon/T$ ,  $u$  — модуль электрического поля.

\*) Изучение подобного рода эффектов представляет самостоятельный интерес. Здесь мы их не рассматриваем, отсылая к работам <sup>20-21</sup>.

\*\*) При произвольной ориентации магнитного поля результаты изложены в работах <sup>17, 18</sup>.

Как показывает расчет<sup>18</sup>, для  $v(x)$  и  $v_\theta(\theta)$  имеют место такие формулы:

$$v(x) = v_0(T) x^{-q}, \quad v_\theta(\theta) = v_{0\theta}(T) \theta^{r-1}. \quad (1,14)$$

Значения  $r$ ,  $q$ ,  $v_0(T)$ ,  $v_{0\theta}(T)$  определяются механизмом рассеяния электронов (см.<sup>9, 10</sup>, а также таблицу).

| Механизм рассеяния                                                               | $r$  | $q$  |
|----------------------------------------------------------------------------------|------|------|
| <b>Полупроводники</b>                                                            |      |      |
| Акустические колебания . . . . .                                                 | 3/2  | -1/2 |
| Оптические колебания, $T < T_d$ . . . . .                                        | 1    | 0    |
| Оптические колебания, $T > T_d$ . . . . .                                        | -1/2 | -1/2 |
| Пьезоакустические колебания . . . . .                                            | 1/2  | 1/2  |
| Полярные полупроводники, рассеяние на оптических колебаниях, $T > T_d$ . . . . . | -1/2 | -3/2 |
| Нейтральные примеси . . . . .                                                    | —    | 0    |
| Заряженные примеси . . . . .                                                     | —    | 3/2  |
| Дипольные примеси . . . . .                                                      | —    | 1/2  |
| <b>Плазма</b>                                                                    |      |      |
| Рассеяние на ионах . . . . .                                                     | -1/2 | 3/2  |
| Рассеяние на молекулах . . . . .                                                 | 3/2  | -1/2 |

Второе уравнение (1,11) допускает простую физическую интерпретацию. Слагаемое в правой части равенства описывает выделение тепла за счет разогрева электронного газа полем волны, второе слева — передачу тепла от электронной подсистемы решетке, а первое слева описывает тепловой поток в газе электронов. Таким образом, это уравнение является уравнением баланса энергии для электронной подсистемы.

Преобразуем уравнение баланса, заметив предварительно, что в одномерном случае, который здесь рассматривается,  $j_z$ ,  $Q_z$ ,  $\theta$  и другие величины зависят только от одной координаты (от  $z$ ).

Исключим статическое поле  $E_c$  из выражения для теплового потока  $Q_c$ . В продольном магнитном поле  $E_{cx} = E_{cy} = 0$ . Равна нулю и  $z$ -я составляющая статического тока  $j_z$ . Это следует из первого уравнения (1,11) и отсутствия статического тока на бесконечности (напомним, что на бесконечности разогрева нет). Найденное из этих условий термомангнитное поле  $E_{cz}$  подставляем во второе уравнение (1,12) и, учитывая одномерность задачи, для  $Q_{cz} = Q_z$  получаем соотношение

$$Q_z = -T\kappa(\theta) \frac{d\theta}{dz}, \quad (1,15)$$

где  $\kappa(\theta)$  — коэффициент электронной теплопроводности, причем

$$\kappa(\theta) = \lambda_0 \theta^{1+q}, \quad (1,16)$$

$\lambda_0 = 4\Gamma \left( \frac{5}{2} + q \right) NT / 3\pi^{1/2} m v_0$  — теплопроводность электронов в слабом поле<sup>18, 23</sup>.

Для полностью вырожденного электронного газа

$$\kappa(\theta) = \frac{\pi^2 NT}{3v(\varepsilon_0)m} \theta, \quad v(\varepsilon_0) = v_0(T) \left( \frac{\varepsilon_0}{T} \right)^{-q}, \quad (1,17)$$

где  $\varepsilon_0$  — энергия Ферми.

Окончательно, с учетом (1,15), из второго уравнения (1,11) находим уравнение для электронной температуры

$$T \frac{d}{dz} \kappa(\theta) \frac{d\theta}{dz} - NT v_\theta(\theta) (\theta - 1) = -\sigma(\theta) u^2. \quad (1,18)$$

## 2. Уравнение Максвелла, граничные условия

Уравнение Максвелла для амплитуды  $E = E_x - iE_y$  имеет вид<sup>18</sup>

$$\frac{d^2 E}{dz^2} + k^2 \varepsilon(\Theta) E = 0, \quad (2,1)$$

причем

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \varepsilon(\Theta) &= -\frac{4\pi i \sigma(\Theta)}{\omega}, \\ \varepsilon(\Theta) &= \varepsilon_0 - \frac{8\sqrt{2}\pi}{3} \frac{m^{\frac{3}{2}} T^{\frac{3}{2}} \omega_0^2}{N\omega} \int_0^\infty \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\omega_H - \omega - i\nu(x)} \frac{df_0}{dx} dx; \end{aligned} \quad (2,2)$$

здесь  $\varepsilon_0$  — диэлектрическая проницаемость решетки (в плазме  $\varepsilon_0 = 1$ ).  $k = \omega/c$ .

Уравнение Максвелла нелинейно в силу зависимости диэлектрической проницаемости от  $\Theta$ . Однако для полуметаллов и вырожденных полупроводников, с точностью до  $(\Theta/\varepsilon_0)^2 \ll 1$ ,  $\partial f_0/\partial \varepsilon = -\delta(\varepsilon - \varepsilon_0)$  ( $\delta$  — дельта-функция) и диэлектрическая проницаемость от  $\Theta$  не зависит<sup>18</sup>. При этом поля описываются формулами линейной теории.

Сформулируем теперь граничную задачу. Пусть плазма (полупроводниковая или газоразрядная) заполняет полупространство  $z > 0$ , на которое из бесконечности ( $z = -\infty$ ) падает плоская монохроматическая волна частоты  $\omega$ , нормально к поверхности раздела. Падение волны под углом не представляет интереса, так как результаты в этом случае отличаются от полученных ниже переопределением некоторых констант<sup>24</sup>. Для простоты положим, что часть пространства  $z < 0$  заполнена линейной средой без диссипации с показателем преломления  $n = 1$ . Тогда при  $z < 0$  волна будет иметь вид

$$E = E_0(e^{ikz} + Re^{-ikz}), \quad (2,3)$$

где  $E_0$  — амплитуда падающей волны,  $c$  — скорость света в вакууме.  $R$  — коэффициент отражения. Будем также считать, что температура этой среды совпадает с температурой решетки  $T$ .

Ниже предполагается, что характерное расстояние  $L$ , на котором меняется поле, много больше дебаевского радиуса  $d \sim \bar{\varepsilon}/(4\pi e^2 N)^{1/2}$ . Как хорошо известно из теории плазмы, при выполнении этого неравенства плазму можно считать квазинейтральной. Для полупроводника с носителями одного знака это означает, что в любой точке плотность заряда электронов (или дырок) равна равновесной плотности, если не учитывать процессы типа ударной ионизации, изменения коэффициента рекомбинации в поле и т. д.

Отсюда следует, что концентрация носителей в примесном полупроводнике не зависит от координат. В плазме последнее утверждение справедливо, если длительность импульса  $\Delta t$  много меньше времени установления концентрации  $\Delta t_N$ <sup>25</sup>.

Случай зависимости концентрации от координат, что соответствует при выполнении условия квазинейтральности  $L \gg d$ , собственным полупроводникам и плазме с  $\Delta t \gg \Delta t_N$ , здесь рассматриваться не будет, так же как полупроводник с двумя типами носителей при  $\Delta t \ll \Delta t_N$ . Не будет рассматриваться и слоисто-неоднородная плазма. Читателей, интересующихся этими вопросами, можно отослать к работам<sup>25-29</sup>.

Выше мы предположили, что волна в плазме имеет круговую поляризацию. Для этого поляризация падающей на полупространство волны также должна быть круговой. Заметим, что, в отличие от линейной теории.

где с помощью суперпозиции нормальных волн можно удовлетворить граничным условиям при любой поляризации падающей волны, при нелинейном распространении суперпозиция нормальных волн не является решением уравнения Максвелла. Поэтому, если поляризация падающей волны не совпадает с поляризацией одной из нормальных волн в плазме, картина усложняется<sup>30</sup>. Мы здесь не будем останавливаться на этом вопросе, так как качественно полученные ниже результаты остаются в силе и при произвольной поляризации падающей волны<sup>30</sup>.

Так как плазма полуограничена, к уравнениям (1,18) и (2,1) необходимо добавить граничные условия на плоскости раздела  $z = 0$  и при  $z \rightarrow \infty$ .

Граничные условия для поля имеют обычный вид:

$$E(-0) = E(+0), \quad \frac{\partial E(-0)}{\partial z} = \frac{\partial E(+0)}{\partial z}. \quad (2,4)$$

При наличии затухания

$$\lim_{z \rightarrow \infty} E(z) \rightarrow 0, \quad (2,5)$$

т. е. разогрев электронного газа на бесконечности отсутствует, поэтому

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \vartheta(z) \rightarrow 1. \quad (2,6)$$

Если падающая на полупространство волна имеет вид (2,3), то из граничных условий (2,4) следуют такие выражения для  $R$  и коэффициента прохождения  $P$ :

$$P = \frac{E(+0)}{E_0} = \frac{2\xi}{1+\xi}, \quad R = \frac{\xi-1}{\xi+1}; \quad (2,7)$$

здесь  $\xi$  — поверхностный импеданс, определяемый формулой

$$\xi^{-1} = -\frac{ic}{\omega} \frac{1}{E(+0)} \frac{\partial E(+0)}{\partial z}. \quad (2,8)$$

При  $|\xi| \ll 1$

$$P = 2\xi, \quad R = -1 + 2\xi. \quad (2,9)$$

Граничное условие для электронной температуры на плоскости  $z = 0$  получается следующим образом: проинтегрируем уравнение (1,18) почленно по  $z$  от  $0 - \xi$  до  $0 + \xi$  и устремим  $\xi$  к нулю. Предполагая, что поверхностная проводимость отсутствует, имеем<sup>31</sup>

$$\left. \begin{aligned} T\kappa(\vartheta) \frac{d\vartheta}{dz} &= \eta(\vartheta)(\vartheta-1)|_{z=+0}, \\ \eta &= \lim_{\xi \rightarrow 0} NT \int_{-\xi}^{+\xi} v_a(\vartheta) dz. \end{aligned} \right\} \quad (2,10)$$

При получении (2,10) было учтено, что в термостате тепловые потоки отсутствуют ( $Q(z \leq 0) = 0$ ). Знак  $\eta$  выбирается так, чтобы тепловые потоки в образце были направлены наружу. Правая часть уравнения (2,10) описывает неупругий поверхностный механизм поглощения энергии,  $\eta$  характеризует его эффективность. Так, при  $\eta = 0$  (см. вторую формулу (2,10)) не имеется специфических поверхностных механизмов поглощения энергии, а при  $\eta \rightarrow \infty$  этот механизм настолько интенсивен, что  $(\vartheta+0) = 1$ , т. е.  $\Theta(+0) = T$ .

## II. НОРМАЛЬНЫЙ СКИН-ЭФФЕКТ

## 3. Распространение слабозатухающих электромагнитных волн

Как уже указывалось выше, имеются два механизма отвода энергии от электронов: теплопроводность, описываемая первым слагаемым в левой части уравнения (1,18), и передача энергии решетке, которой соответствует второе слагаемое в левой части этого же уравнения. Отношение этих слагаемых порядка  $l_0^2/L_0^2$ , где  $L_0$  — характерная длина, на которой меняется температура, а

$$l_0 \approx \frac{\bar{v}}{\sqrt{\nu\nu_0}} \quad (3,1)$$

— энергетическая длина свободного пробега, характеризующая передачу энергии решетке.

Теплопроводностью можно пренебречь, если  $l_0^2/L_0^2 \ll 1$ . При этом, как следует из (1,18), связь между температурой и полем локальная и, следовательно,  $L_0 \sim L$ .

Если выполняется неравенство

$$\frac{l_0^2}{L_0^2} \sim \frac{l_0^2}{L^2} \ll 1, \quad (3,2)$$

то мы будем говорить о нормальном скин-эффекте.

Под аномальным скин-эффектом будет пониматься такая ситуация, когда выполнено неравенство

$$l \ll L \leq l_0 \quad (3,3)$$

( $l = \bar{v}/\nu$  — длина свободного пробега, связанная с передачей импульса), так как случай  $L \leq l$  в полупроводниках практически не реализуется \*). Неравенство же (3,3) может выполняться, так как из определения  $l_0$  следует, что  $l/l_0 \sim \delta^{1/2} \ll 1$ . Из уравнения (1,18) вытекает, что при  $L \leq l_0$  градиентный член того же порядка, что и остальные, и связь между электронной температурой и амплитудой волны нелокальная.

Рассмотрим распространение слабо затухающих волн, для которых длина волны много меньше длины затухания. В этом случае нелинейность, обусловленная диссипативной частью диэлектрической проницаемости, будет мала. Эта малость обеспечивается выполнением одного из двух неравенств:

$$\frac{\nu}{|\omega - \omega_H|} \ll 1, \quad \frac{\omega_0^2}{\omega |\omega_H - \omega + i\nu|} \ll 1. \quad (3,4)$$

Заметим, что второе неравенство обусловлено лишь малостью концентрации и может выполняться при любом соотношении между  $|\omega - \omega_H|$  и  $\nu$ . В дальнейшем мы для этого случая будем предполагать  $|\omega - \omega_H| \ll \nu$  \*\*). Диэлектрическая проницаемость при малом затухании запишется так:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_0 + \frac{\omega_0^2}{\omega(\omega_H - \omega)} + \frac{4i\Gamma\left(\frac{5}{2} - q\right)\omega_0^2\nu_0}{3\pi^{1/2}\omega(\omega_H - \omega)^2} \vartheta^{-q} \quad \text{при} \quad \frac{\nu}{|\omega_H - \omega|} \ll 1; \\ \varepsilon &= \varepsilon_0 + \frac{4i\Gamma\left(\frac{5}{2} + q\right)\omega_0^2}{3\pi^{1/2}\omega\nu_0} \vartheta^q \quad \text{при} \quad \frac{\omega_0^2}{\omega\nu} \ll 1. \end{aligned} \right\} \quad (3,5)$$

\*) При выполнении неравенства  $L \leq l$  основную роль играют не эффекты нагрева газа электронов, а так называемые стрикционные эффекты <sup>25, 32</sup>.

\*\*) Резонансный случай  $\omega = \omega_H$ ,  $\nu/\omega_H \ll 1$  при сильном затухании рассматривается в п. 4 настоящего обзора, а при слабом затухании — в работе <sup>18</sup>.

При малой нелинейности для решения уравнения Максвелла можно использовать методы, развитые в монографии<sup>33</sup>. Рассмотрим случай, когда выполняется первое из соотношений (3,5). Будем искать решение в виде

$$E = u(z) e^{i(knz - \omega t)}, \quad n = \sqrt{\varepsilon_0 - \frac{\omega_0^2}{\omega(\omega - \omega_H)}}. \quad (3,6)$$

В силу допущения о малости затухания  $u(z)$  медленно меняется по сравнению с экспонентой. Для  $u(z)$  можно написать укороченное уравнение (см. <sup>34</sup>)\*)

$$\frac{du}{dz} + \xi_0 \vartheta^{-q} u = 0; \quad (3,7)$$

здесь  $\xi_0 = \frac{2\Gamma \left( \frac{5}{2} - q \right) \omega_0^2 v_0}{3\pi^{1/2} c (\omega_H - \omega)^2 n}$  — затухание в линейной теории.

В том же приближении уравнение баланса выглядит так:

$$\sigma_0 \vartheta^{-q} u^2 = NT v_{0z} \vartheta^{r-1} (\vartheta - 1), \quad (3,8)$$

где  $\sigma_0 = \frac{4\Gamma \left( \frac{5}{2} - q \right) v_0 \omega_0^2}{3\pi^{3/2} (\omega_H - \omega)^2}$  — проводимость в линейной теории.

Для того чтобы уравнение (3,8) определяло  $\vartheta$  как однозначную монотонную функцию  $u$ , должно выполняться неравенство  $r + q > 0$ . В дальнейшем это неравенство будет считаться выполненным (как и неравенство  $r - q > 0$  \*\*).

Система уравнений (3,7) и (3,8) исследовалась в ряде работ (см. <sup>13, 34, 35</sup>). В работах <sup>34, 35</sup> были развиты численные методы ее решения. Здесь мы займемся получением выражений для  $\vartheta(z)$  и  $u(z)$  и исследованием их асимптотик.

Исключая из (3,7) и (3,8)  $u(z)$ , найдем уравнение для  $\vartheta$ ,

$$\{(r+q) \vartheta^q - (r+q-1) \vartheta^{q-1}\} \frac{d\vartheta}{dz} + 2\xi_0 (\vartheta - 1) = 0, \quad (3,9)$$

решение которого выглядит так:

$$-2\xi_0 z = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{[(r+q) \vartheta - (r+q-1)]}{\vartheta - 1} \vartheta^{q-1} d\vartheta, \quad (3,10)$$

где  $\vartheta_0 = \vartheta(+0)$ . Значение  $\vartheta_0$  связано с  $u_0(u(+0))$  уравнением (3,8), причем  $u_0$  нужно выразить через амплитуду падающей волны  $E_0$ . Из (2,3), (2,7) и (3,6) находим эту связь и коэффициент отражения

$$u_0 = \frac{2E_0}{1+n}, \quad R = \frac{1-n}{1+n} + \frac{2i\xi_0}{(1+n)^2} \vartheta_0^{-q}. \quad (3,11)$$

Для важного случая спиральных волн ( $\omega_H \gg \omega$ ,  $\omega_0^2/\omega\omega_H \gg 1$  \*\*\*), считая, что  $\vartheta_0 \gg 1$ , имеем

$$\vartheta_0 = \left( \frac{16\Gamma \left( \frac{5}{2} - q \right) v_0 \omega |E_0|^2}{3\pi^{\frac{3}{2}} \omega_H v_{0z} NT} \right)^{\frac{1}{r+q}}. \quad (3,12)$$

\*) Здесь и ниже для простоты считается, что имеется один механизм рассеяния по энергии и один по импульсам.

\*\*) Случай  $r \pm q < 0$  будет рассмотрен особо (см. п. 5).

\*\*\*) Спиральные волны большой амплитуды исследовались в работе<sup>18</sup>.

При этом

$$n = \frac{\omega_0}{(\omega\omega_H)^{\frac{1}{2}}}, \quad \xi_0 = \frac{2\Gamma\left(\frac{5}{2}-q\right)\omega_0\nu_0\omega^{\frac{1}{2}}}{3\pi^{\frac{1}{2}}c\omega_H^{\frac{3}{2}}}. \quad (3,13)$$

В отсутствие магнитного поля

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_0 &= \left( \frac{8cn^2\xi_0|E_0|^2}{\pi\nu_{0\partial}(1+n)^2NT} \right)^{\frac{1}{r+q}}, \quad n = \left( \epsilon_0 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \xi_0 &= \frac{2\Gamma\left(\frac{5}{2}-q\right)\omega_0^2\nu_0}{3\pi^{\frac{1}{2}}c\omega^2n}. \end{aligned} \right\} \quad (3,14)$$

Уравнение (3,10) определяет  $\vartheta$  как неявную функцию  $z$  и совместно с (3,7)  $u(z)$  в параметрическом виде. Вычислить интеграл в (3,10) при произвольных  $r$  и  $q$  не удастся. Поэтому рассмотрим две области: область, непосредственно примыкающую к поверхности  $z=0$ , причем в этой области ограничимся случаем сильного разогрева,  $\vartheta(z) \gg 1$ , и область в глубине образца, где  $\vartheta(z) - 1 \ll 1$  (область слабого разогрева).

В области, где  $\vartheta(z) \gg 1$ , пренебрегая в (3,10) единицей по сравнению с  $\vartheta$ , находим для  $\vartheta$

$$\vartheta = \vartheta_0 \left( 1 - \frac{2q}{r+q} \xi_0 \vartheta_0^{-q} z \right)^{1/q}. \quad (3,15)$$

При  $z \rightarrow \infty$  поле затухает, поэтому температура должна стремиться к единице. Найдем асимптотику  $\vartheta$  при больших  $z$ . С этой целью выделим из интеграла в (3,10) расходящуюся часть, переписав (3,10) в виде

$$-2\xi_0 z = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \left[ \frac{[(r+q)\vartheta - (r+q-1)]}{\vartheta-1} \vartheta^{q-1} - \frac{1}{\vartheta-1} \right] d\vartheta + \ln \frac{\vartheta-1}{\vartheta_0-1}. \quad (3,16)$$

При  $\vartheta \rightarrow 1$  верхний предел интеграла в (3,16) можно заменить на единицу, так как интеграл сходится. Окончательно, для  $\vartheta(z)$  при  $z \rightarrow \infty$  получаем (считая, что  $\vartheta_0 \gg 1$ )

$$\vartheta = 1 + \vartheta_0 S_{\vartheta} e^{-2\xi_0 z}, \quad (3,17)$$

где

$$S_{\vartheta} = \exp \left\{ \int_1^{\vartheta_0} \left[ \frac{[(r+q)\vartheta - (r+q-1)]}{\vartheta-1} \vartheta^{q-1} - \frac{1}{\vartheta-1} \right] d\vartheta \right\} \quad (3,18)$$

-- так называемый множитель самовоздействия для температуры<sup>18</sup>. После того как температура найдена,  $E(z)$  находится из (3,6), (3,7). При  $\vartheta(z) \gg 1$  имеем

$$E = P E_0 e^{iknz} \left( 1 - \frac{2q}{r+q} \xi_0 \vartheta_0^{-q} z \right)^{\frac{r+q}{2q}}, \quad (3,19)$$

а при  $\vartheta(z) - 1 \ll 1$

$$E = P E_0 S_E \exp \{ iknz - \xi_0 z \}, \quad (3,20)$$

где  $S_E$  -- множитель самовоздействия для поля<sup>34</sup>,

$$S_E = \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_1^{\vartheta_0} \frac{[(r+q)\vartheta - (r+q-1)]}{\vartheta(\vartheta-1)} [\vartheta^q - 1] d\vartheta \right\}, \quad (3,21)$$

причем при  $\vartheta_0 \gg 1$

$$S_E \sim \begin{cases} \exp \left\{ \frac{r+q}{2q} \vartheta_0^q \right\} \gg 1 & \text{при } q > 0, \\ \vartheta_0^{-\frac{r+q}{2}} \ll 1 & \text{при } q < 0. \end{cases} \quad (3,22)$$

Этот множитель имеет следующий физический смысл: при больших  $z$  температура электронного газа  $\vartheta$  близка к единице, т. е. нелинейность практически отсутствует. Однако волна «помнит», что она прошла через сильно нелинейную область вблизи  $z = 0$ . Этот факт и учитывает множитель самовоздействия. Из (3,20) и (3,22) видно, что при  $q > 0$  множитель самовоздействия увеличивает поле при больших  $z$  по сравнению с линейным случаем, а при  $q < 0$  — уменьшает. Это связано с тем, что  $\nu(\epsilon) \sim \epsilon^{-q}$ , и при  $q < 0$   $\nu(\epsilon)$ , а следовательно, и затухание растут с ростом  $\epsilon$  и поле затухает быстрее, чем в линейной теории; при  $q > 0$  — ситуация обратная.

Характерное расстояние, на котором убывает поле в области сильного разогрева,  $L \sim L_0 \vartheta_0^q$  ( $L_0 \sim \xi_0^{-1}$  — глубина затухания в линейной теории), т. е. остаются справедливыми сделанные выше выводы.

При  $q = 0$  выражения для поля (3,19) и (3,20) с (3,21) переходят в обычную формулу теории линейного скин-эффекта с экспоненциальным затуханием поля.

В том случае, когда выполняется вторая система неравенств (3,4) все результаты получаются заменой в (3,7) — (3,22)  $q$  на  $-q$ . При этом,

$$\left. \begin{aligned} n = \sqrt{\epsilon_0}, \quad \xi_0 = \frac{2\Gamma \left( \frac{5}{2} + q \right) \omega_0^2}{3\pi^{\frac{3}{2}} c \nu_0}, \quad L = L_0 \vartheta_0^{-q}, \\ \vartheta_0 = \left( \frac{4\Gamma \left( \frac{5}{2} + q \right) \omega_0^2 |E_0|^2}{3\pi^{\frac{3}{2}} \nu_0 \nu_{03} N T} \right)^{\frac{1}{r-q}}. \end{aligned} \right\} \quad (3,23)$$

Выше использовалось соотношение  $\vartheta_0 \gg 1$ . Для этого амплитуда падающей волны должна быть много больше плазменного поля<sup>4</sup>:

$$|E_0| \gg u_p, \quad (3,24)$$

причем

$$u_p = \begin{cases} \frac{T}{l_{03} e} \left( \frac{\omega_0^2 \omega_H}{\nu_0^2 \omega} \right)^{\frac{1}{2}} & \text{для спиральных волн,} \\ \frac{T}{l_{03} e} & \text{при } \omega_H = 0; \quad \frac{\omega_0^2 \vartheta_0^q}{\nu_0 \omega} \ll 1. \end{cases}$$

Из определения спиральных волн следует, что плазменное поле для них много больше, чем при распространении электромагнитной волны в отсутствие магнитного поля. Нормальный скин-эффект реализуется, например, в InSb с  $N \sim 10^{16} \text{ см}^{-3}$ ,  $\nu \sim 3 \cdot 10^{11} \text{ сек}^{-1}$  при  $T = 10^\circ \text{ К}$  для спиральных волн. При этом на частоте

$$\omega = 10^{11} \text{ сек}^{-1} \quad (H = 10^3 \text{ э}) \quad l_0 \sim 10^{-2} \text{ см}, \quad L \sim 10^{-1} \text{ см}.$$

#### 4. Распространение электромагнитных волн в средах с сильным затуханием

Если мнимая часть диэлектрической проницаемости  $\varepsilon(\vartheta)$  много больше вещественной, то электромагнитная волна будет сильно затухающей. Из (2,2) следует, что этот случай реализуется при выполнении одной из двух систем неравенств:

$$\text{или} \quad \left. \begin{aligned} \omega = \omega_H, \quad \frac{\nu}{\omega_H} \ll 1, \quad \frac{\omega_0^2 \vartheta^q}{\omega_H \nu_0} \gg \varepsilon_0 \\ \omega_H = 0, \quad \frac{\nu}{\omega} \gg 1, \quad \frac{\omega_0^2 \vartheta^q}{\omega \nu_0} \gg \varepsilon_0. \end{aligned} \right\} \quad (4,1)$$

Первая система соответствует циклотронному резонансу в средах с большой электронной концентрацией, а вторая — низкочастотным волнам.

При выполнении неравенств (4,1) из (2,2) получаются такие выражения для диэлектрической проницаемости:

$$\varepsilon = \frac{4i\Gamma \left( \frac{5}{2} + q \right) \omega_0^2 \vartheta^q}{\frac{1}{3\pi^{\frac{3}{2}} \omega_H \nu_0}} \quad \text{при} \quad \omega = \omega_H, \quad \frac{\nu}{\omega_H} \ll 1,$$

$$\varepsilon = \frac{4i\Gamma \left( \frac{5}{2} + q \right) \omega_0^2 \vartheta^q}{\frac{1}{3\pi^{\frac{3}{2}} \omega \nu_0}} \quad \text{при} \quad \omega_H = 0, \quad \frac{\nu}{\omega} \gg 1.$$

Если имеет место первая система неравенств (4,1), уравнение баланса и уравнение Максвелла принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_0 \vartheta^q u^2 = NT \nu_{00} \vartheta^{r-1} (\vartheta - 1), \\ \frac{d^2 E}{dz^2} + 2i\xi_0^2 \vartheta^q E = 0, \end{aligned} \right\} \quad (4,2)$$

где

$$\xi_0^2 = \frac{2\Gamma \left( \frac{5}{2} + q \right) \omega_H \omega_0^2}{\frac{1}{3\pi^{\frac{3}{2}} c^2 \nu_0}}, \quad \sigma_0 = \frac{4\Gamma \left( \frac{5}{2} + q \right) \omega_0^2}{\frac{3}{3\pi^{\frac{3}{2}} \nu_0}}. \quad (4,3)$$

Систему (4,2) удастся решить только в области, где  $\vartheta(z) \gg 1$ <sup>17,18</sup>. Считая, что  $\vartheta(z) \gg 1$ , из первого уравнения (4,2) определяем  $\vartheta$ :

$$\vartheta = \left[ \frac{4\Gamma \left( \frac{5}{2} + q \right) \omega_0^2 u^2}{\frac{3}{3\pi^{\frac{3}{2}} \nu_0 \nu_{00} NT}} \right]^{\frac{1}{r-q}},$$

или

$$\vartheta = \vartheta_0 \left( \frac{u}{u_0} \right)^{\frac{2}{r-q}}, \quad (4,4)$$

где

$$\vartheta_0 = \left[ \frac{4\Gamma \left( \frac{5}{2} + q \right) \omega_0^2 u_0^2}{\frac{3}{3\pi^{\frac{3}{2}} \nu_0 \nu_{00} NT}} \right]^{\frac{1}{r-q}}. \quad (4,5)$$

Подставляя  $\vartheta$  из (4,4) во второе уравнение (4,2), имеем

$$\frac{d^2 E}{dz^2} + 2i\xi_0^2 \vartheta_0^q \left( \frac{u}{u_0} \right)^{\frac{2q}{r-q}} E = 0. \quad (4,6)$$

Напомним, что  $u = |E|$ .

Решение уравнения (4,6) будем искать в виде

$$E = E_0 (1 + \kappa z)^{-(\alpha + i\beta)}, \quad (4,7)$$

где  $E_0$  — значение  $E(z)$  при  $z = +0$ .

Подставляя (4,7) в (4,6), приравнявая показатели степеней при  $(1 + \kappa z)$ , а затем отделяя вещественную и мнимую части, получаем уравнения для определения  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\kappa$ . Окончательно, для  $E(z)$  находим

$$E = 2\xi E_0 \left( 1 + \frac{q}{[(2r-q)(r-q)]^{\frac{1}{2}}} \frac{\omega}{c|\xi|} z \right)^{-\frac{r+q}{q} + \frac{i}{q} [r(r-q)]^{\frac{1}{2}}} \quad (4,8)$$

При получении (4,8) учтено, что  $|\xi| \ll 1$ . Малость  $\xi$  вытекает из следующего: глубина проникновения в резонансном случае мала по сравнению с длиной волны в вакууме, а  $|\xi|$  — порядка их отношения. Выражение для  $\xi$  получается из граничных условий (2,9). Нужно только иметь в виду, что  $u_0$ , входящее в  $\vartheta_0$ , должно быть выражено через  $E_0$ . Окончательно для  $\xi$  и  $\vartheta_0$  имеем

$$\xi = 2^{-\frac{2q}{r}} \left( \frac{r}{r-q} \right)^{\frac{r-q}{4r}} \left( \frac{\omega_H v_0}{\omega_0^2} \right)^{-\frac{q}{2r}} \left( \frac{e|E_0|l_{0a}}{T} \right)^{-\frac{q}{r}} \times \\ \times |\xi_0| \exp \left\{ -i \arctg \left( \frac{r-q}{q} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}, \quad (4,9)$$

$$\xi_0 = \left( \frac{4\Gamma \left( \frac{5}{2} + q \right)}{3\pi^{1/2}} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{\omega_H v_0}{\omega_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ -i \frac{\pi}{4} \right\} \text{ есть значение } \xi \text{ при } \vartheta = 1,$$

$$\vartheta_0 = 2^{\frac{4}{r}} \left( \frac{r}{r-q} \right)^{\frac{1}{2r}} \left( \frac{\omega_H v_0}{\omega_0^2} \right)^{\frac{1}{r}} \left( \frac{e|E_0|l_{0a}}{T} \right)^{\frac{2}{r}}. \quad (4,10)$$

После того как  $E(z)$  найдено (см. (4,8)), зависимость  $\vartheta(z)$  получается из (4,4):

$$\vartheta = \vartheta_0 \left( 1 + \frac{q}{[(2r-q)(r-q)]^{\frac{1}{2}}} \frac{\omega}{c|\xi|} z \right)^{-\frac{2}{q}}. \quad (4,11)$$

Если выполняется вторая система соотношений (4,1), выражения для  $\xi$  и  $\vartheta_0$  получаются из (4,9), (4,10) заменой  $\omega_H$  на  $\omega$ .

При получении уравнения баланса в случае нормального скин-эффекта мы пренебрегаем членом с производной по координате, что соответствует пренебрежению пространственными производными в кинетическом уравнении. Для законности этого пренебрежения должно выполняться условие  $L \gg l_a$ . Как следует из (4,8), в случае сильной нелинейности  $L \sim k^{-1} |\xi|$ . Отсюда вытекает неравенство для импеданса  $|\xi| \gg \gg kl_a$ . С другой стороны, из условия резонанса следует, что  $|\xi| \ll 1$ . Таким образом, значение импеданса ограничено условиями применимости теории как сверху, так и снизу. Глубина проникновения волны вглубь

образца при сильной нелинейности  $L \sim L_0 \vartheta_0^{-q/2}$  ( $L_0 = 1/\xi_0$  — глубина проникновения в линейной теории). При  $q < 0$   $L \gg L_0$ , а при  $q > 0$   $L \ll L_0$ .

Плазменное поле при циклотронном резонансе приобретает вид  $u_p = T \omega_0 / e l_{03} \omega_H^{1/2} v_0^{1/2}$ . В InSb со следующими параметрами:  $m = 10^{-28}$  г,  $N = 10^{-15}$  см<sup>3</sup>,  $\nu = 10^{10}$  сек<sup>-1</sup>,  $\omega = \omega_H = 10^{11}$  сек<sup>-1</sup> —  $l_0 \sim 10^{-3}$  см,  $L \sim 10^{-2}$  см.

## 5. Распространение электромагнитных волн в плазме при неоднозначной зависимости электронной температуры от амплитуды поля

При определенных механизмах передачи энергии и импульса ( $r \pm q < 0$  — перегревные механизмы) электронная температура может стать трехзначной функцией поля<sup>37-40</sup> ( $S$ -образная зависимость). Такая ситуация может реализоваться в плазме<sup>39-40</sup> и в  $n$ -InSb<sup>41</sup> ( $r = 1/2$ ,

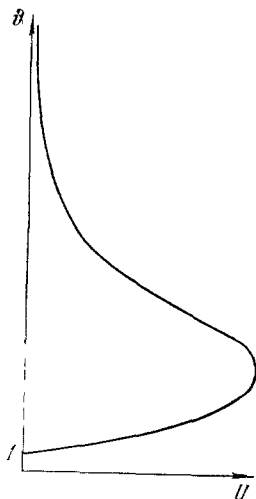


Рис. 1.

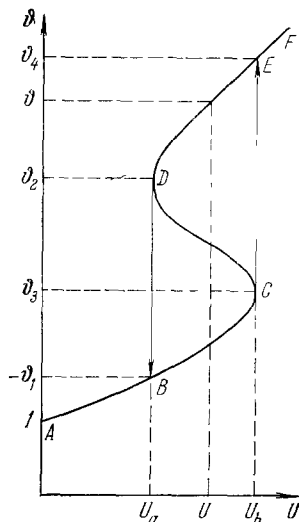


Рис. 2.

$q = 3/2$ ). Это связано с тем, что при этих механизмах в отсутствие межэлектронных соударений имеет место эффект убегания электронов<sup>42</sup>, а частые межэлектронные соударения играют роль полностью удерживающего механизма<sup>16, 38</sup>.

Таким образом, результаты этого раздела верны только при сильном межэлектронном взаимодействии ( $\nu_{ee} \gg \nu_0$ ).  $S$ -образная зависимость температуры от поля получается следующим образом: при  $r \pm q < 0$  функция  $\vartheta(u)$ , определяемая из уравнения (3,8) или (4,2), будет иметь вид, изображенный на рис. 1. Однако при достаточно больших температурах существенными становятся новые механизмы рассеяния, в результате чего функция  $\vartheta(u)$  деформируется к виду, изображенному на рис. 2. (подробнее см. <sup>38</sup>). Из рис. 2 видно, что уравнение баланса имеет при наличии перегревных механизмов корни, убывающие с увеличением  $u$  (падающая ветвь). Аналогично<sup>43</sup> можно показать, что падающая ветвь неустойчива относительно малых возмущений. Устойчивыми являются только те ветви кривой  $\vartheta(u)$ , где  $\vartheta$  растет с ростом  $u$ , т. е.  $d\vartheta/du > 0$ .

Для удобства перепишем уравнение баланса в виде

$$D(\vartheta) = u^2, \quad (5.1)$$

где  $D(\vartheta) = NT \frac{v_a(\vartheta)(\vartheta-1)}{\sigma(\vartheta)}$ .

Дифференцируя (5.1) по  $\vartheta$ , получаем следующий критерий устойчивости:

$$\frac{dD(\vartheta)}{d\vartheta} > 0. \quad (5.2)$$

Переход от устойчивых ветвей к неустойчивым происходит при температурах, удовлетворяющих условию  $du/d\vartheta = 0$ , или, что то же,

$$\frac{dD(\vartheta)}{d\vartheta} = 0. \quad (5.3)$$

Поле  $u$ , соответствующее переходу температуры от одной ветви к другой, определяется из уравнения (5.1) при подстановке в него корней уравнения (5.3).

Рассмотрим изменение электронной температуры в зависимости от амплитуды электромагнитной волны на границе  $u_0$ , которая в свою очередь определяется амплитудой падающего поля  $E_0$ .

При адиабатическом росте поля от нуля до тех пор, пока  $u_0 < u_b$  (рис. 2), электронная температура, как функция поля в глубине образца, описывается нижней ветвью  $AC$ . При  $u_0 = u_b$  температура электронного газа на границе  $\vartheta_0$  изменится скачком от значения  $\vartheta_3$  до значения  $\vartheta_1$ , минуя неустойчивую часть кривой  $CD$ . С дальнейшим ростом  $u_0$ ,  $\vartheta_0$  будет двигаться вправо вдоль кривой  $DF$ .

Электрическое поле с ростом расстояния  $z$  от границы образца затухает за счет диссипации до нуля при  $z \rightarrow \infty$ . Вместе с ним будет убывать электронная температура, стремясь к единице. Если  $u_0 > u_b$ , то в некоторой точке  $z = a\vartheta(z)$  скачком изменится от  $\vartheta_2$  до  $\vartheta_1$ , что приведет к разрыву диэлектрической проницаемости в этой точке. От точки разрыва диэлектрической проницаемости электромагнитная волна отразится. Таким образом, в исследуемом случае плазма ведет себя как пластина толщины  $a$ . Известно<sup>44</sup>, что коэффициент отражения  $R$  от пластины в вакуум является осциллирующей функцией ее толщины. Толщина «пластины» должна быть найдена из уравнения  $u(a, E_0) = u_a$ , определяющего поле в точке срыва. Таким образом,  $a$  является функцией  $E_0$  и  $u_a$  и, следовательно,  $R$  осциллирует с изменением  $E_0$ . Как известно<sup>44</sup>, осцилляции коэффициента отражения с толщиной определяются фактором  $e^{2ikna}$ . Расчет, проведенный в работе<sup>45</sup>, полностью подтверждает сделанные выше качественные выводы, причем, если волна слабо затухающая, то  $R$  имеет вид \*)

$$R = \frac{1-n}{1+n} - \frac{i\alpha}{n} \left\{ \frac{\Phi(\vartheta_0)}{(1+n)^2} + \frac{u_a^2 \Phi^{1/2}(\vartheta_2)}{4E_0^2 \Phi^{1/2}(\vartheta_0)} [\Phi(\vartheta_1) - \Phi(\vartheta_2)] e^{2ikna} \right\}. \quad (5.4)$$

При получении (5.4) предполагалось, что диэлектрическую проницаемость можно представить в виде

$$\epsilon(\vartheta) = -n^2 + i\alpha\Phi(\vartheta), \quad (5.5)$$

где малость параметра  $\alpha \ll 1$  соответствует слабому затуханию. Из работы<sup>45</sup> следует, что  $a(E_0)$  должно определяться из приведенного выше условия  $u(a, E_0) = u_a$ . В нулевом приближении по  $\alpha$   $u(z)$  при слабом затухании описывается формулой (3.7). Переходя к обозначениям

\*) В работе<sup>45</sup> множитель  $\Phi^{1/2}(\vartheta_2)/\Phi^{1/2}(\vartheta_0)$  ошибочно опущен.

настоящего раздела, для  $a$  имеем

$$a = \frac{n}{k\alpha} \int_{\vartheta_2}^{\vartheta_0} \Phi^{-1}(\vartheta) \frac{d \ln D(\vartheta)}{d\vartheta} d\vartheta. \quad (5,6)$$

Период осцилляции коэффициента отражения  $\delta E_0$  по амплитуде падающей электромагнитной волны  $E_0$  должен находиться из соотношения

$$2k\pi [a(E_0 + \delta E_0) - a(E_0)] = 2\pi.$$

Так как при слабом затухании период осцилляции коэффициента отражения  $\delta E_0 \ll E_0$ , для  $\delta E_0$  получаем следующую формулу:

$$\delta E_0 = \frac{\pi \alpha \Phi(\vartheta_0)}{n^2 (d \ln D(\vartheta_0)/dE_0)}. \quad (5,7)$$

Заметим, что период осцилляции коэффициента отражения не зависит от поля  $u_a$  в точке срыва.

При сильном затухании величина  $\delta E_0$  порядка или больше  $E_0$  и так же не зависит от  $u_a$ . В этом случае амплитуда осциллирующего члена существенно убывает с ростом поля на величину порядка периода осцилляций, в отличие от (5,4), где амплитуда не меняется. Из сказанного следует, что осцилляции коэффициента отражения с полем удобно наблюдать при малом затухании волны.

Из-за конечной флуктуации температуры срыв с верхней ветви на нижнюю может произойти не в точке  $u = u_a$ , а в любой точке интервала  $u_a \leq u \leq u_b$  (рис. 2). Однако результаты остаются верными и в этом случае, если под  $u_a$  в (5,4) подразумевать поле в точке срыва.

### III. АНОМАЛЬНЫЙ СКИН-ЭФФЕКТ

#### 6. Малые потоки на границе раздела

Как указывалось в п. 3, аномальному скин-эффекту соответствует  $l \ll L \leq l_0$ . Мы будем рассматривать случай сильного аномального скин-эффекта,  $l \ll L \ll l_0$ .

Преобразуем уравнение баланса (2,18), сделав следующую замену переменных:

$$w = \int_0^{\vartheta} \kappa(\vartheta) d\vartheta / \int_0^1 \kappa(\vartheta) d\vartheta. \quad (6,1)$$

Тогда уравнение (2,18) примет вид

$$\frac{d^2 w}{dz^2} - \delta^2 Q(w) = -\delta^2 P(w) u^2, \quad (6,2)$$

где

$$\delta^2 = \frac{N v_{00}}{\int_0^1 \kappa(\vartheta) d\vartheta}, \quad P(w) = \frac{\sigma(w)}{N T v_{00}}, \quad Q(w) = \frac{v_a(w)}{v_{00}} [\vartheta(w) - 1]. \quad (6,3)$$

Заметим, что  $\delta \sim l_0^{-1}$ . Граничные условия (2,6), (2,10) при этом запишутся так:

$$\left. \frac{dw}{dz} \right|_{z=0} = \gamma [\vartheta(w) - 1], \quad w|_{z \rightarrow \infty} \rightarrow 1, \quad (6,4)$$

причем  $\gamma = \eta/T \int_0^1 \kappa(\vartheta) d\vartheta$ .

В этом разделе мы исследуем случай  $\gamma \ll \xi$ . Это соответствует малой теплоотдаче границе, когда энергия от электронов в основном передается решетке.

Если  $\gamma \ll \xi$ , то для решения уравнения баланса можно использовать метод последовательных приближений, пренебрегая в нулевом приближении правой частью (6,2) и учитывая ее потом как возмущение.

Физический смысл этого заключается в следующем. Из (6,2) следует, что характерным расстоянием, на котором убывает электронная температура, является  $\delta^{-1}$ . В силу большой аномальности скин-эффекта поле затухает значительно быстрее. Таким образом, правая часть уравнения (6,2) играет роль поверхностных источников теплоты и при решении уравнения баланса в нулевом приближении ею можно пренебречь. Правую часть нужно учесть в следующем приближении для удовлетворения граничным условиям на плоскости  $z = 0$ .

При решении уравнения Максвелла в непосредственной близости к границе ( $z \ll l_0$ ) величину  $w$  можно заменить на  $w_0$ , так как на расстояниях порядка  $L$   $w$  практически не меняется ( $L \ll l_0$ ). После этого уравнение Максвелла является линейным уравнением с постоянными коэффициентами, которое легко решается, причем поле  $E$  вблизи границы равно

$$E = u_0 \exp \{ i k n z - \xi(w_0) z \}; \quad (6,5)$$

здесь  $\xi(w_0)$  — значение показателя затухания при  $z = 0$ .

В силу сказанного выше решение уравнения (6,2) будем искать в виде

$$w = w' + w'', \quad w'' \ll w', \quad (6,6)$$

где  $w'$  — решение уравнения (6,2) без правой части. Уравнение для  $w'$  решается в квадратурах:

$$-V\sqrt{2} \delta z = \int_{w'_0}^{w'} dw \left[ \int_1^w dw Q(w) \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (6,7)$$

При выводе (6,7) были учтены граничные условия на бесконечности.

Для  $w''$  с точностью до величин  $\sim \delta/\xi \ll 1$  ( $L/l_0 \ll 1$ ) получается уравнение

$$\frac{d^2 w''}{dz^2} - \delta^2 P(w') u^2 = 0. \quad (6,8)$$

С точностью до  $\delta/\xi$  в уравнении (6,8)  $w'$  можно заменить на  $w'_0$ . Подставляя в (6,8) выражение для  $u = |E|$  из (6,5) и решая его, находим

$$w'' = - \frac{\delta^2 P(w'_0) |E_0|^2}{4\xi^2(w'_0)} e^{-2\xi(w'_0)z}. \quad (6,9)$$

Заметим, что, хотя  $w''/w' \sim \delta/\xi \ll 1$ ,  $dw''/dz$  одного порядка с  $dw'/dz$ .

Из граничных условий для  $w$  из (6,4) при  $z = 0$  получается уравнение для определения  $w'_0$

$$\frac{\delta^2 P(w'_0) |E_0|^2}{2\xi(w'_0)} = V\sqrt{2} \delta \left[ \int_1^{w'_0} Q(w) dw \right]^{\frac{1}{2}} + \gamma [\Phi(w'_0) - 1]. \quad (6,10)$$

Заметим, что если  $\gamma \ll \delta$ , в формуле (6,10) можно пренебречь последним слагаемым; если  $\gamma \gg \delta$ , то несущественным становится первое слагаемое справа.

Если имеется только один механизм рассеяния энергии и один — импульса, то из (6,1) следует, что \*)

$$w = \vartheta^{2+q}. \quad (6,11)$$

Возвращаясь к переменной  $\vartheta$ , в области, где  $\vartheta(z) \gg 1$ , имеем

$$\vartheta = \vartheta'_0 \left\{ [1 - (2+q-r) \delta(\vartheta'_0) z]^{\frac{2}{2+q-r}} - \frac{\delta(\vartheta'_0)}{\xi(\vartheta'_0)} e^{-\frac{2}{\xi(\vartheta'_0)} z} \right\}, \quad (6,12)$$

где

$$\delta(\vartheta'_0) = [2(2+q)(2+q-r)]^{-\frac{1}{2}} \delta \vartheta'_0 \frac{r-q-2}{2}.$$

Второй член в (6,12) в силу условия  $\delta/\xi \ll 1$  много меньше первого, и мы им пренебрегаем как в выражении для температуры, так и при вычислении полей \*\*). Тогда  $\vartheta'_0$  совпадает с температурой электронов на поверхности  $\vartheta_0$ .

Рассмотрим теперь область  $\vartheta(z) - 1 \ll 1$ . Поступая аналогично тому, как это делалось в п. 3 [см. (3,16) — (3,18)], находим

$$\vartheta = 1 + \vartheta_0 S_\vartheta \exp \left\{ -\frac{\delta z}{(2+q)^{1/2}} \right\}, \quad (6,13)$$

причем

$$S_\vartheta = \exp \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\vartheta_0}^1 \left[ \vartheta^{1+q} \left( \frac{\vartheta^{2+q+r}-1}{2+q+r} - \frac{\vartheta^{1+q+r}-1}{1+q+r} \right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\vartheta-1} \right] d\vartheta \right\}. \quad (6,14)$$

Вычисление интеграла в (6,14) приводит к следующим оценкам для  $S_\vartheta$  при  $\vartheta_0 \gg 1$ :

$$\left. \begin{aligned} S_\vartheta &\sim \exp \left\{ \frac{[2(2+q+r)]^{\frac{1}{2}}}{2+q-r} \vartheta_0^{\frac{2-q+r}{2}} \right\} \gg 1 \quad \text{при } 2+q-r > 0; \\ S_\vartheta &\sim 1 \quad \text{при } 2+q-r < 0. \end{aligned} \right\} \quad (6,15)$$

После того как температура электронного газа  $\vartheta(z)$  найдена, уравнение Максвелла становится линейным уравнением с коэффициентом, зависящим от  $z$ . Вследствие неравенства  $\delta(\vartheta_0) \ll \xi(\vartheta_0)$  температура как функция  $z$  медленно меняется по сравнению с электрическим полем, благодаря чему для решения уравнения Максвелла можно воспользоваться методом ВКБ.

В случае аномального скин-эффекта решение может быть выписано в общем виде при произвольной зависимости  $\varepsilon(\vartheta)$  от  $\vartheta$ . Однако оно становится обозримым только при ряде упрощений, когда на частоты и магнитное поле налагаются определенные ограничения.

При больших  $z$  в области, где  $\vartheta(z) - 1 \ll 1$ , поле имеет вид [см. (3,20)]

$$E(z) = P E_0 S_E \exp \{ i k n z - \xi_0 z \}, \quad (6,16)$$

где  $S_E$  — множитель самовоздействия для поля, имеющий тот же смысл, что и в случае нормального скин-эффекта.

Если выполняется первое неравенство (3,4), разлагая  $\varepsilon(\vartheta)$  по степеням  $v$  и решая уравнение Максвелла методом ВКБ, находим для поля

\*) Для всех известных механизмов рассеяния  $2+q > 0$ .

\*\*) Учет этого члена при вычислении полей приводит к поправкам  $\sim (\delta/\xi)^3$  <sup>45</sup>. Заметим, однако, что при исследовании термомагнитных эффектов, когда большую роль играют производные от температуры, второе слагаемое в фигурных скобках в (6,12) является существенным.

такую формулу:

$$E(z) = PE_0 \exp \left\{ iknz - \xi_0 \int_0^z \vartheta^{-q} dz \right\}. \quad (6,17)$$

В области, где  $\vartheta(z) \gg 1$ , имеем

$$E = PE_0 \times \exp \left\{ iknz + (2-q-r)^{-1} \frac{\xi_0 \vartheta_0^{-q}}{\delta(\vartheta_0)} \left[ (1 - (2-q-r) \delta(\vartheta_0) z)^{\frac{2-q-r}{2+q-r}} - 1 \right] \right\}. \quad (6,18)$$

Выражения для  $S_E$  в этом и последующих случаях приведены в работе<sup>18</sup>. Здесь мы ограничимся оценками  $S_E$  при  $\vartheta_0 \gg 1$  при различных соотношениях между  $r$  и  $q$ . Мы приведем для примера выражения для  $S_E$  только в двух случаях:

$$\left. \begin{aligned} S_E &\sim \exp \left\{ - \frac{[2(2+q)(2+q+r)]^{\frac{1}{2}}}{2-q-r} \frac{\xi_0}{\delta} \vartheta_0^{\frac{2-q-r}{2}} \right\} \ll 1 \\ &\text{при } q < 0, 2-q-r > 0, \\ S_E &\sim \exp \left\{ \frac{[2(2+q)(2+q+r)]^{\frac{1}{2}}}{2+q-r} \frac{\xi_0}{\delta} \vartheta_0^{\frac{2+q-r}{2}} \right\} \gg 1 \\ &\text{при } q > 0, 2+q-r > 0. \end{aligned} \right\} \quad (6,19)$$

Приведем выражения для фигурирующих в (6,17) — (6,19) температур на границе. Из (6,10), считая для простоты  $\gamma = 0$ , имеем

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_0 &= \left\{ \frac{16 \sqrt{2} (2-q+r)^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{5}{2}-q\right) v_0^2 e^2 |E_0|^2 l_{03} L_0}{3\pi^{\frac{1}{2}} (1+n)^2 \omega T^2} \right\}^{\frac{2}{2+q-r}} \\ &\text{в случае } \omega_H = 0 \text{ и} \\ \vartheta_0 &= \left\{ \frac{16 \sqrt{2} (2-q+r)^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{5}{2}-q\right) \omega v_0^2 e^2 |E_0|^2 l_{03} L_0}{3\pi^{\frac{1}{2}} \omega_H \omega_0^2 T^2} \right\}^{\frac{2}{2+q-r}} \end{aligned} \right\} \quad (6,20)$$

для спиральных волн.

Если же выполняется второе неравенство (3,4), то абсолютно аналогично при  $\vartheta(z) \gg 1$

$$E = PE_0 \exp \left\{ ikz + \frac{1}{2+3q-r} \frac{\xi_0}{\delta(\vartheta_0)} \vartheta_0^q \left[ (1 - (2-q+r) \delta(\vartheta_0) z)^{\frac{2+3q-r}{2+q-r}} - 1 \right] \right\}. \quad (6,21)$$

Значение  $\vartheta_0$  определяется формулой

$$\vartheta_0 = \left\{ \frac{4 \sqrt{2} (2+q+r)^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{5}{2}+q\right) e^2 |E_0|^2 l_{03} L_0}{3\pi^{1/2} T^2} \right\}^{\frac{2}{2+q+r}}. \quad (6,22)$$

При выполнении неравенств (4,1), когда мнимая часть диэлектрической проницаемости становится много больше вещественной, для поля

имеем <sup>6,8</sup>

$$E = 2\xi E_0 \left( \frac{\vartheta_0}{\vartheta} \right)^{\frac{q}{4}} \exp \left\{ -(1-i)\xi_0 \int_0^z \vartheta^{\frac{q}{2}} dz \right\}. \quad (6,23)$$

В области, где  $\vartheta(z) \gg 1$ , подставляя значение  $\vartheta(z)$  из (6,12) в (6,23), получаем

$$E = \frac{2\xi E_0 (2+q+r)^{-1}}{[1 - (2+q-r)\delta(\vartheta_0)z]^{\frac{q}{2}}} \times \\ \times \exp \left\{ \frac{1-i}{2+2q-r} \frac{\xi_0}{\delta(\vartheta_0)} \vartheta_0^{\frac{q}{2}} [(1 - (2+q-r)\delta(\vartheta_0)z)^{\frac{2+2q-r}{2+q-r}} - 1] \right\}. \quad (6,24)$$

При циклотронном резонансе ( $\omega = \omega_H$ )

$$\vartheta_0 = \left[ \left( \frac{32(2+q+r)^{\frac{1}{2}} \omega_H^2 v_0^2}{\omega_0^4} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{e^2 |E_0|^2 l_{03} L_0}{T^2} \right]^{\frac{1}{1+q+(r/2)}}. \quad (6,25)$$

Результаты для случая низкочастотных волн при круговой поляризации падающего поля получаются из (6,25) заменой  $\omega_H$  на  $\omega$ . Связь между  $\xi_0$  и  $\xi$  дается формулой

$$\xi = \frac{1-i}{2} \frac{\omega}{c\xi_0} \vartheta_0^{-\frac{q}{2}} \ll 1. \quad (6,26)$$

Заметим, что в силу условий, наложенных на  $r$  и  $q$  ( $r+q > 0$ ), зависимость  $\vartheta_0$  от  $E_0$  во всех случаях такова, что  $\vartheta_0$  растет с увеличением  $E_0$ . Условие аномального скин-эффекта выполняется при  $m = 10^{-29}$  г,  $v = 10^{10}$  сек<sup>-1</sup>,  $N = 10^{15}$  см<sup>-3</sup>,  $\omega = \omega_H = 10^{11}$  сек<sup>-1</sup>. В этом случае  $l_s \sim 3 \cdot 10^{-2}$  см,  $L \sim 10^{-3}$  см.

## 7. Аномальный скин-эффект при больших потоках на поверхности раздела

Исследуем предельный случай большой теплоотдачи на границе  $y \gg \xi$  при слабом затухании электромагнитной волны.

Здесь нужно различать две пространственные области ( $z \ll \delta^{-1}$ ). В области, непосредственно примыкающей к границе, где энергией, передаваемой решетке, можно пренебречь ( $z \ll \delta^{-1}$ ), укороченное уравнение Максвелла и уравнение баланса записываются так <sup>46</sup>:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 w}{dz^2} + \delta^2 P(w) u^2 &= 0, \\ \frac{du}{dz} + \xi(w) u &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7,1)$$

Учитывая, что  $\xi(w) = 2\pi\sigma(w)/\omega \sqrt{\epsilon_r}$  ( $\epsilon_r$  — вещественная часть диэлектрической проницаемости), а выражение для  $P(w)$  [см. (6,3)] записывается так:  $P = P_0 \xi(w)$  ( $P_0 = nc/2\pi N T v_{0a}$ ), мы можем легко решить систему (7,1). Ответ имеет следующий вид <sup>46</sup>:

$$\left. \begin{aligned} -2z &= \int_{w_0}^w dw \left[ \int_{w_\infty}^w \xi(w) dw \right]^{-1}, \\ u &= \left[ \frac{4}{\delta^2 P_0} \int_w^\infty \xi(w) dw \right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \right\} \quad (7,2)$$

где  $w_\infty$  — предельная температура, к которой стремится  $w(z)$  при  $z \gg \xi^{-1}$ . Если предположить, что имеется один механизм рассеяния импульса, то  $\xi(w) = \xi_0 w^{\mp \frac{q}{2+q}}$  (см. п. 6). При выполнении первого условия (3,4) в выражении для  $\xi$  нужно удерживать верхний знак, а если второе условие (3,4), то нижний.

Возвращаясь к переменной  $\vartheta$  и интегрируя по  $\vartheta$  в (7,2), получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{2\xi_0 z}{2+q \mp q} &= \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{\vartheta^{(1+q)} d\vartheta}{\vartheta_\infty^{2+q \mp q} - \vartheta^{2+q \mp q}}, \\ E &= \left[ \frac{8\pi T \lambda_0 \xi_0}{(2+q \mp q) cn} \right]^{\frac{1}{2}} (\vartheta_\infty^{2+q \mp q} - \vartheta^{2+q \mp q})^{\frac{1}{2}} e^{iknz}. \end{aligned} \right\} \quad (7,3)$$

Первая формула определяет в неявном виде  $\vartheta(z)$ , а система (7,6) —  $E(z)$  в параметрическом виде.  $\vartheta_0$  должно быть определено из граничного условия (6,4) при  $z=0$ , которое дает

$$\frac{2\xi_0 T \lambda_0}{(2+q \mp q)} (\vartheta_\infty^{2+q \mp q} - \vartheta_0^{2+q \mp q}) = \eta (\vartheta_0 - 1). \quad (7,4)$$

С учетом того обстоятельства, что  $E(+0) = 2E_0/(1+n)$ , находим еще одну связь между  $\vartheta_0$  и  $\vartheta_\infty$  [см. вторую формулу (7,3)]:

$$\frac{2(2+q \mp q) cn |E_0|^2}{\pi (1+n)^2 T \lambda_0 \xi_0} = \vartheta_\infty^{2+q \mp q} - \vartheta_0^{2+q \mp q}. \quad (7,5)$$

Из (7,4) и (7,5) определяем  $\vartheta_0$  и  $\vartheta_\infty$ :

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_0 &= \frac{1+4nc |E_0|^2}{\pi (1+n)^2 \eta}, \\ \vartheta_\infty &= \vartheta_0 \left[ 1 + \frac{2(2+q \mp q) nc |E_0|^2}{\pi (1+n)^2 T \lambda_0 \xi_0} \vartheta_0^{-(2+q \mp q)} \right]^{\frac{1}{2+q \mp q}} \end{aligned} \right\} \quad (7,6)$$

При  $z \gg \xi^{-1}$  граничные условия перестают «чувствоваться» и выражения для поля и температуры даются формулами (6,7), (6,17).

Заметим, что выражение для  $\vartheta_\infty$  совпадает со значением  $\vartheta_0$ , определяемым формулой (6,10), если там опустить первый член справа (это законно, так как  $\gamma \gg \delta$ ).

Таким образом, существует такой интервал  $z(\xi)^{-1} \ll z \ll \delta^{-1}$ , где выражение для температуры из (7,3) совпадает с температурой, определяемой формулой (6,7). Таким образом, если в первой формуле (7,3) под  $\vartheta_\infty$  понимать  $\vartheta(z)$  из (6,7), то формула (7,3) будет описывать зависимость  $\vartheta(z)$  во всем интервале изменения  $z$ . Действительно, при  $z \ll \delta^{-1}$   $\vartheta(z)$  из (6,7) сводится к константе, равной  $\vartheta_\infty$ . С другой стороны, при  $z \gg \xi^{-1}$  из (7,3) для  $\vartheta(z)$  получаем

$$\vartheta = \vartheta_\infty - S_\vartheta \exp \{ -2\xi_0 \vartheta_\infty^{\mp q} z \}, \quad (7,7)$$

где

$$S_\vartheta = (\vartheta_\infty - \vartheta_0) \exp \left\{ \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_\infty} \left[ \frac{\vartheta_\infty^{\mp q} \vartheta^{1+q}}{(2+q \mp q) (\vartheta_\infty^{2+q \mp q} - \vartheta^{2+q \mp q})} - \frac{1}{\vartheta_\infty - \vartheta} \right] d\vartheta \right\},$$

т. е.  $\vartheta$  сводится к  $\vartheta_\infty$ , которую мы заменяем на  $\vartheta(z)$  из (6,7).

В заключение отметим, что в настоящем обзоре не рассматривались эффекты, тесно связанные с «самовоздействием», — эффекты нелинейного взаимодействия волн. Они изложены в работах <sup>18, 47-50</sup>.

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Карпман, Лекции по нелинейному распространению волн в диспергирующих системах, НГУ, Новосибирск, 1967; Нелинейная теория распространения волн, сб. статей под ред. Г. И. Баренблатта, М., «Мир», 1970.
2. В. Н. Цытович, Нелинейные эффекты в плазме, М., Физматгиз, 1967.
3. С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов, Проблемы нелинейной оптики, М., изд. ВИНТИ, 1964; Н. Бломберген, Нелинейная оптика, М., «Мир», 1966.
4. В. Л. Гинзбург, А. В. Гуревич, УФН **70**, 201, 393 (1960).
5. M. Druvestein, Physica, **10**, 69 (1930); Б. И. Давыдов, ЖЭТФ **7**, 1069 (1937); Б. И. Давыдов, И. М. Шмушкевич, ЖЭТФ **10**, 1043 (1940).
6. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, М., Физматгиз, 1967.
7. H. Fröhlich, B. V. Ramanjare, Proc. Phys. Soc. **B69**, 21 (1956).
8. В. Л. Гинзбург, В. П. Шабанский, ДАН СССР **100**, 445 (1955).
9. П. А. Казлаускас, И. Б. Левинсон, Литовский физ. сб. **6**, 33 (1966).
10. В. Л. Гинзбург, ЖТФ **21**, 943 (1951).
11. Ф. Г. Басс, Ю. Г. Гуревич, Изв. вузов (Радиофизика) **11**, 620 (1968).
12. Ф. Г. Басс, Ю. Г. Гуревич, И. Б. Левинсон, А. Ю. Матулис, ЖЭТФ **55**, 999 (1968).
13. А. В. Гуревич, ЖЭТФ **30**, 1112 (1956).
14. А. В. Гуревич, ЖЭТФ **32**, 1237 (1957).
15. А. В. Гуревич, ДАН СССР **104**, 201 (1955).
16. И. Б. Левинсон, Автореферат докторской диссертации, (ИПАН СССР, Ленинград, 1967).
17. Ф. Г. Басс, ЖЭТФ **47**, 1322 (1964).
18. Ф. Г. Басс, Ю. Г. Гуревич, ЖЭТФ **51**, 536 (1966).
19. А. В. Гуревич, Изв. вузов (Радиофизика) **2**, 355 (1959).
20. Т. М. Лифшиц, Ш. М. Коган, А. П. Выставкин, П. Г. Мельник, ЖЭТФ **42**, 959 (1962).
21. Ф. Г. Басс, Ю. Г. Гуревич, ЖЭТФ **52**, 175 (1967).
22. И. М. Цидильковский, Термомагнитные явления в полупроводниках, М., Физматгиз, 1960.
23. Ф. Г. Басс, И. М. Цидильковский, ЖЭТФ **31**, 672 (1956).
24. Ю. Г. Гуревич, В. А. Погребняк, Геомагнетизм и аэрономия **11**, вып. 1 (1971).
25. А. В. Гуревич, Геомагнетизм и аэрономия **5**, 70 (1965).
26. А. В. Гуревич, ЖЭТФ **48**, 701 (1965).
27. Ф. Г. Басс, Ю. Г. Гуревич, М. В. Квимсадзе, ФТП **4**, 446 (1970).
28. Ю. Г. Гуревич, М. В. Квимсадзе, ФТТ **13**, вып. 1 (1971).
29. Ф. Г. Басс, С. И. Ханкина, Изв. вузов (Радиофизика) **7**, 1195 (1964).
30. Ф. Г. Басс, Ю. Г. Гуревич, Изв. вузов (Радиофизика) **8**, 243 (1970).
31. Ю. Г. Гуревич, Автореферат кандидатской диссертации (ИПАН СССР, Ленинград, 1968).
32. М. А. Миллер, Изв. вузов (Радиофизика) **1**, 110 (1958).
33. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, М., Физматгиз, 1958.
34. А. В. Гуревич, Радиотехника и электроника **1**, 704 (1956).
35. Э. И. Гинзбург, Изв. вузов (Радиофизика) **7**, 1041 (1964).
36. J. A. Libschaber, Докторская диссертация (Парижский университет, 1965).
37. А. Ф. Волков, Ш. М. Коган, УФН **96**, 633 (1968).
38. Ф. Г. Басс, ЖЭТФ **48**, 275 (1965).
39. А. В. Гуревич, ЖЭТФ **35**, 392 (1958).
40. А. В. Гуревич, Е. Е. Цедиллина, Геомагнетизм и аэрономия **1**, 34 (1961).
41. Ш. М. Коган, ФТТ **4**, 2474 (1962).
42. И. Б. Левинсон, ФТТ **6**, 2113 (1964).
43. B. K. Ridley, Proc. Phys. Soc. **82**, 954 (1963).
44. Дж. А. Стреттон, Теория электромагнетизма, М., Гостехиздат, 1948.
45. Ф. Г. Басс, Ю. Г. Гуревич, ЖЭТФ **53**, 1058 (1967).
46. Ф. Г. Басс, Ю. Г. Гуревич, ЖЭТФ **55**, 1096 (1968).
47. М. А. Бонч-Бруевич, ЖЭТФ **2**, 25 (1932).
48. V. A. Bailey, D. F. Martin, Phil. Mag. **18**, 369 (1934).
49. В. Л. Гинзбург, Изв. АН СССР, сер. физ. **12**, 293 (1948).
50. И. М. Вплесский, ЖЭТФ **22**, 544 (1952).