1971 г. Декабрь *Том 105, вып. 4*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

532.584+535.326

НАПРЯЖЕНИЯ, ВЯЗКОСТЬ И ОПТИЧЕСКАЯ АНИЗОТРОПИЯ ДВИЖУЩЕЙСЯ СУСПЕНЗИИ ЖЕСТКИХ ЭЛЛИПСОИДОВ

В. Н. Покровский

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение 625
2. Возмущение потока вязкой жидкости недеформируемым эллипсоидом . . . 626
3. Движение эллипсоида в потоке 628
4. Тензор напряжений 629
5. Поступательное и вращательное броуновское движение 631
6. Движение эллипсоида в потоке с учетом вращательного броуновского движения 633
7. Тензор напряжений и вязкость суспензии при учете вращательного броуновского движения частиц 635
8. Диэлектрический эллипсоид в потоке и электрическом поле 637
9. Тензор напряжений и вязкость суспензии в электрическом поле 639
10. Тензор диэлектрической проницаемости 641
11. Заключительные замечания 642
Цитированная литература 643

1. ВВЕДЕНИЕ

Современная теория течения суспензий начинает свою историю с 1906 г., когда Эйнштейн опубликовал работу [1] (см. также [2], § 22), посвященную вычислению коэффициента вязкости суспензии твердых шариков, взвешенных в вязкой жидкости. Постановка задачи и метод решения Эйнштейна послужили образцом, которому следовали при изучении течения суспензии жестких эллипсоидов [3-6]. При этом, так же как и в случае суспензии жестких шариков, считали, что суспензия эллипсоидов является обычной вязкой жидкостью, описываемой уравнением Навье — Стокса, а наличие частиц приводит лишь к изменению вязкости системы. Поэтому в этих первых исследованиях ставился вопрос о вычислении коэффициента вязкости как функции концентрации, градиентов скорости, размера и формы частиц, но не об определении уравнений движения суспензии, которые позволяли бы анализировать поведение системы в любой экспериментальной ситуации и которые оставались неизвестными вплоть до последнего времени.

Поскольку для любой системы (далее везде считаем систему несжимаемой) справедливы [2] уравнение непрерывности

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \tag{1,1}$$

и уравнение движения

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}; \tag{1,2}$$

вопрос об определении уравнения движения системы сводится к вопросу об отыскании тензора напряжений σ_{ik} как функции градиентов скорости $\frac{\partial v_j}{\partial x_s}$. В простейшем случае тензор напряжений имеет вид

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right), \tag{1,3}$$

где p — давление, η — коэффициент вязкости, который в данном случае является материальной постоянной системы. Система уравнений (1,1) — (1,3) описывает движение вязкой жидкости. В более сложных случаях тензор напряжений не может быть определен только через градиенты скорости. В частности, для рассматриваемого в этой статье случая суспензии жестких эллипсоидов тензор напряжений выражается, кроме градиентов скорости, через моменты функции распределения, для которых также должны быть записаны уравнения движения.

В этой статье изложены общие результаты теории движения разбавленной суспензии жестких эллипсоидов, применимые для случая, когда оказывается существенным вращательное броуновское движение частиц. При этом коэффициент вращательной диффузии должен быть велик по сравнению с градиентами скорости. Это требование накладывает ограничение на размеры частиц. По оценке для обычных жидкостей и градиентов скорости размеры взвешенных частиц должны быть малы по сравнению с 10^{-3}—10^{-4} *см*, но, конечно, велики по сравнению с молекулярными размерами. Движение суспензии без учета броуновского движения частиц рассмотрено в пп. 3—4. С учетом вращательного броуновского движения определены уравнения движения суспензии без поля (пп. 6—7) и в электрическом поле (пп. 8—9). В п. 10 рассмотрена оптическая анизотропия движущейся суспензии.

2. ВОЗМУЩЕНИЕ ПОТОКА ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ НЕДЕФОРМИРУЕМЫМ ЭЛЛИПСОИДОМ

Рассмотрим прежде всего, следуя Джеффри [3], возмущение, вносимое в движение жидкости с вязкостью μ одной частицей эллипсоидальной формы, уравнение поверхности которой в системе координат с началом в центре частицы имеет вид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. В дальнейшем будет удобно также для полуосей эллипсоида использовать обозначения $a_1 \equiv a$, $a_2 \equiv b$, $a_3 \equiv c$.

Пусть невозмущенное частицей течение жидкости описывается распределением скорости $\nu_{ik}x_k$, где ν_{ik} — постоянный (в лабораторной системе координат) тензор градиентов скорости, который, вообще говоря, не симметричен по индексам. Введем обозначения для симметризованной и антисимметризованной частей тензора градиентов скорости: γ_{ik} и ω_{ik}, так что $\nu_{ik} = \gamma_{ik} + \omega_{ik}$.

Возмущенное жестким эллипсоидом течение жидкости описывается полем скоростей v_i, которое на больших расстояниях от частицы асимптотически приближается к невозмущенному полю скоростей: $v_i \to \nu_{ik}x_k$. На граничной поверхности жидкость движется вместе с поверхностью частицы.

Возмущенное поле скоростей следует искать как решение системы уравнений движения несжимаемой жидкости, которые при малых числах Рейнольдса имеют [2] вид

$$\rho\frac{\partial v_i}{\partial t} = -\nabla_i p + \mu\Delta v_i, \qquad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0. \tag{2,1}$$

Частица в потоке не только движется поступательно, но и, вообще говоря, вращается. Решение задачи о возмущении течения жидкости эллипсоидом удобно искать в системе координат, связанной с частицей и вращающейся с угловой скоростью Ω_{js}.

Переход от координат точки в лабораторной системе координат x_i к координатам точки во вращающейся системе координат x'_k и наоборот при совмещенных началах координат осуществляется следующим образом:

$$x_i = a_{ik}x'_k, \quad x'_k = a_{jk}x_j, \tag{2,2}$$

где a_{ik} — косинус угла между i-й осью неподвижной системы и k-й осью вращающейся системы, причем

$$a_{ik}a_{lk} = \delta_{il}, \quad a_{ik}a_{il} = \delta_{kl}. \tag{2,3}$$

Дифференцируя (2,2) по времени и учитывая, что линейная скорость точки, неподвижной во вращающейся системе координат, выражается соотношением

$$u_i = \Omega_{ij}x_j,$$

находим закон преобразования для скорости, а затем после дифференцирования по координатам — закон преобразования тензора градиентов скорости. Для симметризованной и антисимметризованной частей справедливы соотношения

$$\gamma'_{ik} = a_{ji}a_{lk}\gamma_{jl}, \qquad \omega'_{ik} = a_{ji}a_{lk}(\omega_{jl} - \Omega_{jl}). \tag{2,4}$$

В движущейся системе координат с точностью до членов первого порядка по градиентам скорости система уравнений движения (2,1) приобретает вид

$$\mu\Delta v_i = \nabla_i p, \qquad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \tag{2,5}$$

На поверхности частицы $\mathbf{v} = 0$, а на больших расстояниях от частицы $v_i \to \nu_{ik}x_k$.

Решение уравнений (2,5), найденное Джеффри[3], в движущейся системе координат имеет вид

$$v_i = \nu_{ik}x_k + \frac{\partial}{\partial x_i}(T_j\chi_j) + B_{ik}\varepsilon_{kjs}\frac{\partial\chi_s}{\partial x_j} + x_jA_{jl}\frac{\partial^2\Omega}{\partial x_i\,\partial x_l} - A_{il}\frac{\partial\Omega}{\partial x_l}, \tag{2,6}$$

$$p = p_0 + 2\mu A_{jl}\frac{\partial^2\Omega}{\partial x_j\,\partial x_l}, \tag{2,7}$$

где p_0 — давление в невозмущенной жидкости, а Ω и χ_i удовлетворяют уравнению Лапласа и имеют вид

$$\Omega = \int\limits_{\lambda}^{\infty}\left(\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda}\right)\frac{d\lambda}{R},$$

$$\chi_1 = \alpha' yz, \qquad \chi_2 = \beta' zx, \qquad \chi_3 = \gamma' xy.$$

Величины T_j, B_{ik}, A_{ik} определяются граничными условиями и могут быть представлены в виде

$$T_1 = -\frac{\gamma_{23}}{\alpha'_0}, \qquad T_2 = -\frac{\gamma_{13}}{\beta'_0}, \qquad T_3 = -\frac{\gamma_{12}}{\gamma'_0},$$

$$B_{ik} = 2(a_i^2A_{ii} - a_k^2A_{kk}).$$

Диагональные компоненты матрицы A_{jk} имеют вид

$$A_{ii} = \frac{3\alpha''_{i0}\nu_{ii} - \sum\alpha''_{k0}\nu_{kk}}{6(\beta''_0\gamma''_0 + \gamma''_0\alpha''_0 + \alpha''_0\beta''_0)}, \tag{2,8}$$

а недиагональные компоненты —

$$A_{ik}=\frac{\alpha_{i0}(a_k^2-a_i^2)\gamma_{ik}}{2(\alpha_{i0}-\alpha_{k0})(a_i^2\alpha_{i0}+a_k^2\alpha_{k0})}+\frac{a_k^2\omega_{ik}}{2(a_i^2\alpha_{i0}+a_k^2\alpha_{k0})}. \tag{2,9}$$

Обратим внимание, что компоненты матрицы A_{ik} не образуют тензора.

В выражениях (2,8)—(2,9) и далее использованы обозначения для интегралов

$$\alpha_0\equiv\alpha_{10}=\int\limits_0^\infty\frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)R},\quad \alpha_0'\equiv\alpha_{10}'=\int\limits_0^\infty\frac{d\lambda}{(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)R},$$

$$\alpha_0''\equiv\alpha_{10}''=\int\limits_0^\infty\frac{\lambda\,d\lambda}{(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)R}, \tag{2,10}$$

в которых $R=\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}$. Аналогичным образом введены обозначения для интегралов с другими полуосями эллипсоида. Теми же символами без нуля обозначены соответствующие интегралы с переменным нижним пределом.

3. ДВИЖЕНИЕ ЭЛЛИПСОИДА В ПОТОКЕ

На единицу поверхности эллипсоида со стороны жидкости действует сила $P_i=\sigma_{ik}n_k$, где для вязкой несжимаемой жидкости

$$\sigma_{ik}=-p\delta_{ik}+2\mu\gamma_{ik}. \tag{3,1}$$

Вычисляя производные скорости (2,6) при $\lambda=0$ по указанным формулам, находим выражение для силы, действующей на единицу площади поверхности частицы:

$$P_i=-p_0g\frac{x_i}{a_i^2}+\frac{8\mu g}{abc}A_{il}\frac{x_l}{a_l^2}-4\mu g\left(\sum_{j=1}^{3}\alpha_{j0}A_{jj}\right)\frac{x_i}{a_i^2}. \tag{3,2}$$

где $g=\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

Общая сила, действующая на частицу в жидкости, равна нулю, в чем можно убедиться интегрированием (3,2) по всей поверхности частицы.

Вычисляя действующий на частицу момент сил

$$K_{ik}=\oint(P_ix_k-P_kx_i)\,df \tag{3,3}$$

с учетом того, что

$$\frac{1}{\Omega}\oint x_ix_kg\,df=a_i^2\delta_{ik}, \tag{3,4}$$

где $\Omega=\frac{4\pi}{3}abc$ — объем частицы, df — элемент площади поверхности, находим

$$K_{ik}=\frac{32}{2}\pi\mu(A_{ik}-A_{ki}). \tag{3,5}$$

Скорость вращения движущейся частицы будем определять из требования, чтобы сумма моментов всех сил, действующих на частицу, равнялась нулю. При этом пренебрегаем инерционными силами.

Если на частицу действуют только гидродинамические силы потока, то из требования, чтобы момент (3,5) был равен нулю, следует

соотношение

$$(a_k^2 - a_i^2)\,\gamma'_{ik} + (a_k^2 + a_i^2)\,\omega'_{ik} = 0, \tag{3,6}$$

откуда с помощью формул (2,4) определяем скорость вращения частицы

$$\Omega_{lm} = \frac{a_k^2 - a_i^2}{a_k^2 + a_i^2}\, a_{li} a_{ji} a_{mk} a_{sk} \gamma_{js} + \omega_{lm}. \tag{3,7}$$

Вследствие соотношений (2,3) в общем случае для описания положения частицы необходимы два вектора, для эллипсоида вращения — один вектор, направленный вдоль оси симметрии частицы. В последнем случае

$$\Omega_{lm} = \lambda\,(e_m \gamma_{ls} - e_l \gamma_{ms})\, e_s + \omega_{lm}, \tag{3,8}$$

где введено обозначение $a_{i1} = e_i$. Величина $\lambda = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ изменяется от -1 до 1, имея предельными случаями плоский диск и тонкую иглу. При $\lambda = 0$ частица вырождается в шарик.

Из выражения (3,8) по формуле $\dot{e}_i = \Omega_{ik} e_k$ находим линейную скорость движения конца вектора

$$\dot{e}_l = \lambda\,(\gamma_{ls} e_s - \gamma_{ms} e_m e_s e_l) + \omega_{lm} e_m. \tag{3,9}$$

Общее выражение (3,9) получено Хэндом [7], который обобщил результаты Джеффри [3].

4. ТЕНЗОР НАПРЯЖЕНИЙ

Наличие жестких частиц в жидкости приводит к изменению локальных градиентов скорости в жидкости. Плотность диссипации энергии увеличивается за счет того, что локальные градиенты скорости увеличиваются и уменьшаются из-за того, что часть жидкости замещается твердыми частицами. Однако в результате, как убедимся далее, диссипация энергии и, следовательно, эффективная вязкость системы увеличиваются.

По-прежнему полагаем, что скорость и тензор градиентов скорости жидкости таковы, что на больших расстояниях они становятся равными невозмущенным скорости и тензору градиентов скорости ν_{ik}. Поэтому наблюдаемая, сглаженная, макроскопическая скорость определяется как $w_i = \nu_{ik} x_k$. При этом наблюдаемый тензор градиентов скорости есть ν_{ik}, а не равен среднему значению микроскопических градиентов скорости $\frac{1}{V}\int \tilde{\nu}_{ik}\, dV$, как полагали без достаточных оснований некоторые авторы [1, 8, 9].

Итак, вся задача заключается в определении при асимптотически заданных значениях градиента скорости ν_{ik} усредненного тензора напряжений, который может быть вычислен через усредненную диссипацию энергии в системе, как это делалось, начиная с Эйнштейна [1], или через усредненное значение тензора потока импульса $\Pi_{ik} = \rho v_i v_k - \sigma_{ik}$ в той области, где наблюдаемый тензор градиентов скорости постоянен. Последний способ предложен Ландау и Лифшицем [2] и оказывается более удобным поскольку при этом не возникает расходящихся выражений.

Переходя в систему координат, движущуюся со скоростью w_i, с точностью до членов первого порядка по малой разности $w_i - v_i$, где v_i — микроскопическое значение скорости, находим

$$\sigma_{ik} = \frac{1}{V}\int \tilde{\sigma}_{ik}\, dV, \tag{4,1}$$

где $\tilde{\sigma}_{ik}$ — микроскопическое значение тензора напряжений.

Прежде чем перейти к вычислениям, отметим, что тензор напряжений может оказаться несимметричным. Действительно, на частицу может действовать некоторый сторонний момент сил, который в рассматриваемом приближении должен уравновешиваться моментом сил, действующим на частицу со стороны жидкости и определяемым в общем случае выражением (3,3). Если n — плотность числа частиц, то

$$\sigma_{ik}-\sigma_{ki}=-nK_{ik}. \tag{4,2}$$

Тензор напряжений (4,1) удобно вычислять, разбивая область интегрирования на две области (жидкость и твердое тело). При этом следует иметь в виду, что поверхность раздела является особой поверхностью, интегрирование по которой дает особый вклад в тензор напряжений. Можно записать выражение (4,1) в виде

$$\sigma_{ik}=\frac{1}{V}\int\limits_{V-\Omega}\tilde{\sigma}_{ik}^{ж}\,dV+\frac{\varphi}{\Omega}\int\limits_{\Omega}\tilde{\sigma}_{ik}^{т}\,dV-\frac{1}{2}\frac{\varphi}{\Omega}K_{ik}, \tag{4,3}$$

где φ — объемная концентрация твердой фазы, Ω — объем одной частицы. Действительно, поскольку тензоры $\tilde{\sigma}_{ik}^{ж}$ и $\tilde{\sigma}_{ik}^{т}$ симметричны, а момент K_{ik} антисимметричен, из (4,3) следует выражение (4,2).

Жидкость, в которой взвешены эллипсоиды, по предположению является ньютоновской жидкостью, тензор напряжений которой имеет вид (3,1). После вычисления градиентов скорости и усреднения по объему находим, что первый член в (4,3) имеет вид

$$(-p_0+2\mu\gamma_{ik})(1-\varphi). \tag{4,4}$$

Второй член в (4,3) может быть вычислен через интеграл по поверхности частицы (см. [2], § 2) и равен

$$\frac{1}{2}\frac{\varphi}{\Omega}\oint(P_ix_k+P_kx_i)\,df. \tag{4,5}$$

Таким образом, с учетом выражения для момента сил (3,3) записываем

$$\sigma_{ik}=(-p_0+2\mu\gamma_{ik})(1-\varphi)+\frac{\varphi}{\Omega}\oint P_kx_i\,df. \tag{4,6}$$

Сила, действующая на поверхность эллипсоида со стороны жидкости, определяется выражением (3,2), используя которое и учитывая также соотношение (3,4), по формуле (4,6) находим

$$\sigma'_{ik}=-p_0\delta_{ik}+2\mu(1-\varphi)\gamma'_{ik}+\frac{8\mu\varphi}{abc}A'_{ik}-4\mu\varphi\left(\sum_{j=1}^{3}\alpha_{j0}A'_{jj}\right)\delta_{ik}. \tag{4,7}$$

Последнее выражение записано в системе координат, связанной с частицей, и не имеет явно ковариантной формы, поскольку $\sum\dot{\alpha}_{j0}A'_{jj}$ не скаляр, а матрица A'_{ik} не является тензором.

Определяем значения компонент матрицы A'_{ik} с помощью соотношения (3,6) и преобразуем (4,7) к лабораторной системе координат, рассматривая для простоты эллипсоиды вращения, после чего находим тензор напряжений движущейся суспензии жестких эллипсоидов вращения в случае, когда вращательное броуновское движение частиц не принимается во внимание:

$$\sigma_{ik}=-(p_0+\mu\varphi\rho e_je_s\gamma_{js})\delta_{ik}+2\mu(1+\omega\varphi)\gamma_{ik}+$$
$$+\mu\zeta\varphi(e_ie_s\gamma_{sk}+e_ke_s\gamma_{si})+\mu\chi\varphi e_ie_ke_je_s\gamma_{js}, \tag{4,8}$$

где

$$\rho = \frac{1}{3ab^4\alpha_0'\beta_0''}\,[2(\alpha_0''-\beta_0'')+3ab^2(\alpha_0\alpha_0''-\beta_0\beta_0'')],$$

$$\omega = \frac{1}{ab^4\alpha_0'}-1, \qquad \zeta = \frac{4}{ab^2(a^2+b^2)\beta_0'}-\frac{2}{ab^4\alpha_0'}, \tag{4,9}$$

$$\chi = \frac{2\alpha_0''}{ab^4\alpha_0'\beta_0''}-\frac{8}{ab^2(a^2+b^2)\beta_0'}+\frac{2}{ab^4\alpha_0'}.$$

Значения постоянных (4,9) изображены как функции отношения полуосей эллипсоида на рис. 1.

Выражение (4,8) и (4,9) с небольшими неточностями в определениях ρ и ω были указаны Хэндом [7], который получил эти выражения сравнением результатов Джеффри [3] с результатами феноменологической теории Эриксена [10], а не непосредственным вычислением, как это сделано в этом разделе.

Таким образом, система уравнений движения разбавленной суспензии жестких эллипсоидов вращения без учета броуновского движения частиц состоит из уравнения непрерывности (1,1), уравнения движения (1,2) с определением тензора напряжений (4,8) и уравнения движения вектора ориентации эллипсоида (3,9). Система уравнений замкнута и может быть использована для анализа движения суспензии в случае, когда средние размеры взвешенных частиц превышают 10^{-4}—10^{-3} *см*.

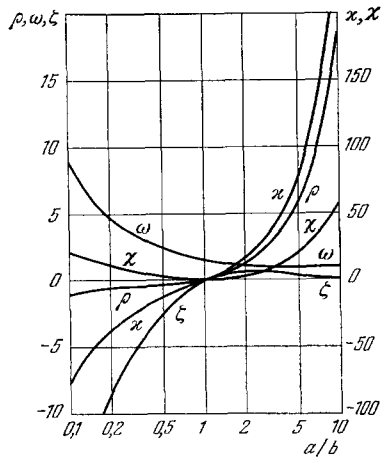

Рис. 1. Коэффициенты уравнения движения суспензии жестких эллипсоидов вращения как функции отношения полуосей эллипсоида вращения a/b.

5. ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ И ВРАЩАТЕЛЬНОЕ БРОУНОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ

Известно [11, 12], что под действием теплового движения малые частицы совершают беспорядочное, так называемое броуновское движение, которое эффективным образом описывается как диффузия частиц. Задача определения движения частиц в пространстве и времени сводится к задаче об отыскании функции распределения вероятности положения и ориентации частиц.

Положение частицы произвольной формы в пространстве можно описывать вектором положения его центра тяжести **r** и косинусами углов между единичными векторами, жестко связанными с частицей, и осями лабораторной системы координат. Для описания ориентации частицы произвольной формы необходимы два единичных вектора, для описания частицы, имеющей ось вращения, один единичный вектор, направленный вдоль оси симметрии. Таким образом, при броуновском движении вероятность положения и ориентации осесимметричной частицы определяется функцией $W = W(\mathbf{r}, \mathbf{e})$, где e_j — косинус угла между единичным вектором и j-й осью координат. При этом справедливо соотношение $\mathbf{e}^2 = 1$, так что в этом случае функция распределения определяется только пятью независимыми переменными.

Если на частицу не действуют никакие силы, то частица равновероятно находится в любом положении и при любой ориентации и поэтому функция распределения постоянна. Если на частицы действуют некоторые

силы и моменты сил, то это приводит к неравномерному распределению в пространстве и преимущественной ориентации частиц и, следовательно, к диффузионным потокам [12], которые возникают для поступательного движения под действием эффективной силы

$$-T\frac{\partial \ln W}{\partial \mathbf{r}}, \tag{5,1}$$

где T — температура в энергетических единицах, а для вращательного движения — под действием эффективного момента силы, который определим ниже.

Вращательная подвижность невзаимодействующих частиц не зависит от их положения в пространстве, и потому вращательное броуновское движение можно рассматривать отдельно от поступательного. В этом случае конец единичного вектора, связанного с осью симметрии частицы, можно рассматривать как броуновскую частицу с анизотропной подвижностью, так что единичный вектор может только вращаться, поскольку $\mathbf{e}^2 = 1$, и вероятность ориентации частицы описывается функцией распределения $W(\mathbf{e})$, которая обычно [4, 15, 16] определяется из уравнения непрерывности, записанного в сферической системе координат. Для того чтобы найти уравнение для $W(\mathbf{e})$ в декартовой системе координат, допустим, что вектор $\mathbf{e}$ может также менять свою длину, т. е. считаем все компоненты вектора, который обозначим теперь через $\mathbf{s}$, независимыми. Тогда диффузионное уравнение для функции распределения $W(\mathbf{s})$ может быть найдено [12] из уравнения непрерывности

$$\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{\partial (u_j W)}{\partial s_j}=0. \tag{5,2}$$

Средняя скорость движения конца вектора $\mathbf{u}$ определяется из требования, чтобы сумма всех сил, действующих на броуновскую частицу, равнялась нулю.

Если на частицу действует сила $\mathbf{f}$, то в системе координат, связанной с вращающейся частицей, условие равновесия сил имеет вид

$$f_i - T\frac{\partial \ln W}{\partial s_i} - \chi u_k e_k e_i = 0. \tag{5,3}$$

В это условие согласно допущению добавляем член, пропорциональный скорости радиального движения частицы $u_k e_k e_i$.

Умножая (5,3) векторно на $\mathbf{s}$, получаем уравнение для моментов сил

$$\mathbf{L} - T\left[\mathbf{s}\frac{\partial \ln W}{\partial \mathbf{s}}\right]=0, \tag{5,4}$$

где $\mathbf{L}$ — сумма моментов всех сил, действующих на броуновскую частицу, которая уравновешивается эффективным моментом сил, связанных с броуновским движением частицы,

$$-T\left[\mathbf{s}\frac{\partial \ln W}{\partial \mathbf{s}}\right]. \tag{5,5}$$

Условие (5,4) определяет скорость вращения частицы.

Интересуясь здесь только вращательным движением частиц, далее в окончательных результатах будем полагать $\chi \to \infty$. При этом $\mathbf{s} \to \mathbf{e}$, $W(\mathbf{s}) \to W(\mathbf{e})$.

Все физические величины в этом случае выражаются через моменты функции распределения $W(\mathbf{e})$, и потому далее встанет вопрос о вычислении моментов функции распределения, например моментов второго порядка

$$\langle e_i e_k \rangle = \int W(\mathbf{e})\, e_i e_k\, d\mathbf{e}. \tag{5,6}$$

Интегрирование здесь выполняется при условии $\mathbf{e}^2 = 1$. Аналогичным образом определяются моменты высших порядков.

Вычисление моментов удобнее иногда выполнять с помощью функции W (s) и затем переходить к пределу, так что, например:

$$\langle e_i e_k \rangle = \lim_{\chi \to \infty} \int W(\mathbf{s})\, e_i e_k\, d\mathbf{s}. \tag{5,7}$$

Обратим внимание, что поступательная подвижность несферической частицы зависит от ее ориентации по отношению к направлению движения. Например [13], при движении вытянутого эллипсоида вращения вдоль его оси симметрии и при движении поперек оси симметрии коэффициенты диффузии $D^{\parallel}$ и $D^{\perp}$ различны. Среднее значение коэффициента диффузии эллипсоидов вращения является тензором и выражается через момент функции распределения второго порядка:

$$D_{ik} = D^{\perp}\delta_{ik} + (D^{\parallel} - D^{\perp})\langle e_i e_k \rangle. \tag{5,8}$$

Связь между поступательной и вращательной диффузией для частиц другого вида обсуждается Бреннером [14].

Поступательное броуновское движение далее не рассматривается и предполагается, что распределение частиц в пространстве равновероятно и остается равновероятным в процессе движения.

6. ДВИЖЕНИЕ ЭЛЛИПСОИДА В ПОТОКЕ С УЧЕТОМ ВРАЩАТЕЛЬНОГО БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ

При рассмотрении движения частицы в потоке с учетом вращательного броуновского движения, следуя работе [17], исходим из условия (5,4), требуя, чтобы общий суммарный момент сил, действующих на частицу, был равен нулю. При этом к гидродинамическому моменту (3,5) следует добавить эффективный момент — $T\,[\mathbf{e}\nabla \ln W]$.

Условие равенства нулю суммарного момента сил приводит теперь вместо (3,6) к соотношению

$$(a_k^2 - a_i^2)\,\gamma'_{ik} + (a_k^2 + a_i^2)\omega'_{ik} - a_{ji}a_{sk}\frac{3T}{16\pi\mu}(a_i^2\alpha_{i0} + a_k^2\alpha_{k0})\,[\mathbf{e}\nabla \ln W]_{js} = 0, \tag{6,1}$$

откуда, переходя к лабораторной системе координат, находим скорость вращения частицы

$$\Omega_{lm} = \frac{a_k^2 - a_i^2}{a_k^2 + a_i^2}\, a_{li}a_{ji}a_{mk}a_{sk}\gamma_{js} + \omega_{lm} - a_{li}a_{ji}a_{mk}a_{sk}\frac{3T}{16\pi\mu}\frac{a_i^2\alpha_{i0} + a_k^2\alpha_{k0}}{a_k^2 + a_i^2}\,[\mathbf{e}\nabla \ln W]_{js}.$$

Для эллипсоида вращения последнее соотношение с учетом соотношения (2,3) записывается в виде

$$\Omega_{lm} = \Omega^0_{lm} + D\,[\mathbf{e}\nabla \ln W]_{lm}, \tag{6,2}$$

где через Ω^0_{lm} обозначена определенная выражением (3,8) скорость вращения эллипсоида в потоке без учета вращательного броуновского движения. Коэффициент вращательной диффузии определяется следующим образом:

$$D = \frac{3T\,(a^2\alpha_0 + b^2\beta_0)}{16\pi\mu\,(a^2 + b^2)}. \tag{6,3}$$

Значения безразмерного коэффициента вращательной диффузии

$$\delta = \frac{4\pi}{3}ab^2\frac{\mu D}{T},$$

как функции отношения полуосей эллипсоида вращения a/b, изображены на рис. 2.

Из выражения (6,2) находим линейную скорость движения конца вектора

$$u_j = \dot{e}_j + D\,(e_j e_n \nabla_n \ln W - \nabla_j \ln W), \tag{6,4}$$

где $\dot{e}_j$ — определенная формулой (3,9) линейная скорость движения конца единичного вектора.

Из уравнения непрерывности (5,2) с помощью выражения (6,4) получаем уравнение для функции распределения ориентации осей симметрии одноосных эллипсоидов, движущихся в потоке,

$$\frac{\partial W}{\partial t} + D\left(2e_j \frac{\partial W}{\partial e_j} + e_j e_s \frac{\partial^2 W}{\partial e_j\,\partial e_s} - \frac{\partial^2 W}{\partial e_j^2}\right) + \\ + \lambda\,(e_s \gamma_{sl} - e_l e_m e_s \gamma_{ms}) \frac{\partial W}{\partial e_l} + \omega_{ls} e_s \frac{\partial W}{\partial e_l} - 3\lambda e_l e_s \gamma_{ls} W = 0. \tag{6,5}$$

Из уравнения (6,5) следует уравнение для скорости изменения моментов функции распределения второго порядка

$$\frac{d\,\langle e_i e_k\rangle}{dt} = -\frac{1}{\tau}\left(\langle e_i e_k\rangle - \frac{1}{3}\,\delta_{ik}\right) + \lambda\,(\langle e_i e_j\rangle\,\gamma_{jk} + \langle e_k e_j\rangle\,\gamma_{ji}) + \\ + \omega_{ij}\,\langle e_j e_k\rangle + \omega_{kj}\,\langle e_j e_i\rangle - 2\lambda\,\langle e_i e_k e_j e_s\rangle\,\gamma_{js}. \tag{6,6}$$

Здесь определено время релаксации $\tau = \frac{1}{6D}$. Аналогичным образом могут быть найдены уравнения для высших моментов функции распределения. Отметим, что в уравнения для скорости изменения моментов второго порядка входят моменты четвертого порядка, в уравнение для скорости изменения моментов четвертого порядка — моменты шестого порядка и т. д. Таким образом, система уравнений для моментов оказывается незамкнутой и не может быть решена без каких-либо дополнительных предположений.

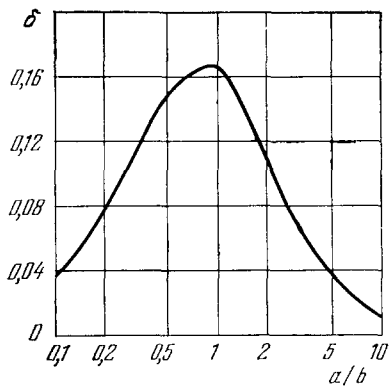

Рис. 2. Безразмерный коэффициент вращательной диффузии как функция отношения полуосей эллипсоида вращения a/b.

Определим функцию распределения и моменты функции распределения второго и четвертого порядка в стационарном случае при малых градиентах скорости. Для этого исходим из уравнения (6,5). Функцию распределения в этом случае ищем в виде разложения по инвариантным комбинациям вектора e_i и тензоров γ_{ik} и ω_{ik}. С точностью до членов второго порядка по градиентам скорости

$$W = \frac{1}{4\pi}\left(1 + \frac{\lambda}{2D} e_i e_k \gamma_{ik} - \frac{\lambda}{2D^2} e_i e_k \gamma_{si} \omega_{sk} + \frac{\lambda^2}{8D^2} e_i e_k e_s e_j \gamma_{ik} \gamma_{sj} - \\ - \frac{\lambda^2}{60D^2} \gamma_{ik} \gamma_{ik} + \ldots\right). \tag{6,7}$$

В случае простого сдвигового потока функция распределения с большей точностью определена Петерлином [4] и недавно Уокмэном и Холингсуорсом [15]. В случае простого растяжения функция распределения была определена Таксерман-Крозер и Зябицким [16].

С помощью функции распределения (6,7) определяются [17] моменты функции распределения второго и четвертого порядка, которые имеют вид

$$\langle e_j e_s\rangle = \frac{1}{3}\delta_{js} + \frac{\lambda}{15D}\gamma_{js} - \frac{\lambda}{90D^2}(\gamma_{lj}\omega_{ls} + \gamma_{ls}\omega_{lj}) - \\ - \frac{\lambda^2}{315D^2}\gamma_{ik}\gamma_{ik}\delta_{js} + \frac{\lambda^2}{105D^2}\gamma_{lj}\gamma_{ls} + \ldots, \qquad (6,8)$$

$$\langle e_j e_s e_m e_n\rangle = \frac{1}{15}\Delta_{jsmn} + \frac{\lambda}{105D}(\gamma_{js}\delta_{mn} + \ldots) - \frac{\lambda}{630D^2}[(\gamma_{lj}\omega_{ls} + \gamma_{ls}\omega_{lj})\delta_{mn} + \ldots] - \\ - \frac{4\lambda^2}{4725D^2}\gamma_{ik}\gamma_{ik}\Delta_{jsmn} + \frac{\lambda^2}{945D^2}(\gamma_{lj}\gamma_{ls}\delta_{mn} + \ldots) + \\ + \frac{\lambda^2}{945D^2}(\gamma_{js}\gamma_{mn} + \ldots) + \ldots, \qquad (6,9)$$

где $\Delta_{jsmn} = \delta_{js}\delta_{mn} + \delta_{jm}\delta_{sn} + \delta_{jn}\delta_{sm}$. Точки в скобках в последней формуле означают члены со всеми остальными комбинациями индексов.

7. ТЕНЗОР НАПРЯЖЕНИЙ И ВЯЗКОСТЬ СУСПЕНЗИИ ПРИ УЧЕТЕ ВРАЩАТЕЛЬНОГО БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦ

Учтем теперь вращательное броуновское движение частиц при вычислении напряжений, возникающих при движении суспензии, следуя в общем случае методу [18], использованному для вычисления тензора напряжений в стационарном случае.

Уравнение (4,7) остается справедливым и при учете вращательного броуновского движения, и задача заключается в определении компонент матрицы A'_{ik} с помощью нового условия (6,1) и в переходе к лабораторной системе координат. После выполнения указанных действий и усреднения с помощью функции распределения W (e) находим выражение (определенное другим способом Шмаковым и Тараном [19]) для тензора напряжений суспензии эллипсоидальных частиц с учетом вращательного броуновского движения частиц

$$\sigma_{ik} = -(p_0 + \mu\varphi\rho\langle e_j e_s\rangle\gamma_{js})\delta_{ik} + 2\mu(1 + \varphi\omega)\gamma_{ik} + \mu\varphi\varkappa D\left(\langle e_i e_k\rangle - \frac{1}{3}\delta_{ik}\right) + \\ + \mu\varphi\zeta(\langle e_i e_j\rangle\gamma_{jk} + \langle e_k e_j\rangle\gamma_{ji}) + \mu\varphi\chi\langle e_i e_k e_j e_s\rangle\gamma_{js}, \qquad (7,1)$$

где ρ, ω, ζ и χ имеют смысл, указанный формулами (3,9), а

$$\varkappa = \frac{3\lambda}{\delta} = \frac{12(a^2 - b^2)}{ab^2(a^2\alpha_0 + b^2\beta_0)}. \qquad (7,2)$$

Значения $\varkappa$, ρ, ζ, ω и χ как функции отношения полуосей эллипсоида вращения a/b изображены на рис. 1.

Таким образом, система уравнений движения разбавленной суспензии жестких эллипсоидов вращения состоит из уравнения непрерывности (1,1), уравнения движения (1,2) с определением тензора напряжений (7,1) и бесконечной цепочки уравнений для моментов функции распределения четного порядка, первым из которых является уравнение (6,6). Система уравнений оказывается незамкнутой, и анализ движения суспензии не может быть выполнен без каких-либо приближений. При малых отклонениях формы частиц от сферической, когда $|\lambda| \ll 1$, можно воспользоваться методом последовательных приближений.

Для стационарных случаев выражение для тензора напряжений (7,1) с помощью уравнения (6,6), в котором производная по времени равна

нулю, может быть записано в виде

$$\sigma_{ik} = -(p_0 + \mu\varphi\rho\langle e_j e_s\rangle \gamma_{js})\,\delta_{ik} + 2\mu(1+\varphi\omega)\,\gamma_{ik} + \\ + \mu\varphi\left(\zeta + \frac{1}{6}\varkappa\lambda\right)(\langle e_i e_j\rangle \gamma_{jk} + \langle e_k e_j\rangle \gamma_{ji}) + \\ + \frac{1}{6}\mu\varphi\varkappa(\omega_{ij}\langle e_j e_k\rangle + \omega_{kj}\langle e_j e_i\rangle) + \mu\varphi\left(\chi - \frac{1}{3}\lambda\varkappa\right)\langle e_i e_k e_j e_s\rangle \gamma_{js}. \qquad (7,3)$$

Преимущество этого выражения, указанного в работе [18], в том, что оно при заданной точности моментов определяет напряжение с большей точностью по сравнению с выражением (7,1). Например, с помощью вычисленных с точностью до членов второго порядка по градиентам скорости моментов можно определить в стационарном случае компоненты тензора напряжений с точностью до членов третьего порядка.

Напряжения, возникающие при заданном стационарном течении частного вида, могут быть определены из тензора напряжений (7,3) и определений (6,8) и (6,9). Например, для случая, который по понятным причинам привлекал наибольшее внимание исследователей [4-6], — для установившегося простого сдвигового течения, когда только одна компонента тензора градиента скорости отлична от нуля ($\nu_{12} \neq 0$), — указанные соотношения определяют с точностью до членов третьего порядка по градиентам скорости напряжения, из которых только компоненты σ_{23} и σ_{13} равны нулю. Сдвиговое напряжение $\sigma_{12} = \eta\nu_{12}$ определяет коэффициент эффективной сдвиговой вязкости

$$\eta = \mu\left\{1 + \varphi\left[V - S\left(\frac{4\pi ab^2\mu}{3T}\nu_{12}\right)^2\right]\right\}, \qquad (7,4)$$

где

$$V = \frac{1}{30}\varkappa\lambda + \omega + \frac{1}{3}\zeta + \frac{1}{15}\chi, \qquad S = \frac{\varkappa^2}{405}\left(\frac{1}{24}\frac{\varkappa}{\lambda} + \frac{\varkappa\lambda}{280} - \frac{\zeta}{28} - \frac{\chi}{35}\right).$$

Можно убедиться, что S всегда положительна и потому коэффициент сдвиговой вязкости суспензии уменьшается с увеличением градиента скорости, что связано с ориентацией частиц потоком. В общем виде η, очевидно, может быть представлена в виде разложения по четным степеням градиента скорости.

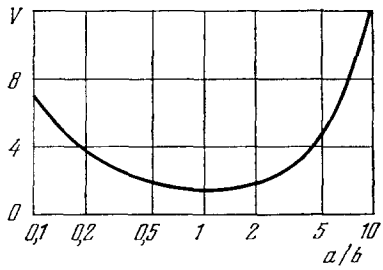

Рис. 3. Начальная сдвиговая вязкость суспензии $V = (\eta_0 - \mu)/\mu\varphi$ как функция отношения полуосей эллипсоида вращения a/b.

Как функции отношения полуосей эллипсоида вращения a/b значения не зависящей от градиентов скорости безразмерной начальной сдвиговой вязкости $V = (\eta_0 - \mu)/\mu\varphi$ изображены на рис. 3. Функции $V + 1$ была табулирована в работах [5, 20]. Безразмерный коэффициент сдвиговой вязкости как функция параметров a/b и ν_{12}/D был табулирован в работе [21].

Свойства суспензии были рассмотрены также в других простых частных случаях [16, 18, 22].

Отметим, что если эллипсоиды вырождаются в шарики, то в этом случае интегралы в (2,10) легко вычисляются и по формулам (4,9) и (7,2): $\omega = 1{,}5$, $\rho = \zeta = \chi = \varkappa = 0$. Тензор напряжений (7,1), так же как (4,8) и (7,3), в соответствии с результатами теории суспензии шариков [23]

принимает вид

$$\sigma_{ik} = -p_0\delta_{ik} + 2\mu(1+1{,}5\varphi)\gamma_{ik} \tag{7,5}$$

и совпадает с выражением (1,3). В этом случае суспензия является обычной вязкой жидкостью с коэффициентом вязкости

$$\eta = \mu(1+1{,}5\varphi).$$

8. ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ЭЛЛИПСОИД В ПОТОКЕ И ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

В предыдущих разделах было рассмотрено поведение суспензии в случае, если на эллипсоиды действуют момент гидродинамических сил, приводящих к ориентации частиц потоком, и момент эффективной броуновской силы, вызывающий дезориентацию частиц. Совершенно аналогичным образом можно рассмотреть движение эллипсоидов и свойства суспензии в случае, если на частицы непосредственно действуют, кроме того, какие-либо сторонние моменты сил, например момент сил, возникающий при наложении электрического поля с напряженностью **E**. Если частица обладает дипольным моментом $\mathcal{P}$, то момент сил, действующий на частицу, выражается формулой [24]

$$\mathbf{G} = [\mathcal{P}\mathbf{E}]. \tag{8,1}$$

Рассмотрим случай, когда частицы не обладают постоянным дипольным моментом. Пусть главные оси тензора диэлектрической проницаемости совпадают с осями эллипсоида. Тогда выражение для дипольного момента эллипсоида в системе координат, связанной с осями частицы, имеет вид [24]

$$\mathcal{P}'_k = \frac{abc}{3}\frac{\varepsilon^{(k)}-\varepsilon}{\varepsilon+(\varepsilon^{(k)}-\varepsilon)n^{(k)}}E'_k,$$

где $\varepsilon^{(k)}$ — главные значения тензора диэлектрической проницаемости частицы, ε — диэлектрическая проницаемость жидкости, $n^{(k)}$ — коэффициенты деполяризации, выражения для которых можно найти в работе [24], § 4. Для эллипсоидов вращения $n^{(2)} = n^{(3)} = \frac{1}{2}(1 - n^{(1)})$. Как функции отношения полуосей эллипсоида a/b $n^{(1)}$ и $n^{(2)}$ изображены на рис. 4.

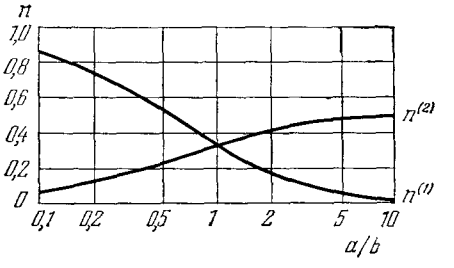

Рис. 4. Коэффициенты деполяризации как функции отношения полуосей эллипсоида вращения a/b.

Ограничиваясь далее рассмотрением эллипсоидов вращения, записываем выражение для дипольного момента в лабораторной системе координат

$$\mathcal{P}_k = \frac{ab^2}{3\varphi}(\varepsilon_0-\varepsilon) + \frac{ab^2}{3}\gamma\left(e_k e_i - \frac{1}{3}\delta_{ki}\right)E_i, \tag{8,2}$$

где

$$\varepsilon_0 = \varepsilon + \varphi\frac{\varepsilon\left[3\varepsilon(\varepsilon^{(2)}-\varepsilon)+\varepsilon(\varepsilon^{(1)}-\varepsilon^{(2)})+(\varepsilon^{(1)}-\varepsilon)(\varepsilon^{(2)}-\varepsilon)(n^{(2)}+2n^{(1)})\right]}{3\left[\varepsilon+(\varepsilon^{(1)}-\varepsilon)n^{(1)}\right]\left[\varepsilon+(\varepsilon^{(2)}-\varepsilon)n^{(2)}\right]}, \tag{8,3}$$

$$\gamma = \frac{\varepsilon^2(\varepsilon^{(1)}-\varepsilon^{(2)})+\varepsilon(\varepsilon^{(1)}-\varepsilon)(\varepsilon^{(2)}-\varepsilon)(n^{(2)}-n^{(1)})}{\left[\varepsilon+(\varepsilon^{(1)}-\varepsilon)n^{(1)}\right]\left[\varepsilon+(\varepsilon^{(2)}-\varepsilon)n^{(2)}\right]}. \tag{8,4}$$

С помощью (8,2) записываем теперь выражение для действующего на частицу в этом случае момента сил

$$G_{is}=\frac{ab^2}{2}\gamma e_k E_k\,[\mathbf{eE}]_{is},$$

который стремится ориентировать частицы по полю.

Из требования, чтобы общий суммарный момент сил, действующих на частицу, был равен нулю, находим скорость вращения эллипсоида

$$\Omega_{lm}=\Omega^*_{lm}-a_{li}a_{mk}a_{ji}a_{sk}\frac{ab^2\gamma}{16\pi\mu}\frac{a_i^2\alpha_{i0}+a_k^2\alpha_{k0}}{a_k^2+a_i^2}e_nE_n\,[\mathbf{eE}]_{js}, \tag{8,5}$$

где Ω^*_{lm} — определяемая формулой (6,2) скорость вращения эллипсоида вращения в потоке без электрического поля.

Рассматривая эллипсоиды вращения, из формулы (8,5) находим линейную скорость движения конца единичного вектора

$$u_j=u_j^*-\frac{\gamma\delta}{4\pi\mu}(e_je_ne_mE_nE_m-e_nE_nE_j), \tag{8,6}$$

где u_j^* — определяемая формулой (6,4) линейная скорость движения конца единичного вектора в потоке без электрического поля.

Из уравнения непрерывности (5,2) с помощью полученного выражения (8,6) находим диффузионное уравнение для функции распределения ориентации осей симметрии осесимметричных эллипсоидов, движущихся в потоке и в электрическом поле:

$$\frac{\partial W}{\partial t}+D\left(2e_n\frac{\partial W}{\partial e_n}+e_je_n\frac{\partial^2 W}{\partial e_j\,\partial e_n}-\frac{\partial^2 W}{\partial e_i^2}\right)+\lambda\left(e_s\gamma_{sj}-e_me_se_j\gamma_{ms}\right)\frac{\partial W}{\partial e_j}+$$
$$+\omega_{js}e_s\frac{\partial W}{\partial e_j}-3\lambda e_je_s\gamma_{js}W-$$
$$-\frac{\gamma\delta}{4\pi\mu}\left[\left(e_se_je_mE_sE_m-e_sE_sE_j\right)\frac{\partial W}{\partial e_j}+\left(3e_je_sE_jE_s-E^2\right)W\right]=0. \tag{8,7}$$

Из последнего уравнения следует уравнение для скорости изменения моментов функции распределения второго порядка

$$\frac{d\langle e_ie_k\rangle}{dt}=-\frac{1}{\tau}\left(\langle e_ie_k\rangle-\frac{1}{3}\delta_{ik}\right)+\lambda\left(\langle e_ie_j\rangle\gamma_{jk}+\langle e_ke_j\rangle\gamma_{ji}\right)+$$
$$+\omega_{ij}\langle e_je_k\rangle+\omega_{kj}\langle e_je_i\rangle-2\lambda\langle e_ie_ke_se_j\rangle\gamma_{sj}+$$
$$+\frac{\gamma\delta}{4\pi\mu}\left(\langle e_ie_j\rangle E_jE_k-2\langle e_ie_ke_se_j\rangle E_sE_j+\langle e_ke_j\rangle E_jE_i\right). \tag{8,8}$$

Аналогичным образом могут быть найдены уравнения для высших моментов функции распределения. Так же как для суспензии, движущейся без поля, в уравнение для скорости изменения моментов второго порядка входят моменты четвертого порядка, в уравнение для скорости изменения моментов четвертого порядка — моменты шестого порядка и т. д. Таким образом, система уравнений для моментов оказывается незамкнутой и моменты не могут быть найдены отсюда без каких-либо дополнительных предположений.

Моменты функции распределения могут быть вычислены непосредственно, если по уравнению (8,7) определить функцию распределения, которая в стационарном случае при малых градиентах скорости и слабом электрическом поле может быть найдена в виде разложения по скалярным комбинациям векторов e_i и E_k и тензоров γ_{ik} и ω_{ik}. С точностью до членов первого порядка по градиентам скорости и второго порядка

по напряженности поля имеем

$$W=\frac{1}{4\pi}\left\{1+\frac{ab^2\gamma}{6T}(3e_je_sE_jE_s-E^2)+\frac{\lambda}{2D}e_je_s\gamma_{js}+\right.$$
$$\left.+\frac{ab^2\gamma}{60DT}[5(1-\lambda)e_je_sE^2\gamma_{js}+15\lambda e_ne_le_je_sE_nE_l\gamma_{js}-2\lambda E_jE_s\gamma_{js}]\right\}. \qquad (8,9)$$

Отметим, что в частном случае простого сдвигового движения ($\nu_{21}\neq 0$) и электрического поля, направленного по оси 1, функция распределения была найдена Икедой [25].

Так же как в разделе 6, вычисляем моменты функции распределения и с указанной точностью получаем

$$\langle e_ie_k\rangle=\frac{1}{3}\delta_{ik}+\frac{ab^2\gamma}{15T}\left(E_iE_k-\frac{1}{3}E^2\delta_{ik}\right)+\frac{\lambda}{15D}\gamma_{ik}+$$
$$+\frac{ab^2\gamma}{630DT}\{(7-4\lambda)E^2\gamma_{ik}+2\lambda[3(E_iE_j\gamma_{jk}+E_kE_j\gamma_{ji})-2E_jE_s\gamma_{js}\delta_{ik}]\}, \qquad (8,10)$$

$$\langle e_ie_ke_ne_l\rangle=\frac{1}{15}\Delta_{iknl}+\frac{ab^2\gamma}{315DT}[3(E_iE_k\delta_{nl}+\ldots)-2E^2\Delta_{iknl}]+$$
$$+\frac{\lambda}{105D}(\gamma_{ik}\delta_{nl}+\ldots)+\frac{ab^2\gamma}{9450DT}\{5(3-2\lambda)E^2(\gamma_{ik}\delta_{nl}+\ldots)+$$
$$+\lambda[10(E_lE_n\gamma_{ik}+\ldots)+10(E_sE_k\gamma_{si}\delta_{ln}+\ldots)-16E_jE_s\gamma_{js}\Delta_{iknl}]\}, \qquad (8,11)$$

где $\Delta_{iknl}=\delta_{ik}\delta_{nl}+\delta_{in}\delta_{kl}+\delta_{il}\delta_{nk}$, а точки в последней формуле означают опущенные члены со всеми остальными комбинациями индексов.

9. ТЕНЗОР НАПРЯЖЕНИЙ И ВЯЗКОСТЬ СУСПЕНЗИИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Полученное ранее выражение (4,7) применимо к суспензии, движущейся в электрическом поле. После определения компонент матрицы A'_{ik} для рассматриваемого случая, перехода к лабораторной системе координат и усреднения определяем выражения для тензора напряжений суспензии, движущейся в электрическом поле:

$$\sigma_{ik}=-(p_0+\mu\varphi\rho\langle e_je_s\rangle\gamma_{js})\delta_{ik}+2\mu(1+\varphi\omega)\gamma_{ik}+$$
$$+\mu\varphi\varkappa D\left(\langle e_ie_k\rangle-\frac{1}{3}\delta_{ik}\right)+\mu\varphi\zeta(\langle e_ie_j\rangle\gamma_{jk}+\langle e_ke_j\rangle\gamma_{ji})+\mu\varphi\chi\langle e_ie_ke_je_s\rangle\gamma_{js}+$$
$$+\frac{\varphi\gamma}{8\pi}[(1-\lambda)\langle e_ie_j\rangle E_jE_k+2\lambda\langle e_ie_ke_je_s\rangle E_jE_s-(1+\lambda)\langle e_ke_j\rangle E_jE_i]. \qquad (9,1)$$

Постоянные ρ, ω, ζ, χ и $\varkappa$ по-прежнему определяются выражениями (4,9) и (7,2) и как функции отношения полуосей эллипсоида вращения изображены на рис. 1. Отметим, что тензор напряжений суспензии, движущейся в электрическом поле, несимметричен.

Таким образом, система уравнений движения разбавленной суспензии жестких диэлектрических эллипсоидов в электрическом поле с учетом броуновского движения частиц состоит из уравнения непрерывности (1,1), уравнения движения (1,2) с определением тензора напряжений (9,1) и бесконечной цепочки уравнений для моментов функции распределения четного порядка, первым из которых является уравнение (8,8). Так же как и для суспензии без поля, система уравнений оказывается незамкнутой и анализ движения суспензии не может быть выполнен без каких-либо приближений. При малых отклонениях формы частиц от сферической, когда $|\lambda|\ll 1$, можно воспользоваться методом последовательных приближений.

Рассмотрим далее случай установившегося сдвигового течения ($\nu_{12} \neq 0$), когда вектор напряженности электрического поля лежит в плоскости (1,2) и имеет компоненты $E_1 = E \cos\psi$, $E_2 = E \sin\psi$, $E_3 = 0$. Тогда выражения (9,1), (8,10) и (8,11) определяют, с точностью до членов первого порядка по градиентам скорости и второго порядка по напряженности поля, сдвиговое напряжение, откуда находим коэффициент эффективной сдвиговой вязкости

$$\eta = \eta_0 + \frac{\varphi\gamma E^2}{1680\pi D}\left[23\lambda^2 + 21\lambda + \frac{6\lambda}{\varkappa}(2\chi + 7\zeta) - 7\lambda\cos 2\psi\right], \qquad (9,2)$$

где η_0 — не зависящее от градиентов скорости и поля начальное значение сдвиговой вязкости.

Увеличение эффективного значения вязкости суспензии в поле связано с заторможенностью вращения частиц. Зависимость вязкости от направления поля связана, очевидно, с ориентирующим влиянием поля на взвешенные частицы. В поле, приложенном вдоль направления течения, вязкость суспензии вытянутых эллипсоидов уменьшается, а вязкость суспензии сплюснутых эллипсоидов увеличивается.

Выполненный анализ движения суспензии диэлектрических эллипсоидов в электрическом поле легко обобщается на случай, когда частица имеет постоянный электрический момент **d**. При этом следует учитывать, что на частицу дополнительно действует момент сил [**dE**] (**E** — среднее значение напряженности поля в системе), который должен быть учтен при составлении баланса сил, действующих на частицу. Все вычисления выполняются так же, как показано в предыдущих пунктах.

В этом более общем случае тензор напряжений, определенный недавно Бегоулевым и Шмаковым [26], выражается через моменты функции распределения первого, второго, третьего и четвертого порядков. Система уравнений движения суспензии при этом должна включать (кроме уравнения непрерывности (1,1), уравнения движения (1,2) и определения тензора напряжений) также и бесконечную цепочку уравнений для моментов функции распределения четных и, в отличие от рассмотренных ранее случаев, нечетных порядков.

При рассмотрении частного случая сдвигового движения выражение для коэффициента эффективной вязкости суспензии эллипсоидов было найдено Саито и Като [27] и Чэффи и Мэзоном [28].

Отметим, что когда эллипсоиды вырождаются в шарики, тензор напряжений (9,1) принимает вид (7,5). Таким образом, если шарики не имеют диполей, поле не влияет на движение суспензии, которая в этом случае является обычной вязкой жидкостью с коэффициентом вязкости $\eta = \mu(1 + 1{,}5\varphi)$. Однако если шарики обладают постоянными диполями, то тензор напряжений не приводится к простому виду (1,3), а определяется через моменты первого порядка. Система уравнений для моментов и, следовательно, система уравнений движения в этом случае также не замыкаются и требуют при анализе приближенных методов.

При рассмотрении простого сдвигового движения ($\nu_{12} \neq 0$) в случае произвольно направленного поля с компонентами напряженности поля $E_1 = E\cos\psi\sin\gamma$, $E_2 = E\sin\psi\sin\gamma$, $E_3 = E\cos\gamma$ можно определить выражение для эффективного коэффициента сдвиговой суспензии шариков в виде разложения по четным степеням напряженности поля. С точностью до членов четвертого порядка

$$\eta = \mu\left\{1 + 1{,}5\varphi + \varphi\left[\frac{1}{4}\left(\frac{Ed}{T}\right)^2 - \left(\frac{1}{60} - \frac{1}{48}\cos 2\psi\right)\left(\frac{Ed}{T}\right)^4\right]\sin^2\gamma\right\}, \qquad (9,3)$$

где E — среднее значение напряженности поля в среде.

Движение суспензии сферических частиц во внешнем поле без учета вращательного броуновского движения частиц было рассмотрено в работах [29, 30].

Все результаты теории движения суспензии в электрическом поле справедливы при соответствующей замене обозначений для суспензии магнитных частиц, двигающейся в магнитном поле, а также для двигающейся в гравитационном поле суспензии [30] всплывающих частиц, у которых центр масс не совпадает с геометрическим центром.

10. ТЕНЗОР ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ

Суспензия несферических частиц при течении становится оптически анизотропной вследствие ориентации частиц потоком. Рассмотрим это явление, следуя [17] и исходя из тензора диэлектрической проницаемости ε_{ik}, который определяется соотношением [24]

$$D_i = \varepsilon_{ik} E_k,$$

где D_i и E_k — индукция и напряженность электрического поля, усредненные по объему, значительно превышающему объем частицы.

Поскольку поле $E_k^{(i)}$ внутри эллипсоида, помещенного в однородное поле, однородно, для одной частицы записываем средние значения

$$E_k = \Omega E_k^{(i)} + \overline{E_k^{(e)}}, \qquad D'_k = \varepsilon^{(k)} \Omega E_k^{(i)\prime} + \varepsilon \overline{E_k^{(e)\prime}}, \tag{10,1}$$

где $\varepsilon^{(k)}$ — главные значения тензора диэлектрической проницаемости частицы, который, по предложению, диагонален в системе координат, связанной с осями эллипсоида; ε — диэлектрическая проницаемость жидкости. Вследствие предположенной анизотропии последняя формула из (10,1) справедлива только в системе координат, связанной с частицей.

Исключая из формул (10,1) усредненное поле вне частицы, находим

$$D'_k = \varepsilon E'_k + \Omega (\varepsilon^{(k)} - \varepsilon) E_k^{(i)\prime}. \tag{10,2}$$

Выражение для напряженности поля внутри эллипсоида, находящегося во внешнем поле, за которое в случае, если частица велика по сравнению с молекулярными размерами, мы можем принять среднее макроскопическое поле E_k (согласно [24], § 8), имеет вид

$$E_k^{(i)\prime} = \frac{\varepsilon E'_k}{\varepsilon + (\varepsilon^{(k)} - \varepsilon) n^{(k)}}, \tag{10,3}$$

где $n^{(k)}$ — коэффициенты деполяризации.

Из выражений (10,2) и (10,3) находим

$$D'_k = \varepsilon E'_k + \Omega \frac{\varepsilon (\varepsilon^{(k)} - \varepsilon)}{\varepsilon + (\varepsilon^{(k)} - \varepsilon) n^{(k)}} E'_k.$$

Далее переходим в лабораторную систему координат и, ограничиваясь рассмотрением эллипсоидов вращения с учетом соотношения (2,3), после усреднения по ориентациям частицы и учета полного числа частиц в единице объема получаем выражение для индукции электрического поля, которое определяет тензор диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_0 \delta_{ik} + \gamma\varphi \left(\langle e_i e_k \rangle - \frac{1}{3} \delta_{ik} \right), \tag{10,4}$$

где ε_0 и γ определяются выражениями (8,3) и (8,4). Моменты функции распределения в общем случае определяются уравнением (6,6) для суспензии без внешних полей и уравнением (8,8) для суспензии, движущейся

в электрическом поле. При стационарном течении в соответствующих случаях можно использовать выражения (6,8) и (8,10).

Из формул (10,4) и (6,8) может быть получено соотношение между тензором диэлектрической проницаемости и тензором градиентов скорости. С точностью до членов первого порядка

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_0 \delta_{ik} + \frac{\gamma\varphi\lambda}{15D} \gamma_{ik}. \tag{10,5}$$

Аналогичным образом из (10,4) и (8,10) находим также с точностью до первых членов соотношение

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_0 \delta_{ik} + \frac{ab^2\gamma\varphi}{15T} \left(E_i E_k - \frac{1}{3} E^2 \delta_{ik} \right) + \frac{\gamma\varphi\lambda}{15D} \gamma_{ik}. \tag{10,6}$$

Появление оптической анизотропии связано с ориентирующим воздействием градиентов скорости и поля на взвешенные в жидкости частицы.

Оптическая анизотропия суспензии в частном случае установившегося сдвигового движения была рассмотрена Петерлином и Стюартом [31] и с большей точностью Шерагой, Эдсалом и Гэддом [32], а при осциллирующем сдвиговом движении — Сёрфом и Тёрстоном [33].

Оптическая анизотропия суспензии при простом сдвиговом движении ($\nu_{21} \neq 0$) в слабом электрическом поле, когда вектор напряженности электрического поля направлен по оси 1, рассмотрена Икедой [25], который учитывал также наличие у частицы постоянного дипольного момента.

11. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Итак, в случае, когда следует учитывать вращательное броуновское движение частиц, т. е. когда размеры взвешенных частиц меньше 10^{-3}—10^{-4} *см*, уравнения движения разбавленной суспензии жестких эллипсоидов вращения записываются с помощью моментов функции распределения, которые являются в данном случае внутренними переменными, описывающими ориентацию частиц в поле и потоке. В уравнения движения входит конечное время релаксации $\tau = \frac{1}{6D}$, что отличает рассмотренную систему от вязкой жидкости или упругого тела, для которых время релаксации, соответственно равное нулю или бесконечности, не входит в уравнение движения. Это значит, что суспензия жестких эллипсоидов проявляет вязкоупругие свойства и является примером системы, поведение которой является в некотором смысле промежуточным между поведением вязкой жидкости и твердого тела.

Релаксационный процесс, связанный с дезориентацией частиц, не является единственным для суспензий. Другими релаксационными процессами, которые рассмотрены недавно Афанасьевым и Николаевским [34] для суспензии шариков и должны приниматься во внимание при изучении суспензии других частиц, являются процессы, связанные с выравниванием поступательного и вращательного движений в системе.

Теория течения суспензии жестких эллипсоидов первоначально развивалась [4, 5] для объяснения поведения разбавленных растворов макромолекул, и в настоящее время результаты теории находят широкое применение для получения информации о размерах и форме жестких макромолекул [35]. К разбавленным растворам гибких макромолекул, образующих статистические клубки, рассмотренная теория неприменима. Для описания поведения такого рода систем в настоящее время интенсивно развивается теория движения взвесей деформируемых частиц [8, 36–38].

Институт химической физики
АН СССР

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. A. Einstein, Ann. d. Phys. **19**, 298 (1906); **34**, 591 (1911) (см. перевод: А. Эйнштейн, Собрание научных трудов, т. 3, М., «Наука», 1966, стр. 75).
2. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, М., Гостехиздат, 1954.
3. J. B. Jeffrey, Proc. Roy. Soc. **A102**, 161 (1922).
4. A. Peterlin, Zs. Phys. **111**, 232 (1938).
5. W. Kuhn, H. Kuhn, Helv. Chim. Acta **26**, 1394 (1943).
6. N. Saito, J. Phys. Soc. Japan **6**, 297 (1951).
7. G. L. Hand, Arch. Rational Mech. Anal. **7**, 81 (1961).
8. R. Roscoe, J. Fluid Mech. **28**, 273 (1967).
9. H. Brenner, Ann. Rev. Fluid Mech. **2**, 137 (1970).
10. J. L. Ericksen, Kolloid Zs. **173**, 117 (1960).
11. А. Эйнштейн, М. Смолуховский, Броуновское движение, М., ОНТИ, 1936.
12. S. Chandrasekhar, Rev. Mod. Phys. **15**, 1 (1943) (см. перевод С. Чандрасекар, Стохастические проблемы в физике и астрономии, М., ИЛ, 1948).
13. R. Gans, Ann. d. Phys. **86**, 628, 652 (1928).
14. H. Brenner, J. Colloid Sci. **20**, 104 (1965); J. Colloid Interface Sci. **23**, 407 (1967).
15. H. J. Workman, C. A. Hollingsworth, J. Colloid Interface Sci. **29**, 664 (1969).
16. R. Takserman-Kroser, A. Ziabicki, J. Pol. Sci. **A1**, 491, 507 (1963).
17. В. Н. Покровский, Коллоид. ж. **29**, 576 (1967).
18. В. Н. Покровский, Коллоид. ж. **30**, 881 (1968).
19. Ю. И. Шмаков, Е. Ю. Таран, Инж.-физ. ж. **18**, 1019 (1970).
20. R. Simha, J. Chem. Phys. **13**, 188 (1945).
21. H. Scheraga, J. Chem. Phys. **23**, 1526 (1955).
22. Н. И. Инсарова, Мех. полимеров, № 5, 927 (1967).
23. В. Н. Покровский, ЖЭТФ **55**, 651 (1968).
24. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, М., Физматгиз, 1959.
25. S. Ikeda, J. Chem. Phys. 38, 2839 (1963).
26. П. Б. Бегоулев, Ю. И. Шмаков, Инж.-физ. ж. **21**, 1046 (1971).
27. N. Saito, T. Kato, J. Phys. Soc. Japan **12**, 1393 (1957).
28. C. E. Chaffey, S. G. Mason, J. Colloid Interface Sci. **27**, 115 (1968).
29. W. F. Hall, S. N. Busenberg, J. Chem. Phys. **51**, 137 (1969).
30. H. Brenner, J. Colloid Interface Sci. **32**, 141 (1970).
31. A. Peterlin, H. Stuart, Zs. Phys. **112**, 1 (1939).
32. H. Scheraga, J. Edsall, J. Gadd, J. Chem. Phys. **19**, 1101 (1951).
33. R. Cerf, G. B. Thurston, J. Chem. Phys. **61**, 1457 (1964).
34. Е. Ф. Афанасьев, В. Н. Николаевский, в сборнике «Проблемы гидромеханики и механики сплошной среды», М., «Наука», 1969, стр. 17.
35. В. Н. Цветков, В. Е. Эскин, С. Я. Френкель, Структура макромолекул в растворах, М., «Наука», 1964.
36. J. D. Goddard, M. Miller, J. Fluid Mech. **28**, 657 (1967).
37. W. R. Schowalter, C. E. Chaffey, H. Brenner, J. Colloid Interface Sci. **26**, 152 (1968).
38. В. Н. Покровский, Коллоид. ж. **31**, 114 (1969).