УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

539.183

ЭЛЕКТРОННАЯ СТРУКТУРА СВЕРХТЯЖЕЛЫХ АТОМОВ

Я. Б. Зельдович, В. С. Попов

СОДЕРЖАНИЕ

1. Постановка задачи и обсуждение результатов	403
2. Уровни одночастичного уравнения Дирака	411
3. Возмущение непрерывного спектра близким уровнем	423
4. Рождение позитронов и поляризация вакуума при $Z > Z_c$	428
5. Свойства релятивистских волновых уравнений с потенциалом	43 5
Цитированная литература	439

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Вопрос об электронной структуре атома при $Z\alpha > 1$, и особенно при сверхкритическом заряде ядра Z > 170, представляет большой принципиальный интерес. Нельзя считать законченной квантовую теорию электронов, позитронов и электромагнитного поля до тех пор, пока не достигнута полная ясность в указанном вопросе.

Практически синтез и изучение атомов со столь большими Z маловероятны, по крайней мере в ближайшее время. Наиболее смелые предположения об островах ядерной стабильности не идут дальше магических Z = 114 и 126 (см. обзоры ¹⁻³). В принципе, однако, эффект спонтанного квазистатического рождения позитронов при Z > 170, предсказываемый теорией, можно наблюдать при столкновении двух голых (т. е. лишенных электронов) ядер урана. Во всяком случае, трудности проведения соответствующего опыта не снимают необходимости четкого ответа в рамках теории электронов и позитронов.

История вопроса делится на три этапа. На первом Дирак показал⁴ (см. также ⁵⁻⁷), что в кулоновском поле точечного заряда Ze решение становится сингулярным при Z = 137. Например, энергия нижнего уровня $1S_{1/2}$ дискретного спектра равна

$$\varepsilon_1 = \sqrt{1 - \zeta^2},\tag{1,1}$$

где $\zeta = Ze^2/\hbar c = Z/137$ *). При $\zeta = 1$ энергия ε_1 доходит до нуля и кривая $\varepsilon = \varepsilon$ (ζ) на этом обрывается (рис. 1). Выражение (1,1) имеет корневую особенность в точке $\zeta = 1$; формальное продолжение (1,1) на область $\zeta > 1$ приводит к мнимым значениям ε_1 . В связи с этим часто говорят, что при Z > 137 решения уравнения Дирака не существует (что, однако, неверно). На самом деле решение уравнения Дирака в потенциале V(r) =

^{*)} В дальнейшем мы всюду пользуемся системой единиц $\hbar = c = m_e = 1$, где m_e — масса электрона. В энергию электрона є включаем энергию покоя, так что $\varepsilon = 1$ соответствует покоящемуся свободному электрону, а $\varepsilon = 0$ соответствует энергии связи, равной $m_e c^2 = 1$. Границе нижнего континуума $\varepsilon = -1$ отвечает энергия связи $2m_e c^2$.

 $= -\zeta/r$ возможно и при $\zeta > 1$, но задача некорректна без выбора граничного условия на волновую функцию в нуле. Физический смысл этого условия состоит просто в том, что задачу нужно решать с потенциалом, обрезанным при r < R.

Введя в рассмотрение конечные размеры ядра, Померанчук и Смородинский ⁸ показали, что для протяженного ядра решение существует от $\zeta = 0$, $\varepsilon = 1$ до $\zeta = \zeta_c$, $\varepsilon = -1$, причем сингулярность при $\zeta = 1$ в формуле (1,1) исчезает. Значение $Z_c = 137 \zeta_c$, при котором энергия



Рис. 1. Ход энергии нижних уровней с моментом j = = 1/2 ($\zeta = Z/137$): а) для потенциала точечного заряда V (r) = $-Ze^2/r$; б) с учетом конечных размеров ндра.

основного состояния доходит до границы нижнего континуума $\varepsilon = -1$, будем называть критическим зарядом ядра. В работе ⁸ при вычислении Z_c был использован приближенный метод, имеющий невысокую точность в области реальных значений радиуса ядра $R \sim 10^{-12}$ см. Вследствие этого приведенные там значения Z_c завышены (так, для $R = 1, 2 \cdot 10^{-12}$ см в работе ⁸ дается значение $Z_c = 200$, а точный расчет приводит к $Z_c = 170$). Отметим, что при $Z \sim Z_c$ электростатический потенциал в центре ядра достигает величины $V(0) = 3\zeta/2R \approx 60 m_e c^2$ при радиусе ядра $R \sim 0.03$ (в единицах $\hbar/m_e c = 3.86 \cdot 10^{-11}$ см, т. е. $R = 1, 2 \cdot 10^{-12}$ см).

На следующем этапе более подробно исследовалась ситуация вблизи $Z = Z_c$, когда нижний уровень $1S_{1/2}$ электрона в атоме сливается с континуумом. В работе Герштейна и Зельдовича ⁹ было сделано предположение о том, что при $Z > Z_c$ голое ядро Z спонтанно излучает два позитрона, после чего эффективный (перенормированный, наблюдаемый) заряд голого ядра уменьшается на две единицы, что в точности соответствует заполнению K-оболочки. Отличие сверхкритического атома от обычного заключается в том, что при $Z < Z_c$ эти электроны должны быть взяты извне. Можно, например, родить две пары $2e^- + 2e^+$ фотонами с частотой ω , после чего электроны садятся на K-оболочку, а позитроны уходят на бесконечность. При этом порог рождения пары равен

$$\omega_{\text{nop}} = 1 + \varepsilon_1, \tag{1,2}$$

где ε_1 — энергия уровня $1S_{1/2}$, т. е. для рождения пары при $Z < Z_c$ необходимо затратить энергию. При $Z = Z_c$ можно родить пару на голом ядре фотоном сколь угодно низкой частоты. При $Z > Z_c$ рождение пар проявляется как рождение позитронов кулоновским полем и уменьшение заряда ядра идет спонтанно. По принципу Паули на 1*S*-уровень могут сесть лишь два электрона, т. е. спонтанно будут испущены только два позитрона, и не следует полагать, что весь избыточный заряд ($Z - Z_c$) будет скомпенсирован или заэкранирован. Однако, наряду с перечисленными выше правильными положениями, в работе ⁹ содержится ошибочное представление о делокализации волновой функции при приближении энергии состояния є к нижнему континууму.

Проведенное Поповым ^{10-12, 65} исследование решения уравнения Дирака при Z, близком к Z_c , разъяснило ситуацию. Отсылая за точными математическими результатами к разделам 2, 4, дадим здесь наглядную интерпретацию явлений при $Z \sim Z_c$. Уравнение Дирака для электрона имеет формальные решения и при отрицательных $\varepsilon < -1$ (нижний континуум). Свойства этих решений определяются тем, что вблизи $\varepsilon = -1$ на расстояниях $r > \hbar/m_ec$ от ядра мы имеем дело, по существу, с позитронами, которые отталкиваются от положительно заряженного ядра. Поэтому волновая функция имеет вид, характерный для нерелятивистской задачи о потенциальной яме с кулоновским барьером *). Отсюда следует, что из-за барьера волновая функция локализована в яме (т. е. на расстояниях от ядра, меньших комптоновской длины волны электрона) и эта локализация сохраняется даже при $Z \to Z_c$ ($\varepsilon \to -1$), когда энергетическая щель $\Delta = 1 + \varepsilon$ между связанным состоянием и континуумом стремится к нулю.

Рассмотрение одночастичных решений уравнения Дирака приводит к следующим результатам. Дискретный уровень 1S при $Z = Z_c$ доходит до границы континуума $\varepsilon = -1$ и затем исчезает (при $Z > Z_c$ дискретный спектр не содержит решения, которое непрерывно продолжало бы уровень 1S; уровни, следующие за основным, — $2P_{1/2}$, $2S_{1/2}$ и т. д., находятся на конечном расстоянии от континуума и не имеют каких-либо особенностей в точке $Z = Z_c$). Однако при $Z > Z_c$ происходит сильное возмущение функций нижнего континуума $\psi_{\varepsilon}(r)$, связанное с появлением полюса матрицы рассеяния в точке $E = \varepsilon_0 - (i\gamma/2)$ ($\varepsilon_0 < -1$). Возмущение функций $\psi_{\varepsilon}(r)$ в основном сосредоточено в полосе энергий | $\varepsilon - \varepsilon_0 | \leqslant \gamma$, а в координатном пространстве оно приводит к появлению дополнительной плотности заряда вакуума $\rho_0(r)$, локализованной на расстояниях $r \approx \hbar/m_e c$ от ядра и несущей суммарный заряд -2e. При этом в области ($Z - Z_c$) «

$$\varepsilon_0 = -1 - a \left(Z - Z_c \right), \quad \gamma \sim \exp\left\{ -b \bigvee \frac{Z_c}{Z - Z_c} \right\}, \quad (1,3)$$

где a, b > 0 — некоторые константы **).

Говоря о продолжении уровня 1S в закритическую область, следует различать две возможности. Если в начальный момент времени этот уровень незаполнен (каким-либо путем образовалось голое ядро с зарядом $Z > Z_c$), то его продолжением служит. брейт-вигнеровский полюс E = $= \varepsilon_0 - (i\gamma/2)$, т. е. незаполненный уровень 1S переходит в квазистационарное состояние. Следовательно, голое ядро с $Z > Z_c$ в вакууме неустойчиво. Можно сказать, что его кулоновское поле рождает в вакууме две электрон-позитронные пары, электроны которых садятся на K-оболочку, а позитроны по прошествии времени $t \ge 1/\gamma$ уходят на бесконечность. После испускания позитронов остается стабильная атомоподобная система («сверхкритический атом»), состоящая из ядра Z плюс вакуумная плот-

^{*)} Когда мы говорим о яме с барьером, то имеем в виду не исходный потенциал V(r), непосредственно входящий в уравнение Дирака (V(r) отвечает притяжению; например, $V(r) = -\zeta/r$), а некоторый «эффективный» потенциал U(r). Последний возникает при сведении системы двух уравнений Дирака (2,9) к одному уравнению второго порядка типа уравнения Шрёдингера. В нерелятивистском случае $U \approx V$; когда же $\varepsilon \rightarrow -1$, различие между потенциалами U и V становится весьма существенным. См. подробнее раздел 2 (и, в частности, рис. 2).

^{**)} Экспоненциальная малость у объясняется малой проницаемостью кулоновского барьера в эффективном потенциале (2,15) для медленных позитронов.

ность заряда $\rho_0(r)$ на *К*-оболочке. По своим физическим свойствам (средний радиус и т. д.) распределение заряда $\rho_0(r)$ близко к плотности заряда $\rho(r) = -e |\psi_0(r)|^2$ на *К*-оболочке в обычном атоме с $Z < Z_c$, хотя плотности $\rho_0(r)$ уже не отвечает одночастичная волновая функция.

В отличие от обычных ядер, голое ядро с $Z > Z_c$ само рождает электроны, сидящие на *K*-оболочке *). С другой стороны, если при $Z < Z_c$ *K*-оболочка была заполнена электронами, то при добавлении к ядру нескольких протонов система непосредственно переходит в сверхкритическое состояние, а позитроны не излучаются **).

Облако вакуумного заряда $\rho_0(r)$ является довольно необычным объектом. Прежде всего плотность $\rho_0(r)$ является локализованной в пространстве ($\rho_0(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$), однако $\rho_0(r)$ не совпадает с квадратом одночастичной волновой функции дискретного спектра, а размазана по континууму (правда, при Z, лишь немного превышающих Z_c , эффективная ширина полосы энергий в нижнем континууме, дающих вклад в плотность $\rho_0(r)$, порядка γ , т. е. экспоненциально мала). Далее, атом со сверхкритическим зарядом (или соответствующий ион с зарядом меньше Z — 2) должен обладать любопытной особенностью в рассеянии позитронов. При рассеянии на нем внешнего позитрона будет наблюдаться узкий резонанс, который можно наглядно описать так. Позитрон проникает сквозь кулоновский барьер и безызлучательно аннигилирует с электроном, сидящим на «уровне» 15. В результате возникает голое ядро с дыркой в 1*S*-оболочке, которое нестабильно; за время $t \ge 1/\gamma$ оно спонтанно рождает позитрон и возвращается в исходное состояние. Этот процесс аналогичен возбуждению атома фотоном с последующим спонтанным излучением фотона той же частоты (в пределах ширины линии у). Сечение рассеяния позитронов описывается формулой Брейта — Вигнера. Независимо от этого наглядного описания резонансное рассеяние позитронов дает принципиальную возможность прямого экспериментального определения параметров (вещественной и мнимой части энергии $E = \varepsilon_0 - (i\gamma/2)$, через положение и ширину резонанса) квазистационарного, экспоненциально распадающегося состояния, которое является продолжением дискретного уровня при $Z > Z_c$.

Из описанных выше свойств электронного облака $\rho_0(r)$ следует, что при $Z > Z_c$ задача становится в принципе многочастичной. В этом состоит третий этап исследования ситуации при $Z > Z_c$, в настоящее время еще не завершенный. В точной постановке необходимо рассматривать уравнения электрон-позитронного волнового поля с операторами рождения и уничтожения и использовать аппарат вторичного квантования. Решения одноэлектронной задачи (уравнение Дирака в заданном внешнем поле V(r)) нужны здесь как промежуточный шаг в рассмотрении всей многочастичной задачи. Выше мы делали физические выводы и предсказывали результаты реальных или мысленных экспериментов на основе рассмотрения одночастичных решений. При строгом подходе такие выводы и предсказания нуждаются в обосновании, которое может дать лишь точная многочастичная теория. Ожидаемое изменение результатов состоит в дополнительном сдвиге Z_c на величину $\sim \alpha Z_c \approx 1$, чем в дальнейшем пренебрегаем.

^{*)} Как следует из (1,3), время превращения голого ядра с $Z > Z_c$ в сверхкритический атом экспоненциально зависит от $Z - Z_c$ и велико по сравнению с характерным для электродинамики временем $\hbar/m_ec^2 = 1,3\cdot 10^{-21}$ сек (по крайней мере пока $Z - Z_c \ll Z_c$).

 $Z - Z_c \ll Z_c$. **) Разумеется, вовсе не обязательно, чтобы полный заряд сверхкритического атома оставался равным Z - 2. Электроны, поступающие извне, могут заполнять следующие оболочки (с энергией уровней $\varepsilon > -1$), тем самым уменьшая заряд и дальше, вплоть до нейтрального атома. В этом отношении нет отличия от заполнения оболочек в обычном атоме с $Z < Z_c$.

Обратимся более конкретно к рассматриваемой задаче. Полный спектр одночастичных состояний состоит из некоторого набора дискретных уровней с — 1 < ε_n < 1, верхнего континуума $\varepsilon > 1$ и нижнего континуума $\varepsilon < -1$. При любом Z (как при Z < Z_c, так и при Z > Z_c) поле ядра определенным образом деформирует волновые функции континуума. Энергетические границы континуума ($\varepsilon = \pm 1$) при этом, естественно, не меняются, поскольку на бесконечности потенциал ядра равен нулю.

Хорошо известно, что изменение волновых функций приводит к перенормировке заряда и поляризации вакуума. Уточним эти понятия *). Плотность заряда вакуума содержит член $\rho' \propto \Delta \varphi$, т. е. пропорциональный плотности заряда ядра $\rho_{\rm ext}$, создающего потенциал: $\rho'(r) = = \frac{1}{4\pi} (1 - Z_{\rm s}^{1/3}) \Delta \varphi$ (или в импульсном представлении $\rho'_k \sim k^2 \varphi_k$). Этот член исключают, вводя перенормированную плотность заряда

$$\rho_R = \rho_{\text{ext}} + \rho' = Z_3^{1/2} \rho_{\text{ext}} \tag{1.4}$$

и подставляя в дальнейшем в уравнения везде вместо $\rho_{ext}(r)$ величину $\rho_R(r)$. Опыт дает нам именно $\int \rho_R dV$ — заряд, соответствующий одному или нескольким протонам. Величины же $\rho_{ext}(r)$ и Z_3 являются ненаблюдаемыми и выпадают из сравнения теории с экспериментом — к счастью, так как Z_3 выражается расходящимся интегралом **). Перенормируемость электродинамики в том и состоит, что сравнение теории с опытом оказывается не зависящим от параметра обрезания теории $\Lambda \equiv m_e$.

Однако уже в теории возмущений в первом порядке по φ имеются члены более высокого порядка по волновому вектору k (в линейной теории удобно пользоваться фурье-разложением потенциала):

$$\rho_{h}^{"} = \frac{\alpha}{4\pi^{2}} \left\{ \frac{k^{4}}{15m_{e}^{2}} \varphi_{h} + \frac{k^{6}}{170m_{e}^{4}} \varphi_{h} + \dots \right\}$$
(1,5)

или

$$\rho''(\mathbf{r}) = -\frac{\alpha}{\pi} \left\{ -\frac{1}{15m_e^2} \,\Delta\rho_{\rm R} + \frac{1}{170m_e^4} \,\Delta\Delta\rho_{\rm R} + \dots \right\}$$
(1,5')

(см., например, ¹³; здесь $\alpha = e^2/\hbar c = 1/137$). Помимо $\rho'(\mathbf{r})$, возникает дополнительная плотность заряда в электронно-позитронном вакууме, возмущенном внешним полем, которая не сводится к перенормировке заряда. Именно величину $\rho''(\mathbf{r})$ принято называть поляризацией вакуума.

Отметим общие свойства $\rho''(\mathbf{r})$. Прежде всего $\int \rho'' dV = 0$, поскольку интеграл по всему объему соответствует фурье-компоненте ρ_k'' с k = 0, а разложение (1, 5) начинается с k^4 (если исходить из φ) или с k^2 (если исходить из ρ_R). Таким образом, поляризация вакуума не меняет полного заряда (и поля на бесконечности). Пока мы остаемся в рамках линейной теории, можно считать это следствием определения ренормированного заряда, т. е. принятого выше разделения эффекта на перенормировку заряда и поляризацию вакуума. Заметим далее, что если можно ограничиться разложением ρ_k'' в ряд по степеням k^2 , то плотность заряда $\rho''(r)$ отлична от нуля лишь там, где $\rho_R(r) \neq 0$. В действительности, однако, полное выражение для ρ_k'' не описывается рядом, так как он не сходится при $|k^2| > 4m_e^2$. С этим математическим обстоятельством связан тот факт,

^{*)} Ниже мы не претендуем на общие формулировки и рассматриваем лишь статический случай: $\mathbf{A} = 0, A_0 = \varphi(r)$ не зависит от t.

^{**)} Расходящаяся часть индуцированной плотности заряда $\rho'(r)$ точно пропорциональна внешнему заряду $\rho_{ext}(r)$. Благодаря этому процедура перенормировки полностью устраняет расходимости из теории.

что ho'' (r) отлична от нуля и в той области, где $ho_{
m ext}$ (r) = 0. В частности, уже в линейном приближении по Z отлична от нуля плотность заряда в вакууме, индуцированная точечным зарядом (см. ниже, раздел 4). Как известно, первый член ~ $k^4 \varphi_k$ в (1,5) дает вклад в лэмбовский сдвиг уровней, равный -27 Мгц, что полностью подтверждается на опыте.

Поляризация вакуума в общем случае должна также содержать члены высшего порядка по потенциалу φ (*r*) или электрическому полю. Их можно было игнорировать в первоначальной теории лэмбовского сдвига в атоме водорода, однако нас интересует случай ядер с большим зарядом, где параметр разложения ζ = Zα порядка единицы. Расчеты поляризации вакуума в высших порядках по параметру ζ становятся необычайно трудными и громоздкими (они проведены вплоть до ζ^3 ; см. ¹⁵). Опыт показывает, что и в этом случае поляризация вакуума не меняет общего заряда *).

Возникает вопрос, как можно увидеть, что теория действительно согласуется с опытом в важнейшем предсказании $\int
ho''(r) \, dV = 0$. Здесь может быть полезна аналогия с диэлектриками. Принципиальное сходство этих задач состоит в том, что диэлек-

трик, так же как и вакуум, имеет щель между двумя континуумами **). Наряду с плотностью заряда ρ ", введем смещение заряда **P**: ρ " = — div **P** (термин «поляризация» не будем здесь употреблять, чтобы не вызывать путаницы с поляризацией вакуума). В слабом и медленно меняющемся поле в диэлектрике P = fE, где константа f связана с диэлектрической постоянной: $\varepsilon = 1 + 4\pi f$. В сильном поле ${f P}=f\left(E^2
ight){f E}$ и f уже не является константой, не зависящей от поля. Однако из-за дивергентной связи ρ" с Р изменение f не дает вклада в \ ρ" dV, поскольку этот инте-

грал тождественно равен пределу

$$\lim_{R \to \infty} 4\pi R^2 P(R) = \lim_{R \to \infty} 4\pi R^2 f(E^2) E = 0.$$
(1,6)

Точно так же не дает вклада и дисперсия — зависимость функции f от волнового вектора k. Общее изменение заряда определяется одним числом — статической диэлектрической постоянной, точнее предельным значением f при $E^2 \rightarrow 0$ и $k^2 \rightarrow 0$. Иными словами, существенно лишь смещение Р вдали (в пределе при $r \to \infty$), где поле Е мало и почти постоянно.

По-видимому, аналогичная ситуация имеет место и для поляризации вакуума, с той разницей, что «диэлектрическая постоянная» вакуума включена в понятие перенормировки. Как нам кажется, программа рассмотрения поляризации вакуума вне рамок теории возмущений никогда не была проведена полностью ***), хотя в окончательном результате и нет сомнений.

Известные результаты, относящиеся к случаю Z < Z_c, были изложены выше, быть может, даже с излишним педантизмом для того, чтобы лучше уяснить особенности новой ситуации при Z > Z_c. В этом случае после присоединения нижнего уровня 1S к континууму (при $Z = Z_c$) возникает квазистационарное состояние с комплексной энергией $E = \varepsilon_0 - (i\gamma/2)$ (где $\varepsilon_0 < -1$) в одночастичной задаче. Хотя такие решения не входят

^{*)} По справедливому замечанию Л. П. Питаевского, здесь можно и не ссыдаться на опыт; независимость перенормировки от величины заряда является глубоким свойством теории, связанным с сохранением заряда и градиентной инвариантностью. При рассмотрении мысленного опыта «сборки» ядра свинца из 82 протонов и 126 нейтронов градиентная инвариантность приводит к тому, что поле на бесконечности не меняется. Изменение возможно на целое число е, если на бесконечность уходят реальные электроны или позитроны.

^{**)} Роль верхнего и нижнего континуумов играют здесь валентная зона и зона проводимости. Глубокими уровнями в полупроводниках принято называть уровни, энергия связи которых сравнима с расстоянием между зонами (такие уровни образуются вблизи многозарядных примесных центров, вакансий и т. д. и играют значительную роль в физике полупроводников). Теория глубоких уровней во многом напоминает релятивистскую задачу с потенциалом (см. работу Келдыша¹⁶). ***) За исключением простейшего случая полей Е и Н, однородных в пространстве и постоянных во времени^{17,18} (см. также недавнюю работу¹⁹).

в полный набор ортонормированных решений уравнения Дирака (в «спектр» этого уравнения), однако их существование не остается без влияния на функции непрерывного спектра. При вещественной энергии є, близкой к полюсу (т. е. при $| \varepsilon - \varepsilon_0 | \leqslant \gamma$), волновые функции сплошного спектра претерпевают характерные изменения, а именно: при заданной нормировке на бесконечности (χ_k (r) $\approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin (kr + \delta)$) резко возрастает χ_k^2 (0) $\sim \gamma [(\varepsilon - \varepsilon_0)^2 + (\gamma^{2/4})]^{-1}$.

Таким образом, в интеграле от плотности заряда по сплошному спектру возникает дополнительное слагаемое, локализация которого следует внутрибарьерной плотности χ₀² (r) квазистационарного состояния. Вот эта дополнительная плотность заряда и соответствует эффективно двум связанным электронам. Формальное доказательство этого утверждения будет дано в разделе 4.

Рассмотрение релятивистского случая осложняется интегрированием по бесконечному импульсному пространству. Однако область $p \gg m_e c$ в действительности не содержит специфической зависимости от Z – Z_c, и потому ее вклад исчезает после перенормировки. Существенным для всего рассмотрения является следующий факт: сумма квадратов волновых функций

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{n} \psi_{n}^{2}(\mathbf{r}) + \int dk \, |\psi_{k}(\mathbf{r})|^{2}$$
(1,7)

(по дискретным уровням и континууму) не испытывает никакой особенности (например, разрыва о (г) или ее производной) в тот момент, когда при плавном изменении глубины потенциала появляется или исчезает уровень дискретного спектра (см. работу ²⁰, а также ²¹⁻²⁴).

Применим эти соображения к ядрам с большими Z. При Z < Z_c имеется дискретный уровень 1S_{1/2} над континуумом. Если он заполнен электронами, то нет сомнения, что заряд системы равен Z – 2. По сказанному нами, то негомысными, то сарид спотомы разва 2 – но спаванныму выше, эта величина не может изменяться при переходе через $Z = Z_c$. Отли-чие случая $Z > Z_c$ от $Z < Z_c$ состоит в том, что при $Z < Z_c$ плотность электронного облака равна $\rho_0(r) = -e\chi_0^2(r)$, где $\psi_0(r)$ — волновая функ-ция нижнего уровня, а при $Z > Z_c$ эта плотность не соответствует какойлибо одной волновой функции одночастичного приближения (волновая функция К-оболочки становится многочастичной). Плотность ро (r) при Z > Z_c представляет собой возмущение волновых функций нижнего континуума $\psi_{\varepsilon}(r)$, сосредоточенное в узкой полосе $|\varepsilon - \varepsilon_0| \sim \gamma$.

Пространственная зависимость $\rho_0(r)$ не испытывает каких-либо резких изменений в точке $Z = Z_c$. До тех пор пока уровень $1S_{1/2}$ еще не слился с нижним континуумом,

волновые функции континуума $\chi_{\varepsilon}(r)$ ортогональны функции $\chi_{0}(r)$. После слияния волновые функции $\chi_{\varepsilon}(r)$ в окрестности резонанса ($|\varepsilon - \varepsilon_{0}| \leq$ $\leqslant \gamma$) похожи на χ_0 (r), если r не слишком велико (под барьером).

При этом существенно, разумеется, что мы имеем дело с фермионами и действует принцип Паули. Легкие заряженные бозоны (если бы таковые существовали в природе), взятые вместо электронов, могли бы виртуально рождаться в любом числе и спонтанно заэкранировать весь избыточный заряд Z — Z_c (этот вопрос был подробно рассмотрен в последнее время А. Б. Мигдалом ²⁵). Электроны же, вследствие принципа Паули, экранируют лишь две единицы заряда. Поэтому картина явлений при Z > 170, полученная в одночастичном приближении, остается справедливой и в многочастичной задаче (наибольшее изменение, вносимое многочастичным рассмотрением, может привести к тому, что утверждение, высказанное

УФН, том 105, вып. 3

для некоторого Z, окажется справедливым для ядра с зарядом Z' = $Z = Z + \Delta Z$, где $\Delta Z \sim \alpha Z_c \sim 1$). Такова общая картина явлений при $Z \sim Z_c$. Сделаем несколько заме-

чаний о точности расчетов Z_c.

При $Z < Z_c$ учет поляризации вакуума углубляет потенциальную яму (соответствующее вмещение уровня $\Delta E''$ всегда отрицательно, для водорода оно вносит вклад —27 *Мгц* в радиационный сдвиг уровней $2S_{1/2}$ и $2P_{1/2}$). Поэтому поляризация вакуума уменьшает значение Z_c на величину $\sim \alpha Z_c$.

С другой стороны, учет электронных собственно-энергетических диаграмм (взаимодействие электрона с фотонным вакуумом) повышает уровень. Вычислению этой части лэмбовского сдвига (обозначим ее $\Delta E'$) для тяжелых атомов посвящены работы ²⁶⁻²⁹. При $Z\alpha \ll 1$ справедлива оценка ^{30, 31}

$$\Delta E'_{nl} \approx \frac{4\alpha}{3\pi} \,\delta_{l_0} \,\frac{(Z\alpha)^4}{n^3} \ln \frac{1}{(Z\alpha)^2} \,. \tag{1.8}$$

При Z $\alpha \sim 1$ можно ожидать, что $\Delta E'_{ne} \sim \alpha m_e c^2$, т. е. радиационные поправки также могут изменить Z_c на величину порядка αZ_c.

Перечислим основные выводы относительно поведения атомов и ядер с большими Z:

1) При $Z > Z_c$ голое ядро после испускания двух позитронов окружает себя К-оболочкой и превращается в сверхкритический атом. Его заряд, определенный по электростатическому полю на расстояниях $r > \hbar/m_e c$, равен Z - 2.

2) Характерной чертой данной задачи является существование кулоновского барьера для электрона с отрицательной энергией є ≈ -1 . Благодаря этому барьеру волновая функция при $Z = Z_c$ не делокализуется, дискретный уровень 1S в голом ядре имеет продолжение в виде резонанса $E = \varepsilon_0 - i\gamma/2$, а вероятность вылета позитронов при $Z > Z_c$ экспоненциально обращается в нуль на пороге.

3) Атом с заполненной К-оболочкой при повышении заряда ядра до Z > Z_c непосредственно переходит в сверхкритическое состояние, не излучая позитроны.

4) Свойства внешних оболочек атома (определяющие, в частности, менделеевскую периодичность химических свойств) закономерно продолжаются в закритическую область.

Имеется некоторая аналогия в рождении позитронов ядром при $Z > Z_c$ и в рождении пар в однородном электростатическом поле.

Взаимодействие электромагнитного поля с вакуумом заряженных частиц приводит к появлению нелинейных добавок к лагранжиану электромагнитного поля L^{32,33}, и рождение пар представляет собой лишь одну сторону явлений, связанных с этими нелинейностями. А именно, вероятность w рождения пар внешним полем определяется Im L (см. ¹⁷). В случае постоянных (во времени и в пространстве) полей Е и Н возможно точное решение задачи; оно было получено Швингером ¹⁷ для скалярной и спинорной электродинамики и в работе 18 для заряженных векторных бозонов с гиромагнитным отнотением g = 2. В этих работах получено, в частности, следующее выражение для вероятности рождения пар в постоянном электрическом поле Е:

$$w = 2 \operatorname{Im} L = (2s+1) \frac{m^4}{2\pi^2} \left(\frac{E}{E_c}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{n^2} \exp\left(-\frac{n\pi m^2}{eE}\right)$$
(1,9)

(см. также ³⁴). Здесь $\hbar = c = 1$, *s* и *m* — спин и масса частиц, рождаемых полем *E*, $\beta_n = (-1)^{n-1}$ для бозонов и $\beta_n = 1$ для фермионов; вероятность *w* измеряется в единицах m^4c^5/\hbar^4 (что соответствует числу пар, рождаемых в объеме $(\hbar/mc)^3$ за время \hbar/mc^2). Показатель экспоненты в (1,9) имеет вид $n\pi E_c/E$, где $E_c = m^2c^3/e\hbar = 1,3\cdot 10^{16}$ *e/см* для электронов (поскольку $E_c \sim m^2$, для других заряженных частиц характерная напряженность E_c еще больше). Пока $E < E_c$, вероятность *w* экспоненциально мала

и в сумме (1,9) достаточно оставить первый член n=1, что соответствует квазиклассическому приближению *).

Рождение пар перестает быть малым эффектом при $E \sim E_c$. Заметим теперь, что в кулоновском поле ядра Z напряженность $E = Ze/r^2$ сравнивается с E_c , когда $r \sim r_c = \zeta^{1/2} \frac{\hbar}{mc}$, причем | $V(r_c)$ | = $\zeta^{1/2} mc^2$. При $m = m_e$ и $\zeta > 1$ имеется область $r \leq r_c$ вблизи ядра, в которой возможно рождение пар (для этого статическое поле должно удовлетворять условию | V(r) | > $2m_ec^2$, после чего электрон связывается с ядром, а позитрон уходит на бесконечность через кулоновский барьер. Это наглядное (хотя и не строгое) рассуждение устанавливает сянзь явлений в кулоновском цоле при $Z > Z_c$ формулой Швингера (1,9). Разумеется, нельзя ожидать здесь буквального совпадения формул для вероятности w, поскольку (1,9) справедлива лишь для однородного поля, а кулоновское поле сильно неоднородно на малых расстояниях.

Заканчивая вводную «литературную» часть обзора, хочется сказать несколько слов об оценке места рассматриваемого явления в науке. Иногда высказываются взгляды о возможности классификации наук по масштабу изучаемых ими явлений. В таком случае пальму первенства немедленно получают астрономы, изучающие взрывы звезд, вспышки квазаров и «big-bang» — расширение Вселенной в целом.

Однако успехи астрофизики были бы невозможны без развития теории элементарных частиц, которая имеет огромное познавательное значение, и, более того, без выяснения принципиальных вопросов этой теории нельзя продвинуться и в других областях науки. Не подлежит сомнению, что ясное и отчетливое понимание во всех деталях поляризации вакуума и рождения пар является хотя и частным, но необходимым этапом развития теории элементарных частиц.

Любопытно, что правильный ответ на вопрос о значении теории строения материи дан полвека назад русскими поэтами.

В последние годы стало модным противопоставление физиков и лириков. Налицо утрата глубокой сопричастности художника к научному прогрессу. Между тем когда-то, в 20-е годы, теория относительности и строение атома глубоко волновали воображение всех мыслящих людей. Валерий Брюсов в чеканных стихах рисовал планетарную систему атома ³⁷, предвосхищая некоторые современные идеи о структуре частиц. Но еще примечательнее ощущение тесной связи между теорией микромира (поэтсловотворец называет эту теорию «атомосклад») и космосом, выраженное в двустишии Велемира Хлебникова:

> Могучий и громадный, далек астральный лад. Ты ищешь объясненья — познай атомосклад **).

2. УРОВНИ ОДНОЧАСТИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ДИРАКА

2.1. Как известно ^{5,13}, уравнение Дирака для электрона в кулоновском поле точечного заряда Ze может быть решено точно, причем энергии уровней равны

$$\varepsilon_{nj} = \left[1 + \frac{\zeta^2}{(n-|\varkappa| + \sqrt{\varkappa^2 - \zeta^2)^2}}\right]^{-1/2}; \qquad (2,1)$$

здесь $\zeta = Z\alpha = Z/137$, *n*—главное квантовое число (*n* = 1, 2, 3, ...) и — κ — собственное значение оператора Дирака $K = \beta$ ($l\sigma + 1$), являющегося

^{*)} В этом случае можно развить квазиклассический метод расчета w, связанный с вычислением действия S вдоль подбарьерных траекторий с мнимым временем ³⁵. Этот метод эффективно работает для широкого класса полей, переменных во времени. Для некоторых полей специального вида в последнее время было получено точное решение уравнения Дирака и найдены точные формулы для вероятности w ^{19,36}.

^{**)} Разыскания Я. Б. Зельдовича.

интегралом движения в любом поле со сферической симметрией*):

$$\varkappa = \mp (j + 1/2)$$
 для $j = l \pm 1/2.$ (2,2)

Для легких атомов формула (2,1) может быть разложена в ряд по ζ^2 :

$$E_{nj} = \varepsilon_{nj} - 1 = -\frac{\zeta^2}{2n^2} \left[1 + \frac{\zeta^2}{n} \left(\frac{1}{|\kappa|} - \frac{3}{4n} \right) \right].$$
(2,3)

В нерелятивистском приближении ($\zeta \ll 1$) E_{nj} не зависит от j и (2,3) переходит в обычное выражение для спектра атома водорода: $E_n = -\zeta^2/2n^2$. Уровень E_n имеет здесь кратность вырождения $2n^2$ (j = 1/2, 3/2, ..., (n-1)/2, а число \varkappa принимает значения $\varkappa = \pm 1$, ± 2 , ..., ..., $\pm (n-1)$, -n).

В дальнейшем нас, однако, будет интересовать противоположный случай больших Z, когда $\zeta \sim 1$. Формула (2,1) сохраняет смысл, пока $\zeta < |\varkappa| = j + 1/2$. При $\zeta \rightarrow |\varkappa|$ в ней возникает корневая особенность:

$$\varepsilon_{nj} = \frac{n - |\varkappa|}{N} + \frac{\varkappa^2}{N^3} \sqrt{\varkappa^2 - \zeta^2} + \dots, \qquad (2,4)$$

где $N = \sqrt{n^2 - 2|\varkappa|n + 2\varkappa^2}$, $n \ge |\varkappa|$. Дальнейшее продолжение (2,1) на область $\zeta > |\varkappa|$ приводит к тому, что энергия ε_{nj} становится комплексной, что физически бессмысленно (для состояний дискретного спектра в одноэлектронной задаче!).

Эта трудность объясняется тем, что эффективный потенциал U(r), возникающий при квадрировании уравнения Дирака, для кулоновского поля $V(r) = -\zeta/r$ ведет себя при $r \to 0$ сингулярным образом: $U(r) \approx \approx (j (j + 1) - \zeta^2) r^{-2}$, т. е. при $\zeta > j + \frac{1}{2}$ возникает так называемое «падение на центр»³⁸⁻⁴⁰. В этом случае для определения энергии уровней недостаточно задать потенциал V(r) при $0 < r < \infty$, но нужно еще поставить граничное условие в нуле; лишь после этого задача станет математически корректной (см. подробнее работы ^{38, 40}).

2.2. Обращение кулоновского потенциала в бесконечность при r = 0 является идеализацией. Реально по разным причинам (конечные размеры ядра, поляризация вакуума и т. д.) формула $V(r) = -\zeta/r$ так или иначе модифицируется при $r \rightarrow 0$. Однако пока $\zeta < j + 1/2$, энергия уровня є слабо зависит от конкретного вида V(r) при малых r, и потому допустим предельный переход к точечному кулоновскому полю. Если же $\zeta \ge j + 1/2$, то зависимость є от вида обрезания V(r) становится существенной, что характерно для всех задач с «падением на центр».

В области $\zeta \approx j + 1/2$ нужно обрезать потенциал точечного заряда, сделав его конечным в нуле:

$$V(r) = \begin{cases} -\zeta/r & \text{при } r > R, \\ -\frac{\zeta}{R} f\left(\frac{r}{R}\right) & \text{при } 0 < r < R. \end{cases}$$
(2,5)

С математической точки зрения такая процедура является регуляризацией задачи, придающей ей однозначный смысл, с физической — учитывает конечные размеры ядер.

Вид обрезающей функции f(x) зависит от распределения электрического заряда по объему ядра (x = r/R, 0 < x < 1, причем f(1) = 1).

^{*)} Напомним, что для релятивистского электрона в поле V(r) сохраняется лишь полный момент $\mathbf{j} = \mathbf{l} + \frac{1}{2} \sigma$, а орбитальный момент \mathbf{l} не имеет определенного значения. Через l и l' мы будем обозначать орбитальные моменты, соответствующие верхней и нижней компонентам дираковского биспинора (при этом l + l' = 2j). Состояния с одним и тем же j, но разными знаками х отличаются четностью ¹³,¹⁴.

Так, $f(x) = (3 - x^2)/2$ отвечает постоянной объемной плотности заряда, а простейший выбор $f(x) \equiv 1$ — концентрации всего заряда на поверхности ядра.

Такая постановка вопроса принадлежит Померанчуку и Смородинскому, в работе которых ⁸ дано правильное (с качественной стороны) описание явлений при $Z \approx 137$: с ростом Z уровни продолжают опускаться, пока при некотором «критическом» значении $Z = Z_c > 137$ нижний уровень дискретного спектра $1S_{1/2}$ не достигает границы $\varepsilon = -1$.

Покажем прежде всего, что всякое обрезание потенциала V(r) устраняет особенности типа (1,1) у энергий ε_{nj} и кривая уровня $\varepsilon = \varepsilon$ (ζ) спокойно продолжается до $\varepsilon = -1$.

Это свойство решений уравнения Дирака справедливо не только для потенциала (2,5), но и в общем случае. Действительно, рассмотрим произвольный потенциал притяжения $V(r) = -\zeta v(r)$, где $v(r) \ge 0$ — фиксированная функция r, а константу связи ζ будем менять. Относительно v(r) предполагаем: 1) ограниченность, т. е. $\max_{0 \le r < \infty} v(r) < C$, где C —

некоторая константа; 2) $v(r) \to 0$ при $r \to \infty$. Пусть при некотором значении ζ имеется связанный уровень с энергией є и волновыми функциями $G = G(r; \zeta)$ и $F = F(r; \zeta)$. Здесь и далее G = rg(r), F = rf(r), а g(r) и f(r) — радиальные функции для верхней и нижней компонент биспинора, определенные согласно¹³. Условие нормировки имеет вид

$$\int_{0}^{\infty} (G^{2} + F^{2}) dr = \int_{0}^{\infty} (g^{2} + f^{2}) r^{2} dr = 1.$$
(2,6)

Вычисляя по теории возмущений изменение энергии уровня при бесконечно малом углублении ямы, находим

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \zeta} = -\int_{0}^{\infty} v(r) \left(G^{2} + F^{2}\right) dr \qquad (2,7)$$

(эта формула является точной, если G и F—точные волновые функции уровня с энергией ε). Так как $0 \leq v(r) < C$, отсюда

$$-C < \frac{\partial \varepsilon}{\partial \zeta} < 0. \tag{2.8}$$

Это означает, что всякий уровень с ростом константы связи ζ монотонно опускается, причем кривая $\varepsilon = \varepsilon$ (ζ) не имеет особенностей (производная $\frac{\partial \varepsilon}{\partial \zeta}$ всюду конечна). Следовательно, она не может оборваться (наподобие (1,1) или (2,1)), не дойдя до значения $\varepsilon = -1$ — границы нижнего континуума *).

Отметим, что для других релятивистских волновых уравнений (кроме уравнения Дирака) ситуация уже не столь проста — см. раздел 5.

2.3. Перейдем к более подробному изучению поведения уровня и свойств волновых функций вблизи є = -1. Для этого удобно свести

*) В случае точечного заряда согласно (1,1) имем $\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \zeta} = -\infty$ при $\zeta = 1$. Это также согласуется с формулой (2,7), если учесть, что здесь $v(r) = r^{-1}$, а функции G и F при $\zeta = 1$ конечны в нуле (для основного состояния при $\zeta = 1$ имеем $g = -f = e^{-r/r}$, т. е. радиальные функции g (r) и f (r) становятся сингулярными в точке r = 0). Любое обрезание потенциала $V(r) = -\zeta/r$ при $r \to 0$ устраняет эту сингулярность и делает $\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial r}$ конечной.

систему уравнений для функций G и F

$$\frac{dG}{dr} = -\frac{\varkappa}{r}G + (1 + \varepsilon - V)F, \quad \frac{dF}{dr} = (1 - \varepsilon + V)G + \frac{\varkappa}{r}F \quad (2,9)$$

к одному уравнению второго порядка, имеющему формально тот же вид, что и нерелятивистское уравнение Шрёдингера (с некоторым эффективным потенциалом). Для этого исключаем из (2,9) функцию F:

$$G'' + \frac{V'}{1+\varepsilon-V} \left(G' + \frac{\varkappa}{r} G \right) + \left[(\varepsilon - V)^2 - 1 - \frac{\varkappa (\varkappa + 1)}{r^2} \right] G = 0, \quad (2,10)$$

и далее с помощью подстановки $G(r) = [1 + \varepsilon - V(r)]^{1/2}\chi(r)$ приводим (2,10) к самосопряженному виду:

$$\chi'' + k^2(r) \chi = 0; \qquad (2,11)$$

здесь $k^2(r) = 2(E - U)$, $E = (\varepsilon^2 - 1)/2$, а эффективный потенциал U(r)удобно разбить на две части: $U = U_1 + U_2$, причем U_i совпадает с эффективным потенциалом в уравнении Клейна — Гордона *):

$$U_{1} = \varepsilon V - \frac{1}{2} V^{2} + \frac{\varkappa (\varkappa + 1)}{2r^{2}}, \qquad (2,12)$$

а U₂ обязан спиновым эффектам:

$$U_2 = \frac{1}{4} \left\{ \frac{V''}{1+\varepsilon-V} + \frac{3}{2} \left(\frac{V'}{1+\varepsilon-V} \right)^2 - \frac{2\varkappa V'}{r\left(1+\varepsilon-V\right)} \right\} . \tag{2.13}$$

Это выражение заметно упрощается при $\varepsilon = -1$. Для качественного анализа можно ограничиться этим случаем, так как при ε , близких к -1, зависимость U_2 от ε слабая (для потенциала притяжения $V(r) \leq 0$ знаменатель $1 + \varepsilon - V$ нигде не обращается в нуль и потому можно переходить через границу $\varepsilon = -1$). Положим еще $\varkappa = -1$, что отвечает основному состоянию (при этом исчезает центробежный барьер в $U_1(r)$). Тогда ($\varepsilon = \varkappa = -1$)

$$U_1 = \frac{1}{2} [1 - (1 + V)^2], \quad U_2 = \frac{u^2 - u'}{2} + \frac{\varkappa u}{r}, \quad (2, 14)$$

где u(r) = V'/2V (потенциалы U и V измеряются в m_ec^2). На малых расстояниях в $U_1(r)$ доминирует релятивистский член — $1/2 V^2$, приводящий к притяжению (независимо от знака исходного потенциала V). С другой стороны, при $r \to \infty$ имеем $U_1(r) \approx \varepsilon V(r)$, т. е. знак «хвоста» эффективного потенциала сам зависит от знака ε . В частности, если V(r) < 0и $\varepsilon < 0$, то $U_1(r)$ на больших расстояниях соответствует отталкиванию. Из формулы (2,14) видно, что U_1 имеет максимум высотой $1/2 m_ec^2$ в той точке $r = r'_m$, где $V(r'_m) = -1$, а при $V(r'_0) = -2$ имеем $U_1(r'_0) = 0$. Мы приходим к выводу, что при $\varepsilon \approx -1$ в эффективном потенциале U(r), в отличие от V(r), имеется довольно высокий потенциальный барьер. Этот вывод не меняется и при учете спинового слагаемого U_2 . Так, в случае кулоновского поля $V(r) = -\zeta/r$ находим

$$U(r) = U_1 + U_2 = \frac{\zeta}{r} - \frac{\eta}{2r^2}$$
, (2.15)

где $\eta = \zeta^2 - \varkappa^2 + (1/4)$. Чтобы получить более точные результаты при малых r, добавим к U(r) еще слагаемое $1/8 r^2$ (это — хорошо известная из квазиклассики ³⁰ поправка, сводящаяся к замене j(j + 1) на $(j + 1/2)^2$

^{*)} Отметим, что к (к + 1) = l (l + 1), т. е. U_1 (r) включает центробежную энергию l (l + 1)/2 r^2 . Существенно, что значениям $\varepsilon \approx -1$ отвечают в нерелятивистской задаче (2,11) энергии E, близкие к нулю.

и обоснованная Лангером ^{41,42}), после чего $\eta = \zeta^2 - \varkappa^2$. Связь между потенциалами V и U показана на рис. 2. В точке максимума U (r)

$$r = r_m = \frac{\zeta^2 - \varkappa^2}{\zeta}, \quad U_{\max} = \frac{\zeta^2}{2(\zeta^2 - \varkappa^2)} > \frac{1}{2} \quad (\text{при } \zeta > \varkappa). \quad (2,16)$$

Другие характерные точки (см. рис. 2): $r_0 = r_m/2$, $r_1 = r_m/4$. В области $r < r_1$ имеем U < V, т. е. эффективный потенциал U (r) отвечает более глубокой яме, чем V (r). Для $\varkappa = -1$ (основное состояние) и $\zeta = 1,25$ (реальное значение ζ_c для ядра с радиусом $R \sim 10^{-12}$ см) получаем $r_m = -0,45\hbar/m_ec = 1,7\cdot 10^{-11}$ см, $U_{\max} = 1,4m_ec^2$.

Итак, для электрона в состоянии с энергией $\varepsilon \approx -1$ имеется широкий кулоновский барьер, проницаемость которого при $\varepsilon \to -1$ экспоненциально мала. Это обстоятельство важно для всего дальнейшего. Волновая функция с энергией ε имеет асимптотику $(r \to \infty)$

$$G(r) \approx A \sqrt{1+\varepsilon} e^{-\lambda r} r^{\varepsilon \zeta/\lambda},$$

$$F(r) \approx -A \sqrt{1-\varepsilon} e^{-\lambda r} r^{\varepsilon \zeta/\lambda} \qquad (2,17)$$

 $(\lambda = \sqrt{1 - \varepsilon^2};$ константа A определяется из нормировки). Предэкспонента $r^{\varepsilon\zeta/\lambda}$ обязана кулоновскому взаимодействию электрона с ядром, которое существенно искажает волновую функцию на далеких расстояниях. При $\varepsilon \to +1$ барьер в U(r)отсутствует, $\varepsilon \zeta/\lambda \to +\infty$ и максимум $G^2(r) + F^2(r)$ уходит на большие расстояния — происходит делокализация связан-



Рис. 2. Потенциал V (r) и эффективный потенциал U (r) для кулоновской задачи при $Z \rightarrow Z_c$, $\varepsilon = -1$.

ного состояния. Такое поведение состояний, примыкающих к краю сплошного спектра, хорошо известно из нерелятивистской квантовой механики *). При $\varepsilon \to -1$ возникает совершенно иная картина: $\varepsilon \zeta / \lambda \to -\infty$, предэкспонента $r^{\varepsilon \zeta / \lambda}$ убывает быстрее любой конечной степени r и электрон остается локализованным вблизи ядра. Асимптотику волновых функций в случае $\varepsilon = -1$ можно найти из следующих соображений. Если $U(r) = \zeta / r$ при $r \to \infty$ (причем $\zeta > 0$), то решение уравнения Шрёдингера, убывающее на бесконечности, имеет вид

$$\chi(r) \sim r^{1/4} e^{-\sqrt{8\zeta r}}.$$
(2.18)

С другой стороны, для перехода от системы (2,9) к уравнению Шрёдингера (2,11) в случае $\varepsilon = -1$ необходимо выполнить подстановку

$$G(r) = \sqrt{V(r)} \chi_1(r), \quad F(r) = \sqrt{2 + V(r)} \chi_2(r).$$

Отсюда следует, что при $\varepsilon = -1$ и $r \to \infty$

$$G(r) = A' \left(\frac{2r}{\zeta}\right)^{-1/4} e^{-\sqrt{8\zeta r}}, \quad F(r) = -A' \left(\frac{2r}{\zeta}\right)^{1/4} e^{-\sqrt{8\zeta r}}. \quad (2,19)$$

Обратим внимание на поведение волновых функций: $G, F \sim \infty \exp(-\sqrt{8\zeta r})$. Такое уменьшение G и F есть не что иное, как затухание

^{*)} Например, для атома водорода в состоянии с главным квантовым числом *n* имеем $\chi_{nl}(r) \sim e^{-r/n} r^n$ при $r \to \infty$, т. е. средний радиус $r \sim n^2$.

под кулоновским барьером. Подчеркнем отличие асимптотики (2,19) от обычной экспоненты $\chi \propto e^{-\lambda r}$, справедливой для связанных состояний в короткодействующем потенциале (здесь $\lambda = \sqrt{-2E}$). В этом последнем случае при $E \to 0$ неизбежна делокализация, в то время как в нашей задаче благодаря кулоновскому барьеру в U(r) волновые функции при $\varepsilon = -1$ затухают на бесконечности, хотя при этом $E = (\varepsilon^2 - 1)/2 = 0$ и $\lambda = 0$.

На границе с верхним континуумом ($\varepsilon = +1$) асимптотическое поведение этих функций таково:

$$G(r) \approx A'' \left(\frac{2r}{\zeta}\right)^{1/4} \sin\left(\sqrt{8\zeta r} + \delta\right), \quad F(r) \approx A'' \left(\frac{2r}{\zeta}\right)^{-1/4} \cos\left(\sqrt{8\zeta r} + \delta\right).$$
(2,20)

В силу непрерывности ясно, что и в сплошном спектре функции с энергией $\pm \varepsilon$ должны сильно отличаться друг от друга, особенно при $|\varepsilon| \rightarrow 1$. В квазиклассическом приближении

G,
$$F \propto \exp\left(\pm i \int p \, dr\right)$$
, где $p(r) = \sqrt{\epsilon^2 - 1 + \frac{2\epsilon\zeta}{r} + \frac{\zeta^2 - 1}{r^2}}$. (2,21)

При $\varepsilon > 1$ величина $p^2(r) > 0$ и функции *G*, *F* осциллируют при всех *r*. Если же $\varepsilon < -1$, то имеется точка поворота $r_n = 2 |\varepsilon| |\zeta/(\varepsilon^2 - 1)$.



Рис. 3. Волновая функция G(r) при $\varepsilon = -1$ ($\zeta = \zeta_c = 1, 25$).

Характерные расстояния (в единицах $\hbar/m_e c$): R = 0.03 — радиус ядра, $r_0 = 0.225$ — радиус ямы в эффективном потенциале (2,15), $\bar{r} = 0.31$ — средний радиус данного состояния.

которая при є, близких к -1, расположена далеко от ядра. В классически запрещенной области *r* < *r*_n волновые функции содержат, вообще говоря, две экспоненты $\exp\left(\pm\sqrt{8\zeta r}\right)$, а осцилляции*), описываемые асимптотикой (2,17), наступают лишь при r > r_n. Примерный вид волновых функций вблизи $\varepsilon =$ = -1 показан на рис. З.

2.4. Выяснив качественную сторону дела, перейдем к точному решению задачи. Мы ограничимся приведением основных формул, отсылая

за подробностями математического характера к работам 10-12. В поле $V(r) = -\zeta/r$ уравнения (2,9) для функций G и F могут быть

решены точно. Особенно простой вид имеет решение при $\varepsilon = -1$:

$$G(r) = K_{i\nu} \left(\sqrt{8\zeta r} \right), \quad F(r) = \frac{1}{\zeta} \left(rG' + \varkappa G \right); \tag{2.22}$$

здесь $v = 2\sqrt{\zeta^2 - \varkappa^2}$, $K_{iv} - \phi$ ункция Макдональда с мнимым индексом (для нее имеются таблицы ⁴³). Функция $K_{iv}(x)$, вещественная при вещественных значениях v и x, четна по индексу v; она может быть определена интегралом

$$K_{i\nu}(x) = \int_{0}^{\infty} e^{-x_{j} \operatorname{ch} t} \cos \nu t \, dt, \qquad (2,23)$$

*) При $\varepsilon < -1$ $\lambda = \pm ip = \pm i\sqrt{\varepsilon^2 - 1}$ и формула (2,17) принимает вид *G*, *F* $\infty \exp\left\{\pm i\left(pr + \frac{\varepsilon \zeta}{p} \ln 2pr\right)\right\}$.

который быстро сходится и удобен для численного счета. При $x \to \infty$ функция $K_{iv}(x)$ экспоненциально убывает:

$$K_{iv}(x) = \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} e^{-x} \left(1 - \frac{v^2 + (1/4)}{2x} + \dots\right), \qquad (2, 24)^{1/2}$$

а при x -> 0 имеет бесконечное число осцилляций:

$$K_{i\nu}(x) = \left(\frac{\pi}{\nu \sin \pi \nu}\right)^{1/2} \sin \left(\nu \ln \frac{2}{x} + \arg \Gamma \left(1 + i\nu\right)\right) \,. \tag{2.25}$$

Решение (2.22) для потенциала (2.5) годится во внешней области r > R. Во внутренней области r < R можно воспользоваться малостью радиуса ядра R по сравнению с комптоновской длиной волны электрона*). Переходя в (2,9) к безразмерной переменной x = r/R и отбрасывая члены порядка *R*, получим

$$\frac{dG}{dx} = -\frac{\varkappa}{x} G + \zeta f(x) F, \quad \frac{dF}{dx} = -\zeta f(x) G + \frac{\varkappa}{x} F; \quad (2,26)$$

здесь f(x) — обрезающая функция из (2,5). При произвольном виде f(x)эти уравнения могут быть решены численно **). Для определения спектра уровней и ζ_c достаточно найти из (2,26) лишь одну константу, в качест-

ве которой мы выберем логарифмическую производную функции G(r) на краю ядра:

$$\xi = \left[\frac{r}{G} \frac{dG}{dr} \right]_{r=R}.$$
 (2,27)

Величина ξ зависит от ζ, и и вида обрезания f(x) (но не зависит от энергии, что является следствием приближения $R \ll 1$). Для прямоугольного обрезания (т. е. $f(x) \equiv 1$) решение находится аналитически:

$$\begin{split} \xi &= \xi_{-} = \zeta \operatorname{ctg} \zeta \quad \text{для} \quad \varkappa = -1, \\ \xi &= \xi_{+} = \frac{\zeta^{2}}{1 - \zeta \operatorname{ctg} \zeta} - 1 \quad \text{для} \quad \varkappa = +1. \end{split}$$

Зависимость 5 от 5 для двух моделей обрезания показана на рис. 4. Мо-



Рис. 4. Зависимость ξ от $\zeta = Z/137$. уровень 1S, модель обрезания I;
 уровень 1S, модель II;
 З — уровень 2P_{1/2}, модель II.

дель І соответствует f(x) = 1 (весь заряд на поверхности ядра), модель II — равномерному распределению заряда по объему ядра. С ростом ζ параметр ξ всегда убывает, причем $\xi_+(\zeta) > \xi_-(\zeta)$.

Сшивэние решений на краю ядра дает трансцендентное уравнение для определения критического заряда $Z_c = 137\zeta_c$

$$z \frac{K'_{iv}(z)}{K_{iv}(z)} = 2\xi, \qquad (2,28)$$

где $\mathbf{v} = 2\sqrt{\zeta_c^2 - 1}$, $z = \sqrt{8\zeta_c R}$ и $\xi = \xi$ (ζ_c). Здесь мы положили $\mathbf{x}^2 = 1$, так как для всех остальных состояний, кроме $nS_{1/2}$ и $nP_{1/2}$, значения ζ_c слишком велики и при ζ < 2 для них можно пользоваться формулой (2,1), относящейся к точечному кулоновскому полю.

^{*)} Так, например, радиусу $R = 1,2 \cdot 10^{-12}$ см отвечает R = 0,03 (в единицах

ħ/mec).
 **) Фактически для численного счета удобно свести (2,26) к одному уравнению. 1-го порядка (но уже нелинейному) (см. уравнение (7) в работе 10).

Исследуем (2,28) качественно. Функция $\psi_{\nu}(z) = zK'_{i\nu}(z)/K_{i\nu}(z)$ изображена на рис. 5. На нем же показано графическое решение уравнения (2,28), дающее бесконечную последовательность корней $z = z_n^{\pm}$ (n = 1, 2, ...). Основному уровню 1S соответствует (при данном R)



Рис. 5. Графическое решение уравнения (2,28). Корни z_n отвечают уровням $nS_{1/2}$ ($\varkappa = -1$),

корни z_n^+ — уровням $nP_{1/2}$ ($\varkappa = +1$).

минимальное ζ_c , что эквивалентно максимальному корню Z_1^- (при фиксированном ζ). Остальные корни $z_n, n \ge 2$, отвечают тем значениям ζ, при которых до границы нижнего континуума доходит уровень $nS_{1/2}$. Корни z_n^+ , соответствующие ^ξ+, дают ^ζс для уровней $nP_{1/2}$. Можно показать, что $\xi_+ > \xi_-$ (см. рис. 4); поэтому корни расположены так: $z_1^- > z_2^+ > z_2^- > \dots$ Отсюда вытекает, что при данном радиусе ядра R значения Z_c для состояний с j = 1/2 идут в следующем порядке: $1S_{1/2}$, $2P_{1/2}$, $3S_{1/2}$,

 $3P_{1/2}, \ldots$ Эти выводы полностью подтверждаются при численном решении уравнения (2,28), результаты которого представлены на рис. 6.

Вычисления ζ_с проводились для двух моделей обрезания (модели I и II, см. выше). Переход от модели I к модели II в 1,5 раза увеличивает максимальное значение потенциала V (0) при том же радиусе R, в связи с чем ζ_с уменьшается. Однако, как видно из рисунка, это уменьшение невелико. Если экстраполировать на область Z > 137 зависимость $R = r_0 A^{1/3}$, полагая (как и для тяжелых ядер) A = 2.5Z, $r_0 = 1.1 \ \phi$ и используя модель II, то получаем *) $\zeta_c = 1,25$ и $Z_c = 170$ (для нижнего уровня $1S_{1/2}$). Для ближайших следующих состояний $2P_{1/2}$ и $2S_{1/2}$ значения Z_c равны 185 и 220 соответственно. Эти значения Z_c довольно устойчивы по отношению к вариациям радиуса R и вида обрезающей функции f(r/R), что следует из сравнения кривых І и ІІ на рис. 6.

Отметим, что при $\zeta > 1$ снимается характерное для кулоновского поля «случайное» вырождение состояний по знаку \varkappa (см. формулу (2,1), куда входит лишь $|\varkappa|$). Так, уровень $2S_{1/2}$ при $\zeta > 1$ расположен выше, чем $2P_{1/2}$. Это и неудивительно, так как потенциал V (r) в области r < Rпринципиально отличается от «чистого» кулоновского потенциала, а при $\zeta > 1$ область малых r становится существенной (для состояний $c_{j} = 1/2$).

2.5. Таким образом, критический заряд ядра Z_c для любой модели обрезания можно рассчитать сравнительно просто. Труднее получить представление о характере всего дискретного спектра при Z>137, так как точные выражения для волновых функций при $\epsilon \neq \pm 1$ содержат функции Уиттекера и являются довольно громоздкими **). Чтобы упростить ситуацию, допустим, что $R \rightarrow 0$; тогда в задаче появляется «большой логарифм»

$$\Lambda = \ln \frac{1}{R} \gg 1. \tag{2.29}$$

 ^{*)} Значения Z_c с хорошей точностью даются также ВКБ-методом ⁴⁴.
 **) См. формулы (12) — (14) в ¹⁰. Уравнение, определяющее энергию для модели 1 приведено в ¹⁰, а в случае произвольного обрезания — в ¹². уровней,

Хотя численно при $R \sim 10^{-12}$ см параметр Λ еще не очень велик ($\Lambda = 3,5$), но для получения качественной картины движения уровней такое приближение достаточно *). Приведем прежде всего соображения в пользу того. что малым параметром в данной задаче действительно является Λ^{-1} .



Рис. 6. Критический заряд ядра ($\zeta_c = Z_c/137$) для первых уровней с моментом j = 1/2. Цифры I и II у кривых соответствуют моделям обрезания I и II (см. текст).

1) Пусть сначала $\zeta < 1$. В поле точечного заряда Ze для основного состояния энергия $\varepsilon = \varepsilon_1 = \sqrt{1 - \zeta^2}$, а волновые функции

$$G(r) = A\sqrt{1+\varepsilon} e^{-\zeta r} r^{\gamma}, \quad F(r) = -\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} G(r)$$
(2,30)

(константа A определяется из условия нормировки (2,6) и равна $A = 2^{\gamma} \sqrt{\zeta^{2\gamma+1}/\Gamma(1+2\gamma)}, \ \gamma = \sqrt{1-\zeta^2}$).

Вычисляя по теории возмущений сдвиг уровня за счет обрезания потенциала в (2,5), получаем (при $R\ll 1$)

$$\Delta \varepsilon = \frac{\zeta^2 (2\zeta R)^{2\gamma}}{\gamma \Gamma (1+2\gamma)} \left\{ 1 - 2\gamma \int_0^1 f(x) \, x^{2\gamma} \, dx \right\}. \tag{2.31}$$

Поправка $\Delta \varepsilon$ перестает быть малой, когда $R^{2\gamma} = \exp(-2\gamma\Lambda)$ становится порядка 1, т. е. при $(1 - \zeta) \sim \Lambda^{-2}$.

^{*)} Численный расчет движения уровней проводился в работах ⁴⁵. Полученные при этом значения Z_c находятся в хорошем согласии с расчетом по (2,28).

2) Оценим энергию основного состояния при $\zeta = 1$ (такое ζ является критическим для точечного заряда). В этом случае функции G и F имеют логарифмическую особенность в нуле: $G(r) \approx r^{\varepsilon} = 1 + \varepsilon \ln r$ при $r \to 0$, откуда

$$\boldsymbol{\xi} = \left[\frac{rG'}{G}\right]_{r=R} = \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon \Lambda}, \qquad \varepsilon \approx (\Lambda + \boldsymbol{\xi}^{-1})^{-1}. \tag{2.32}$$

Так как $\Lambda \gg 1$, а $\xi = 0(1)$, то $\varepsilon_1 \sim \Lambda^{-1}$ при $\zeta = 1$. Отличие от значения $\varepsilon_1 = 0$, отвечающего точечному заряду, довольно существенно. Так, для $R = 10.2 \ \phi$ численный расчет ⁴⁶ дал $\varepsilon_1 = 0.238$, что хорошо согласуется с приведенной выше оценкой.

3) При $\zeta > 1$ волновые функции для задачи с точечным кулоновским потенциалом имеют в нуле особенность, характерную для «падения на центр»:

$$G, F \underset{(r \to 0)}{\backsim} \sin (g \ln r), \qquad (2,33)$$

где $g = \sqrt{\zeta^2 - 1}$.

Поскольку волновая функция основного состояния не имеет узлов, уровень $1S_{1/2}$ может существовать лишь при $g\Lambda < \pi$. Максимально возможные значения g и ζ соответствуют исчезновению этого уровня в нижнем континууме:

$$g_{\rm c} = \frac{\pi}{\Lambda}, \quad \zeta_{\rm c} = 1 + \frac{\pi^2}{2\Lambda^2}.$$
 (2,34)

Из сказанного ясно, что параметр Λ определяет как ширину той области вокруг точки $\zeta = 1$, в которой существен учет конечных размеров ядра, так и саму зависимость $\varepsilon = \varepsilon$ (ζ) в этой области.

Определим вид волновых функций вблизи $\zeta = 1$ (для простоты ограничимся основным состоянием). По аналогии с (2,30) полагаем

$$G(r) = A \sqrt{1 + \varepsilon} e^{-\rho/2} \rho^{\varepsilon} [1 - (\varepsilon^2 + g^2) \xi_1(\rho) + \dots],
 F(r) = -A \sqrt{1 - \varepsilon} e^{-\rho/2} \rho^{\varepsilon} [1 - (\varepsilon^2 + g^2) \xi_2(\rho) + \dots]$$
(2,35)

 $(\rho = 2\lambda r, \lambda = \sqrt{1 - \varepsilon^2}, \varepsilon, g \to 0;$ вычисления ведем с точностью до квадратичных по є и g членов). Подстановка разложений (2,35) в (2,9) дает уравнения для поправок ξ_1 и ξ_2 , решение которых (убывающее на бесконечности) имеет вид¹²

$$\xi_{1,2}(\rho) = \int_{0}^{\infty} dt e^{-\rho t} \left(\frac{\ln(1+t)}{t} \mp \frac{1}{2(1+t)} \right)$$
(2,35')

(при этом $\xi_{1,2} \approx \ln^2 \rho/2$ при $\rho \rightarrow 0$).

В области r таких, что $r \ll 1$ и $g \ln (1/r) \ll 1$,

$$G \approx -F \approx 1 + \varepsilon \ln r - \frac{1}{2} g^2 \ln^2 r + \dots$$
 (2,36)

С другой стороны, при $r \sim R$ имеем $G(r) = C \sin(g \ln r + \beta)$.

Фаза в определяется из условия сшивания на границе ядра:

$$\beta = g\Lambda + \arg \operatorname{tg} (g/\zeta) \approx g\Lambda \qquad (\operatorname{при} \Lambda \gg 1).$$

Отсюда в области $R \ll r \ll 1$ находим $G(r) = C \sin \beta (1 + g \operatorname{ctg} \beta \ln r)$, что должно совпадать с (2,36). Это дает

$$\varepsilon_1 = g \operatorname{ctg} \beta = g \operatorname{ctg} \Lambda g \tag{2,37}$$

 $(g = \sqrt{\zeta^2 - 1})$. В отличие от (1,1), это выражение не имеет особенности в точке $\zeta = 1$. При $\zeta < 1$ следует заменить g на *i* γ :

$$\varepsilon_1 = \gamma \operatorname{cth} \Lambda \gamma \qquad (\gamma = \sqrt{1 - \zeta^2}).$$
 (2,37')

В области $\zeta < 1$ функция cth $\Lambda \gamma$ быстро стремится к единице и уже при $(1-\zeta)\Lambda^2 \ge 1$ энергия ε_1 практически совпадает с (1,1) и не зависит

от обрезания V(r) внутри ядра (рис. 7). При $\zeta > 1$ функцая (2,37) имеет фиктивный полюс при $g = g_c = \pi/\Lambda$. На самом деле, разумеется, $\varepsilon = -1$ при $\zeta = \zeta_c$, а не $-\infty$. Дело в том, что приближенные разложения (2,35) перестают быть справедливыми, когда ε не мала. С учетом (2,37) для коэффициента перед поправочными членами ξ_1 , ξ_2 в формуле (2,35) получаем

$$\epsilon^2 + g^2 = \begin{cases} (\gamma/\mathrm{sh} \Lambda \gamma)^2 & \text{при } \zeta < 1, \\ (g/\mathrm{sin} \Lambda g)^2 & \text{при } \zeta > 1. \end{cases}$$



Рис. 7. Энергия основного состояния 1S вблизи Z = 137.

Кривые 1—4 отвечают $\Lambda = 3,5; 5; 10$ и ∞ (радиус обрезания R = 12; 2,6; 0,018 ф и R = 0 соответственно).

Когда $\zeta \rightarrow \zeta_c$, то ($\varepsilon^2 + g^2$) $\rightarrow \infty$ и потому разложение (2,35) теряет

смысл. Функции G и F в этом случае уже не близки к (2,30). Например, при ζ=1

$$G = -F = e^{-1}, \quad \text{если} \quad \varepsilon = 0, \\ G = cK_0 \left(\sqrt{8r} \right), \quad F = -c \left\{ K_0 \left(\sqrt{8r} \right) + \sqrt{2r} K_1 \left(\sqrt{8r} \right) \right\}, \quad \text{если} \quad \varepsilon = -1 \end{cases}$$
(2,38)

(здесь $c^2 = 12/5$; функции G и F нормированы в соответствии с (2,6)).

Более тщательное исследование показывает, что вблизи $\zeta = \zeta_c$ имеется узкая область ($\zeta_c - \zeta$) ~ Λ^{-3} , в которой формула (2,37) для ε_1 (ζ) неприменима. Мы не будем приводить здесь соответствующее выражение для энергии уровня ε_1 (его можно найти в работе ¹²). Укажем лишь, что при $\zeta = \zeta_c$ уровень $1S_{1/2}$ не стелется к границе $\varepsilon = -1$, а входит в нижний континуум, имея конечную производную $\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau}$:

$$\varepsilon_{i}(\zeta) = -1 + \frac{3\Lambda^{3}}{5\pi^{2}}(\zeta_{c}-\zeta). \qquad (2,39)$$

Аналогичным образом ведут себя и все остальные уровни дискретного спектра. Так, для возбужденных состояний $nS_{1/2}$ и $nP_{1/2}$ имеем

$$\varepsilon_n(\zeta) = \frac{n-1}{N} + \frac{g \operatorname{ctg} \Lambda g}{N^3}, \quad N = \sqrt{n^2 - 2n + 2}.$$
(2,40)

Хотя при $n \gg 1$ эти состояния лежат уже в нерелятивистской области $\varepsilon \approx +1$, они тоже чувствительны к обрезанию кулоновского потенциала на малых расстояниях. Так как $\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n \sim n^{-3}$, сдвиг уровня ε_n из-за конечных размеров ядра много меньше расстояния между соседними уровнями, пока $g\Lambda < \pi$. Когда же $g \rightarrow g_c = \pi/\Lambda$, энергии ε_n быстро меняются с ростом ζ . При $\zeta = \zeta_c$ уровни $1S_{1/2}$ и $2P_{1/2}$ уходят в нижний континуум *), а для остальных состояний с j = 1/2 картина выглядит так, как будто главное квантовое число *n* уменьшилось на единицу (см. рис. 1, δ). С дальнейшим возрастанием ζ эти явления повторяются. Критические значения

^{*)} В асимптотических формулах (2,37), (2,40) отброшены члены порядка единицы по сравнению с Л. В этом приближении энергия ε_n не зависят от формы обрезания потенциала внутри ядра (существен лишь радиус обрезания R), а значения $\zeta_c^{(n)}$ для уровней $nS_{1/2}$ и $nP_{1/2}$ совпадают (на самом же деле $\Delta \zeta_c \sim \Lambda^{-3}$ для этих состояний).

 $\zeta_c^{(n)}$ для уровней $nS_{1/2}$ и $nP_{1/2}$ с точностью до членов $\sim \Lambda^{-3}$ равны

$$\zeta_c^{(n)} = 1 + \frac{n^2 \pi^2}{2\Lambda^2} \left(g_c^{(n)} = \frac{n\pi}{\Lambda} \right),$$
 (2,41)

т. е. быстро увеличиваются с ростом n.

2.6. Остановимся еще на вопросе о размерах связанного состояния. Возьмем нижний уровень 1*S*. Пока $\zeta < 1$, можно использовать волновые функции (2,30) для точечного кулоновского потенциала, что дает

$$\bar{r} = \frac{1+2\sqrt{1-\zeta^2}}{2\zeta}$$
 (0 < ζ < 1). (2,42)

Вычисление \overline{r} для $\zeta > 1$ сильно усложняется. Приведем поэтому лишь окончательный результат¹⁰. При $\varepsilon = -1$ ($Z = Z_c$) имеем для $\varkappa = -1$

$$\tilde{r} = \frac{(4\zeta_c^2 - 3)(1 + 0.3\zeta_c^2)}{2\zeta_c(3 + 2\zeta_c^2)}.$$
(2,43)

В соответствии с тем, что уже говорилось выше (см. формулы (2,17), (2,19)), средний радиус \bar{r} при $\varepsilon = -1$ остается конечным (так, при $\zeta_c = 1,25$





Рис. 8. Средний радиус r для основного состояния в кулоновском поле (2,5) в случае $\Lambda \gg 1$.

Кривые 1 и 2 соответствуют частицам со спином s = 1/2 и 0. Величина \bar{r} измеряется в единицах \hbar/mc .

Рис. 9. Средний радиус \overline{r} основного состояния 1S при $\varepsilon = -4$ и радиус ямы r_0 в эффективном потенциале U(r).

находим $\overline{r} = 0,3$), т. е. связанное состояние при $Z \rightarrow Z_c$ не делокализуется. И это несмотря на то, что экспонента ехр $(-\lambda r)$, приводящая к затуханию ψ (r) при $r \rightarrow \infty$ для связанных состояний в обычных атомах, в этом случае не работает $(\lambda = \sqrt{1 - \varepsilon^2} = 0$ при $\varepsilon = -1$). Причиной локализуемости водновых функций при $\zeta = \zeta_c$, $\varepsilon = -1$ служит кулоновский барьер в эффективном потенциале U(r). На рис. 8, взятом из работы ¹⁰, показано, как меняется средний радиус основного состояния 1S при углублении уровня от $\varepsilon = 1$ до $\varepsilon = -1$. Сравнение \overline{r} с радиусом ямы $r_0 =$ $= (\zeta^2 - 1)/2\zeta$ в U(r) показано на рис. 9, из которого видно, что электрон при $\varepsilon = -1$ значительную часть времени проводит под барьером, т. е. в классически недоступной области $(r > r_0)$.

Аналитические выражения для \overline{r} в промежуточной области $1 < \zeta < \zeta_c$ очень громоздки ¹⁰, но не приводят к чему-либо неожиданному. С ростом ζ от 1 до ζ_c связанное состояние электрона продолжает сжиматься (см. рис. 8), причем сама точка $\zeta = \zeta_c$ не является особенностью для функции $\overline{r} = \overline{r}$ (ζ).

Аналогичным образом ведут себя и другие характеристики уровня, например магнитный момент ⁴⁷.

3. ВОЗМУЩЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОГО СПЕКТРА БЛИЗКИМ УРОВНЕМ

Для понимания ситуации при $Z > Z_c$ необходимо предварительновыяснить, что происходит с волновыми функциями непрерывного спектра при приближении к нему дискретного уровня. Этот вопрос, интересный и сам по себе, мы разберем сначала на примере нерелятивистской квантовой механики.

3.1. Если в системе имеется уровень (реальный или виртуальный) с малой энергией, то волновые функции сплошного спектра χ_k (r) при $k \rightarrow 0$ должны испытывать некоторое возмущение (k — импульс, точка k = 0отвечает границе сплошного спектра). Этот вопрос рассматривался Зельдовичем и Рабиновичем ²⁰ применительно к вырожденному ферми-газу *), а в последнее время детально изучен в работах ^{23, 24}.

Наглядно результат ²⁰ сводится к тому, что вся совокупность уровней ниже заданной энергии ε_f (т. е. совокупность электронов, заполняющих уровни ниже границы Ферми) представляет собой единое целое, возмущение которого происходит вблизи границы $\varepsilon = \varepsilon_f$. При этом распределение суммарной плотности электронов в координатном пространстве не меняется, когда при изменении потенциального рельефа — функции V(r) — появляются или исчезают уровни дискретного спектра. Но это возможно лишь в том случае, когда появление или исчезновение дискретного спектра, компенсирующей вклад этого уровня. Теперь сформулируем этот результат более аккуратно.

Прежде всего, нетрудно дать интегральную характеристику возмущения функций χ_k (r). Для этого, следуя работе ²⁰, используем теорему полноты. Пусть v — величина, определяющая глубину потенциала **), причем первый связанный уровень возникает при $v = v_c$. Записывая соотношения полноты для $v_1 < v_c$ и $v_2 > v_c$

$$\int_{0}^{\infty} dk \chi_{k}^{*}(r; v_{1}) \chi_{k}(r'; v_{1}) = \delta(r - r'),$$

$$\chi_{0}(r) \chi_{0}(r') + \int_{0}^{\infty} dk \chi_{k}^{*}(r; v_{2}) \chi_{k}(r'; v_{2}) = \delta(r - r'),$$

вычитая одно равенство из другого и положив после этого r' = r, находим

$$\chi_0^2(r; v_2) = \int_0^\infty dk \{ |\chi_k(r; v_1)|^2 - |\chi_k(r; v_2)|^2 \};$$
(3.1)

здесь $\chi_k(r)$ — волновые функции с орбитальным моментом l, нормированные на $\delta(k-k')$:

$$\chi_{k}(r) \underset{(r \to \infty)}{\approx} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta\right),$$
 (3,2)

 $\delta = \delta_l(k) - \phi$ аза рассеяния. Волновая функция уровня $\chi_0(r)$ удовлетворяет обычной нормировке дискретного спектра (при $v > v_c$)

$$\int_{0}^{\infty} \chi_{0}^{2}(r) dr = 1.$$
 (3,3)

Посмотрим теперь, что происходит с равенством (3,1) при $v_2 \rightarrow v_c$ и фиксированном r.

^{*)} См. также книгу²², стр. 205. Математическое обоснование результатов, полученных в ²⁰, дано в работе ²¹.

^{**)} См., например, формулу (2,5), где параметр v совпадает с ζ. Однако для дальнейшего вовсе не обязательно, чтобы v входил в V (r) только как общий множитель.

Здесь следует различать два случая, в зависимости от поведения потенциала V(r) при $r \to \infty$. Если l = 0 и $V(r) \leqslant 0$ при достаточно больших r (случай притяжения), или же знак V(r) произвольный, но $\lim r^2 V(r) = 0$, то происходит делокализа $r \rightarrow \infty$

ция волновой функции связанного состояния: $\chi_0(r) \sim \sqrt{2\lambda} e^{-\lambda r}$, причем $\lambda \to 0$ при $v_2 \to v_c$. В этом случае связанное состояние «разбухает» и волновая функция $\chi_0(r)$ в момент исчезновения уровня уже не может быть нормирована согласно (3,3). В качестве условия нормировки здесь можно взять

$$\lim_{r \to \infty} \chi_0(r) = 1. \tag{3.4}$$

С другой стороны, если V(r) обладает на бесконечности барьером типа кулоновского:

$$V(r) \approx \zeta r^{-n} \qquad (\zeta > 0, \quad 1 \le n < 2) \tag{3.5}$$

(а также в случае $l \ge 1$, когда имеется центробежный барьер l $(l+1)/2r^2$), то функция χ_0 (r) $\equiv \chi_c$ (r) в момент возникновения уровня ($v = v_c$) быстро убывает при $r \to \infty$, и потому для нее сохраняется нормировка (3,3). Например, в физически наиболее интересном случае кулоновского «хвоста» V (r) $\approx \zeta/r$ ($\zeta > 0$) имеем

$$\chi_c(r) \approx A (r/2\zeta)^{1/4} e^{-\sqrt{8\zeta r}},$$
 (3.6)

а если $\lim_{r\to\infty} r^2 V(r) = 0$, но $l \ge 1$, то $\chi_l^{(c)}(r) \sim r^{-l}$. Здесь существует предел $\lim_{v\to v_c} \chi_0(r; v) = \chi_c(r)$, причем в момент появления уров-

ня функция χ_c (r) является квадратично-интегрируемой.

Различному поведению волновой функции $\chi_c(r)$ при $r \to \infty$ отвечает и различный ход энергии уровня є в зависимости от параметра v, определяющего глубину ямы. Очевидно, что производная $\frac{\partial \varepsilon}{\partial v}$ пропорциональна вероятности пребывания частицы

внутри ямы, т. е. величине $\int_{0}^{R} \chi_{0}^{2}(r) dr$ (см. подробнее ²², стр. 20). В дейтонном случае,

вследствие делокализации, χ_0^2 (r) $\sim \lambda = \sqrt{-2\epsilon}$, так что $\frac{\partial \epsilon}{\partial v} \sim \sqrt{-\epsilon}$ и потому $\epsilon =$ $= -c (v - v_c)^2$, где c > 0 — некоторая константа. Кривая $\varepsilon = \varepsilon (v)$ касается оси абсцисс при $v = v_c$, уровень углубляется квадратично по $v - v_c$.

В случае потенциала с кулоновским барьером производная $\frac{\partial \epsilon}{\partial v}$ конечна при $v = v_c$ и потому уровень углубляется линейно: $\varepsilon = -c'$ ($v - v_c$). При $v < v_c$ кривая $\varepsilon = \varepsilon$ (v) уходит с конечным наклоном в сплошной спектр, где представляет собой энергию резонанса. При малых (v_c - v) имеем

$$\operatorname{Re} \varepsilon = c'(v_c - v), \quad \operatorname{Im} \varepsilon = \begin{cases} \operatorname{const} \cdot \exp\left(-\frac{a}{\sqrt{v_c - v}}\right) & \operatorname{Ipu} & v < v_c, \\ 0 & \operatorname{Ipu} & v > v_c, \end{cases}$$
(3,7)

где $b=2\pi\zeta/\sqrt{2c'}$.

Из соотношения (3,1), в котором v_1 и v_2 близки к v_c , видно, что при $v < v_c$ в непрерывном спектре уже как бы «сидит» одна частица, причем плотность возмущения функций χ_k (r) имеет ту же пространственную локализацию, что и функция χ_c (r). Более детально связь между χ_h (r) и χ_c (r) можно записать так:

$$\chi_{\mathbf{k}}(r) \approx \sqrt[V]{\overline{\Delta(k)}} \chi_{\mathbf{c}}(r). \tag{3.8}$$

При $k \rightarrow 0$ это соотношение справедливо в широкой области $0 < r \ll$ $\ll k^{-1}$, в том числе всюду под барьером. Множитель Δ (k) резко меняется в резонансной области энергий. Рассмотрим сначала потенциалы с конечной проницаемостью барьера при k=0, когда имеет место делокализация связанного состояния и условие нормировки для χ_c (r) следует брать в виде (3,4). Тогда можно показать ²³, что (l = 0)

$$\Delta(k) = \frac{8\kappa^2 k^2}{\pi \left[(k^2 - k_0^2)^2 + 4\kappa^2 k^2 \right]},$$
(3,9)

где введены параметры k_0^2 и \varkappa :

$$k_0^2 = 2/r_0 a, \quad \varkappa = -1/r_0 \tag{3.10}$$

(а — длина рассеяния, r₀ — эффективный радиус).

В интересующей нас области вблизи резонанса $|a| \gg R$, причем a > 0 для реального уровня и a < 0 для виртуального (R — радиус действия потенциала). Величину r_0 можно выразить непосредственно через вол-

новую функцию
$$\chi_c$$
 (r) (см. ^{39, 48}): $r_0 = 2 \int_0^{\infty} dr \left[1 - \chi_c^2(r)\right]$ (в силу граничного

условия (3,4) этот интеграл сходится). Для потепциала притяжения $V(r) \leq 0 \ \chi_c(r) \leq 1$, поэтому $r_0 \sim R > 0$. Если же в V(r) имеется барьер, то r_0 может изменить свой знак (по этой причине само название «эффективный радиус» становится здесь несколько условным). Для широкого барьера $r_0 \approx -R/\xi$, где ξ — проницаемость барьера ($\xi \ll 1$). Тогда $\varkappa > 0$ и экспоненциально мало ($\varkappa \sim \xi$), а k_0^2 может иметь любой знак, причем в момент появления реального уровня $k_0 = 0$ (длина рассеяния $a \to \infty$).

чем в момент появления реального уровня $k_0 = 0$ (длина рассеяния $a \to \infty$). Параметры k_0^2 и \varkappa определяют положение близких к нулю полюсов S-матрицы. Если $k_0^2 < \varkappa^2$, то полюсы расположены на мнимой оси: $k = i\lambda$,

$$\lambda_1 = \sqrt{\varkappa^2 - k_0^2} - \varkappa, \quad \lambda_2 = -(\sqrt{\varkappa^2 - k_0^2} + \varkappa). \tag{3.11}$$

При $k_0^2 < 0$ первый полюс соответствует реальному уровню, второй виртуальному. При $k_0^2 = 0$ реальный уровень исчезает, переходя в нижнюю полуплоскость Im k < 0. В интервале $0 < k_0^2 < \varkappa^2$ полюса — виртуальные; они сталкиваются при $k_0^2 = \varkappa^2$, выходя в комплексную плоскость:

$$k_{1,2} = \pm \sqrt{k_0^2 - \varkappa^2} - i\varkappa. \tag{3.12}$$

Наконец, при $k_0^2 \gg \varkappa^2$ эти полюсы соответствуют брейт-вигнеровскому резонансу $E = \varepsilon_0 - (i\gamma/2)$, где $\varepsilon_0 = k_0^2/2$, $\gamma = 2\varkappa k_0$ ($\varepsilon_0 \gg \gamma$). При этом формула (3,9) принимает вид⁴⁹, типичный для квазистационарного уровня (лоренцова форма линии):

$$\Delta(\varepsilon) = \frac{\Delta(k)}{k} = \frac{\gamma}{2\pi \left[(\varepsilon - \varepsilon_0)^2 + \gamma^2/4\right]} \,. \tag{3.13}$$

Выражение (3,9) является более общим, чем (3,13), и охватывает все случаи расположения полюсов на комплексной *k*-плоскости.

С точки зрения аналитичности, описанное выше движение полюсов представляется весьма естественным ⁵⁰. Однако в том случае, когда барьер отсутствует, столкновение полюсов происходит далеко от нуля (при $|k| \sim R^{-1}$) и потому не может быть описано в рамках низкоэнергетического разложения для *S*-матрицы. Так обстоит дело, например, в случае дейтона ^{51, 52}: $|a| \gg R, r_0 \sim R > 0$. Важной особенностью потенциалов с пироким барьером является тот факт, что при $\lambda_1 \rightarrow 0$ виртуальный уровень $k_2 = i\lambda_2$ также находится экспоненциально близко к нулю, в силу чего для описания всех явлений, связанных со столкновением полюсов, достаточно двух параметров k_0^2 и \varkappa^2 .

Формула (3,8) показывает, как выглядит возмущение волновых функций χ_k (r) при выходе уровня в сплошной спектр. При произвольно взятой энергии χ_k (r) экспоненциально затухают в глубь барьера, так что χ_k (R)/ χ_k (L) ~ $\xi^{1/2} \ll 1^*$). Однаков узкой области | $\epsilon - \epsilon_0$ | ~ $\gamma \phi$ ункции χ_k (r)

^{*)} Здесь R — радиус внутренней ямы, L — конец барьера (точка поворота), $\xi = \exp \{-2 \int_{L}^{A} |p(r)| dr \} \ll 1.$

³ УФН, том 105, выг. 3

имеют вид, похожий на χ_0 (r), т. е. происходит резкое усиление вероятности пребывания частицы внутри ямы (r < R). Чтобы описать это возмущение функций χ_k (r), введем понятие эффективного числа частиц N, которому эквивалентен (в некотором смысле) весь непрерывный спектр. Для этого перейдем от χ_0 (r) к приближенной волновой функции $\tilde{\chi}_0$ (r), для которой сходится нормировочный интеграл (3,3). Переход совершается так ²³:

$$\widetilde{\chi}_0(r) = \sqrt{2\kappa} \left\{ \chi_0^2(r) - 1 \right\}^{1/2} \tag{3.14}$$

(при r, не слишком близких к краю барьера L, χ_0 (r) $\gg 1$ и потому χ_0 (r) и $\tilde{\chi}_0$ (r) пропорциональны друг другу). Функция $\tilde{\chi}_0$ (r) описывает состояние частицы, локализованное в пределах барьера. Переписывая (3,8) при r < L в виде χ_k (r) = $\sqrt{\nu(k)} \chi_0$ (r), получаем

$$N = \int_{0}^{\infty} \mathbf{v}(k) \, dk = \begin{cases} \frac{\varkappa}{\varkappa + \lambda_1} = \frac{\varkappa}{\sqrt{\varkappa^2 - k_0^2}} & \text{при} \quad k_0^2 < 0, \\ 1 & \text{при} \quad k_0^2 > 0. \end{cases}$$
(3,15)

При $\lambda_1 \gg \varkappa \ N \ll 1$; число N становится порядка единицы, когда энергия уровня приближается к нулю. Как только уровень вышел в сплошной спектр ($k_0^2 > 0$), N = 1.

Таким образом, влияние реального уровня на функции непрерывного спектра χ_k (r) существует в очень узкой области энергий ($| \varepsilon_1 | \sim \varkappa^2$) и быстро исчезает при углублении этого уровня. Если же уровень вышел в сплошной спектр, то вблизи резонансной энергии $\varepsilon = \varepsilon_0$ имеется подъем функций χ_k (r) на малых r. Это возрастание $| \chi_k$ (r) $| ^2$ эквивалентно одной частице, находящейся в состоянии $\tilde{\chi}_0$ (r).

В пределе очень широкого барьера (и тем более для потенциалов с кулоновским барьером) N превращается в ступенчатую функцию: $N = = \theta (k_0^2)$. Функция $\tilde{\chi}_0(r)$ совпадает с $\chi_c(r)$, множитель $\Delta(k)$ обращается в нуль при $k_0^2 < 0$, а при $k_0^2 > 0$ имеет лоренцову форму (3,13). Пока уровень реальный ($k_0^2 < 0$), его влияние на функции $\chi_h(r)$ в этом случае практически отсутствует.

3.2. Перейдем к релятивистскому случаю. В разделе 2 было показано, что в уравнении Дирака при $\varepsilon \approx -1$ возникает барьер в эффективном потенциале U(r), вследствие чего волновая функция при $\varepsilon = -1$ остается нормируемой (отсутствует делокализация). Благодаря спиновому слагаемому $U_2(r)$ из (2.13) этот барьер имеет нулевую проницаемость при k = 0, если даже исходный потенциал V(r) не содержит отталкивательного кулоновского «хвоста». Так, если $V(r) \approx -\alpha r^{-n}$ (n > 2) при $r \to \infty$, то из (2,14) следует

$$U(r) \approx_{(r \to \infty)} \frac{1}{2r^2} \left[\left(\varkappa + \frac{1-n}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \right],$$
 (3.16)

т. е. в U(r) появляется барьер типа центробежного. Если $V(r) \approx -\alpha e^{-\mu r}$, то волновая функция затухает экспоненциально. Таким образом, функция G(r) при $\varepsilon = -1$ всегда остается квадратично-интегрируемой. Поэтому при $\zeta < \zeta_c$ искажение волновых функций нижнего континуума приближающимся к нему дискретным уровнем пренебрежимо мало, а при $\zeta > \zeta_c$ функции $G_k(r)$ и $F_k(r)$ резко возрастают в подбарьерной области r (это усиление имеет место, разумеется, лишь в узкой полосе энергий вблизи резонанса $\varepsilon = \varepsilon_0$; см. рис. 10).

При $r \ll k^{-1}$ можно написать

$$G_{k}(r) = \sqrt{\Delta(k)} G_{c}(r), \quad F_{k}(r) = \sqrt{\Delta(k)} F_{c}(r), \quad (3,17)$$

где G_c и F_c — волновые функции для $\varepsilon = -1$, нормированные согласно (2,6), а множитель $\Delta(k)$ имеет вид (3,13).

Факторизация $\chi_k(r)$ в виде (3,8) очень удобна при вычислении матричных элементов, например

$$(\chi_{k}, V\chi_{0}) = V \Delta(k) V_{00},$$

$$\int dk \, dk' f(k, k') |(\chi_{k}, V\chi_{0})|^{2} = |V_{00}|^{2} \int dk \, dk' f(k, k') \Delta(k) \Delta(k').$$
(3.18)

Соотношения такого рода оказались весьма полезными при вычислении вероятности двухпротонного распада⁴⁹,

при решении задачи о двух взаимодействующих частицах в потенциальной яме ит.д.

3.3. Наконец, отметим парадокс, появляющийся при помещении системы в «большой ящик» радиуса R, когда спектр из непрерывного становится дискретным *). Ввиду вещественности волновых функций χ_n (r) номер уровня *п* совпадает теперь с числом узлов радиальной функции χ_n (*r*) (мы ограничимся для простоты *S*-волной, l = 0). Посмотрим, что происходит, если в центре ящика помещена потенциальная яма V(r) с барьером и глубина ямы v изменяется (v = -V(0) > 0). Начнем с ситуации глубокой ямы (v > v_c; см. область I на рис. 11). Здесь есть «истиннодискретный» уровень D, не имеющий узлов; «континуум» начинается с волновой функции с одним узлом и т. д. **). Будем уменьшать





Рис. 11. Спектр уровней в ящике $(k_0, k_1, ..., k_n)$... -- уровни континуума).



этом уровне, а на уровнях, отмеченных крестиками, которые как раз и образуют зависимость $\varepsilon = \varepsilon (v)$ в области $\varepsilon > 0$, продолжающую кривую D для «истинно-дискретного» уровня. Именно эти, скользящие с изменением v, уровни являются истинными продолжателями D.

Рассмотрение мысленного опыта с частицей, связанной в состоянии D, и ее поведения при изменении глубины ямы со временем v = v(t) показывает, что частица вылетит с одного из уровней, отмеченных на рис. 11 крестиком ***). Применительно

*) Само по себе вполне естественно желание свести менее наглядное понятие континуума (включающее нормировку на δ-функцию, понятие меры в сплошном спектре и т. п. осложнения) к простому случаю дискретного спектра, где уровни можно считать по пальцам — первый, второй и т. д. **) Для системы в ящике термины «истинно-дискретный уровень» и «коптинуум»

области атомных и ионных столкновений; роль параметра v(t) играет здесь расстояние R(t) между сталкивающимися ядрами 55 , 56 . Мы ограничимся здесь указанием на сходство кинетики процесса отрыва электрона при конечной скорости движения атомов с кинетикой рождения позитронов при столкновении двух докритических ядер.



Рис. 10. Качественный вид волновых функций нижнего континуума при $Z > Z_c$.

a) В полосе энергий $| \varepsilon - \varepsilon_0 | \sim \gamma;$ 6) при $| \varepsilon - \varepsilon_0 | \gg \gamma;$ Здесь $r_0 = 2\zeta | \varepsilon | / (\varepsilon^2 - 1) - точка поворота.$

употребляются, так сказать, в пиквикском смысле 54, обозначая, во что они переходят при $R \to \infty$. ***) Любопытно, что аналогичные ситуации возникают в далекой, казалось бы,

к кулоновской задаче с $Z > Z_c$ можно сказать, что волновые функции $G_{\varepsilon}(r)$ и $F_{\varepsilon}(r)$ при $Z > Z_c$ и є, близком к —1 (безразлично, с какой стороны: $\varepsilon < -1$ или $\varepsilon > -1$), совсем не похожи (в области $r \sim 1$) на волновую функцию $G_c(r)$, $F_c(r)$ уровня 1S в критической точке $Z = Z_c$. Зато в узкой полосе энергий нижнего континуума | $\varepsilon - \varepsilon_0$ | $\lesssim -\varepsilon_0$ | $\lesssim -\varepsilon_0$ | $\varepsilon < -1$



 $\leq \gamma$ выполняется соотношение (3,17), из которого ясно, что в качестве аналитического продолжения уровня $1S_{1/2}$ в закритическую область следует рассматривать именно совокупность состояний непрерывного спектра с энергией є вблизи брейт-вигнеровского полюса $E = \varepsilon_0 - (i\gamma/2)$ (по крайней мере пока $|1 + \varepsilon_0| \ll 1$ и ширина γ мала).

Откуда проистекает соблазн ошибочно рассматривать именно нижний уровень K₀ как продолжение D? Вспомним общеизвестную картину

пересечения двух дискретных уровней в теории молекулярных спектров (рис. 12, a). Всякий знает, что сколь угодно малое взаимодействие раздвигает уровни и пересечение исчезает (рис. 12, 6). Однако при малом взаимодействии и конечной скорости изменения параметра это расхождение остается чисто формальным, система легко перескакивает зазор и движется так, как показывают стрелки.

В нашем примере введение ящика оказалось тем малым взаимодействием, которое вызвало исчезновение пересечения уровня с континуумом и создало возможность ошибки.

Стоит ли так подробно разбирать возможную ошибку? Приведем в этой связи слова Нильса Бора: «Специалист — это не тот, кто много работал в данной области. Специалист — это тот, кто знает некоторые грубые ошибки в данной области и умеет их избегать» (цитируется по книге Гейзенберга ⁵⁷).

4. РОЖДЕНИЕ ПОЗИТРОНОВ И ПОЛЯРИЗАЦИЯ ВАКУУМА ПРИ **Z** > Z_c

Перейдем к обсуждению явлений, происходящих непосредственно в «критической точке» $Z = Z_c$.

4.1. Разложим оператор поля $\psi(x)$ по точным решениям *) уравнения Дирака в кулоновском поле ядра Z:

$$\Psi(x) = \sum_{(+)} a_n \psi_n(x) + \sum_{(-)} b_n^+ \overline{\psi}_n(x).$$
(4.1)

Здесь (+) означает сумму по электронным состояниям (т. е. сумму по состояниям дискретного спектра $-1 < \varepsilon_n < 1$ и интеграл по верхнему континууму $\varepsilon > 1$), а (—) означает сумму по позитронным состояниям (нижний континуум, $\varepsilon < -1$). Все уровни с энергией $-1 < \varepsilon_n < 1$ мы относим к электронным состояниям, поскольку при адиабатическом уменьщении Z они возвращаются в верхний континуум. Существенно, что при Z < Z_c электронные и позитронные состояния не перепутываются: как вытекает из (2,7), всякий уровень дискретного спектра появляется из верхнего континуума и монотонно опускается с ростом Z. Для частиц, подчиняющихся уравнению Дирака, отсутствуют уровни, идущие из нижнего континуума (т. е. нет связанных состояний для античастиц при заданном знаке потенциала V (r) < 0, несмотря на эффективное притяжение $U_{\rm eff} \sim -\frac{1}{2} V^2$ на малых расстояниях, которое имеет место как для частиц, так и для античастиц). Заметим сразу же, что это свойство решений характерно именно для уравнения Дирака (в других релятивистских уравнениях уровни возникают как из верхнего, так и из нижнего континуума.

^{*)} Функции $\psi_n(x)$ включают в себя временну́ю зависимость, т. е. $\psi_n(x) = \psi_n(r)e^{-ie_n t}$.

Рассмотрим гейзенберговский оператор тока

$$j_{\mu}(x) = -\frac{e}{2} \left[\bar{\psi}(x), \ \gamma_{\mu} \psi(x) \right], \tag{4.2}$$

где — *е* — заряд электрона (*e* > 0). Среднее значение $j_0(x)$ в произвольном состоянии φ определяет плотность заряда: $\rho(\mathbf{r}) = \langle \varphi | i_0(x) | \varphi \rangle =$

$$= -e \sum_{(+)}^{N_{+}} |\psi(\mathbf{r})|^{2} + e \sum_{(-)}^{N_{-}} |\psi(\mathbf{r})|^{2} + \frac{e}{2} \left\{ \sum_{(+)}^{P_{-}} |\psi(\mathbf{r})|^{2} - \sum_{(-)}^{P_{-}} |\psi(\mathbf{r})|^{2} \right\}, \quad (4,3)$$

где $N_+ = \langle a_n^+ a_n \rangle$, $N_- = \langle b_n^+ b_n \rangle$ — числа заполнения (пространственная часть тока **j** (x) при усреднении по стационарному состоянию φ дает нуль). Последний член в (4,3) представляет собой, очевидно, плотность заряда вакуума *)

$$\rho_{\text{vac}}(\mathbf{r}) = \frac{e}{2} \left\{ \sum_{(+)} |\psi_n(\mathbf{r})|^2 - \sum_{(-)} |\psi_n(\mathbf{r})|^2 \right\}.$$
(4,4)

При этом мы называем вакуумом состояние с $N_{+} = N_{-} = 0$ (что на языке первоначальной теории Дирака соответствует полностью заполненному нижнему континууму). Это определение, очевидное при $Z < Z_c$, удобно сохранить и в области сверхкритических $Z > Z_c$. Для свободной частицы (Z = 0) плотность $|\psi_{\varepsilon}(\mathbf{r})|^2$ не зависит от знака ε и потому $\rho_{vac}(\mathbf{r}) \equiv 0$.

В поле ядра Z исчезает симметрия волновых функций относительно знака ε . Возникающее при этом искажение $|\psi_{\varepsilon}(\mathbf{r})|^2 - |\psi_{-\varepsilon}(\mathbf{r})|^2$ определяет плотность заряда, индуцированного в вакууме (т. е. поляризацию вакуума). Пока $Z < Z_c$ полный заряд вакуума остается равным нулю:

$$Q_{\rm vac} = \int \rho_{\rm vac} \left(\mathbf{r} \right) d^3 r \equiv 0. \tag{4.5}$$

Этот факт сразу очевиден, если поместить систему в большой ящик размером $L (L \rightarrow \infty)$. При этом спектр становится дискретным ($\Delta \varepsilon \sim L^{-2}$ при $|\varepsilon| > 1$) и можно проследить за движением каждого уровня. Поскольку волновые функции ψ_n (r) нормированы на единицу по объему ящи ка L^3 иполное число уровней с ростом Z не меняется, то в выражении для Q_{vac} при $Z < Z_c$ происходит взаимная компенсация вкладов от электронных и позитронных состояний (так же, как и при Z = 0).

Если подставить в (4,4) точные кулоновские функции и произвести суммирование, то можно таким путем вычислить поляризацию вакуума в сильном кулоновском поле. К сожалению, эти вычисления (если не предполагать малость параметра $\zeta = Z\alpha$) оказываются чрезвычайно громоздкими ¹⁵ и не доведены до обозримого ответа. Однако можно показать ******), что при $\zeta \ll 1$ формула (4,4) приводит к известному потенциалу Юлинга ^{59, 60}:

$$\varphi(r) = \varphi_0 + \delta \varphi = Ze \left\{ \frac{1}{r} + \frac{2\alpha}{3\pi} \int_{2m_e}^{\infty} d\mu \sigma(\mu) \frac{e^{-\mu r}}{r} \right\}, \qquad (4,6)$$

$$\sigma(\mu) = \frac{\sqrt{\mu^2 - 4m_e^2}}{\mu^2} \left(1 + \frac{2m_e^2}{\mu^2}\right).$$

*) Строго говоря, к (4,4) следовало бы еще добавить слагаемое 58

$$-\frac{e}{2}\,\delta(\mathbf{r})\,\int d^{3}r'\,\left\{\sum_{(+)}\,|\,\psi_{n}\left(r'\right)\,|^{2}-\sum_{(-)}\,|\,\psi_{n}\left(r'\right)\,|^{2}\right\}\,,$$

что соответствует регуляризации поляризационного оператора $\Pi_R(k^2) = \Pi(k^2) - \Pi(0) - \Pi'(0) k^2$. Это слагаемое не дает вклада при r > 0, и мы его опускаем. **) См¹⁵; для короткодействующего потенциала (прямоугольная яма) поляризация вакуума рассматривается в недавней работе ⁶¹.

Проанализируем поляризацию вакуума в этом приближении ($\zeta \ll 1$). Из (4,6) следует, что

$$\varphi(r) = \frac{Ze}{r} \cdot \begin{cases} 1 + \frac{\alpha}{4\sqrt{\pi r^3}} e^{-2r} & \text{при } r \gg 1, \\ 1 + \frac{2\alpha}{3\pi} \ln \frac{1}{r} & \text{при } r \ll 1. \end{cases}$$
(4,7)

При $r \gg \hbar/m_e c = 1$ поляризация вакуума дает экспоненциально малые добавки к кулоновскому потенциалу $\varphi_0(r) = Ze/r$, а при $r \ll 1$ отклонение от закона Кулона изменяется с расстоянием логарифмически.

Учитывая тождество

$$(\Delta-\mu^2)\frac{e^{-\mu r}}{r}=-4\pi\delta~(\mathbf{r}),$$

находим отвечающую (4,6) плотность заряда

$$\rho(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \Delta \varphi = Ze \left\{ \delta(\mathbf{r}) + \frac{2\alpha}{3\pi} \int_{2m_e}^{\infty} d\mu \sigma(\mu) \left[\delta(\mathbf{r}) - \frac{\mu^2 e^{-\mu r}}{4\pi r} \right] \right\}.$$
 (4.8)

Распределение зарядов имеет следующий вид: точечный положительный заряд $(1 + \gamma)$ Ze в центре r = 0 и облако отрицательных зарядов (в сумме дающих — γ Ze), размазанных на расстоянии $r \sim 1$ от ядра. Полный заряд системы равен Ze, что формально вытекает из тождества

$$\int d^3r \left[\delta \left(\mathbf{r}\right) - \frac{\mu^2 e^{-\mu r}}{4\pi r}\right] = 1 - 1 = 0$$

(величина у фактически бесконечна, так как дается логарифмически расходящимся интегралом $\gamma = \int \sigma(\mu) d\mu$). В области $1/\alpha \gg \ln \frac{1}{r} \gg 1$ плотность индуцированных зарядов равна

$$\rho_{\rm vac}(r) \approx -\frac{\alpha}{6\pi^2} \frac{Ze}{r^3}.$$
 (4.9)

Нетрудно показать, что эта величина определяется в основном вкладом непрерывнегрудно показать, что эта величина определяется в основном вкладом непрерыв-ного спектра в формуле (4,4), причем эффективная область интегрирования по *р* затя-гивается вплоть до $p \sim 1/r \gg 1$. Поэтому при $r \ll 1$ вкладом дискретного спектра (где | $p | = \sqrt{1 - \varepsilon^2} \ll 1$) в ρ_{vac} (*r*) можно пренебречь. Выражение (4,6) для добавочного потенциала бо приводит к смещению *s*-уровней

водородоподобных атомов, равному (при $\zeta = Z\alpha \ll 1$)

$$\Delta E_{nl}^{"} = \langle nl \mid \delta \varphi \mid nl \rangle = -\frac{4\alpha \zeta^4}{15n^3} \delta_{l0}. \tag{4.10}$$

В нерелятивистском приближении потенциал Юлинга оказывает влияние только на s-состояния; в частности, он понижает уровень $2S_{1/2}$ атома водорода на 1,1 ·10⁻⁸ $_{26} = 27 M_{24}$ по сравнению с уровнем $2P_{1/2}$. Это смещение составляет $\sim 3\%$ основной части радиационных поправок $\Delta E'_{nl}$, обязанной взаимодействию электрона с фотон-ным вакуумом, причем $\Delta E'_{nl}$ и $\Delta E''_{nl}$ имеют разный знак (полный сдвиг уровней $2S_{1/2}$ и $2P_{1/2}$ в водороде равен $\Delta E = \Delta E' + \Delta E'' = 1058 M_{24}$). Поскольку теория в настоящее время согласуется с экспериментом с точностью до 0,15 Мец (см. 62), это есть прямое доказательство того, что эффекты поляризации вакуума реальны и правильно описываются теорией *).

^{*)} Отметим здесь, что выражение (4,10) для $\Delta E_{nl}^{''}$ можно получить и не используя точной формулы (4,6) для юлинговского потенциала. Для этого достаточно учесть первый член ряда в (1,5) б ϕ (r) = $-\frac{\alpha}{15\pi m_e^2}$ $\Delta \phi_0$, что в случае кулоновского потенциала $\varphi_0(r)=Ze/r$ дает б $\phi(r)=(4lpha Ze/15m_e^2)$ б (г). При Z $lpha\ll 1$ это выражение для б ϕ эквивалентно (4,6) в том смысле, что оба они дают одно и то же значение для $\Delta E''_{nl}$. Замена (4,6) на б-функцию возможна вследствие того, что потенциал Юлинга является короткодействующим (по сравнению с боровским радиусом). В других случаях, когда средний радиус состояния сравним с \hbar/m_ec , нужно использовать формулу (4,6) (так обстоит дело, например, в случае µ-мезоатомов ⁶³, ⁶⁴).

4.2. Обратимся теперь к ситуации, возникающей, когда $\zeta = Z \alpha > 1$ и заряд ядра Z проходит через критическое значение Z_c . Полагая

$$\rho_{\varepsilon}(r) = |g_{\varepsilon}(r)|^2 + |f_{\varepsilon}(r)|^2,$$

где $g_{\varepsilon}(r)$ и $f_{\varepsilon}(r)$ — радиальные функции для энергии ε , имеем

$$\rho_{\mathrm{vac}}(r) = \frac{e}{2} \left\{ \sum_{-1 < \varepsilon_n < 1} \rho_n(r) + \int_0^\infty dp \left[\rho_{\varepsilon}(r) - \rho_{-\varepsilon}(r) \right] \right\}.$$
(4.11)

m

Нам будет удобно обозначить величины, относящиеся к случаю $Z < Z_c$ (соответственно $Z > Z_c$), индексами — и +. При $Z \sim Z_c$ резкие изменения испытывают лишь волновые функции с энергией, близкой к —1, а именно:

1) при $Z < Z_c$ в сумме по состояниям дискретного спектра содержится слагаемое ρ_1 (r), отвечающее уровню 1S, а при $Z > Z_c$ оно исчезает из полного набора одночастичных функций;

2) зато при $Z > Z_c$ функции нижнего континуума с моментом j = 1/2испытывают сильное возмущение (резко подрастают при малых r), которое количественно описывается формулой *)

$$\rho_{\varepsilon}^{+}(r) - \rho_{\varepsilon}^{-}(r) \approx \Delta(p) \rho_{c}(r); \qquad (4,12)$$

здесь $\Delta(p)$ имеет вид (3,13), причем $p = \sqrt{\epsilon^2 - 1}$, а $\rho_c(r) = |g_c|^2 + |f_c|^2$ — квадрат волновой функции при $Z = Z_c$, $\epsilon = -1$ (см. формулу (2,22)).

Для всех остальных состояний точка $Z = Z_c$ ничем не примечательна, и они дают в ρ_{vac} (r) фон, плавно меняющийся вместе с $Z - Z_c$.

Таким образом, изменение ρ_{vac} при переходе через Z_c равно

$$\rho_{\rm vac}^{+}(r) - \rho_{\rm vac}^{-}(r) = -\frac{e}{2} \left[2\rho_{\rm c}(r) + 2 \int_{0}^{\infty} dp \,\Delta(p) \,\rho_{\rm c}(r) \right] = -2e\rho_{\rm c}(r) \quad (4,13)$$

(множитель 2 учитывает двукратное вырождение по проекции спина). При $Z > Z_c$ вакуум становится заряженным. Суммарный заряд ваку-

При $Z > Z_c$ вакуум становится заряженным. Суммарный заряд вакуума равен — 2e и потому эффективный заряд ядра Z для внешнего наблюдателя уменьшается до Z - 2. Если при $Z < Z_c$ мы имели незаряженный вакуум (голое ядро, у которого уровень 1S не занят электронами), то при добавлении к ядру нескольких протонов произойдет спонтанное испускание двух позитронов, а вакуум приобретет две единицы отрицательного заряда, что согласуется с законом сохранения электрического заряда.

Во избежание недоразумений сделаем оговорку по поводу термина «заряженный вакуум». При $Z > Z_c$, так же как и при $Z < Z_c$, мы называем вакуумом наинизшее энергетическое состояние **) в поле ядра с зарядом Z. Пока $Z < Z_c$, оно отвечает голому ядру с незаполненными оболочками. При переходе через $Z = Z_c$ голое ядро становится метастабильным и происходит перестройка вакуума (путем испускания двух позитронов). Неустойчивость «старого» вакуума при $Z > Z_c$ связана с тем, что в точке $Z = Z_c$ пересекаются три кривые $\varepsilon = \varepsilon_i(Z), i = 0, 1, 2 (i = 0$ отвечает энергии вакуума при $Z < Z_c, i = 1, 2$ — энергии состояний с одной и двумя парами). При $Z > Z_c$ кривая $\varepsilon_2(Z)$ идет ниже, чем $\varepsilon_0(Z)$ и $\varepsilon_1(Z)$. Дополнительная плот-

ность заряда $\rho_0(r) = \rho_{vac}^+(r) - \bar{\rho_{vac}}(r)$, возникающая в вакууме при переходе Z

^{*)} Отметим, что возмущение $\rho^+ - \rho_{\overline{e}}^-$ хорошо локализовано в пространстве. С другой стороны, каждая из функций $\rho_{\overline{e}}^{\pm}(r)$ не стремится к нулю при $r \to \infty$, так как $g_{\varepsilon}(r)$ и $f_{\varepsilon}(r)$ — состояния непрерывного спектра. Локализованной является лишь разность $\rho_{\varepsilon}^+(r) - \rho_{\overline{e}}^-(r)$, проинтегрированная по сплошному спектру.

^{**)} Среди состояний, имеющих полный заряд Z (с учетом частиц, уходящих на бесконечность).

через Z_c , дает математическое описание *К*-оболочки в сверхкритическом атоме (см. раздел 1). Отметим, что приближения (4,12), (4,13) справедливы лишь при $(Z - Z_c) \ll Z_c$. Однако, в принципе, использование формулы (4,11) с точными кулоновскими функциями позволяет найти плотность заряда *К*-оболочки ρ_0 (*r*) и при бо́льших значениях $Z - Z_c$.

Плотность зарядов $\rho_{vac}(r)$ при $r \ll 1$ определяется в основном вкладом состояний сплошного спектра с $p \ge 1/r \gg 1$, которые нечувствительны к $Z - Z_c$. Следовательно, поляризация вакуума на малых расстояниях не испытывает каких-либо изменений в точке $Z = Z_c$. С другой стороны, при $r \gg 1$ мало исходное кулоновское поле $(E(r) \ll E_c = m_e^2 c^3/e\hbar)$, вследствие чего поляризация вакуума затухает экспоненциально (см. (4,7)). Все изменение заряда вакуума в точке $Z = Z_c$ распределяется в пространстве так же, как и $\rho_c(r)$, т. е. локализовано в пределах области $r \sim 1$ (см. рис. 3 и 9).

Таким образом, если бы удалось соединить (хотя бы на время) два голых ядра урана и создать ядро со сверхкритическим $Z = 184 > Z_c$, то можно ожидать, что произойдет спонтанное излучение двух позитронов. Их кинетическая энергия на бесконечности пропорциональна $Z - Z_c$ (пока $(Z - Z_c) \ll Z_c$) и при $Z \rightarrow Z_c$ стремится к нулю.

Пороговое поведение вероятности рождения позитронов *w* определяется кулоновским барьером. С точностью до предэкспоненты *w* совпадает с проницаемостью барьера:

$$w \sim \frac{m_e c^2}{\hbar} \exp\left(-2\pi \zeta_c/p\right),\tag{4.14}$$

где $p = \sqrt[7]{\epsilon^2 - 1}$ — импульс вылетающих позитронов (предполагается, что $p \ll 1$). Когда заряд ядра Z лишь немного превышает Z_c , то резонанс, $E = \epsilon_0 - (i\gamma/2)$ является крайне узким и практически все позитроны вылетают с одной и той же энергией:

$$arepsilon=-arepsilon_0=1+eta\,(\zeta-\zeta_c),\quad p=\sqrt{arepsilon_0^2-1},\quad ext{rge}\quad eta=-\left(rac{\partialarepsilon}{\partial\zeta}
ight)_{\zeta=\zeta_c}.$$

В этом случае экспоненту в *w* можно представить в виде¹¹

$$w \sim \exp\left(-b\sqrt{\frac{Z_c}{Z-Z_c}}\right), \quad b = 2\pi\sqrt{\frac{\zeta_c}{2\beta}}.$$
 (4.15)

В приближении $\Lambda \gg 1$ имеем $\beta = 3\Lambda^{3/5}\pi^{2}$, $b = 18\Lambda^{-3/2}$ ($\Lambda = -\ln R$). В реальной области $R \sim 10^{-12}$ см эта асимптотическая формула для коэффициента b неточна и необходим численный расчет. Резуль-



Рис. 13. Коэффициент b в формуле (4,15) как функция $\zeta_c = Z_c/137$.

таты такого расчета представлены на рис. 13 для простейшей модели прямоугольного обрезания потенциала внутри ядра (зависимость b от вида обрезания. V(r) при r < Rявляется довольно слабой).

Для $Z_c = 170$ находим b = 1,73, откуда при $Z = Z_c + 1$ экспонента (4,15) имеет величину порядка 10^{-10} . Насколько резко зависит w от превышения заряда Z над Z_c , видно из того, что величина w возрастает на три порядка при переходе от $Z = Z_c + 1$ к $Z = Z_c + 2$.

Отметим также следующий факт: в тот момент ($Z = Z'_c = 185$), когда к границе кон-

тинуума $\varepsilon = -1$ подходит уровень $2P_{1/2}$, первый уровень $1S_{1/2}$ углубляется в нижний континуум на величину $|1 + \varepsilon_0| \sim m_e c^2$, сравнимую с высотой барьера в (2,16). При этом вероятность w (1S) перестает быть экспоненциально малой.

4.3. Процесс рождения позитронов можно описать более детально, если обратиться к какой-либо конкретной постановке эксперимента по по-

лучению $Z > Z_c$, например при столкновении двух тяжелых ядер ^{9,65}. Если v_0 — скорость ядер на бесконечности, R — расстояние их наименьшего сближения, то $Mv_0^2 = (Ze)^2/R$, откуда

$$v_0 = \sqrt{\frac{Z}{A} \frac{m_e}{m_p} \frac{\zeta}{R}} = \frac{1}{70} \sqrt{\frac{\zeta}{R}}$$
(4.16)

($\zeta = Z/137$, *R* измеряется в единицах \hbar/m_ec). При $\zeta \approx 2/3$ (для ядер урана) и R > 0.1 имеем $v_0 < 0.03$, т. е. движение ядер можно считать нерелятивистским.

Характерное время столкновения

$$\tau_{\rm c} = R/v_0 = 70\zeta^{-1/2}R^{3/2},\tag{4.17}$$

причем $\tau_c \gg 1$ при R > 0,1. Для движения связанного электрона во внутренней яме ($r < r_0$) период $\tau_0 \sim r/\overline{v}$; при $\varepsilon \rightarrow -1$ имеем r = 0,3, $\overline{v} = 1$ (состояние не делокализуется) и потому $\tau_c \gg \tau_0$. Следовательно, уровни энергии электрона можно находить в адиабатическом приближении, рассматривая процесс сближения ядер как квазистатический. Это даст такую же кривую $\varepsilon = \varepsilon$ (R), что и для покоящихся ядер.

При сближении двух ядер с зарядом $Z < Z_c$ каждое на расстояние $R \leq 1$ образуется поле, которое для электрона мало отличается от поля точечного заряда 2Z, хотя ядра еще далеко не слились. Будем считать, что ядра (голые) сблизились на такое расстояние, при котором нижний уровень электрона приобретает энергию *) $\varepsilon_1(R) < -1$. В тот момент, когда $\varepsilon_1 = -1$, этот уровень (незаполненный) соответствует двум дыркам в нижнем континууме, т. е. двум позитронам. Из-за кулоновского барьера в эффективном потенциале U эти позитроны локализованы вблизи ядра (их волновая функция близка к (2,22)).

В принципе данный механизм рождения позитронов никак не связан с частотой изменения электрического поля $\omega_c \sim 1/\tau_c$ и возможен при очень медленном сближении ядер. Число возникающих позитронов n_p оценим, исходя из формулы $\dot{n} = -\gamma$ (t) n, где n = n (t) — число голых ядер в момент t, а γ (t) — мгновенная вероятность вылета позитрона (соответствующая расстоянию между ядрами R (t)). Отсюда

$$\frac{n_p}{n(-\infty)} = 1 - \exp\left\{-\int_{-\infty}^{\infty} \gamma(t) dt\right\}.$$
(4.18)

Пока превышение эффективного заряда $Z_{eff} = Z_{eff}(R)$ над Z_c мало, $n_p = w_1 n (-\infty)$, где $w_1 = \int \gamma(t) dt \ll 1$. Вероятности рождения одной (w_1) и двух (w_2) пар в этом случае таковы: $w_2 \sim w_1^2 \ll w_1 \ll 1$. Позитроны рождаются в основном в момент наименьшего сближения ядер и имеют энергию, очень близкую к энергии уровня $\varepsilon_0(R)$ при наименьшем сближении **).

С дальнейшим ростом Z_{eff} (или, что эквивалентно, при уменьшении R) наступит момент, когда $\int \gamma(t) dt \sim 1$ (это произойдет, когда уровень 1S углубится в нижний континуум на величину $\sim m_e c^2$, сравнимую с высотой

^{*)} Для количественных предсказаний необходимо знать зависимость Z_c от R для задачи двух центров. В релятивистском случае переменные в ней не разделяются, однако значение Z_c (R) может быть найдено вариационным методом ⁶⁵. Такие расчеты в настоящее время проводятся; предварительные результаты опубликованы в работе ⁶⁶.

в настоящее время проводятся; предварительные результаты опубликованы в работе ⁶⁶. **) Здесь ε_0 — вещественная часть брейт-вигнеровского полюса $E = \varepsilon_0$ — $(i\gamma/2)$, являющегося аналитическим продолжением (см. предыдущий раздел) уровня 1S при $Z > Z_c$.

кулоновского барьера). При этом $w_2 \sim 1$, т. е. практически все ядра рождают по два позитрона. На этом процесс рождения позитронов за счет уровня 1S заканчивается *). Рождение позитронов станет возможным вновь лишь при таких R, когда границу $\varepsilon = -1$ пересекают следующие уровни: $2P_{1/2}$, $2S_{1/2}$, $3P_{1/2}$ и т. д. Для этого, как и в случае одного ядра радиуса R, требуется заметное возрастание Z_{eff} (см. табл. I, в которой приведены значения $\zeta_c = Z_c 137$ для первых трех уровней).

Таблица I

R		Ι			I II		
¢	вед. h/m _e c	1S _{1/2}	2P _{1/2}	2S _{1/2}	iS _{1/2}	2P _{1/2}	
8 10 12	$0,0207 \\ 0,0259 \\ 0,0311$	1,248 1,271 1,291	1,35 1,38 1,41	1,72 1,78 1,83	$1,224 \\ 1,243 \\ 1,260$	1,31 1,34 1,365	
Столбцы I и II относятся к двум моделям обрезания в фор- муле (2,5); I — $f(x) = 1$, заряд на поверхности ядра; II — равно- мерное распределение заряда по объему ядра.							

При расхождении ядер друг от друга электроны, как правило, остаются связанными на разлетающихся ядрах с $Z < Z_c$. На этих ядрах энергии связи меньше, так как $\varepsilon_1(Z) > -1$. По-видимому, мало вероятно, чтобы при удалении ядер процесс адиабатически пошел бы вспять в направлении аннигиляции пар. Легко видеть, что общий энергетический баланс не нарушен: в целом энергия, необходимая для рождения пар, черцается из кинетической энергии ядер. Вследствие меньшего заряда (Z - 1) в ходе разлета ядра разлетаются с кинетической энергией, меньшей начальной.

При более аккуратном подсчете вероятностей w_1 и w_2 , импульсного спектра позитронов и т. д. нужно рассмотреть динамику туннелирования позитрона с учетом конечной скорости движения ядер **). Такие расчеты можно провести, используя, например, метод мнимого времени в подбарьерном движении (см. по этому поводу работу ⁶⁷, а также ²², стр. 225); они станут необходимыми при появлении соответствующих экспериментальных данных.

Процессом, конкурирующим с рассмотренным выше, является рождение пар за счет частоты изменения электрического поля или через возбуждение ядер при столкновении. Однако из-за большой массы ядер их движение (при не слишком малых значениях *R*) настолько медленное, что рожде-

*) Средняя энергия позитронов $\bar{\epsilon}$ определяется положением резонансного уровня ϵ_0 (R) для такого расстояния R, при котором $\int \gamma(t) dt \sim 1$. При дальнейшем сближении ядер, когда $\int \gamma(t) dt$ становится $\gg 1$, позитроны практически уже не рождаются и энергия ϵ не меняется.

**) Время тупнелирования через кулоновский барьер $U(r) = \zeta / r$ равно $\tau_t = \int_{0}^{r_0} dr |p(r)|^{-1/2} = \pi \zeta p^{-3}$, где $r_0 = 2\zeta / p^2$ — точка поворота, а p — импульс пози-

трона на бесконечности. При $p \to 0$ время туннелирования очень велико. Сравнение $\tau_t \, c \, \tau_c$ (см. (4,17)) показывает, что процесс туннелирования можно считать адиабатическим при $p \geqslant v_0$, где $v_0 -$ скорость ядер на бесконечности.

ние пар за счет фурье-компонент электрического поля с частотой $\omega > 2m_e$ будет ничтожно мало (см. табл. II, где приведены значения частоты $\omega_c = 4/2$ в достротетриот

Таблица II

= $1/\tau_c$ в единицах $m_e c^2$ для $\zeta = 2/3$, что соответствует столкновению ядер урана; R — расстояние наименьшего сближения ядер в единицах $\hbar/m_e c$; τ_c — характерное время столкновения (см. (4,17)). В принципе это позволяет отделить квазистатический механизм рождения позитронов (за счет превышения суммарного заряда 2Z над Z_c) от других возможных механизмов.

4.4. До сих пор мы рассматривали голые ядра. Если же уровень 1S занят электронами, то при переходе через $Z = Z_c$ никаких видимых эффектов не возникает. Электронное облако, несущее заряд — 2e, образу-

ется при $Z < Z_c$ двумя электронами на нижнем (дискретном) уровне, а при $Z > Z_c$ — возмущением функций континуума вблизи энергии $\varepsilon = \varepsilon_0 < < -1$. Если проинтегрировать плотность зарядов по всему непрерывному спектру, то при $Z > Z_c$ получится (после перенормировки) как раз лишний заряд — 2e. Хотя формально K-оболочка при $Z > Z_c$ исчезла (из одночастичных решений уравнения Дирака), но ее роль берет на себя сплошной спектр. Поэтому, например, электроны внешних оболочек атома какихлибо изменений в точке $Z = Z_c$ в этом случае не замечают.

Конечно, *К*-оболочка в сверхкритическом атоме обладает некоторыми особенностями по сравнению с *К*-оболочкой в обычном атоме с *Z* < *Z*_c.

Однако эти отличия не связаны со скачком в среднем радиусе Kоболочки или с резким изменением плотности электрического заряда, а являются более тонкими (например, имеется резонанс в рассеянии позитронов на атоме с $Z > Z_c$; см. по этому поводу раздел 1).

В заключение отметим, что вопрос о рождении пар частиц и античастиц под действием сильного поля стал в последнее время очень актуальным в космологии. Предварительные оценки показывают, что рождение пар может существенным образом влиять на эволюцию Вселенной близи сингулярности ^{68, 69}.

5. СВОЙСТВА РЕЛЯТИВИСТСКИХ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОТЕНЦИАЛОМ

В этом разделе мы кратко обсудим движение уровней с ростом глубины потенциала для других релятивистских уравнений. Как известно, в случае свободных частиц весь математический аппарат квантовой теории (волновые уравнения, функции Грина, диаграммы Фейнмана и т. д.) может быть развит вполне последовательно для частиц любого спина (см. работы ⁷⁰⁻⁷⁴, где содержатся также дальнейшие ссылки). Однако при включении потенциала (достаточно сильного) ситуация меняется*).

5.1. Начнем со случая скалярной (бесспиновой) частицы. Уравнение Клейна — Гордона с векторной связью

$$\Delta \varphi + [(\varepsilon - V)^2 - 1] \varphi = 0 \tag{5.1}$$

формально эквивалентно нерелятивистскому уравнению Шрёдингера $\chi'' + 2(E - U) \chi = 0$, где

$$E = \frac{e^2 - 1}{2}, \quad U = eV - \frac{1}{2}V^2 + \frac{l(l+1)}{2r^2}.$$
 (5,2)

^{*)} Электромагнитное взаимодействие вводится минимальным образом ($\partial_{\mu} \rightarrow \partial_{\mu} - ieA_{\mu}$). Потенциал V (r) мы рассматриваем всюду как временную компоненту 4-вектора $A_{\mu}(x)$: $\mathbf{A} = 0$, V (r) = eA_0 . Кроме того, полагаем m=1, где m-масса частицы, движущейся в поле V (r).

Однако тот факт, что энергия є входит в (5,1) квадратично, меняет вид условия ортогональности:

$$\int d^{3}r \varphi_{\lambda}^{*}(\mathbf{r}) \left\{ \epsilon_{\lambda} + \epsilon_{\lambda'} - 2V(r) \right\} \varphi_{\lambda'}(\mathbf{r}) = \eta_{\lambda} \delta_{\lambda\lambda'}; \qquad (5,3)^{*}$$

здесь φ_{λ} (r), $\varphi_{\lambda'}$ (r) — волновые функции дискретного спектра ($-1 < \varepsilon_{\lambda}$, $\varepsilon_{\lambda'} < 1$), множитель $\eta_{\lambda} = \pm 1$. При этом для уровней, идущих из верхнегоконтинуума, $\eta_{\lambda} = 1$, а для уровней, идущих из нижнего континуума, следует положить $\eta_{\lambda} = -1$ (справедливость этого утверждения становится очевидной, если выключить V (r)).

В отличие от дираковского случая, зависимость є от V не является здесь монотонной и кривая $\varepsilon = \varepsilon$ (V) может иметь загиб. Это явление былообнаружено в работе 75 на примере s-состояний в прямоугольной яме.

Рассмотрим его более подробно, не ограничиваясь случаем l=0. Положим

$$V(r) = -v\theta(r_0 - r), \qquad v > 0$$
 (5.4)

(r0-радиус ямы; глубина ямы v измеряется в единицах mc2). Волновая функция. χ_l(r) имеет тот же вид, что и в нерелятивистской задаче:

$$\chi_{l}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \sqrt{r} J_{l+1/2}(kr), & r < r_{0}, \\ \sqrt{r} K_{l+1/2}(\lambda r), & r > r_{0}, \end{cases}$$
(5,5)

отличаясь лишь значениями параметров k и λ:

$$k = [(\varepsilon + v)^2 - 1]^{1/2}, \quad \lambda = (1 - \varepsilon^2)^{1/2}.$$

Из условия спивания при $r = r_0$ следует уравнение для энергии уровня ε

$$k \frac{J_{l-1/2}(kr_0)}{J_{l+1/2}(kr_0)} = -\lambda \frac{K_{l-1/2}(\lambda r_0)}{K_{l+1/2}(\lambda r_0)}.$$
(5,6)

При $\varepsilon = \pm 1 \lambda$ обращается в нуль и уравнение (5,6) упрощается:

$$J_{l-1/2}(\xi) = 0, \tag{5.7}$$

где $\xi = k_{\pm}r_0$, $k_{\pm} = \sqrt{v^2 \pm 2v}$ для $\varepsilon = \pm 1$. Пусть ξ_l — наименьший положительный корень уравнения (5,7): $\xi_0 = \pi/2$, $\xi_1 = \pi$, $\xi_2 = 1,42\pi, \ldots; \xi_l$ растет вместе с l. Тогда в момент появления первого уровня с орбитальным моментом l глубина ямы равна (для $\varepsilon = \pm 1$)

$$v_l^{\pm} = \sqrt{1 + (\xi_l/r_0)^2} \mp 1.$$
 (5.8)

В случае широкой ямы $(r_0 \gg \hbar/mc = 1)$ $v_l^+ = \frac{\xi_l^2}{2r_0^2}$, $v_l^- = 2 + \frac{\xi_l^2}{2r_0^2}$, а для узкой ямы ($r_0 \ll 1$) имеем $v_l^{\pm} = \frac{\xi_l}{r_0} \mp 1 + O(r_0)$. В случае узкой ямы нетрудно определить не только значения v_i^{\pm} , но и всю кривую $\varepsilon = \varepsilon$ (v). Разлагая (5,6) по степеням r_{0r} получаем

$$v = v(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{\pi}{2r_0} + \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - \varepsilon^2} - \varepsilon + \left[1 - \frac{8}{\pi^2} (1 - \varepsilon^2)\right] \frac{r_0}{\pi} + \dots & \text{для} \quad l = 0, \\ \frac{\xi_l}{r_0} - \varepsilon + \frac{l + 1/2 - \varepsilon^2}{(2l - 1)\xi_l} r_0 + \dots & \text{для} \quad l \ge 1. \end{cases}$$
(5.9)

Как видно из рис. 14, кривая $\varepsilon = \varepsilon$ (v) для s-состояний оказывается с загибом, а при $l \ge 1$ энергия є монотонно падает с ростом v. Эти выводы сохраняются и для широкой ямы, но загиб в этом случае расположен очень. близко к границе е = --1. Возникновение загиба у кривой е = е (v) для состояния с l = 0 не является чем-то специфическим для потенциала в виде прямоугольной ямы (5,4). Как показано в работе ¹¹, для основногоуровня в короткодействующем потенциале любой формы имеет место то же-

436

явление. Как объяснить столь странное поведение энергии *s*-уровня? При $v=v_{-}$ в яме появляется связанное состояние ε_{2} (нижняя ветвь кривой 1 на рис. 14). Физическая интерпретация этого состояния указана Мигдалом ^{25,53}: ε_{2} — это уровень для античастиц (с потенциалом — V), а не для частиц. С дальнейшим ростом v

достигается значение $v = v_c$, отвечающее вершине загиба.

При $v = v_c$ уровни ε_1 , ε_2 сталкиваются и выходят в комплексную плоскость. При $v > v_c$ мы имеем два решения с комплексными энергиями ε и ε , для которых Re $\lambda > 0$, и потому волновая функция (5,5) остается квадратично-интегрируемой. Таким образом, одночастичный гамильтониан перестает быть эрмитовским оператором при $v > v_c$. Это является указанием на то, что при $v \to v_c$ принципиально необходимо включать в рассмотрение многочастичные эффекты *).

Появление комплексных собственных значений в сильном поле является довольно общим свой-



Рис. 14. Уровни скалярной частицы в узкой яме ($r_0 = 0.3\hbar/mc$) в зависимости от глубины ямы v.

По оси абсцисс отложена величина $v = (\frac{5}{2}l/r_0)$. Кривые 1—4 соответствуют случаям l = 0, 1, 2и $l \gg 1$.

ством уравнения Клейна — Гордона. Это можно видеть из формулы теории возмущений для сдвига уровня. Полагая в (5,1) $V = V_0 + \delta V$, $\psi = \psi_0 + \delta \psi$, где $\psi_0(r)$ — решение в потенциале $V_0(r)$, экспоненциально убывающее на бесконечности, находим сдвиг уровня

$$\delta \varepsilon = \frac{\varepsilon \overline{\delta V} - \overline{V \delta V}}{\varepsilon - \overline{V}}.$$
(5,10)

Средние $(\overline{V}, \delta \overline{V})$ понимаются здесь в обычном смысле:

$$\overline{V} = \int d^3 r V(r) \varphi_0^2(\mathbf{r}) / \int d^3 r \varphi_0^2(\mathbf{r}).$$
(5.11)

В нерелятивистском пределе $\varepsilon \to 1$, $\overline{V} \ll 1$, и выражение (5,10) принимает обычный вид: $\delta \varepsilon = \overline{\delta V}$. С другой стороны, в глубокой яме может быть выполнено условие $\varepsilon = \overline{V}$. В этой точке $\frac{\partial \varepsilon}{\partial V} = \infty$, т. е. уровень $\varepsilon = \varepsilon$ (V) имеет загиб. При дальнейшем углублении V (r) столкнувшиеся ветви ε_1 , ε_2 переходят в пару состояний с комплексно-сопряженными энергиями ******), причем Re $\varepsilon = \overline{V}$. Так как соответствующие полюсы S-матрицы лежат на физическом листе, мы пришли в противоречие с унитарностью (что и означает неэрмитовость гамильтониана).

Для s-состояний отсутствует центробежный барьер в U(r), и если $\lim_{r\to\infty} r^2 V(r) = 0$, то волновая функция $\chi_{\varepsilon}(r)$ при $\varepsilon \to \pm 1$ делокализуется.

Поэтому в момент возникновения уровня $\overline{V} = 0$ (интеграл в числителе

^{*)} В работах ⁷⁶, ⁷⁷ сделана попытка рассмотреть яму с $v > v_c$ в рамках одночастичного приближения, однако при этом авторам пришлось ввести индефинитную метрику. Как показано в работе Мигдала ⁵³, при $v > v_c$ происходит виртуальное рождение пар и поляризация вакуума.

^{**)} Из условия обобщенной ортогональности (5,3) теперь не вытекает вещественность собственных значений ε_{λ} (в отличие от уравнений Дирака и Шрёдингера), а лишь условие Re $\varepsilon_{\lambda} = \overline{V}$ для решений с комплексной энергией (Ім $\varepsilon_{\lambda} \neq 0$).

формулы (5,11) сходится, а в знаменателе — расходится). Таким образом, выражение $\varepsilon = \overline{V}$ равно ± 1 на краю верхнего и нижнего континуума и, значит, обращается в нуль в какой-то промежуточной точке кривой $\varepsilon =$ $= \varepsilon (V)$, что согласно (5,10) приводит к столкновению двух ветвей кривой $\varepsilon = \varepsilon (V)$ и выходу энергий ε_1 , ε_2 в комплексную плоскость.

Заметим, что при $l \ge 1$ это рассуждение неприменимо, так как из-за центробежного барьера $\chi_l(r)$ остается нормируемой при $\varepsilon = \pm 1$ (а именно, в момент появления уровня $\chi_l(r) \sim r^{-l}, r \to \infty$). Поэтому уже нельзя утверждать, что $\overline{V} = 0$ на краю континуума. Это объясняет различие между кривыми с l = 0 и $l \ge 1$ на рис. 14. То же относится и к случаю кулоновского поля, когда барьер в U(r) при $\varepsilon \to -1$ еще более непроницаемый. Здесь при $\varepsilon = -1$ имеем $\varepsilon - \overline{V} = 2 > 0$; загиб отсутствует, т. е. нет большой разницы между ходом уровня для скалярной и спинорной частиц в неэкранированном кулоновском поле ^{10, 12}.

5.2. Перейдем к спину s = 1. Вопрос о спектре уровней векторной частицы в кулоновском поле имеет тридцатилетнюю давность ^{78, 79}, однако полной ясности в то время достигнуто не было. Математически корректная постановка вопроса принадлежит Кейсу ³⁸, показавшему, что корни возникающих здесь трудностей те же, что и в нерелятивистских задачах с «падением на центр». Чтобы сделать решение однозначным, необходим выбор надлежащего граничного условия при малых r.

Рассмотрев уравнения Прока́ с потенциалом V(r), сингулярным при $r \rightarrow 0$, можно показать ^{10, 65}, что в эффективном потенциале U возникает более сильная особенность (для состояний с моментом $j \ge 1$):

$$U(r) \approx_{(r \to 0)} - \frac{\sqrt{j(j+1)}}{2r} |V'(r)|.$$
 (5,12)

В частности, кулоновскому случаю $V(r) = -\zeta/r$ отвечает $U(r) \approx \approx -\zeta \sqrt{j(j+1)}/2r^3$ (см. ⁷⁸). Потенциалом, пограничным между регулярными и сингулярными потенциалами, является здесь потенциал V(r) со столь слабой особенностью, как логарифмическая: $V(r) = \zeta \ln r$.

При достаточно малых ζ он регулярен, а при $|\zeta| \sqrt{j(j+1)} > (j + \frac{1}{2})^2$ становится сингулярным и требует обрезания в области малых r.

5.3. Уравнения для частиц с высшими $(s \ge {}^{3}/_{2})$ спинами рассматривались многими авторами, начиная с классических работ Фирца и Паули ⁸⁰, Рариты и Швингера ⁸¹. Трудность введения электромагнитного поля в эти уравнения состоит в том, чтобы обеспечить совместность уравнений движения с дополнительными условиями, исключающими меньшие спины. Общепринятая процедура *) состоит в замене $\partial_{\mu} \rightarrow \partial_{\mu} - ieA_{\mu}$ в лагранжиане свободного поля ⁸⁰. Однако лишь недавно было замечено ⁸², что и в этом случае возникает противоречие с теорией относительности: хотя получающиеся уравнения формально лоренц-ковариантны, их решения могут распространяться со сверхсветовой скоростью. Этот результат получается из анализа характеристик релятивистских волновых уравнений при $s \ge {}^{3}/_{2}$. Параметром, определяющим степень нарушения причинности, является здесь отношение H/H_{0} или E/E_{0} , где $E_{0} = H_{0} = m^{2}c^{3}/e\hbar$, m-масса частиц (при этом существование электронов с $m_{e} < m$ в теории игнорируется). Хотя при таких полях уже становятся существенными квантовые нелинейности в лагранжиане электронов с лаучае.

^{*)} Позволяющая, во всяком случае, избежать немедленных алгебраических противоречий, поскольку и уравнения движения, и дополнительные условия получаются варьированием лагранжиана L.

ках одночастичного подхода приходится констатировать отсутствие в настоящее время хороших уравнений для локального поля $\psi(x)$ со спином $s \ge \frac{3}{2}$ (такие уравнения можно написать для свободного поля $\psi(x)$, но в достаточно сильном внешнем электромагнитном поле возникают указанные выше трудности). Итак, единственное релятивистское уравнение, для которого одночастичные решения во внешнем электрическом поле V(r)сохраняют смысл при сколь угодно больших | V |, - это уравнение Дирака. С другой стороны, именно в этом случае имеются физические объекты, описываемые таким уравнением (легкие частицы e[±], µ[±] в поле ядра). Можно думать, что такое совпадение не является случайным.

Авторы благодарны С. С. Герштейну, И. Ю. Кобзареву, А. М. Переломову, Л. П. Питаевскому и М. В. Терентьеву за интересные дискуссии. Особую благодарность мы хотели бы выразить А. Б. Мигдалу и Л. Б. Окуню за детальное обсуждение всего круга вопросов и ряд полезных замечаний.

Примечание при корректуре. 1) В ⁸³ сообщается о регистрации ядер с $Z \sim 112$. Примечание при корректуре. П. В. Собощается о регистрации ядер с. $Z \simeq 112$. Это открытие, если оно подтвердится, несомненно, повысит интерес к явлениям, про-исходящим при Z > 137. 2) В ⁸⁴ оценивается лэмбовский сдвиг уровней в атомах с большими Z (вилоть до Z = 180). Его учет повышает критический заряд Z_c для уровня 1S примерно на 5 единиц. 3) В ^{85,86} утверждается, что поляризация вакуума неограниченно растет при $Z \rightarrow Z_c$. Это противоречит выводам гл. 4.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- Г. Н. Флеров, В. А. Друин, А. А. Плеве, УФН 100, 45 (1970).
 G. T. Seaborg, Ann. Rev. Nucl. Sci. 18, 53 (1968).
 G. T. Seaborg, J. L. Bloom, Sci. Amer. 220, 56 (1969) (см. перевод: УФН 101, 755 (1970)).
- 4. P. A. M. D i r a c, Proc. Roy. Soc. 117, 610; 118, 341 (1928).
- 5. П. А. М. Д и рак, Принципы квантовой механики, М., Физматгиз, 1960.
- C. G. Darwin, Proc. Roy. Soc. A118, 654 (1928).
 W. Gordon, Zs. Phys. 48, 11 (1928).
- 8. І. Ромегалсһик, Үа. Smorodinsky, J. Phys. USSR 9, 97 (1945). 9. С. С. Герштейн, Я. Б. Зельдович ЖЭТФ 57, 654 (1969); Nuovo Cimento Lett. 1, 835 (1969). 10. В. С. Попов, ЯФ 12, 429 (1970).
- 11. В. С. Попов, Письма ЖЭТФ 11, 254 (1970); ЖЭТФ 59, 965 (1970).
- 12. В. С. Попов, ЖЭТФ 60, 1228 (1971). 13. А. И. Ахцезер, В. Б. Берестецкий, Квантовая электродинамика, М., «Наука», 1969.
- 14. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, Релятиви-
- стская квантовая теория, часть І. М., «Наука», 1968. 15. Е. Н. Wichmann, N. M. Kroll, Phys. Rev. 96, 232 (1954); 101, 843 (1956). 16. Л. В. Келдыш, ЖЭТФ 45, 364 (1964).
- л. в. келдыш, дэтФ 43, 304 (1904).
 J. S с h w i n g е г, Phys. Rev. 82, 664 (1951) (перевод в сб. «Новейшее развитие квантовой электродинамики», М., ИЛ, 1954).
 В. С. Ваняшин, М. В. Терентьев, ЖЭТФ 48, 565 (1965).
 Н. Б. Нарожный, А. И. Никишов, ЯФ 11, 1072 (1970).
 Я. Б. Зельдович, Е. М. Рабинович, ЖЭТФ 37, 1296 (1959).

- 21. Э. Э. Ш ноль, ТМФ 4, 239 (1970). 22. А. И. Базь, Я. Б. Зельдович, А. М. Переломов, Рассеяние, реакции 4074 и распады в нерелятивистской кваптовой механике, 2-е изд., М., «Наука», 1971.

- и распады в нерелятивистской кваптовой механике, 2-е изд., м., «паука», 1911.
 23. А. Б. Мигдал, А. М. Переломов, В. С. Попов, ЯФ 14, 875 (1971).
 24. А. М. Переломов, В. С. Попов, ЖЭТФ 61, 1743 (1971).
 25. А. Б. Мигдал, УФН 105 (4), 781 (1971).
 26. G. E. Brown, J. S. Langer, G. W. Shaefer, Proc. Roy. Soc. A251, 92 (1959).
 27. G. E. Brown, D. F. Mayers, Proc. Roy. Soc. A251, 105 (1959).
 28. В. Г. Вакс, ЖЭТФ 36, 1882 (1959).
 29. Л. Н. Лабзовский, ЖЭТФ 59, 2165 (1970).
 30. Н. А. Веthе. Phys. Rev. 72, 339 (1947).

- 30. H. A. Bethe, Phys. Rev. 72, 339 (1947).

- .31. Т. Welton, Phys. Rev. 74, 1157 (1948) (перевод в сб. «Вопросы причинности в квантовой механике», М., ИЛ, 1955).
- 32. V. Weisskopf, Kgl. Danske Viden. Selskab 14, No. 6 (1936); см. также: Quan-32. V. Weitssköp I, Rg. Datate Vience 12, 10. C (1907), C. L. L. tum Electrodynamics, Dover, N.Y., 1958.
 33. W. Heisenberg, H. Euler, Zs. Phys. 98, 714 (1936).
 34. А. И. Никишов, ЖЭТФ 57, 1210 (1969).
 35. В. С. Попов, Письма ЖЭТФ 13, 261 (1971); ЖЭТФ 61, 1334 (1971).

- 36. И. А. Баталин, Е. С. Фрадкин, ТМФ 5, 190 (1971).
- 37. В. Брюсов, Избранные сочинения, т. 1, М., 1955, стр. 499. 38. К. М. Саse, Phys. Rev. 80, 797 (1950).
- 39. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, М., Физматгиз, 1963. 40. А. М. Переломов, В. С. Попов, ТМФ 4, 48 (1970).

- 41. R. E. L anger, Phys. Rev. 51, 669 (1937). 42. Дж. Хединг, Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ), М., «Мир», 1965.
- 43. М. И. Журина, Л. Н. Кармазина, Таблицы модифицированных функций Бесселя с мнимым индексом $K_{i\tau}$ (x), М., Изд. ВЦ АН СССР, 1967. 44. В. П. К райнов, Письма ЖЭТФ 13, 359 (1971).
- 45. W. Pieper, W. Greiner, Zs. Phys. 218, 327 (1969); D. Rein, Zs. Phys. 221, 423 (1969).
- 46. F. G. Werner, J. A. Wheeler, Phys. Rev. **109**, 126 (1958). 47. А. М. Переломов, В. С. Попов, ЯФ **14**, 661 (1971).

- 48. Я. А. Смородинский, ДАН СССР 60, 217 (1948). 49. V. M. Galitsky, V. F. Cheltsov, Nucl. Phys. 56, 86 (1964).
- 50. Р. Ньютон, Теория рассеяния волн и частиц, М., «Мир», 1969. 51. Л. Д. Ландау, Н. А. Смородинский, ЖЭТФ 14, 269 (1944).
- 52. H. A. Bethe, Phys. Rev. 76, 38 (1949).
- 53. А. Б. Мигдал, ЖЭТФ 61, вып. 6 (12) (1971). 54. Ч. Диккенс, Посмертные записки пиквикского клуба, ч. 1. 55. Ю. Н. Демков, ЖЭТФ 46, 1126 (1964); 49, 885 (1965). 56. Ю. Н. Демков, В. И. Комаров, ЖЭТФ 50, 286 (1966).

- 57. W. Heisenberg, Die Teile und das Ganze, Vieweg, 1970. 58. G. Kallen, Quantenelektrodynamik, Handb. Phys., Bd. 5/1, Springer-Verlag, Berlin, 1958. 59. E. A. U e h l i n g, Phys. Rev. 48, 55 (1935).

- 60. J. Schwinger, Phys. Rev. 75, 651 (1949).
 61. L. P. Fulcher, W. Greiner, Lett. Nuovo Cimento 2, 279 (1971).
 62. S. J. Brodsky, S. D. Drell, Ann. Rev. Nucl. Sci. 20, 147 (1970).
- 63. А. Д. Галанин, И. Я. Померанчук, ДАН СССР 86, 251 (1952).
- 64. A. B. Mickelwait, H. C. Corben, Phys. Rev. 96, 1145 (1954).

- 65. В. С. Попов, ЯФ 14, 458 (1971). 66. В. С. Попов, Т. И. Рождественская, Письма ЖЭТФ 14, 267 (1971). 67. В. С. Попов, В. П. Кузнецов, А. М. Переломов, ЖЭТФ 53, 331 (1967); Л. П. Котова, А. М. Переломов, В. С. Понов, ЖЭТФ 54, 1151 (1968). 68. L. Parker, Phys. Rev. Lett. 21, 562 (1968); Phys. Rev. 183, 1057 (1968); D3,
- 348 (1971).
- 69. Я. Б. З'ельдович, Письма ЖЭТФ 12, 443 (1970); Препринт № 1 ИПМ, 10. п. в. оса вдович, письма пото 12, 445 (1970); препринт № 1 ИПМ, 1971; Я. Б. Зельдович, А. А. Старобинский ЖЭТФ 61, вып. 6 (12) (1971).
 70. V. Bargmann, E. P. Wigner, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 34, 211 (1948).
 71. S. Weinberg, Phys. Rev. 133B, 1318 (1964).

- 71. S. Weinberg, Fnys. Rev. 135B, 1318 (1904).
 72. S. J. Chang, Phys. Rev. 161, 1308 (1967).
 73. T. J. Nelson, R. H. Good, Revs. Mod. Phys. 40, 508 (1968).
 74. B. O. Enflo, B. E. Laurent, Fortschr. Phys. 16, 373 (1968).
 75. L. I. Schiff, H. Snyder, J. Weinberg, Phys. Rev. 57, 315 (1940).
 76. B. Schroer, R. Seiler, J. A. Swieca, Phys. Rev. D2, 2927 (1970).

- 70. B. Schröder, R. Berrich, R. H. Berrich, J. H. S. Rev. D2, 2938 (1970).
 77. B. Schröder, J. A. Swieca, Phys. Rev. D2, 2938 (1970).
 78. U. E. Tamm, JAH CCCP 29, 511 (1940); Phys. Rev. 58, 952 (1940).
 79. H. C. Corben, J. Schwinger, Phys. Rev. 58, 953 (1940).
 80. M. Fierz, W. Pauli, Proc. Roy. Soc. A173, 211 (1939).
 80. M. Fierz, W. Pauli, Proc. Roy. Box. 60, 64 (4044).

- 80. M. Flerz, W. Faull, Floc. Roy. Soc. A173, 211 (1939).
 81. W. Rarita, J. Schwinger, Phys. Rev. 60, 61 (1941).
 82. G. Velo, D. Zwanziger, Phys. Kev. 186, 1337; 188, 2218 (1969).
 83. A. Marinov et al., Nature 229, 464 (1971).
 84. B. Fricke, Lett. Nuovo Cimento 2, 293 (1971).
 85. N. Panchapakesan, Phys. Lett. 35B, 522 (1971).
 86. N. Panchapakesan, Preprint IC (71) 40, Trieste, 1971.