

О МАКРОСКОПИЧЕСКОМ ПОДХОДЕ К ЭФФЕКТАМ РАДИАЦИОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ АТОМОВ И МОЛЕКУЛ

В. А. Алексеев, А. В. Виноградов, И. И. Сوبельман

1. ВВЕДЕНИЕ

Излучение совокупности N осцилляторов (атомов и молекул), локализованных в объеме с линейными размерами $a \ll \lambda$ (где $\lambda = \lambda/2\pi = c/\omega$, λ — длина волны), характеризуется рядом специфических особенностей, связанных с так называемым кооперативным эффектом, т. е. с существованием коллективных колебаний, обусловленных взаимодействием осцилляторов через их общее поле излучения.

Природу этого эффекта проще всего пояснить на примере классических осцилляторов (заряд e , масса m , собственная частота ω_0). Хорошо известно, что излучение электромагнитных волн сопровождается обратной реакцией поля излучения на заряды, т. е. возникновением сил радиационного трения. В случае $a \ll \lambda$ сила радиационного трения, действующая на каждый осциллятор системы, равна (см., например, ¹)

$$\mathbf{F} = (2e/3c^3) \ddot{\mathbf{D}}, \quad \mathbf{D} = e \sum_i \mathbf{r}_i, \quad (1,1)$$

где $\mathbf{D}$ — полный дипольный момент системы. Поэтому уравнение движения каждого из осцилляторов во внешнем поле $\mathbf{E}^0$ имеет вид

$$\ddot{\mathbf{r}}_i - (2e/3mc^3) \ddot{\mathbf{D}} + \omega_0^2 \mathbf{r}_i = (e/m) \mathbf{E}^0. \quad (1,2)$$

Умножив каждое из этих уравнений на e и просуммировав по всем осцилляторам системы, получим уравнение движения для $\mathbf{D}$:

$$\ddot{\mathbf{D}} - N (2e^2/3mc^3) \ddot{\mathbf{D}} + \omega_0^2 \mathbf{D} = N (e^2/m) \mathbf{E}^0. \quad (1,3)$$

Отсюда нетрудно найти спектр излучения системы

$$I(\omega) \propto |\mathbf{D}_\omega|^2 \propto |\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega N\gamma_0|^{-2}, \quad \gamma_0 = 2e^2\omega^2/3mc^3. \quad (1,4)$$

Для одного изолированного осциллятора, как известно,

$$I(\omega) \propto |\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_0|^{-2}; \quad (1,5)$$

здесь γ_0 — константа радиационного затухания осциллятора.

Из (1,3), (1,4) видно, что колебания полного дипольного момента рассматриваемой системы вследствие взаимодействия осцилляторов через их общее поле излучения затухают в N раз быстрее колебаний одного изолированного осциллятора. В соответствии с этим в (1,4) входит коллективная радиационная ширина $N\gamma_0$.

Нетрудно показать, что к такому же результату приводит и элементарное рассмотрение квантовых излучателей.

Рассмотрим систему из N одинаковых атомов. Основное состояние такой системы описывается волновой функцией

$$\Psi_0 = \varphi_0(1) \varphi_0(2) \dots \varphi_0(N), \quad (1,6)$$

где $\varphi(i)$ — волновая функция i -го атома. Первый возбужденный уровень системы, соответствующий возбуждению одного из атомов, N -кратно вырожден (для простоты мы полагаем, что уровни одного атома не вырождены), причем состояния, принадлежащие к этому уровню, можно описывать или волновыми функциями вида

$$\Psi_1^{(i)} = \varphi_0(1) \varphi_0(2) \dots \varphi_1(i) \dots \varphi_0(N), \quad (1,7)$$

или симметризованными линейными комбинациями этих функций. Если все атомы локализованы в объеме $V \ll \lambda^3$, то взаимодействие системы с электромагнитным полем можно записать в виде

$$\mathcal{H}' = (e/mc) \sum_i \mathbf{p}_i \mathbf{A}(\mathbf{r}_i) \approx (e/mc) \mathbf{A} \sum_i \mathbf{p}_i,$$

где $\mathbf{p}_i$ — импульс атомного электрона, $\mathbf{A}$ — вектор-потенциал поля. Поскольку оператор $\mathcal{H}'$ полносимметричен по перестановкам аргумента i (номер атома) и волновая функция основного состояния (1,6) также полносимметрична, матричный элемент $\mathcal{H}'$ отличен от нуля только для переходов в полносимметричное возбужденное состояние

$$\Psi_1 = (1/\sqrt{N}) \sum_i \Psi_1^{(i)}. \quad (1,8)$$

Все остальные линейные комбинации функций (1,7), ортогональные функции (1,8), имеют другую симметрию. Поэтому матричные элементы $\mathcal{H}'$ для соответствующих переходов равны нулю. Другими словами, только полносимметричное состояние (1,8) связано с Ψ_0 радиационным переходом.

Матричный элемент для перехода $\Psi_0 \rightarrow \Psi_1$ имеет вид

$$\langle \Psi_1 | \mathcal{H}' | \Psi_0 \rangle = (1/\sqrt{N}) \sum_i \langle \Psi_1^{(i)} | (e/mc) \mathbf{A} \sum_j \mathbf{p}_j | \Psi_0 \rangle = \sqrt{N} (e/mc) \mathbf{A} \mathbf{p}_{10}, \quad (1,9)$$

где $\mathbf{p}_{10}$ — матричный элемент $\mathbf{p}$ для одного изолированного атома. Уже из (1,9) видно, что радиационный распад состояния (1,8) происходит в N раз быстрее, чем в случае одного атома. Ширина спектра излучения, которую нетрудно найти, используя известный метод Вайскопфа — Вигнера² (см. по этому поводу³), также оказывается в N раз большей, чем для изолированного атома.

Сам факт проявления коллективных свойств излучающей системы хорошо известен, и можно привести целый ряд конкретных примеров, где этот эффект играет существенную роль. Так, эффективное сечение рассеяния электромагнитных волн на сгустке из N электронов или на атоме, содержащем N электронов, в случае $\lambda \ll a$ пропорционально N , а в случае $\lambda \gg a$ — пропорционально N^2 ¹.

Вопрос о коллективном радиационном затухании также неоднократно обсуждался в литературе и учитывался применительно к различным задачам (см., например, работы³⁻⁸). Имеется, однако, и ряд проблем, связанных с этим эффектом, которые или совсем не обсуждались в литературе, или рассмотрены недостаточно полно. К ним относятся, в частности, вопрос о радиационном затухании в случае неограниченной среды (практически — в случае объемов $V \gg \lambda^3$).

В последнее время были проведены тщательные исследования уширения спектральных линий атомов благородных газов при малых давлениях⁹⁻¹³. Результаты этих исследований истолковываются авторами как свидетельство проявления коллективного радиационного затухания.

На самом деле для подобной интерпретации экспериментальных данных, полученных в работах ⁹⁻¹³, нет достаточных оснований. Проще всего это можно показать, обращаясь к известным свойствам диэлектрической проницаемости разреженных газов $\epsilon(\omega)$, т. е. решая задачу о радиационном затухании в рамках макроскопического подхода. Как будет выяснено в разделе 2, никакого увеличения радиационной ширины, связанного с кооперативным эффектом, в неограниченных средах не происходит.

Используемый в разделе 2 макроскопический подход к интересующей нас задаче в случае больших объемов ($a \gg \lambda$) представляется вполне естественным. В случае же малых объемов ($a \ll \lambda$) ситуация не столь проста. Дело в том, что практически во всех упомянутых выше работах, посвященных кооперативному эффекту, рассмотрение основано на микроскопическом подходе, т. е. на учете взаимодействия через радиационное поле непосредственно в уравнениях движения осцилляторов. Естественно возникает вопрос, содержится ли эффект коллективного радиационного затухания в общей схеме макроскопического описания процессов излучения и рассеяния электромагнитных волн или микроскопическое рассмотрение является принципиально необходимым. Другими словами, можно ли учесть кооперативный эффект, исходя из уравнений макроскопической электродинамики и приписывая веществу в малом объеме ($a \ll \lambda$) те же значения электрической и магнитной проницаемости $\epsilon(\omega)$, $\mu(\omega)$, что и в случае неограниченной среды.

Поставленный вопрос представляет интерес по следующим причинам. Прежде всего, отрицательный ответ на него означал бы, что ряд результатов, полученных путем точного решения уравнений макроскопической электродинамики, таких, например, как теория Ми для рассеяния электромагнитных волн на малых частицах, отражение от слоя толщиной $a \ll \lambda$ и т. п., нуждается в уточнении.

С другой стороны, микроскопический подход неизбежно связан с рассмотрением конкретных моделей. Так, например, все известные в литературе результаты, касающиеся влияния кооперативного эффекта на спектр излучения малых объемов при тепловом возбуждении, по существу относятся к случаю одной изолированной спектральной линии, соответствующей переходам между невырожденными уровнями. Сказанное относится и к известной работе Дике ⁴, содержащей наиболее полное рассмотрение различных проявлений радиационной связи.

Основным содержанием настоящей статьи является сопоставление микроскопического и макроскопического описаний эффекта радиационной связи в малых и больших объемах. Все рассмотрение ограничивается такими условиями, когда вещество находится в состоянии термодинамического равновесия или когда излучение обусловлено тепловым возбуждением. Поэтому мы совершенно не касаемся других аспектов теории кооперативного эффекта таких, например, как радиационное эхо (см. ^{4, 14}). Применительно к рассматриваемым условиям показывается, что макроскопический подход позволяет дать полное описание кооперативных эффектов. Больше того, в рамках этого подхода выясняются границы применимости тех приближений, которые фактически приходится делать при микроскопическом рассмотрении.

2. РАДИАЦИОННОЕ ЗАТУХАНИЕ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ СРЕДАХ

Теорию коллективного радиационного затухания, развитую в работе ⁴ для систем с линейными размерами $a \ll \lambda$, не удастся непосредственно обобщить для случая неограниченных сред. Вместе с тем вопрос о возможности проявления этого эффекта возникает в целом ряде физических проб-

лем. Так, например, в серии работ Куна, Вогана и Льюиса, выполненных за последние годы⁹⁻¹³, было проведено детальное исследование уширения ряда спектральных линий атомов благородных газов. Зависимость ширины от плотности оказалась в очень хорошем согласии с теорией ударного уширения. Вместе с тем для очень малых плотностей эти исследования привели к несколько неожиданному результату. Радиационные ширины ряда линий, полученные в результате экстраполяции измеренных ширин к нулевой плотности, оказались отличными от теоретических или определенных другими методами. В качестве возможной причины обнаруженных расхождений авторы указывают кооперативный эффект¹⁵. При этом авторы опираются на соображения, аналогичные тем, что обсуждались выше, в разделе 1, применительно к случаю малых объемов ($V \ll \lambda^3$), а также на результаты работы⁷. В этой работе вычислена константа радиационного затухания γ , соответствующая $p \rightarrow s$ -переходу в системе из двух атомов при произвольном межатомном расстоянии R . В начальный момент $t = 0$ один атом находится в p -состоянии, а второй в s -состоянии. Константа затухания γ зависит от проекции момента m возбужденного атома на ось z , направленную вдоль вектора $\mathbf{R}$. В случае $m = 0$

$$\gamma_\sigma = \gamma_0 \{1 + [3/(kR)^3] (\sin kR - kR \cos kR)\}.$$

При $m = \pm 1$

$$\gamma_\pi = \gamma_0 \{1 + [3/2 (kR)^3] (-\sin kR + kR \cos kR + (kR)^2 \sin kR)\}.$$

С уменьшением R константы $\gamma_\sigma, \pi \rightarrow 2\gamma_0$. При увеличении R γ_π отличается от γ_0 на величину порядка $\gamma_\pi - \gamma_0 \sim (\sin kR/kR) \gamma_0$, т. е. эта разность убывает крайне медленно. С этим обстоятельством и связаны в первую очередь трудности обобщения результатов работы⁷ на случай газа в большом объеме, поскольку нельзя ограничиться учетом взаимодействия лишь с ближайшими соседями.

Наиболее общий подход к указанной проблеме состоит в рассмотрении связи таких характеристик среды, как спектр поглощения и испускания, со свойствами диэлектрической проницаемости среды $\epsilon(\omega)$.

Как известно, и диссипацию электромагнитной энергии в среде, и тепловое излучение среды можно выразить непосредственно через $\epsilon(\omega)$. Зная $\epsilon(\omega)$, можно также определить спектральные коэффициенты Эйнштейна для спонтанного излучения $a_{ik}(\omega)$ на один атом среды (с учетом взаимодействия атомов):

$$\text{Im} \{[\epsilon(\omega) - 1]/[\epsilon(\omega) + 2]\} = (\pi^2/3) (c/\omega)^3 \sum_{i,k} a_{ik}(\omega) [(g_i/g_k) n_k - n_i], \quad (2.1)$$

где g_i, g_k и n_i, n_k — статические веса и заселенности уровней i, k ($E_i > E_k$),

$$\int a_{ik}(\omega) d\omega = A_{ik} = \frac{2\omega^2 e^2}{mc^3} \frac{g_k}{g_i} f_{ki}, \quad (2.2)$$

A_{ik} — интегральный коэффициент Эйнштейна, f_{ki} — сила осциллятора перехода $k \rightarrow i$.

Суммирование в правой части (2.1) распространяется на все возможные переходы, способные дать вклад в рассматриваемую спектральную область. Для изолированной спектральной линии (в случае достаточно малых плотностей) в правой части (2.1) можно сохранить лишь один член. В этом случае частотная зависимость коэффициента $a_{ik}(\omega)$ может быть найдена, если известна функция $\epsilon(\omega)$.

Таким образом, задача вычисления спектра испускания, а тем самым и выяснение вопроса о роли кооперативного эффекта, сводится к вычислению диэлектрической проницаемости. Эта задача неоднократно обсужда-

лась в литературе (см., например, книгу ¹⁶), и это позволяет воспользоваться известными результатами. Однако, прежде чем перейти к обсуждению этих результатов, покажем, что при вычислении $\varepsilon(\omega)$ в микроскопической теории дисперсии радиационное взаимодействие атомов, которое в случае малых объемов ответственно за кооперативный эффект, учитывается полностью.

Рассмотрим опять модель классических осцилляторов. Эта модель позволяет установить все основные черты проявления радиационной связи в малых и больших объемах. Все результаты без труда обобщаются на случай квантовых систем. Уравнение движения i -го осциллятора (т. е. одного из осцилляторов среды) с учетом реакции собственного поля излучения и полей всех остальных осцилляторов, записанное для фурье-компоненты дипольного момента $d_{\omega}^{(i)} = e r_{\omega}^{(i)}$, имеет вид

$$d_{\omega}^{(i)} [-\omega^2 - i\omega(\gamma_0 + \Gamma) + \omega_0^2] = \frac{e^2}{m} \sum_{j \neq i} \text{rot} \text{rot} \frac{e^{\frac{i\omega}{c} |\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|}}{|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|} d_{\omega}^{(j)} + \frac{e^2}{m} \mathbf{E}_{\omega}^{(0)}, \quad (2,3)$$

где $\mathbf{R}_i, \mathbf{R}_j$ — координаты центров инерции осцилляторов, константа Γ характеризует возможные процессы диссипации электромагнитной энергии, обусловленные любыми другими причинами, не отраженными в правой части системы уравнений (2,3).

Если осцилляторы локализованы в объеме $V \ll \lambda^3$, и поэтому для всех значений i, j выполняются условия $(\omega/c) |\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j| \ll 1$, то правую часть (2,3) можно разложить в ряд по степеням $(\omega/c) |\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|$. Оставив в этом разложении лишь первый не исчезающий член, что как раз и соответствует учету сил радиационного трения в приближении (1,1)

$$\text{rot} \text{rot} \frac{e^{\frac{i\omega}{c} |\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|}}{|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|} d_{\omega}^{(j)} \simeq i \frac{2}{3} \left(\frac{\omega}{c} \right)^3 d_{\omega}^{(j)}, \quad (2,4)$$

получим

$$d_{\omega}^{(i)} [-\omega^2 - i\omega\Gamma + \omega_0^2] = i\omega\gamma_0 \mathbf{D}_{\omega} + \frac{e^2}{m} \mathbf{E}_{\omega}^{(0)}, \quad (2,5)$$

где $\mathbf{D}_{\omega}$ — фурье-компонента полного дипольного момента системы. Просуммировав (2,5) по всем N осцилляторам системы, найдем

$$\mathbf{D}_{\omega} [-\omega^2 - i\omega(N\gamma_0 + \Gamma) + \omega_0^2] = N(e^2/m) \mathbf{E}_{\omega}^{(0)}. \quad (2,6)$$

Это уравнение, так же как и (1,3), содержит коллективную радиационную ширину.

Напомним теперь, каким образом с помощью системы (2,3) можно вычислить диэлектрическую проницаемость $\varepsilon(\omega)$ (см. по этому поводу ¹⁶). Рассмотрим уравнение (2,3) без внешнего поля. Усредним правую часть уравнения (2,3) по координатам осцилляторов $\mathbf{R}_j$, предполагая, что каждый из осцилляторов с равной вероятностью может оказаться в любой точке пространства, независимо от местоположения других осцилляторов, в том числе осциллятора i . При этом

$$\sum_{j \neq i} = \lim_{V \rightarrow \infty} (N-1) \frac{1}{V} \int_{\delta} d\mathbf{R}_j \text{rot}_{\mathbf{R}_i} \text{rot}_{\mathbf{R}_i} \frac{e^{\frac{i\omega}{c} |\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|}}{|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|} d_{\omega}(\mathbf{R}_j), \quad (2,7)$$

где $N = nV$, n — концентрация осцилляторов; символ δ у интеграла означает, что интегрирование должно проводиться по области $|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j| > \delta \rightarrow 0$.

Воспользовавшись, далее, соотношением (см. ¹⁶)

$$\int d\mathbf{R}' \operatorname{rot}_{\mathbf{R}} \operatorname{rot}_{\mathbf{R}} \frac{e^{\frac{i\omega}{c}|\mathbf{R}-\mathbf{R}'|}}{|\mathbf{R}-\mathbf{R}'|} d_{\omega}(\mathbf{R}') = \operatorname{rot}_{\mathbf{R}} \operatorname{rot}_{\mathbf{R}} \int d\mathbf{R}' \frac{e^{\frac{i\omega}{c}|\mathbf{R}-\mathbf{R}'|}}{|\mathbf{R}-\mathbf{R}'|} d_{\omega}(\mathbf{R}') - \frac{8\pi}{3} d_{\omega}(\mathbf{R}),$$

получим интегральное уравнение для $d_{\omega}(\mathbf{R})$:

$$d_{\omega}(\mathbf{R}) = n\alpha_0 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \int d\mathbf{R}' \frac{e^{\frac{i\omega}{c}|\mathbf{R}-\mathbf{R}'|}}{|\mathbf{R}-\mathbf{R}'|} d_{\omega}(\mathbf{R}') - \frac{8\pi}{3} n\alpha_0 d_{\omega}(\mathbf{R}); \quad (2,8)$$

здесь α_0 — поляризуемость одного изолированного осциллятора

$$\alpha_0 = (e^2/m) [\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega(\gamma_0 + \Gamma)]^{-1}. \quad (2,9)$$

Если искать решение уравнения (2,8) в виде плоских волн $d_{\omega}(\mathbf{R}) \propto e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}}$, то нетрудно получить дисперсионное уравнение, связывающие $\mathbf{k}$ и ω :

$$1 = n\alpha_0 \frac{4\pi\kappa^2}{\kappa^2 - (\omega/c)^2} - \frac{8\pi}{3} n\alpha_0. \quad (2,10)$$

Полагая в (2,10) $\kappa^2 = \varepsilon(\omega) \omega^2/c^2 = \varepsilon(\omega) k^2$, находим известную формулу Лорентц — Лоренца для $\varepsilon(\omega)$:

$$(\varepsilon - 1)/(\varepsilon + 2) = (4\pi/3) n\alpha_0 = n(e^2/m) [\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega(\gamma_0 + \Gamma)]^{-1}. \quad (2,11)$$

Формула (2,11) получена для случая идеального газа. Как было показано в работе Климонтовича и Фурсова ¹⁷, в случае произвольной среды радиационное затухание определяется константой

$$\gamma_{\text{рад}} = \gamma_0 \overline{\Delta N^2}/N,$$

где $\overline{\Delta N^2}$ и N — соответственно средняя квадратичная флуктуация и среднее число частиц, находящихся в определенном выделенном в теле объеме. Для идеального газа, как известно, $\overline{\Delta N^2}/N = 1$ и $\gamma_{\text{рад}} = \gamma_0$. Если полностью исключить возможность флуктуаций, положив $\overline{\Delta N^2} = 0$ то, как видно из приведенной выше формулы, радиационное затухание вообще отсутствует:

$$\frac{3}{4\pi} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = n \frac{e^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma} \quad (2,12)$$

Таким образом, в однородной среде изотропных осцилляторов (без флуктуаций) взаимодействие осцилляторов через поле излучения приводит не к увеличению радиационной ширины, как это имеет место в малом объеме, а к полной компенсации радиационного затухания. Этот результат, полученный впервые Мандельштамом ¹⁸, тесно связан с хорошо известным фактом: однородная среда не рассеивает электромагнитных волн.

Наличие флуктуаций приводит к рассеянию, причем в идеальном газе интенсивность рассеяния на флуктуациях плотности оказывается равной сумме интенсивностей рассеяния на каждом из изолированных осцилляторов. Одновременно $\varepsilon(\omega)$ определяется формулой (2,11), т. е. имеет такой вид, как если бы взаимодействие осцилляторов через радиационное поле вообще отсутствовало.

Выше в уравнениях (2,3) не учитывалось движение осцилляторов. Обобщение этих уравнений на случай движущихся осцилляторов не приводит к какому-либо изменению интересующих нас результатов.

Из сказанного выше о связи спектральных коэффициентов Эйнштейна $a(\omega)$ и функции $\varepsilon(\omega)$ следует, что в неограниченной среде никакого уве-

личения радиационной ширины из-за взаимодействия осцилляторов через общее поле излучения не происходит. Радиационная ширина остается точно такой же, как и в случае одного изолированного осциллятора. Таким образом, эффект увеличения радиационного затухания вследствие связи осцилляторов присущ только малым объемам $V \ll \lambda^3$, причем, как будет видно из дальнейшего, этот эффект связан с особенностями рассеяния света на малых объемах.

Что касается аномального поведения ширины линий в спектрах благородных газов при малых плотностях, обнаруженного в работах ⁹⁻¹³, то оно, по-видимому, обусловлено какими-либо другими причинами, не имеющими отношения к кооперативному эффекту (см. ¹⁹).

3. РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА МАЛЫХ ЧАСТИЦАХ. ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Рассмотрим сферический объем V , радиус которого a удовлетворяет условию $a \ll \lambda$, заполненный классическими изотропными осцилляторами *). В соответствии со сказанным выше в разделе 2 дипольные колебания такого объема должны характеризоваться константой радиационного затухания, пропорциональной полному числу осцилляторов $N = nV$ в объеме, что, в принципе, может проявиться в различных радиационных процессах. Рассмотрение подобных эффектов удобно начать с задачи о рассеянии электромагнитных волн.

Если на систему падает внешнее монохроматическое поле с амплитудой E_ω^0 , то уравнение (2,6) для компоненты Фурье полного дипольного момента D_ω принимает вид

$$D_\omega [-\omega^2 - i\omega(N\gamma_0 + \Gamma) + \omega_0^2] = (e^2/m) N E_\omega^0. \quad (3.1)$$

Отсюда легко найти поляризуемость объема α_V :

$$\alpha_V = \frac{e^2}{m} \frac{nV}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega(\Gamma + nV\gamma_0)}. \quad (3.2)$$

Зная поляризуемость α_V , можно далее найти полное эффективное сечение σ_V (обычно называемое сечением ослабления) и эффективное сечение рассеяния σ'_V :

$$\sigma_V = 4\pi k \operatorname{Im} \alpha_V = 6\pi\lambda^2 \frac{nV\gamma_0(nV\gamma_0 + \Gamma)\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2(\Gamma + nV\gamma_0)^2}, \quad (3.3)$$

$$\sigma'_V = \frac{8\pi}{3} k^4 |\alpha_V|^2 = 6\pi\lambda^2 \frac{(nV\gamma_0)^2 \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2(\Gamma + nV\gamma_0)^2}. \quad (3.4)$$

Выразим теперь поляризуемость α_V через диэлектрическую проницаемость ε из (2,12), воспользовавшись, как это обычно делается в теории рассеяния света на малых частицах, той же формулой, что и в случае статического поля ^{20 **}):

$$\alpha_V^{\text{ст}} = \frac{3}{4\pi} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} V = \frac{e^2}{m} \frac{nV}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma}. \quad (3.5)$$

Отличие формул (3,5) и (3,2) состоит как раз в том, что (3,2) содержит коллективную радиационную ширину $nV\gamma_0$. С принципиальной точки зрения это различие весьма существенно. Дело в том, что поляризуемость α_V должна удовлетворять неравенству

$$\operatorname{Im} \alpha_V \geq 2k^3 |\alpha_V|^2 / 3, \quad (3.6)$$

*) Здесь и всюду ниже мы ограничиваемся для простоты рассмотрением немагнитных веществ $\mu = 1$.

**) Необходимо напомнить, что движение частиц, локализованных в объеме $V \ll \lambda^3$, не приводит к доплеровскому уширению спектральных линий, поэтому $\varepsilon(\omega)$ не должно учитывать эффект Доплера.

которое является следствием так называемой оптической теоремы для дипольного рассеяния, связывающей полное сечение с амплитудой рассеяния вперед. Физический смысл (3,6) состоит в том, что полное сечение не может быть меньше сечения рассеяния σ_V (ср. (3,3), (3,4)). Нетрудно проверить, что поляризуемость (3,2) условию (3,6) удовлетворяет, а (3,5) может приводить к противоречию.

Далее, поскольку $\text{Im } \alpha_V \leq |\alpha_V|$, из (3,6) также следует $|\alpha_V| \leq 2k^{-3}/3$. Поэтому

$$\sigma_V \leq 6\pi\lambda^2, \quad \sigma_V \leq 6\pi\lambda^2. \quad (3,7)$$

Величина, стоящая в правой части (3,7), есть известный теоретический предел для сечения дипольного рассеяния. Легко проверить, что сечение рассеяния σ_V , вычисленное с помощью (3,5), этому условию в общем случае также не удовлетворяет. В случае же (3,2) никаких трудностей не возникает.

Рассмотрим поэтому вопрос о вычислении α_V в рамках макроскопической электродинамики несколько подробнее.

Пусть плотность осцилляторов, а следовательно, и ε зависят от координаты R , причем таким образом, что в объеме V $\varepsilon(R) = \text{const} \neq 1$, а вне этого объема $\varepsilon(R)$ плавно, но достаточно быстро стремится к единице. Воспользуемся для решения задачи о рассеянии уравнением Максвелла

$$\text{rot rot } \mathbf{E}_\omega + (\omega^2/c^2) \varepsilon(R) \mathbf{E}_\omega = 0. \quad (3,8)$$

От дифференциального уравнения (3,8) удобно перейти к эквивалентному интегральному уравнению

$$\frac{\varepsilon(R)+2}{3} \mathbf{E}_\omega(R) = \int_V dR' \frac{\varepsilon(R')-1}{4\pi} \text{rot}_R \text{rot}_{R'} \frac{e^{i\frac{\omega}{c}|R-R'|}}{|R-R'|} \mathbf{E}_\omega(R') + \mathbf{E}_\omega^0(R), \quad (3,9)$$

где $\mathbf{E}_\omega^0(R)$ — падающая волна. Обозначим величину, стоящую в левой части (3,9), через $\mathbf{G}_\omega(R)$:

$$\mathbf{G}_\omega(R) = [\varepsilon(R) + 2] \mathbf{E}_\omega(R)/3. \quad (3,10)$$

Вектор $\mathbf{G}_\omega(R)$ удовлетворяет уравнению, которое следует непосредственно из (3,9):

$$\mathbf{G}_\omega(R) = \int_V dR' \frac{3}{4\pi} \frac{\varepsilon(R')-1}{\varepsilon(R')+2} \text{rot}_R \text{rot}_{R'} \frac{e^{i\frac{\omega}{c}|R-R'|}}{|R-R'|} \mathbf{G}_\omega(R') + \mathbf{E}_\omega^0(R). \quad (3,11)$$

Воспользуемся при решении этого уравнения точно таким же приближением, что и при решении системы (2,3), выполнив аналогичное (2,4) разложение подынтегрального выражения

$$\text{rot rot} \left[\frac{e^{i\frac{\omega}{c}|R-R'|}}{|R-R'|} \mathbf{G}_\omega(R') \right] \approx i \frac{2}{3} \left(\frac{\omega}{c} \right)^3 \mathbf{G}_\omega(R'). \quad (3,12)$$

Примем, кроме того, что внутри рассматриваемого объема поле $\mathbf{G}_\omega(R')$ существенно не меняется. Тогда

$$\mathbf{G}_\omega(R) = \frac{\mathbf{E}_\omega^0}{1 - i(3/4\pi)[(\varepsilon-1)/(\varepsilon+2)](2/3)(\omega/c)^3 V}. \quad (3,13)$$

Используя соотношение $\mathbf{d}_\omega = (\varepsilon-1)\mathbf{E}_\omega/4\pi$, а также (3,10) и (3,13), можно выразить $\mathbf{d}_\omega$ и $\mathbf{D}_\omega = V\mathbf{d}_\omega$ через $\mathbf{E}_\omega^0$. Далее, полагая $\mathbf{D}_\omega$ равным $\mathbf{D}_\omega = \alpha_V \mathbf{E}_\omega^0$, находим поляризуемость α_V :

$$\alpha_V = \frac{(3/4\pi)[(\varepsilon-1)/(\varepsilon+2)]V}{1 - i(3/4\pi)[(\varepsilon-1)/(\varepsilon+2)](2/3)(\omega/c)^3 V} = \frac{\alpha_V^{\text{ст}}}{1 - i(2/3)(\omega/c)^3 \alpha_V^{\text{ст}}}. \quad (3,14)$$

Если подставить в эту формулу ϵ из (2,12), то получающееся выражение в точности совпадает с (3,2), т. е. с поляризуемостью объема α_V , вычисленной из микроскопических уравнений (2,3) с учетом эффекта коллективного радиационного затухания.

Таким образом, этот эффект полностью содержится в обычном макроскопическом подходе. То, что вторым членом в знаменателе (3,14) определяется поправка именно на эффект коллективного радиационного затухания, видно также из следующих простых рассуждений. Определив в первом приближении дипольный момент системы с помощью квазистатического приближения $D_\omega = \alpha_V^{ct} E_\omega^{(0)}$, мы можем уточнить это выражение, добавив к E радиационное поле диполя E_ω^{rad} , вычисленное с помощью (1,1):

$$D_\omega = \alpha_V^{ct} [E_\omega + (2/3c^3) \ddot{D}_\omega]. \quad (3,15)$$

Отсюда находим

$$D_\omega = \frac{\alpha_V^{ct}}{1 - i(2/3)(\omega/c)^3 \alpha_V^{ct}} E_\omega, \quad (3,16)$$

т. е. снова приходим к формуле (3,14) *).

Формулы (3,14), очевидно, являются значительно более общими, чем формула (3,2), поскольку вывод этих формул не связан с какой-либо моделью осцилляторов (атомов или молекул) среды. Так, в случае атомного газа вместо (2,12) можно воспользоваться известным выражением для $\epsilon(\omega)$:

$$\frac{3}{4\pi} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{e^2}{m} \sum_{i,k} f_{ik} \left(n_k - \frac{g_k}{g_i} n_i \right) \int \frac{F_{ik}(\omega') d\omega'}{(\omega_{ik} - \omega')^2 - \omega'^2 - i\omega'\Gamma}. \quad (3,17)$$

Функция $F_{ik}(\omega')$ описывает уширение линии, не связанное с диссипацией энергии, т. е. с неупругими столкновениями. Например, функция $F_{ik}(\omega')$ может задавать распределение интенсивности в линии, уширенной вследствие холтсмаркова или вайскопфова механизмов уширения.

Перейдем к выяснению границ применимости полученных формул. Основной вопрос, который при этом возникает, состоит в том, возможна ли вообще такая ситуация, когда эффект коллективного радиационного уширения играет существенную роль и вместе с тем приближение, использованное при выводе (3,14), остается справедливым. Дело в том, что при выводе этих формул фактически пришлось предположить (поле $G_\omega(R')$ выносилось за знак интеграла), что размеры рассматриваемого объема малы не только по сравнению с длиной волны в пустоте $\lambda = c/\omega$, но и по сравнению с длиной волны в среде или глубиной проникновения $\delta \sim \sim (c/\omega) 1/\sqrt{|\epsilon|}$. Поэтому возникает вопрос, не будет ли условие $(2/3) k^3 \alpha_V^{ct} \gg 1$ автоматически приводить к неравенству $\delta < a$, когда само дипольное приближение теряет смысл.

Из формул (3,14) видно, что второй член в знаменателе становится порядка или больше единицы, и одновременно $\delta > a$ при таких значениях ϵ , которые удовлетворяют условиям

$$|(\epsilon - 1)/(\epsilon + 2)| \gg 3(\lambda/a)^2/2, \quad \sqrt{|\epsilon|} < \lambda/a. \quad (3,18)$$

Нетрудно видеть, что эти условия совместимы. Рассмотрим в качестве примера ϵ из (2,12). Первое из этих условий реализуется при выполнении неравенств $|\omega - \omega_0| \leq nV\gamma_0$ и $\Gamma < nV\gamma_0$. Легко проверить, что при этом $\delta \approx \lambda \gg a$. Необходимо, однако, отметить, что при $nV\gamma_0 > \Gamma$ в области частот $|\omega - \omega_0 + \pi\lambda^3\gamma_0| \leq \Gamma$ глубина проникновения δ становится

*) Наше внимание на возможность получения формулы (3,16) из подобных соображений обратил Г. А. Аскарьян.

меньше a . При этом, как известно ^{20, 24}, основную роль начинает играть не электрическое дипольное, а магнитное дипольное рассеяние.

К вопросу о применимости приближения, использованного при выводе (3,14), мы еще вернемся ниже после рассмотрения задачи об отражении электромагнитных волн от тонкого слоя. В этом случае микроскопическое уравнение (2,3) также приводит к появлению коллективной радиационной ширины, а соответствующие макроскопические уравнения Максвелла допускают точное решение в простом аналитическом виде. Вследствие этого оценки границ применимости становятся более наглядными.

Из сказанного выше следует, что необходимым условием проявления кооперативного эффекта является малость диссипативной ширины по сравнению с $nV\gamma_0$. Это условие не является достаточным. Всюду выше мы не учитывали возможности уширения спектральных линий вследствие упругих столкновений и столкновений, сопровождаемых обменом квантом возбуждения (так называемое резонансное уширение, или уширения из-за собственного давления). Очевидно, что кооперативный эффект может проявляться лишь в том случае, если соответствующие ширины Γ' (в общем случае ширина распределения $F(\omega')$ в (3,17)) меньше $nV\gamma_0$.

Оценим прежде всего уширение из-за собственного давления. Для резонансных линий это уширение связано с диполь-дипольным взаимодействием атомов одного сорта. По существу мы были обязаны учесть соответствующие члены во взаимодействии осцилляторов в системе уравнений (2,3), не ограничиваясь лишь первым мнимым членом в разложении (2,4). При этом необходимо было также учесть и движение осцилляторов. Роль диполь-дипольного взаимодействия, однако, хорошо изучена *). В газах не очень большой плотности для атомного перехода с силой осциллятора f оно приводит к уширению

$$\Gamma' \approx (e^2/m\omega_0) fn - (3/2) n\gamma_0 f \lambda^3. \quad (3.19)$$

Для рассматриваемого случая $f \approx 1$ и $V \ll \lambda^3$. Отсюда следует $\Gamma' \gg nV\gamma_0$. Можно показать также, что для любых атомных и молекулярных переходов, электрических дипольных и квадрупольных, а также магнитных дипольных, уширение из-за собственного давления оказывается большим, чем возможное значение коллективной радиационной ширины. Поэтому в газах в той области плотностей, где применима оценка (3,19), кооперативный эффект не может играть какую-либо роль. При повышении плотности ситуация может быть иной. Во всяком случае формула (3,19) заведомо неприменима к конденсированным средам. Поэтому для таких сред неравенство $\Gamma' < nV\gamma_0$, в принципе, может выполняться.

В заключение этого раздела остановимся вкратце на вопросе о тепловом излучении малых объемов. Поскольку выше было показано, что макроскопический подход к задаче рассеяния электромагнитных волн на малых объемах содержит в себе описание кооперативного эффекта, нет никакой необходимости специальным образом учитывать этот эффект при вычислении интенсивности и спектра теплового излучения. Достаточно воспользоваться известными результатами, основанными на теории Ми, и общей теорией равновесных электрических флуктуаций ^{24, 25}.

4. ОТРАЖЕНИЕ ОТ ТОНКОГО СЛОЯ

Рассмотрим нормальное (вдоль оси z) падение волны на однородный слой толщины $a \ll \lambda$. Заменяя в системе уравнений (2,3) суммирование по j интегрированием, можно преобразовать эту систему без каких-либо

*) Наиболее полное рассмотрение содержится в работе ²³.

упрощений к виду (см. также ²⁶).

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_\omega(z) \left[\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{4\pi}{3} n \frac{e^2}{m} - i\omega\Gamma \right] = \\ = i2\pi n \frac{e^2}{m} k \int_0^a e^{ikh|z-z'|} \mathbf{d}_\omega(z') dz' + \frac{e^2}{m} \mathbf{E}_\omega^0 e^{ikhz}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Решая это уравнение в приближении $e^{ikhz} \approx 1$, $e^{ikh|z-z'|} \approx 1$, и приняв, что $\mathbf{d}_\omega(z')$ существенно не меняется на интервале $(0, a)$, получим для $0 \leq z \leq a$

$$\mathbf{d}_\omega \left[\omega_0^2 - \omega^2 - (4\pi/3) n \frac{e^2}{m} - i\omega\Gamma - i\omega 2\pi n a k (e^2/m) \right] = (e^2/m) \mathbf{E}_\omega^0. \quad (4.2)$$

Зная наведенные дипольные моменты каждого из осцилляторов среды (4,2), можно найти поле, создаваемое ими на больших расстояниях от слоя (волновая зона)

$$\mathbf{E}_\omega(z) = i2\pi k n a \mathbf{d}_\omega \begin{cases} e^{ikhz}, & z > a, \\ e^{-ikhz}, & z < a. \end{cases} \quad (4.3)$$

Отсюда легко получить следующие выражения для амплитудных коэффициентов отражения R и пропускания D :

$$R = \frac{2\pi i n a k e^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - (4\pi/3) n (e^2/m) - i\omega [\Gamma + (3/4\pi) n \gamma_0 a k^2]} \quad (4.4)$$

$$D = \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - (4\pi/3) n (e^2/m) - i\omega\Gamma}{\omega_0^2 - \omega^2 - (4\pi/3) n (e^2/m) - i\omega [\Gamma + (3/4\pi) n \gamma_0 a k^2]} \quad (4.5)$$

Таким образом, в данном случае коллективная радиационная ширина оказывается равной $3n\gamma_0 a k^2/4\pi$, т. е. определяется числом частиц в эффективном объеме $3a\lambda^2/4\pi$.

Рассмотрим теперь ту же задачу, исходя из макроскопических уравнений Максвелла. Вместо интегрального уравнения (3.9) в случае рассматриваемой нами одномерной задачи получим

$$\mathbf{E}_\omega(z) = \mathbf{E}_\omega^0 e^{ikhz} + \frac{k}{2i} \int_0^a e^{ikh|z-z'|} \mathbf{E}_\omega(z') [1 - \varepsilon(z')] dz'. \quad (4.6)$$

Решая это уравнение в том же приближении, что и (4,4), найдем поле $\mathbf{E}_\omega(z)$ внутри слоя

$$\mathbf{E}_\omega = \mathbf{E}_\omega^0 [1 + i(ak/2)(1 - \varepsilon)]. \quad (4.7)$$

Для отраженной $\mathbf{E}_\omega^{\text{отр}}$ и прошедшей $\mathbf{E}_\omega^{\text{прош}}$ волн имеем

$$\mathbf{E}_\omega^{\text{отр}} = e^{-ikhz} \frac{k}{2i} \int_0^a e^{ikhz'} \mathbf{E}_\omega(z') [1 - \varepsilon(z')] dz', \quad (4.8)$$

$$\mathbf{E}_\omega^{\text{прош}} = e^{ikhz} \left\{ \mathbf{E}_\omega^0 + \frac{k}{2i} \int_0^a e^{-ikhz'} \mathbf{E}_\omega(z') [1 - \varepsilon(z')] dz' \right\}. \quad (4.9)$$

Отсюда

$$R = -i(ak/2)(1 - \varepsilon)/[1 + i(ak/2)(1 - \varepsilon)]^{-1}. \quad (4.10)$$

$$D = [1 + i(ak/2)(1 - \varepsilon)]^{-1}. \quad (4.11)$$

Для ε из (2,12) формулы (4,10), (4,11) совпадают с (4,4), (4,5), т. е. макроскопический подход опять позволяет полностью учесть эффект коллективного радиационного затухания.

Нетрудно видеть, что выражения (4,10), (4,11) удовлетворяют точным условиям нормировки: сумма отраженного потока, прошедшего потока

и энергии, поглощенной в слое, равна падающему потоку

$$\frac{c}{4\pi} |\mathbf{E}_\omega^0|^2 = \frac{c}{4\pi} |\mathbf{E}_\omega^0|^2 (|R|^2 + |D|^2) + \frac{\omega}{4\pi} \int |\mathbf{E}_\omega(z)|^2 \operatorname{Im} \varepsilon(z) dz. \quad (4,12)$$

Выясним теперь, в каком соотношении находятся формулы (4,10), (4,11) и точные формулы для коэффициентов отражения и пропускания. Для однородного слоя (плоскопараллельная пластинка), как известно²⁰⁻²²,

$$R = r(1 - e^{2ika} V\bar{\varepsilon}) / (1 - r^2 e^{2ika} V\bar{\varepsilon}), \quad (4,13)$$

$$D = (1 - r^2) / (e^{-ika} V\bar{\varepsilon} - r^2 e^{ika} V\bar{\varepsilon}), \quad (4,14)$$

где

$$r = (1 - V\bar{\varepsilon}) / (1 + V\bar{\varepsilon}). \quad (4,15)$$

При $ka \ll 1$ и $ka \sqrt{|\varepsilon|} \ll 1$ выражения (4,13), (4,14) переходят в (4,10), (4,11). Второе из этих условий означает, что глубина проникновения $\delta = \lambda/2\pi \sqrt{|\varepsilon|}$ велика по сравнению с толщиной слоя a . С другой стороны, член $ak(1 - \varepsilon)/2$ в знаменателях (4,10), (4,14) перестает быть пренебрежимо малым по сравнению с единицей, если $|ak/2|(1 - \varepsilon)| \gtrsim 1$.

Таким образом, кооперативный радиационный эффект играет существенную роль и правильно описывается формулами (4,10), (4,11) в области

$$(\lambda/2\pi a) \leq |\varepsilon| \ll (\lambda/2\pi a)^2. \quad (4,16)$$

Авторы признательны В. Л. Гинзбургу за обсуждение работы и ряд замечаний.

Физический институт
им. П. Н. Лебедева АН СССР

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, Физматгиз, 1960.
2. В. Гайтлер, Квантовая теория излучения, М., ИЛ, 1956.
3. В. М. Файн, Я. И. Ханин, Квантовая радиофизика, М., «Сов. радио», 1965.
4. R. H. Dicke, Phys. Rev. **93**, 99 (1954).
5. В. М. Файн, УФН **64**, 273 (1958).
6. Г. А. Аскарьян, Атомная энергия **4**, 71 (1958).
7. D. A. Hutchinson, H. F. Hamerka, J. Chem. Phys. **41**, 2006 (1964).
8. E. A. Power, J. Chem. Phys. **46** (11), 4297 (1967).
9. H. G. Kuhn, J. M. Vaughan, Proc. Roy Soc. **A277**, 297 (1964).
10. H. G. Kuhn, Acta Phys. Pol. **26**, 315 (1964).
11. J. M. Vaughan, Phys. Lett. **21**, 153 (1966); Proc. Roy Soc. **A295**, 164 (1966).
12. H. G. Kuhn, E. L. Lewis, Proc. Roy Soc. **A299**, 423 (1967).
13. J. M. Vaughan, Phys. Rev. **166**, 13 (1968).
14. А. Н. Ораевский, УФН **91**, 181 (1967).
15. H. G. Kuhn, E. L. Lewis, J. M. Vaughan, Phys. Rev. Lett. **15**, 687 (1965).
16. M. Born, E. Wolf, Principles of Optics, Pergamon Press, N.Y., 1959.
17. Ю. Л. Климонтович, В. С. Фурсов, ЖЭТФ **19**, 819 (1949).
18. Л. Н. Мандельштам, Полное собрание трудов, т. 1, М., Изд-во АН СССР, 1957.
19. В. А. Алексеев, А. В. Виноградов, И. И. Собельман, J. Quant. Spectr. Radiat. Transfer. **10**, 55 (1970).
20. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, М., Гостехиздат, 1957.
21. И. Е. Тамм, Основы теории электричества, М., Гостехиздат, 1957.
22. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, М., «Наука», 1967.
23. Ю. А. Вдовин, В. М. Галицкий, ЖЭТФ **52**, 1345 (1967).
24. С. М. Рытов, Теория электрических флуктуаций и теплового излучения, М., Изд-во АН СССР, 1953.
25. М. Л. Левин, С. М. Рытов, Теория равновесных тепловых флуктуаций в электродинамике, М., «Наука», 1967.
26. В. Л. Любошиц, ЖЭТФ **52**, 926 (1967).